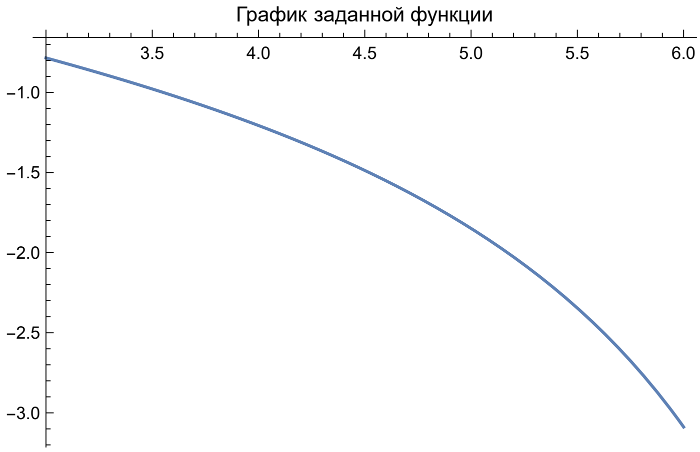
Лабораторная работа 5
Робилко Тимур, гр . 221701, Вариант 10

Задание 1

In[ ]:=
```
f[x_] := Cot[Sqrt[x + 2]];
x0 = 4.31;
initialPlot = Plot[f[x], {x, 3, 6}, PlotLabel → "График заданной функции"];
Show[initialPlot]
```

Out[ ]=



а) функция D системы Mathematica

In[ ]:=
```
Print["Производная 1-го порядка: ", d1 = D[f[x], x] /. x → x0]
Print["Производная 2-го порядка: ", d2 = D[f[x], {x, 2}] /. x → x0 ]
```

Производная 1-го порядка: -0.574067

Производная 2-го порядка: -0.268199

б) формулы численного дифференцирования

In[ ]:=
```
FiniteDifference1[y_, y1_] := y1 - y; (* Функции конечных разностей 3-х порядков*)
FiniteDifference2[y_, y1_, y2_] := y2 - 2 y1 + y;
FiniteDifference3[y_, y1_, y2_, y3_] := y3 - 3 y2 + 3 y1 - y;

h = 0.1; (* Для шага 0.1 *)
```

$$y1 = \frac{1}{h}\left(\text{FiniteDifference1}[f[x_0], f[x_0 + h]] - \frac{1}{2} * \text{FiniteDifference2}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h]] + \frac{1}{3} * \text{FiniteDifference3}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h], f[x_0 + 3 h]]\right);$$

```
y2 = 1/h^2 (FiniteDifference2[f[x0], f[x0 + h], f[x0 + 2 h]] -
      FiniteDifference3[f[x0], f[x0 + h], f[x0 + 2 h], f[x0 + 3 h]]);
```

In[ ]:=
```
Print["Производная 1-го порядка: ", y1]
Print["Производная 2-го порядка: ", y2]

Print["Разница между вычисленными значениями 1-й производной: ", Abs[d1 - y1]]
Print["Разница между вычисленными значениями 2-й производной: ", Abs[d2 - y2]]
```

```
Производная 1-го порядка: -0.574145

Производная 2-го порядка: -0.265381

Разница между вычисленными значениями 1-й производной: 0.0000780577

Разница между вычисленными значениями 2-й производной: 0.00281786
```

In[ ]:=
```
h = 0.01; (* Для шага 0.01 *)
```

In[ ]:=
```
y1 = 1/h (FiniteDifference1[f[x0], f[x0 + h]] -
      1/2 * FiniteDifference2[f[x0], f[x0 + h], f[x0 + 2 h]] +
      1/3 * FiniteDifference3[f[x0], f[x0 + h], f[x0 + 2 h], f[x0 + 3 h]]);
y2 = 1/h^2 (FiniteDifference2[f[x0], f[x0 + h], f[x0 + 2 h]] -
      FiniteDifference3[f[x0], f[x0 + h], f[x0 + 2 h], f[x0 + 3 h]]);
```

In[ ]:=
```
Print["Производная 1-го порядка: ", y1]
Print["Производная 2-го порядка: ", y2]

Print["Разница между вычисленными значениями 1-й производной: ", Abs[d1 - y1]]
Print["Разница между вычисленными значениями 2-й производной: ", Abs[d2 - y2]]
```

```
Производная 1-го порядка: -0.574067

Производная 2-го порядка: -0.268175

Разница между вычисленными значениями 1-й производной: 6.65807×10^-8

Разница между вычисленными значениями 2-й производной: 0.0000243751
```

Таким образом, уменьшение шага приводит к получению более точных результатов

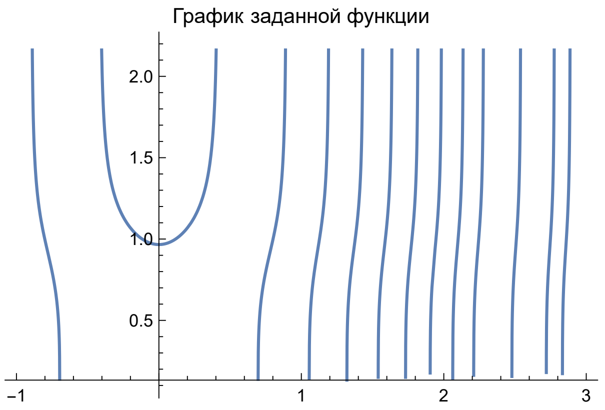
Задание 2

А)

In[ ]:=
```
f[x_] := (Tan[5 * x^2 + 7])^(1/4)
Plot[f[x], {x, -1, 3}, PlotLabel → "График заданной функции"]
```

$f[x\_] := \sqrt[4]{\mathrm{Tan}[5 * x^2 + 7]}$

Out[ ]=



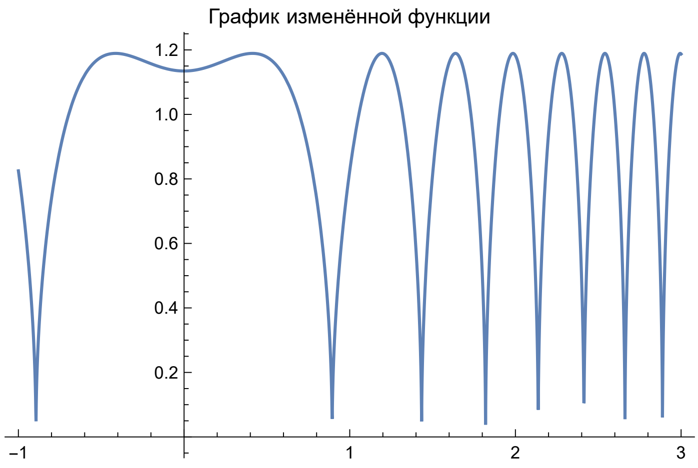
Так как изначальная функция определена не на всем множестве R, расчёты дают комплексные значения, которые невозможно будет сравнить.
Функция заменена на следующую для устранения разрывов и обеспечения области определения R :

In[ ]:=

$f[x\_] := \sqrt[4]{\mathrm{Sin}[5 * x^2 + 7] + 1}$

```
Plot[f[x], {x, -1, 3}, PlotLabel → "График изменённой функции"]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
a = -1;
b = 3;
h = 0.2;
data = Table[{x, (f[x + h] - f[x - h])/(2 h)}, {x, a, b, h}];
TableForm[data, TableHeadings → {None, {"xi", "y'i"}}]
```

Out[ ]//TableForm=

x_i	y'_i
-1.	-1.12188
-0.8	0.74236
-0.6	1.12208
-0.4	0.0881237
-0.2	-0.136061
0.	0.
0.2	0.136061
0.4	-0.0881237
0.6	-1.12208
0.8	-0.74236
1.	1.12188
1.2	-0.615047
1.4	-0.0710699
1.6	-0.186353
1.8	0.0554573
2.	1.09246
2.2	-1.75482
2.4	0.171302
2.6	1.69305
2.8	0.442982
3.	0.076906

Б)

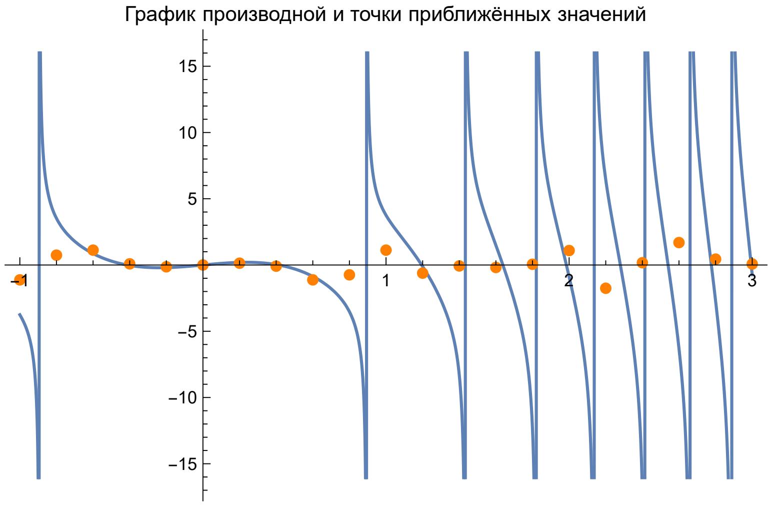
In[ ]:=
```
Derivate = D[f[x], x]
```

Out[ ]=

$$\frac{5\,x\,\mathrm{Cos}\left[7+5\,x^2\right]}{2\,\left(1+\mathrm{Sin}\left[7+5\,x^2\right]\right)^{3/4}}$$

In[ ]:=
```
graph = Plot[Derivate, {x, -1, 3}];
points = ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}];
Show[graph, points, PlotLabel → "График производной и точки приближённых значений"]
```

Out[ ]=



Задание 3

A) Метод средних прямоугольников

$$f[x\_] := \frac{x + \sqrt[3]{5 x^2 + 1.6}}{0.4 x^2 + \sqrt{1.9 x + 2}}$$

```
a = 0.3;
b = 1.1;
```

$x_0 = a;$

In[ ]:=

n1 = 8;

$step = \frac{(b - a)}{n1};$

For[i = 1, i ≤ n1, i++, $x_i = step + x_{i-1}$;]

$$AverageRectangle1 = \frac{(b - a)}{n1} * \sum_{i=1}^{n1} f\left[x_{i-1} + \frac{(b - a)}{2 * n1}\right]$$

Out[ ]=

0.89613

In[ ]:=

n2 = 10;

$step = \frac{(b - a)}{n2};$

For[i = 1, i ≤ n2, i++, $x_i = step + x_{i-1}$;]

$$AverageRectangle2 = \frac{(b - a)}{n2} * \sum_{i=1}^{n2} f\left[x_{i-1} + \frac{(b - a)}{2 * n2}\right]$$

Out[ ]=

0.896072

Уточнение по Ричардсону

In[∘]:=
```
k = 2;
```
$$Richardson = AverageRectangle2 + \frac{n1^k}{n2^k - n1^k}(AverageRectangle2 - AverageRectangle1)$$

Out[∘]=

0.895969

Б) Метод трапеций

In[∘]:=
$$n1 = 8;$$
$$x_0 = a;$$
$$step = \frac{(b-a)}{n1};$$
$$For[i = 1, i \leq n1, i{+}{+}, x_i = step + x_{i-1};]$$
$$Trapezoidal1 = \frac{(b-a)}{n1} * \left(\sum_{i=1}^{n1-1} f[x_i] + \frac{f[x_0]}{2} + \frac{f[x_{n1}]}{2}\right)$$

Out[∘]=

0.895648

In[∘]:=
$$n2 = 10;$$
$$x_0 = a;$$
$$step = \frac{(b-a)}{n2};$$
$$For[i = 1, i \leq n2, i{+}{+}, x_i = step + x_{i-1};]$$
$$Trapezoidal2 = \frac{(b-a)}{n2} * \left(\sum_{i=1}^{n2-1} f[x_i] + \frac{f[x_0]}{2} + \frac{f[x_{n2}]}{2}\right)$$

Out[∘]=

0.895763

Уточнение по Ричардсону

In[∘]:=
$$Richardson = Trapezoidal2 + \frac{n1^k}{n2^k - n1^k}(Trapezoidal2 - Trapezoidal1)$$

Out[∘]=

0.89597

Задание 4

Разбиение отрезка интегрирования на 8 частей

In[10]:=
$$data = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6966 \\ -0.34 & -0.4175 \\ -0.18 & -0.1994 \\ -0.02 & -0.0203 \\ 0.14 & 0.1316 \\ 0.3 & 0.2636 \\ 0.46 & 0.3803 \\ 0.62 & 0.4848 \\ 0.78 & 0.5794 \end{pmatrix};$$

```
(* points=
 ListPlot[data,PlotStyle→{PointSize[0.015],Orange}, PlotLabel→"Заданная функция"];
Show[points] *)
```

In[11]:=
```
a = -0.5;
b = 0.78;
n = 4;
```
$$h = \frac{(b - a)}{2\,n}$$

Out[14]=

0.16

In[15]:= `For[i = 0, i ≤ 2 * n, i++, y_i = data[[i + 1, 2]];]`

In[16]:= $$\text{Simpsons} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2\,i} + 4\,y_{2\,i+1} + y_{2\,i+2})$$

Out[16]=

0.093344

Разбиение отрезка интегрирования на 16 частей

In[17]:= $$\text{data} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6966 \\ -0.42 & -0.5420 \\ -0.34 & -0.4175 \\ -0.26 & -0.2996 \\ -0.18 & -0.1994 \\ -0.1 & -0.1048 \\ -0.02 & -0.0203 \\ 0.06 & 0.05797 \\ 0.14 & 0.1316 \\ 0.22 & 0.1978 \\ 0.3 & 0.2636 \\ 0.38 & 0.3204 \\ 0.46 & 0.3803 \\ 0.54 & 0.4296 \\ 0.62 & 0.4848 \\ 0.7 & 0.5279 \\ 0.78 & 0.5794 \end{pmatrix};$$

In[18]:= `n = 8;`
$$h = \frac{(b - a)}{2\,n}$$
`For[i = 0, i ≤ 2 * n, i++, y_i = data[[i + 1, 2]];]`

Out[19]=

0.08

In[21]:= $$\text{Simpsons} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2\,i} + 4\,y_{2\,i+1} + y_{2\,i+2})$$

Out[21]=

0.0927488

Задание 5

Формула Гаусса (4 узла)

In[∘]:=
$$f[x\_] = \frac{x - 2 * \mathrm{Sin}[4\,x + 3]}{1.6\,x + 0.7};$$
```
a = 1.5;
b = 2.9;
n = 4;
polynomial = LegendreP[n, x]
```
Out[∘]=
$$\frac{1}{8}\left(3 - 30\,x^2 + 35\,x^4\right)$$

In[∘]:=
```
soluton = NSolve[polynomial == 0, x];
xx = x /. soluton
```
Out[∘]=
```
{-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136}
```

In[∘]:=
$$T = \mathrm{Table}\left[\mathrm{If}\left[i == 1, 1, (xx[[j]])^{i-1}\right], \{i, n\}, \{j, n\}\right];\ \mathrm{MatrixForm}[T]$$
Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.861136 & -0.339981 & 0.339981 & 0.861136 \\ 0.741556 & 0.115587 & 0.115587 & 0.741556 \\ -0.638581 & -0.0392974 & 0.0392974 & 0.638581 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
$$B = \mathrm{Table}\left[\mathrm{If}\left[\mathrm{EvenQ}[i] == \mathrm{True}, 0, \frac{2}{i}\right], \{i, n\}\right] \mathbin{//} N$$
Out[∘]=
```
{2., 0., 0.666667, 0.}
```

In[∘]:=
```
A = LinearSolve[T, B]
```
Out[∘]=
```
{0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855}
```

In[∘]:=
$$\mathrm{Integral} = \frac{(b - a)}{2} * \sum_{i=1}^{n} A[[i]] * f\left[\frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2} * xx[[i]]\right]$$
Out[∘]=
```
0.825854
```