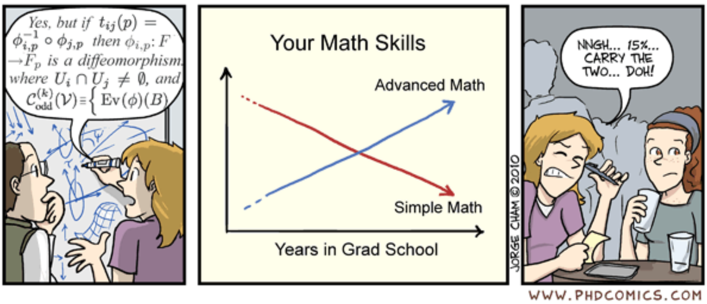
Аннотация

Физика — это бро матана, они вечно в тандемусе. Иногда физика ваще обгоняет матан по школьным левелам!!1 Чтобы решать труЪ-задачки про бруски, маятники и прочее, надо уметь юзать скиллы типа дифференцируй тут и интегрируй там. На курсе мы станем джедаями матанализа: апгрейднем технику, разберёмся, как с физического на математический перевести, и вообще будем решать мощ-щ-щные штуки.

Будет больно, но весело!



Содержание

Советы для семинаристов

Часть этого руководства взята из плана к курсу Никиты Астраханцева (2017 год). Сами же советы были сформулированы Артемом Абановым. Были добавлены некоторые дополнения.

- В начале каждого семинара делать наставления для школьников (2-3 минуты). Рассказать какую-нибудь байку или анекдот.
- Школьники делятся на разные команды (столы) по их уровню знаний. Нужно сделать так, чтобы до школьника было близко идти, чтобы успеть поработать с каждым за вашим столом.
- Готовтесь к каждому семинару!!! Подумайте над задачами, которые вы можете дать конкретному школьнику, помимо заранее подготовленных. Сделайте это таким образом, чтобы вы их быстро могли вспомнить: сделайте распечатку, перепишите в тетрадь.
- Ваша задача - подобрать задачу уровня, немногим выше уровня школьника, чтобы ему/ей было комфортно, удобно и процесс был продуктивным.
- Если школьник решил задачу, то следует сделать следующее:
  1. Похвалить
  2. Проверить размерность/знак/ответ
  3. Обсудить предельные случаи. Поговорить о физике этих предельных случаев.
- Если задача у школьника вызывает затруднения, то стоит его подбодрить и помочь коротким советом.
- Если затруднения продолжаются, то стоит дать другую задачу, которая подведет к нерешенной задаче.
- Если видите, что школьники устали - рассказать байку/анекдот в тему занятия.
- Всегда старайтесь добиться от школьника физического смысла, заложенного в формулах. Формулы - отражение физики задачи!

1 Функции одной переменной

FEAR IS THE PATH TO THE DARK SIDE. FEAR LEADS TO ANGER, ANGER LEADS TO HATE, HATE LEADS TO SUFFERING.

Yoda

Зачем нам нужны функции? Так исторически сложилось, что физические законы плохо интерпретируемы без использования какого-то вспомогательного аппарата/языка, который позволяет нам записывать эти законы. Функции - это один из таких языков, который позволяет нам записывать законы природы, а также решать задачи, которые возникают в физике. На первом занятии начнем с наиболее простых функций - функций одной переменной.

1.1 Примеры функций

Определение 1.1. Функция f от переменной x - это правило, которое каждому значению x сопоставляет значение $f(x)$.

Каждому x соотвествует какое-то значение $y = f(x)$, причем оно единственное. То есть если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2)$.

Упражнение 1. Постройте графики функции $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$. Какой физический закон/формула/что угодно физическое интерпретируется этими зависимостями?

1.2 Тригонометрические функции

Допустим, у нас есть команда школьников, которая получала наряд по вычислению длины окружности радиуса R. Тогда для любого угла φ мы можем определить положение школьников на окружности, которая соответствует этому углу. Эти координаты будут равны:

$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi.$$

Такие фукнции называются **тригонометрическими**. С помощью них можно охарактеризовать движение по окружности, колебания и много всего другого.

Понять что они из себя представляют довольно просто, если изобразить окружность единичного радиуса и провести луч, который образует угол φ с положительным направлением оси x. Тогда координаты точки, в которой этот луч пересекает окружность, будут равны $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ (**см. на доску**). Отсюда сразу же следует **основное тригонометрическое тождество**:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Упражнение 2. Постройте графики функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Укажите точки, где функции обращаются в ноль, где у них максимальное/минимальное значение, а также точки, где функции не определены.

Замечание. Тригонометрические функции периодичны, то есть для них выполняется $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Рассмотрим основные формулы приведения тригонометрических функций, которые вам пригодятся (наверняка):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Упражнение 3. Используя формулы приведения, получите:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$
$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

1.3 Показательная функция

Определение 1.2. Показательная функция - это функция вида $y = a^x$, где $a > 0$.

Примерами таких функций могут служить $2^x, 5^x, (-1)^x$ и т.д. Если $a > 1$ - функция возрастает, если $a < 1$ - функция убывает. Возникает вопрос: как найти x, при котором $3^x = 4$?

1.4 Логарифм

Для этого вводится функция **логарифма**: $y = \log_a x$, которая является обратной к показательной функции. То есть $x = \log_a y$ - это такое число, что $a^x = y$. Эта функция определена при $a > 0$, $a \neq 1$, и ее область определения - все положительные x.

Упражнение 4. Нарисовать графики функции $y = \log_a x$ при $a > 1, a < 1$.

Наиболее простым и популярным основанием для этой функции является число $e \approx 2.71828$, которое называется **числом Эйлера**. Тогда функция $\log_e x$ обозначается как $\ln x$ и называется **натуральным логарифмом**. Число e мы поподробнее обсудим на следующей **Ушке**.
Замечание. Принято не работать с логарифмами, основания у которых отличны от e. В таком случае использует свойства логарифма $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

2 Производная

YOUR FOCUS DETERMINES YOUR REALITY

Qui-Gon Jinn

Так как с понятием функции мы уже познакомились, а также обсудили различные виды функций, то можно приступать к их анализу. Например, мы хотим узнать насколько сильно меняется значение какой либо физической величины в какой-либо точке. Прекрасным примером для анализа этого может служить координата.

2.1 Я-скорость, кчау

Пускай Рома Лисин бежит за школьниками в игре ”охота на кабанчиков”. Зададим его положение функцией $z(t)$ в момент времени t. В момент времени $t + \Delta t$ он прибежал в точку $z(t + \Delta t)$, где $\Delta t > 0$. Тогда **средняя скорость** на отрезке времени $[t, t + \Delta t]$ определяется как:

$$\overline{v}(t, t + \Delta t) = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Где назовем Δz **приращением координаты** z. Теперь если мы устремим Δt к нулю, фиксируя t, то есть запишем это как $\Delta t \to 0$, тогда получим долгожданную **мгновенную скорость**.

Определение 2.1. Мгновенная скорость в момент времени t - это

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

то есть отношение пути, пройденного за бесконечно малый промежуток времени, к величине этого промежутка с учетом знака.

Зачастую производные каких-либо функций от времени принято обозначать с точкой наверху: $\dot{z}$. Нетрудно установить, что если $\dot{z} < 0$, то Рома бежит в сторону уменьшения координаты z, если же $\dot{z} > 0$ - в сторону увеличения.

Пример 1. Равномерное движение

$$z(t) = z_0 + vt$$

тогда $\dot{z} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{z_0 + v(t+\Delta t) - vt}{\Delta t} = v = const$ - постоянная величина.

2.2 Бесконечность не предел!

Углубимся в определение предела. Предельные соотношения не обязательно искать при уменьшении параметра к 0 или увеличении к ∞. Например, значения функции $y = x^2$ в точке $x = 5$ можно также записать через предел

$$y|_{x=5} = \lim_{x \to 5} x^2 = 5^2 = 25$$

Если сильно хочется всегда брать пределы при стремлении к 0, то можно просто сделать замену $x \to \xi = x - x_0$, где x_0 - то значение, к которому мы стремимся.

Определение 2.2. Предел функции $f(x)$ в точке x_0 - это

$$f(x)|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\xi \to 0} f(\xi + x_0) = f(x_0)$$

Если же необходимо найти предел на ∞, это также можно сделать, совершив замену $x \to \zeta = 1/x$.

Пример 2. Найдем предел при $x \to \infty$ для функции $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

2.3 Основные свойства производной

Для того, чтобы двигаться дальше, необходимо обсудить производные от композиции двух функций.

- **Производная суммы/разности**

$$(f \pm g)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) \pm g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f' \pm g'$$

- **Производная произведения**

$$(fg)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta f + f(x))(\Delta g + g(x)) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f g(x) + \Delta g f(x)}{\Delta x} = f' g + g' f$$

- **Производная частного**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta f + f(x))g(x) - (\Delta g + g(x))f(x)}{\Delta x(\Delta g + g(x))g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} g - \frac{\Delta g}{\Delta x} f}{g^2} = \frac{f' g - g' f}{g^2}$$

- **Производная сложной функции**

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} =$$

$$= [f(g)]'_g g'$$

Укажем **геометрический смысл** производной: если нарисовать график функции $z = z(t)$, то $\dot{z} = \tan \alpha$, где α — угол наклона касательной, проведённой к графику в точке $(t, z(t))$, к оси t.

Пример 3. Равноускоренное движение

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Тогда легко получить $\dot{z} = v_0 + at$, где v_0 - начальная скорость, a - ускорение.

Упражнение 1. Получи, что $(t^n)' = nt^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ (подсказка[1])

2.4 Число e. Второй замечательный предел.

Когда мы уже разобрались с тем, что такое производная, то следует поговорить про примечательную функцию, с которой эта производная связана.

Предположим, что мы нажли функцию вида $y = a^x$ производная у которой равна самой же функции, то есть

$$y' = y$$

Пусть это происходит при $a = e$. Так как наше выражение должно быть верно в нуле, тогда

$$(e^x)'|_{x=0} = 1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

Положим $\Delta x = \frac{1}{n}$, $n \gg 1$, тогда с большой точностью получим $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$, где формула точнее с уменьшением Δx. При $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$e = (e^{1/n})^n \approx (1 + \frac{1}{n})^n$$

Теорема 2.3. ***Второй замечательный предел***

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.5 Первый замечательный предел

Сразу же запишем исследуемый предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Для пруфа этого утверждения посмотрим необходимый геометрический рисунок (**см. на доску**). Очевидно, что

$$S_{\Delta OKH} < S_{\text{сектор}OKH} < S_{\Delta OLH}$$

[1] воспользуйся методом индукции

Площади треугольников соответственно: $S_{\Delta OKH} = \frac{\sin x}{2}$, $S_{\text{сектор}OKH} = \frac{x}{2}$, $S_{\Delta OLH} = \frac{\tan x}{2}$. Таким образом

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{\cos x}$$

Переходя к пределу

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Таким образом

Теорема 2.4. ***Первый замечательный предел***

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3 Полезные применения производной

3.1 Экстремум

3.2 Разговор о минимумах и максимумах

3.3 Производная x2

3.4 Максимумы и минимумы в физике

3.5 Ряд Тейлора, детка

4 Интеграл

4.1 С чем его едят?

4.2 Вновь движемся, вопрос куда...

4.3 Интеграл, как площадь под графиком функции

4.4 Формула Ньютона-Лейбница

4.5 Джедайство интеграла

4.6 Интегрирование по углам

5 Колебания и дифференциальные уравнения

5.1 Формула Циолковского

5.2 Почему Коши оказался в диффурах?

5.3 Математический маятник: чем больше тел, тем сложнее путь

5.4 Гармонический осциллятор

5.5 Фазовая плоскость

5.6 Формула Эйлера

Задачи

Функции одной переменной

1. По графику квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ определить знаки коэффициентов.

2. Упростить выражения:

   (a) $\cos(x - y) - \sin x \sin y$

   (b) $\frac{1}{2}\cos x - \sin(\frac{\pi}{6} + x)$

3. Построить графики функций:

   (a) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

   (b) $y = \tan(x + \frac{\pi}{3})$

   (c) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$

   (d) $y = \log_2 x$

   (e) $y = \log_3(x - 1)$

   (f) $y = \log_{10}(x + 2)$

4. Докажите тождество: $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)} + \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)} = 2$

5. Пользуясь только определением логарифмической функции, вычислить:

   (a) $\log_2 256$

   (b) $\log_4(2^{2002})$

   (c) $\log_3(27^{15})$

   (d) $\log_{27}(3^{99})$

   (e) $\ln(e^{2003})$

   (f) $2^{\log_2 5}$

   (g) $e^{\ln 2003}$

   (h) и т.д.

6. * Доказать формулу $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ для любых $a, b, x > 0$, $a \neq 1, b \neq 1$.

7. * Доказать, что $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ при $a > 0, a \neq 1, x > 0, x \neq 1$.

8. ** Натуральный логарифм числа x можно приближённо вычислить, даже если на калькуляторе нет кнопок, кроме кнопки извлечения квадратного корня: надо десять раз нажать на эту кнопку, из результата вычесть единицу, а разность умножить на 1024. Попробуйте объяснить, почему этот способ работает, если число x не слишком большое и не слишком близко к нулю.

Производная

1. По графику функции $y = f(x)$ нарисовать график функции ее производной $y = f'(x)$ (см.вниз[1])

2. Найдите производные функций по определению, используя предел:
   (a) $y(x) = C = const$
   (b) $y(x) = x$
   (c) $y(x) = x^2 + 10$ в точке $x = 3$
   (d) $y(x) = x^3$ в точке $x = 5$
   (e) $y(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$
   (f) $y(x) = \sqrt{x}$

3. Вычислите производные:
   (a) $y(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}$
   (b) $y(x) = \sin x - \cos x$
   (c) $y(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$
   (d) $y(x) = \cos^2 x \cdot x^2$
   (e) $y(x) = e^{2x} \sin x$
   (f) $y(x) = \frac{x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}$
   (g) $y(x) = \sin x \cos x \cdot x$
   (h) $y(x) = \sin[\sin[\sin x]]$

4. Написать формулы, задающие координаты точки, равномерно движущейся по окружности, как функции времени. Найти производные этих функций. Что характеризуют эти производные? Как увидеть из полученных формул, что скорость движения направлена по касательной к окружности?

5. Найти ток в цепи с зарядом $q = A\cos(\alpha e^{-\omega t})$. Когда этот ток максимален?

6. * Показать, что $\ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1)$

7. * Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Требуется найти на l такую точку D, чтобы сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей.

8. * Две среды разделены плоской границей. Луч света, идущий из точки, лежащей по одну сторону границы, в точку, лежащую по другую сторону, избирает путь, требующий наименьшего времени. Что это за путь, если скорость движения в указанных средах равна v_1 и v_2 соответственно?

[1] придумай график сам и нарисуй

Полезные применения производной. Ряд Тейлора.

Полезные применения производной

1. Точка А движется согласно уравнениям $x_1 = 2t, y_1 = t$, а точка В – согласно уравнениям $x_2 = 10 - t, y_2 = 2t$ (x, y – в метрах, t – в секундах). Определить расстояние S между этими точками в момент их максимального сближения. Оба движения в одной плоскости, – координаты точек в прямоугольной системе координат в этой плоскости

2. К источнику электрической энергии с ЭДС E и внутренним сопротивлением r подключён реостат. Какую наибольшую тепловую мощность можно получить на внешнем участке цепи?

3. С какой наименьшей скоростью надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой H с расстояния S от дома?

4. * Вписать в круг единичного радиуса прямоугольник наибольшей площади.

5. * Ядро, летящее со скоростью v, распадается на два одинаковых осколка. Определите максимальный возможный угол α между скоростями одного из осколков и вектором v, если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость $u < v$.

Ряд Тейлора

1. Разложи в ряд Маклорена функции $f(x)$
   (a) $f(x) = e^{-x}$ до члена с x^n
   (b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ до члена с x^5
   (c) $f(x) = x\sin x$ до члена с x^n
   (d) $f(x) = e^{-x}$ до члена с x^n
   (e) $f(x) = \ln(1+x)$ до члена с x^n
   (f) $f(x) = \sqrt{1+x}$ до члена с x^n

2. **Связать с физикой?**

Интегралы

1. Вычислите интеграл $\int x \ dx$ не беря первообразную.
2. Вычислите определённые интегралы:
   (a) $\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt$
   (b) $\int_2^8 t^4 \, dt$
   (c) $\int_5^{10} \frac{1}{t} \, dt$
   (d) $\int_{-4}^4 |x| \, dx$
   (e) $\int_1^2 \sqrt[3]{x} \, dx$
   (f) $\int_0^{\pi/2} sin(2025x) \, dx$
   (g) $\int_1^2 e^x \, dx$
   (h) $\int_2^4 2^x \, dx$
3. Вычислите определённые интегралы:
   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{25} t \, dt$
   (b) $\int_0^{\pi} \cos^9 t \, dt$
4. Вычислите интеграл: $\int x sin(x) \, dx$
5. Вычислите неопределённые интегралы:
   (a) $\int \frac{3 - x^2}{3 + x^2} dx$
   (b) $\int \frac{dx}{(2 + 3x)^{20}}$
   (c) $\int \frac{3x + 2}{2x + 3} dx$
   (d) $\int \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx$
   (e) $\int 3^x \cdot 5^x dx$
   (f) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$
   (g) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$
   (h) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$
6. Вычислите определённые интегралы:
   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{25} t \, dt$
   (b) $\int_0^{\pi} \cos^9 t \, dt$
7. Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:
   (a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \geq a^2$
   (b) $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, \quad x \geq 0, y \geq 0.$
8. Найдите площадь круга $x^2 + y^2 = r^2$

(a) Интегрируя по кольцам малой толщины

(b) Интегрируя по полоскам, перпердикулярным оси x

9. Найдите площадь эллипса несколькими способами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$.

10. Зная значения интеграла Пуассона, вычислите:

(a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}$

(d) * $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}, n \in \mathbb{N} \cup 0$

11. * Покоящееся тело отпускают с высоты H. Найдите время падения тела. $g = \frac{GM}{r^2}$

12. * Два малых шарика массы m с зарядами q располагаются на горизонтальной гладкой поверхности на расстоянии L. Шарики отпускают. Найдите время, через которое расстояние будет равно $L/2$.

13. * Имеется жидкая планета в форме однородного шара радиуса R и плотности ρ. Найти давление в центре планеты, обусловленное гравитационным притяжением.

14. * В 1866 году Максвелл разработал теорию, которая показывает, как распределены скорости в идеальном газе при равновесии (распределение Максвелла). Вероятность найти частицу со скоростью в интервале $[v, v + dv]$ равна:

$$p(v, v + dv) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Где m - масса частиц, T - температура газа, k - константа Больцмана. Найти:

1) Наиболее вероятную скорость

2) Среднюю скорость $< v >$

3) Среднеквадратичную скорость $\sqrt{< v^2 >}$

4) Оцените количесво частиц со скоростью от 499 м/с до 501 м/с в кубическом метре воздуха. Концентрация $n = 3\cdot$ м$^{-3}$, $T = 273K$, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Контрольная работа