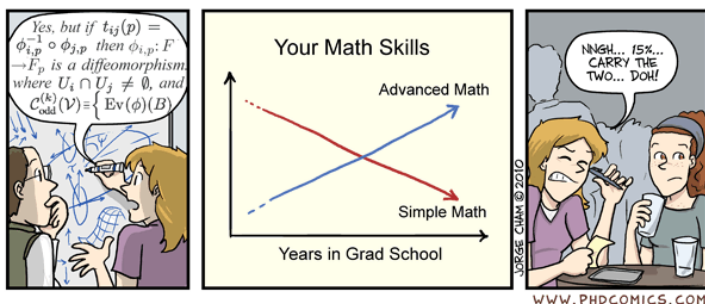


Аннотация

Физика – это бро матана, они вечно в тандемусе. Иногда физика даже обгоняет матан по школьным левелам!!1 Чтобы решать трубь-задачки про бруски, маятники и прочее, надо уметь юзать скиллы типа дифференцируй тут и интегрируй там. На курсе мы станем джедаями матанализа: апгрейдем технику, разберёмся, как с физического на математический перевести, и вообще будем решать мощ-ц-щные штуки.

Будет больно, но весело!



Содержание

Советы для семинаристов	1
1 Функции одной переменной	2
1.1 Примеры функций	2
1.2 Тригонометрические функции	2
1.3 Показательная функция	3
1.4 Логарифм	4
2 Производная	4
2.1 Я-скорость, кчау	4
2.2 Бесконечность не предел!	5
2.3 Основные свойства производной	6
2.4 Число e . Второй замечательный предел.	7
2.5 Первый замечательный предел	8
3 Полезные применения производной	9
3.1 Экстремум	9
3.2 Производная x^2 , x^3 , x^4 ...	10
3.3 Разговор о минимумах и максимумах	11
3.4 Ряд Тейлора, детка	12
4 Интеграл	14
4.1 С чем его едят?	14
4.2 Вновь движемся, вопрос куда...	14
4.3 Интеграл, как площадь под графиком функции	14
4.4 Формула Ньютона-Лейбница	14
4.5 Дждеайство интеграла	14
4.6 Интегрирование по углам	14
5 Колебания и дифференциальные уравнения	14
5.1 Формула Циолковского	14
5.2 Почему Коши оказался в диффурах?	15
5.3 Математический маятник: чем больше тел, тем сложнее путь	16
5.4 Гармонический осциллятор	18
5.5 Фазовая плоскость и фазовая траектория	18
Задачи	20
Функции одной переменной	20
Производная	21

Полезные применения производной. Ряд Тейлора.	22
Интегралы	24
Диффуры, колебания и фазовые портреты	26

Загон	27
--------------	-----------

Советы для семинаристов

Часть этого руководства взята из плана к курсу Никиты Астраханцева (2017 год). Сами же советы были сформулированы Артемом Абановым. Были добавлены некоторые дополнения.

- В начале каждого семинара делать наставления для школьников (2-3 минуты). Рассказать какую-нибудь байку или анекдот.
- Школьники делятся на разные команды (столы) по их уровню знаний. Нужно сделать так, чтобы до школьника было близко идти, чтобы успеть поработать с каждым за вашим столом.
- Готовьтесь к каждому семинару!!! Подумайте над задачами, которые вы можете дать конкретному школьнику, помимо заранее подготовленных. Сделайте это таким образом, чтобы вы их быстро могли вспомнить: сделайте распечатку, перепишите в тетрадь.
- Ваша задача - подобрать задачу уровня, немногим выше уровня школьника, чтобы ему/ей было комфортно, удобно и процесс был продуктивным.
- Если школьник решил задачу, то следует сделать следующее:
 1. Похвалить
 2. Проверить размерность/знак/ответ
 3. Обсудить предельные случаи. Поговорить о физике этих предельных случаев.
- Если задача у школьника вызывает затруднения, то стоит его подбодрить и помочь коротким советом.
- Если затруднения продолжаются, то стоит дать другую задачу, которая подведет к нерешенной задаче.
- Если видите, что школьники устали - рассказать байку/анекдот в тему занятия.
- Всегда старайтесь добиться от школьника физического смысла, заложенного в формулах. Формулы - отражение физики задачи!

1 Функции одной переменной

**FEAR IS THE PATH TO THE
DARK SIDE. FEAR LEADS TO
ANGER, ANGER LEADS TO
HATE, HATE LEADS TO
SUFFERING.**

Yoda

Зачем нам нужны функции? Так исторически сложилось, что физические законы плохо интерпретируемы без использования какого-то вспомогательного аппарата/языка, который позволяет нам записывать эти законы. Функции - это один из таких языков, который позволяет нам записывать законы природы, а также решать задачи, которые возникают в физике. На первом занятии начнем с наиболее простых функций - функций одной переменной.

1.1 Примеры функций

Определение 1.1. Функция f от переменной x - это правило, которое каждому значению x сопоставляет значение $f(x)$.

Каждому x соответствует какое-то значение $y = f(x)$, причем оно единственное. То есть если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2)$.

Упражнение 1. Постройте графики функции $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$. Какой физический закон/формула/что угодно физическое интерпретируется этими зависимостями?

1.2 Тригонометрические функции

Допустим, у нас есть команда школьников, которая получала наряд по вычислению длины окружности радиуса R . Тогда для любого угла φ мы можем определить положение школьников на окружности, которая соответствует этому углу. Эти координаты будут равны:

$$x = R \cos \varphi,$$

$$y = R \sin \varphi.$$

Такие функции называются **тригонометрическими**. С помощью них можно охарактеризовать движение по окружности, колебания и много всего другого.

Понять что они из себя представляют довольно просто, если изобразить окружность единичного радиуса и провести луч, который образует угол φ с положительным направлением оси x . Тогда координаты точки, в которой этот луч пересекает окружность, будут равны $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ (**см. на доску**). Отсюда сразу же следует **основное тригонометрическое тождество**:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Упражнение 2. Постройте графики функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Укажите точки, где функции обращаются в ноль, где у них максимальное/минимальное значение, а также точки, где функции не определены.

Замечание. Тригонометрические функции периодичны, то есть для них выполняется $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Рассмотрим основные формулы приведения тригонометрических функций, которые вам пригодятся (наверняка):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Упражнение 3. Используя формулы приведения, получите:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

1.3 Показательная функция

Определение 1.2. Показательная функция - это функция вида $y = a^x$, где $a > 0$.

Примерами таких функций могут служить $2^x, 5^x, (-1)^x$ и т.д. Если $a > 1$ - функция возрастает, если $a < 1$ - функция убывает. Возникает вопрос: как найти x , при котором $3^x = 4$?

1.4 Логарифм

Для этого вводится функция **логарифма**: $y = \log_a x$, которая является обратной к показательной функции. То есть $x = \log_a y$ - это такое число, что $a^x = y$. Эта функция определена при $a > 0$, $a \neq 1$, и ее область определения - все положительные x . Изи, бро.

Упражнение 4. Нарисовать графики функции $y = \log_a x$ при $a > 1, a < 1$.

Наиболее простым и популярным основанием для этой функции является число $e \approx 2.71828$, которое называется **числом Эйлера**. Тогда функция $\log_e x$ обозначается как $\ln x$ и называется **натуральным логарифмом**. Число e мы поподробнее обсудим на следующей **Ушке**.

Замечание. Принято не работать с логарифмами, основания у которых отличны от e . В таком случае использует свойства логарифма $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

2 Производная

**YOUR FOCUS DETERMINES
YOUR REALITY**

Qui-Gon Jinn

Так как с понятием функции мы уже познакомились, а также обсудили различные виды функций, то можно приступить к их анализу. Например, мы хотим узнать насколько сильно меняется значение какой либо физической величины в какой-либо точке. Прекрасным примером для анализа этого может служить координата.

2.1 Я-скорость, кчау

Пушай Рома Лисин бежит за школьниками в игре "охота на кабанчиков". Зададим его положение функцией $z(t)$ в момент времени t . В момент времени $t + \Delta t$ он прибежал в точку $z(t + \Delta t)$, где $\Delta t > 0$. Тогда **средняя скорость** на отрезке времени $[t, t + \Delta t]$ определяется как:

$$\bar{v}(t, t + \Delta t) = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Где назовем Δz **приращением координаты** z . Теперь если мы устремим Δt к нулю, фиксируя t , то есть запишем это как $\Delta t \rightarrow 0$, тогда получим долгожданную **мгновенную скорость**.

Определение 2.1. Мгновенная скорость в момент времени t - это

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

то есть отношение пути, пройденного за бесконечно малый промежуток времени, к величине этого промежутка с учетом знака.

Зачастую производные каких-либо функций от времени принято обозначать с точкой наверху: \dot{z} . Нетрудно установить, что если $\dot{z} < 0$, то Рома бежит в сторону уменьшения координаты z , если же $\dot{z} > 0$ - в сторону увеличения.

Пример 1. Равномерное движение

$$z(t) = z_0 + vt$$

тогда $\dot{z} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_0 + v(t + \Delta t) - z_0 - vt}{\Delta t} = v = \text{const}$ - постоянная величина.

2.2 Бесконечность не предел!

Углубимся в определение предела. Предельные соотношения не обязательно искать при уменьшении параметра к 0 или увеличении к ∞ . Например, значения функции $y = x^2$ в точке $x = 5$ можно также записать через предел

$$y|_{x=5} = \lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 5^2 = 25$$

Если сильно хочется всегда брать пределы при стремлении к 0, то можно просто сделать замену $x \rightarrow \xi = x - x_0$, где x_0 - то значение, к которому мы стремимся.

Определение 2.2. Предел функции $f(x)$ в точке x_0 - это

$$f(x)|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi + x_0) = f(x_0)$$

Если же необходимо найти предел на ∞ , это также можно сделать, совершив замену $x \rightarrow \zeta = 1/x$.

Пример 2. Найдём предел при $x \rightarrow \infty$ для функции $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

2.3 Основные свойства производной

Для того, чтобы двигаться дальше, необходимо обсудить производные от композиции двух функций.

- Производная суммы/разности**

$$(f \pm g)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) \pm g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f' \pm g'$$

- Производная произведения**

$$\begin{aligned} (fg)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta f + f(x))(\Delta g + g(x)) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f g(x) + \Delta g f(x)}{\Delta x} = f' g + g' f \end{aligned}$$

- Производная частного**

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta f + f(x))g(x) - (\Delta g + g(x))f(x)}{\Delta x(\Delta g + g(x))g(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} g - \frac{\Delta g}{\Delta x} f}{g^2} = \frac{f' g - g' f}{g^2} \end{aligned}$$

- Производная сложной функции**

$$\begin{aligned} (f(g(x)))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g + \Delta g) - f(g)}{\Delta g} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = \\ &= [f(g)]_g' g' \end{aligned}$$

- Производная обратной функции** Потребуем только, чтобы $y = f(x)$ была строго монотонной, то есть если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > < f(x_1)$. Так как между x и f есть однозначное соответствие, то можно ввести функцию $x = g(y)$, то $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$ и наоборот. Тогда

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Укажем **геометрический смысл** производной: если нарисовать график функции $z = z(t)$, то $\dot{z} = \tan \alpha$, где α – угол наклона касательной, проведённой к графику в точке $(t, z(t))$, к оси t .

Пример 3. Равноускоренное движение

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Тогда легко получить $\dot{z} = v_0 + at$, $\ddot{z} = a$, где v_0 – начальная скорость, a – ускорение.

Упражнение 1. Получи, что $(t^n)' = nt^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (подсказка¹)

Упражнение 2. Найди производную функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2.4 Число e . Второй замечательный предел.

Когда мы уже разобрались с тем, что такое производная, то следует поговорить про примечательную функцию, с которой эта производная связана.

Предположим, что мы нашли функцию вида $y = a^x$ производная у которой равна самой же функции, то есть

$$y' = y$$

Пусть это происходит при $a = e$. Так как наше выражение должно быть верно в нуле, тогда

$$(e^x)'|_{x=0} = 1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

Положим $\Delta x = \frac{1}{n}$, $n \gg 1$, тогда с большой точностью получим $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$, где формула точнее с уменьшением Δx . При $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$e = (e^{1/n})^n \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Теорема 2.3. *Второй замечательный предел*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

¹ воспользуйся методом индукции

2.5 Первый замечательный предел

Сразу же запишем исследуемый предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Для доказательства этого утверждения посмотрим необходимый геометрический рисунок.

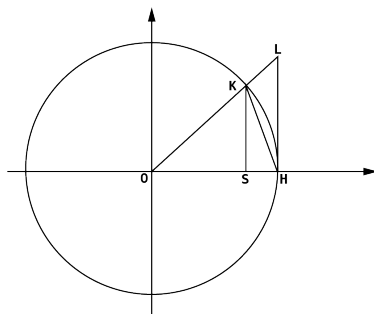


Рис. 1: Первый замечательный предел

Очевидно, что

$$S_{\triangle OSH} < S_{\text{сектор } OKH} < S_{\triangle OHL}$$

Площади треугольников соответственно: $S_{\triangle OSH} = \frac{\sin x}{2}$, $S_{\text{сектор } OKH} = \frac{x}{2}$, $S_{\triangle OHL} = \frac{\tan x}{2}$. Таким образом

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{\cos x}$$

Переходя к пределу

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Таким образом

Теорема 2.4. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3 Полезные применения производной

**IN A DARK PLACE WE FIND
OURSELVES, AND A LITTLE
MORE KNOWLEDGE LIGHTS
OUR WAY.**

Yoda

Производная находит свое применение не просто в поиске точек роста и падения функции, а также в поиске ее минимального и максимального значения. На этом занятии мы разберемся как с помощью производной найти максимум потребляемой мощности в цепи, максимальную дальность полета мяча при броске и много чего другого в других науках, помимо физики.

3.1 Экстремум

Как мы уже поняли, если $z' > 0$, то значение функции растет, если $z' < 0$, то значение функции падает. Однако, если мы попадаем в $z' = 0$, то это может говорить нам о том, что значение функции в данной точке находится на месте смена знака производной (если функция не постоянная, разумеется). То есть мы попали в локальный максимум или минимум этой функции.

Теорема 3.1 (Ферма). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3.2 (достаточное условие экстремума). Пусть функция z дифференцируема в окрестности точки x_0 - точки возможного экстремума. Если слева от этой точки ($x < x_0$) $z' > 0$ (< 0), а справа ($x > x_0$) $z' < 0$ (> 0), то в точка x_0 наблюдается **максимум/минимум**.

Пример 1. Известно, что сумма двух положительных чисел равна 12. Какими должны быть эти числа, чтобы произведение их квадратов было максимальным?

Надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 b^2 \rightarrow \max \end{cases} \Rightarrow f(a, b(a)) \equiv f(a) = a^2(12 - a)^2 = a^4 - 24a^3 + 144a^2$$

Наблюдается экстремум в точке $f'(a) = 4a^3 - 72a^2 + 288a = 4a(a^2 - 18a + 72) = 0 \Rightarrow a^2 - 18a + 72 = 0$. Решение $a_{1,2} = \frac{18 \pm 6}{2} = \{6, 12\}$. А значит

$$4a(a - 6)(a - 12) = 0$$

Анализируя функцию производной, получим что максимум при значениях чисел $a = b = 6$.

3.2 Производная x_2 , x_3 , x_4 ...

Как вы можете заметить, функцию $f'(x)$ можно дифференцировать далее. Мотивировать нас делать это можно тем, что в некоторых случаях это позволяет нам найти более точные значения экстремумов функции.

Теорема 3.3 (достаточное условие экстремума через 2-ю производную). Пусть функция f непрерывна и дважды дифференцируема в точке x_0 . Тогда при условии

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \quad (> 0)$$

в точке x_0 наблюдается локальный **максимум/минимум** функции f .

Если же функция дифференцируема большее число раз, то мы можем использовать n -ю производную для нахождения экстремума функции.

Теорема 3.4 (достаточное условие экстремума через n -ю производную). Пусть функция f непрерывна и n -кратно дифференцируема в точке x_0 . Тогда при условии

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) < 0 \quad (> 0)$$

в точке x_0 наблюдается локальный **максимум/минимум** функции f .

Упражнение 1. Решить предыдущую задачу через вторую производную.

Пример 2. Найти n -ю производную функции $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Так как $y = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$, то можно просто исследовать взятие производной каждого слагаемого

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1) \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-1)} = (-1)^2 \cdot 2 \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-2)} = \dots = (-1)^n \cdot n! \cdot (x-1)^{-n}$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1) \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)} = (-1)^2 \cdot 2 \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-2)} = \dots = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-n}$$

тогда получим ответ

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+1)^n} \right)$$

3.3 Разговор о минимумах и максимумах

Теперь мы набили руку в взятии производных, поиске экстремумов и даже в нахождении n -й производной функции. Теперь приступим к самому интересному - поиску минимумов и максимумов в физике. Но перед физиков разонмемся на геометрии.

Пример 3 (Задача Евклида). В данный треугольник ABC вписать параллелограмм $ADEF$ ($EF \parallel AB$, $DE \parallel AC$) наибольшей площади.

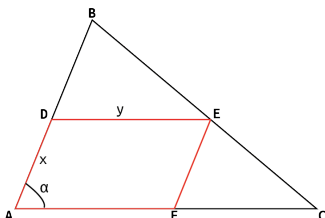


Рис. 2: Задача Евклида

Пусть $x = AD$, $y = AF$, $\alpha = \angle DAF$. Выпишем площадь параллелограмма: $S_{ADEF} = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$. Площадь $\triangle ABC$ можно выразить несколькими способами

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = S_{ABC} = S_{ADEF} + \frac{1}{2}(AB - x)y \sin \alpha + \frac{1}{2}(AC - y)x \sin \alpha$$

Тогда получим задачу

$$\begin{cases} AB \cdot y + AC \cdot x = AB \cdot AC \\ xy \rightarrow \max \end{cases}$$

Нужно найти максимум функции $f(x) = -x^2 \frac{AC}{AB} + AC \cdot x$ (узнали задачу?). Решаем

$$f'(x) = -2x \frac{AC}{AB} + AC = 0 \Rightarrow x = \frac{AB}{2}, y = \frac{AC}{2}$$

Таким образом мы решили задачу Евклида и нашли, что параллелограмм наибольшей площади вписан в треугольник, если его стороны равны половине сторон треугольника.

Finally, физика!

Пример 4. Тело массой m , находящееся на горизонтальной поверхности, испытывает действие постоянной по модулю силы F . Угол α между вектором

силы и горизонтом можно изменять. Определить максимально возможное ускорение тела. Коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ .

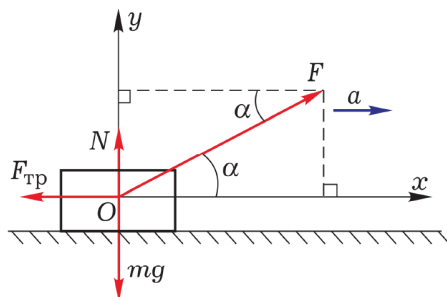


Рис. 3: Рисунок к задачке

Второй закон Ньютона в проекции по осям

$$OX : \quad F \cos \alpha - \mu N = ma$$

$$OY : \quad F \sin \alpha + N - mg = 0$$

Ускорение $a = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g$. Приравняем к нулю производную по углу

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{F}{m}(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 0 \Rightarrow \tan \alpha_0 = \mu$$

А значит

$$a_{\text{max}} = \frac{F}{m}\sqrt{1 + \mu^2} - \mu g$$

почему это максимум?

3.4 Ряд Тейлора, детка

Зачастую значение функции приходится считать приближенно в какой-либо точке x_0 в рамках заданных условий задачи. Например, в задачах геометрической оптики используют приближение малых углов отклонения. Исследовать поведение функции в окрестности точки x_0 можно с помощью ряда Тейлора.

Определение 3.5. Ряд Тейлора n раз непрерывно-дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 - это ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ - остаточный член, который стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$.

Распишем основные функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$. Такое разложение вблизи 0 **рядом Маклорена**:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \approx 1 + x$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \approx x - \frac{x^3}{3}$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

Пример 5 (Формула Эйлера). Докажем одну из самых красивых формул математики

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Разложим экспоненту в ряд Маклорена

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \{i^2 = -1, i^3 = -i, \dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \cos x + i \sin x$$

Эта формула будет встречаться во множестве физических задач, особенно в квантовой механике, где она используется для описания волновых функций частиц.

4 Интеграл

4.1 С чем его едят?

4.2 Вновь движемся, вопрос куда...

4.3 Интеграл, как площадь под графиком функции

4.4 Формула Ньютона-Лейбница

4.5 Джедайство интеграла

4.6 Интегрирование по углам

5 Колебания и дифференциальные уравнения

**MAY THE FORCE BE WITH
YOU.**

Everybody from SW.

Перейдем к кульминации всего курса - составлению дифференциальных уравнений (уравнения на функцию, где фигурирует ее производная), которые являются неотъемлемой частью познания физических законов. Не будем перегонять из пустого в порожнее!

5.1 Формула Циолковского



Рис. 4: Уравнение Циолковского на марке

Рассмотрим движение ракеты в космосе. Сначала пренебрежём всеми внешними силами, действующими на ракету. Основными параметрами, характеризующими ракету и её двигатель, являются: u_0 – скорость истечения газов из сопла ракеты относительно корпуса ракеты, для простоты считаем её постоянной, M_0 – исходная масса ракеты с горючим, M_k – конечная масса ракеты после выгорания всего горючего.

Ракета имеет скорость v , массу M в момент времени t . Выбрасывается топливо массы ΔM со скоростью u_0 . Импульс сохраняется, тогда

$$Mv = (M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M(v + u_0)$$

Тогда получим дифференциального уравнение 1-го порядка (фигурирует производная 1-ой степени)

$$M\Delta v = -\Delta M u_0 \Rightarrow v(t) = -u_0 \int_{M_0}^{M_k} \frac{dM}{M}$$

Этот сделан предварительно перейдя к дифференциалам. Итого

$$v = u_0 \ln\left(\frac{M_0}{M_k}\right)$$

Таким образом, скорость ракеты увеличивается с уменьшением массы ракеты!!! Именно поэтому мы грузим топливо в ракеты, а не просто запускаем их из, например, рогатки.

5.2 Почему Коши оказался в диффурах?

Теперь зададимся вопросом - почему дифференциальные уравнения (вообще любые) имеют решения при должном числе условий, наложенных на функцию? Оказывается, что ответ на этот вопрос был дан довольно-таки давно. Задачи, где дано дифференциальное уравнение и условие на функцию, называют *задачами Коши*. Например, уравнение Циолковского

$$\begin{cases} \frac{dv}{dM} = -\frac{u_0}{M} \\ v(M = M_0) = 0 \end{cases}$$

Так оказывается, что такие задачи **всегда** имеют решение!

Теорема 5.1. (Теорема о разрешимости задачи Коши) Пусть есть поставленная задача Коши на отрезке

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in (x_0, a] \\ y'(x_0) = y^0 \end{cases}$$

Тогда, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет (...куча условий ...), то решение существует и единственно.

Подробнее об этом вам расскажут в университете, поэтому на этом мы внимание заострять не будем. Зато теперь мы решаем дифференциальные уравнения законно!

5.3 Математический маятник: чем больше тел, тем сложнее путь

Теперь попробуем решить задачу для колебания математического маятника.

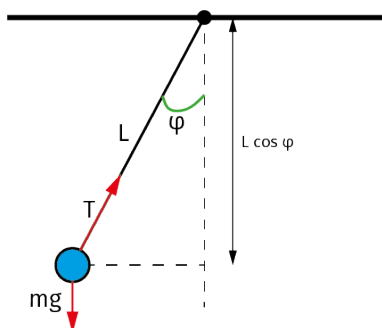


Рис. 5: Математический маятник.

Поступим следующим образом: запишем полную энергию системы а потом уже найдем силу, действующую на груз. Сначала перейдем к углу отклонения ϕ и выразим все через него. Таким образом

$$y = -L \cos \phi, \quad x = L \sin \phi$$

Полная энергия системы равна

$$W = \frac{mL^2 \dot{\phi}^2}{2} - mgL \cos \phi$$

Теперь запишем теорему, которая нам пригодится

Теорема 5.2. (Связь силы и поля) Равнодействующая всех сил, действующих на систему, связаны с потенциальной энергией U следующим соотношением

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

где значок ∇ - называется **наблой**, и под собой подразумевает $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$

Доказательство. Так как $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$, а $dA = -dU$, то

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \Rightarrow F_{\alpha_i} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_i}, \alpha_i = x, y, z$$

И тогда $\vec{F} = -\nabla U$

□

Так как мы ”сидим” в угловых координатах, то изменение положения маятника будет происходить по дуге. Тогда

$$ma_{\text{ч.с.}} = ml\ddot{\phi} = -\frac{\partial U}{L\partial\phi} = mg\frac{\partial \cos\phi}{\partial\phi} = -mg \sin\phi$$

Таким образом

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin\phi$$

Если воспользоваться допущением, что угол отклонения ϕ мал, то мы получим

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0, \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Решением такого дифференциального уравнения являются гармонические функции

$$\phi(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

где A и B можно найти из начальных условий.

Данную задачу можно было решить по другому, если бы мы спроецировали силу тяжести на ось, перпендикулярную нити

$$ma_{\tau} = ml\ddot{\phi} = -mg \sin\phi$$

5.4 Гармонический осциллятор

Рассмотрим еще один известнейший маятник - пружинный.



Рис. 6: Пружинный маятник.

Запишем второй закон Ньютона при отклонении на малую величину x

$$m\ddot{x} = (kx_0 - k(x + x_0)) = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Давайте запишем полную энергию маятника

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Упражнение 1. Получи дифференциальное уравнение для колебаний способом, как для математического маятника.

Как ты видишь, теперь у нас есть возвращающая сила в системе (сила упругости), которая пропорциональна отклонению. Оказывается, что такое поведение характерно для очень многих систем, особенно в акустических и иных средах, где молекулы начинают колебаться относительно положения равновесия.

Также, предметом изучения может служить в рамках гармонического осциллятора могут служить поведения вакуума и света в различных средах, но это уже вопросы квантовой механики, о которых мы не рассказываем в этом курсе.

5.5 Фазовая плоскость и фазовая траектория

Определение 5.3. Фазовая траектория - график импульса от координаты (1D случай).

Попробуем вообразить как фазовая плоскость будет выглядеть для разных задач.

Пример 1. (Пружинный маятник) Для него мы только что получили значение координаты

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Импульс же

$$p = m\dot{x} = -Am\omega \sin(\omega t + \phi_0)$$

Но таким образом

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(Am\omega)^2} = 1$$

А это уравнение эллипса! Это означает, что для гармонических колебаний фазовая траектория замкнутая и имеет эллиптическую форму. Это действительно должно быть так, так как полная энергия системы сохраняется и переход из потенциальной в кинетическую. То же самое будет изображено на фазовой траектории.

Упражнение 2. Нарисовать фазовую траекторию математического маятника (с приближением малых углов и без него).

Если успеем, то расскажу еще про колебания с затуханием + фазовый портрет.

Задачи

Функции одной переменной

1. По графику квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ определить знаки коэффициентов.
2. Упростить выражения:
 - (a) $\cos(x - y) - \sin x \sin y$
 - (b) $\frac{1}{2} \cos x - \sin(\frac{\pi}{6} + x)$
3. Построить графики функций:
 - (a) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$
 - (b) $y = \tan(x + \frac{\pi}{3})$
 - (c) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
 - (d) $y = \log_2 x$
 - (e) $y = \log_3(x - 1)$
 - (f) $y = \log_{10}(x + 2)$
4. Докажите тождество: $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)} + \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan(\alpha - \beta)} = 2$
5. Пользуясь только определением логарифмической функции, вычислить:
 - (a) $\log_2 256$
 - (b) $\log_4(2^{2002})$
 - (c) $\log_3(27^{15})$
 - (d) $\log_{27}(3^{99})$
 - (e) $\ln(e^{2003})$
 - (f) $2^{\log_2 5}$
 - (g) $e^{\ln 2003}$
 - (h) и т.д.
6. * Доказать формулу $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ для любых $a, b, x > 0$, $a \neq 1, b \neq 1$.
7. * Доказать, что $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ при $a > 0, a \neq 1, x > 0, x \neq 1$.
8. ** Натуральный логарифм числа x можно приближённо вычислить, даже если на калькуляторе нет кнопок, кроме кнопки извлечения квадратного корня: надо десять раз нажать на эту кнопку, из результата вычесть единицу, а разность умножить на 1024. Попробуйте объяснить, почему этот способ работает, если число x не слишком большое и не слишком близко к нулю.

Производная

1. По графику функции $y = f(x)$ нарисуй график функции ее производной $y = f'(x)$ (см. вниз¹)
2. Найди производные функций по определению, используя предел:
(а) $y(x) = C = \text{const}$ (d) $y(x) = x^3$ в точке $x = 5$
(b) $y(x) = x$ (e) $y(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$
(с) $y(x) = x^2 + 10$ в точке $x = 3$ (f) $y(x) = \sqrt{x}$
3. Вычисли производные:
(а) $y(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}$ (e) $y(x) = e^{2x} \sin x$
(b) $y(x) = \sin x - \cos x$ (f) $y(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$
(с) $y(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ (g) $y(x) = \sin x \cos x \cdot x$
(d) $y(x) = \cos^2 x \cdot x^2$ (h) $y(x) = \sin[\sin[\sin x]]$
4. Найди производную функций $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (см. вниз²). Каким соотношением связаны $f(x)$ и $g(x)$? Какое значение принимает $f(0)$ и $g(0)$? Какое значение принимают производные этих функций в нуле?
5. Напиши формулы, задающие координаты точки, равномерно движущейся по окружности, как функции времени. Найти производные этих функций. Что характеризуют эти производные? Как увидеть из полученных формул, что скорость движения направлена по касательной к окружности?
6. Найди ток в цепи с зарядом $q = A \cos(\alpha e^{-\omega t})$. Когда этот ток максимален?
7. * Покажи, что $\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{1/n} - 1)$

¹придумай график сам и нарисуй

²такие функции называются **гиперболическими**

Полезные применения производной. Ряд Тейлора.

Полезные применения производной

1. Точка A движется согласно уравнениям $x_1 = 2t$, $y_1 = t$, а точка B – согласно уравнениям $x_2 = 10 - t$, $y_2 = 2t$ (x, y – в метрах, t – в секундах). Определить расстояние S между этими точками в момент их максимального сближения. Оба движения в одной плоскости, – координаты точек в прямоугольной системе координат в этой плоскости
2. К источнику электрической энергии с ЭДС E и внутренним сопротивлением r подключён реостат. Какую наибольшую тепловую мощность можно получить на внешнем участке цепи?
3. С какой наименьшей скоростью надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой H с расстояния S от дома?
4. Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l . Требуется найти на l такую точку D , чтобы сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей.
5. * Две среды разделены плоской границей. Луч света, идущий из точки, лежащей по одну сторону границы, в точку, лежащую по другую сторону, избирает путь, требующий наименьшего времени. Что это за путь, если скорость движения в указанных средах равна v_1 и v_2 соответственно?
6. * Вписать в круг единичного радиуса прямоугольник наибольшей площади.
7. * Ядро, летящее со скоростью v , распадается на два одинаковых осколка. Определите максимальный возможный угол α между скоростями одного из осколков и вектором v , если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость $u < v$.
8. * Полуцилиндрическое зеркало поместили в широкий пучок света, идущий параллельно плоскости симметрии зеркала. Найдите максимальный угол между лучами в отраженном от зеркала пучке (угол расхождения).
9. ** Автомобиль с колёсами радиусом R движется без проскальзывания по горизонтальной дороге со скоростью v . На какую максимальную высоту над поверхностью земли поднимутся капли грязи, отрывающиеся от колёс?

10. * * * Снаряд вылетает из пушки со скоростью V под углом α к горизонту. Какое время снаряд приближается к пушке?

Ряд Тейлора

1. Разложи в ряд Маклорена функции $f(x)$
 - (a) $f(x) = e^{-x}$ до члена с x^n
 - (b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ до члена с x^5
 - (c) $f(x) = x \sin x$ до члена с x^n
 - (d) $f(x) = \sqrt{1+x}$ до члена с x^n
 - (e) $f(x) = \ln(1+x)$ до члена с x^n
 - (f) $f(x) = (1+x)^a$ до члена с x^n
2. * На боковую грань прозрачной призмы с малым преломляющим углом ϕ падает луч света. Считая угол падения также малым, найдите угол отклонения луча, вышедшего из призмы (то есть угол δ между вышедшим лучом и первоначальным). Показатель преломления материала призмы равен n .

Интегралы

1. Вычислите интеграл $\int x \, dx$ не беря первообразную.

2. Вычислите определённые интегралы:

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt$

(e) $\int_1^2 \sqrt[3]{x} \, dx$

(b) $\int_2^8 t^4 \, dt$

(f) $\int_0^{\pi/2} \sin(2025x) \, dx$

(c) $\int_5^{10} \frac{1}{t} \, dt$

(g) $\int_1^2 e^x \, dx$

(d) $\int_{-4}^4 |x| \, dx$

(h) $\int_2^4 2^x \, dx$

3. Вычислите определённые интегралы:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{25} t \, dt$

(b) $\int_0^{\pi} \cos^9 t \, dt$

4. Вычислите интеграл: $\int x \sin(x) \, dx$

5. Вычислите неопределённые интегралы:

(a) $\int \frac{3-x^2}{3+x^2} \, dx$

(e) $\int 3^x \cdot 5^x \, dx$

(b) $\int \frac{dx}{(2+3x)^{20}}$

(f) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} \, dx$

(c) $\int \frac{3x+2}{2x+3} \, dx$

(g) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(d) $\int \sqrt{1+\sin 2x} \, dx$

(h) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

6. Вычислите определённые интегралы:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{25} t \, dt$

(b) $\int_0^{\pi} \cos^9 t \, dt$

7. Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

(a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \geq a^2$

(b) $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, \quad x \geq 0, y \geq 0.$

8. Найдите площадь круга $x^2 + y^2 = r^2$

- (а) Интегрируя по кольцам малой толщины
 (б) Интегрируя по полоскам, перпендикулярным оси x

9. Найдите площадь эллипса несколькими способами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$.

10. Зная значения интеграла Пуассона, вычислите:

(а) $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$

(с) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

(б) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

(д) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx, n \in \mathbb{N} \cup 0$

11. * Покоящееся тело отпускают с высоты H . Найдите время падения тела. $g = \frac{GM}{r^2}$

12. * Два малых шарика массы m с зарядами q располагаются на горизонтальной гладкой поверхности на расстоянии L . Шарик отпускают. Найдите время, через которое расстояние будет равно $L/2$.

13. * Имеется жидкая планета в форме однородного шара радиуса R и плотности ρ . Найти давление в центре планеты, обусловленное гравитационным притяжением.

14. * В 1866 году Максвелл разработал теорию, которая показывает, как распределены скорости в идеальном газе при равновесии (распределение Максвелла). Вероятность найти частицу со скоростью в интервале $[v, v + dv]$ равна:

$$p(v, v + dv) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT} \right) dv.$$

Где m - масса частиц, T - температура газа, k - константа Больцмана. Найти:

1) Наиболее вероятную скорость

2) Среднюю скорость $\langle v \rangle$

3) Среднеквадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$

4) Оцените количество частиц со скоростью от 499 м/с до 501 м/с в кубическом метре воздуха. Концентрация $n = 3 \cdot 10^{23}$, $T = 273\text{K}$, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Диффуры, колебания и фазовые портреты

Загоночная