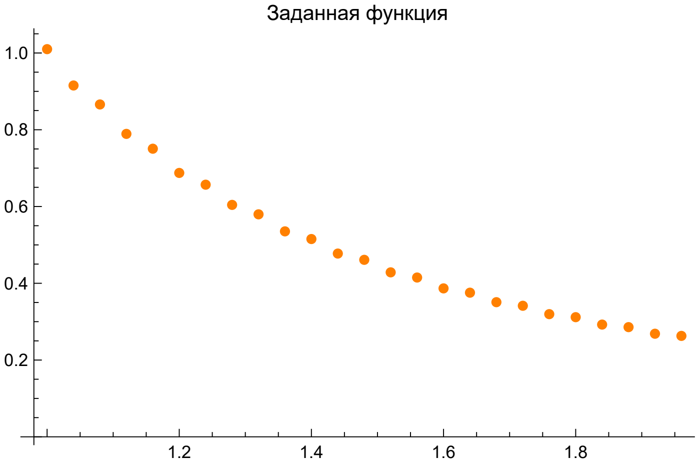
Типовой расчёт
Робилко Тимур, гр . 221701, Вариант 10

In[5]:=

```
func = (
 1     1.01
 1.04  0.915311
 1.08  0.865912
 1.12  0.789222
 1.16  0.750595
 1.2   0.6875
 1.24  0.656868
 1.28  0.604248
 1.32  0.57966
 1.36  0.535251
 1.4   0.515306
 1.44  0.477431
 1.48  0.461103
 1.52  0.428497
 1.56  0.415023
 1.6   0.386719
 1.64  0.375521
 1.68  0.350765
 1.72  0.341401
 1.76  0.319602
 1.8   0.311728
 1.84  0.292415
 1.88  0.285763
 1.92  0.268555
 1.96  0.262911
);

step = 0.04;
a = 1;
b = 1.96;
points = (b - a)/step + 1;
funcTable = Table[{func⟦i, 1⟧, func⟦i, 2⟧}, {i, 1, points}];
pointsPlot = ListPlot[func,
   PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}, PlotLabel → "Заданная функция"];
Show[pointsPlot]
```

Out[12]=



Задание 1

In[∘]:=
```
Polynomial24 = InterpolatingPolynomial[funcTable, x];
plot24 = Plot[Polynomial24, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Gray}];
Expand[Polynomial24]
```

Out[∘]=

$$3.35989\times10^{18} - 5.67593\times10^{19}\,x + 4.58586\times10^{20}\,x^2 - 2.35829\times10^{21}\,x^3 + 8.66608\times10^{21}\,x^4 - 2.42182\times10^{22}\,x^5 + 5.34814\times10^{22}\,x^6 - 9.5727\times10^{22}\,x^7 + 1.41336\times10^{23}\,x^8 - 1.74261\times10^{23}\,x^9 + 1.80954\times10^{23}\,x^{10} - 1.59145\times10^{23}\,x^{11} + 1.18921\times10^{23}\,x^{12} - 7.55829\times10^{22}\,x^{13} + 4.08166\times10^{22}\,x^{14} - 1.8669\times10^{22}\,x^{15} + 7.19197\times10^{21}\,x^{16} - 2.31381\times10^{21}\,x^{17} + 6.14086\times10^{20}\,x^{18} - 1.32112\times10^{20}\,x^{19} + 2.24618\times10^{19}\,x^{20} - 2.90466\times10^{18}\,x^{21} + 2.68445\times10^{17}\,x^{22} - 1.57934\times10^{16}\,x^{23} + 4.4447\times10^{14}\,x^{24}$$

In[∘]:=
```
funcTable12 = Table[{func⟦i, 1⟧, func⟦i, 2⟧}, {i, 1, 25, 2}];
Polynomial12 = InterpolatingPolynomial[funcTable12, x];
plot12 = Plot[Polynomial12, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Black}];
Expand[Polynomial12]
```

Out[∘]=

$$374.044 - 3074.09\,x + 11\,774.3\,x^2 - 27\,453.3\,x^3 + 43\,213.9\,x^4 - 48\,288.\,x^5 + 39\,238.8\,x^6 - 23\,350.7\,x^7 + 10\,096.6\,x^8 - 3092.86\,x^9 + 637.046\,x^{10} - 79.2108\,x^{11} + 4.49619\,x^{12}$$

In[∘]:=
```
funcTable8 = Table[{func⟦i, 1⟧, func⟦i, 2⟧}, {i, 1, 25, 3}];
Polynomial8 = InterpolatingPolynomial[funcTable8, x];
plot8 = Plot[Polynomial8, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Blue}];
Expand[Polynomial8]
```

Out[∘]=

$$13\,757.1 - 77\,753.3\,x + 190\,910.\,x^2 - 265\,964.\,x^3 + 229\,959.\,x^4 - 126\,373.\,x^5 + 43\,111.6\,x^6 - 8348.41\,x^7 + 702.686\,x^8$$

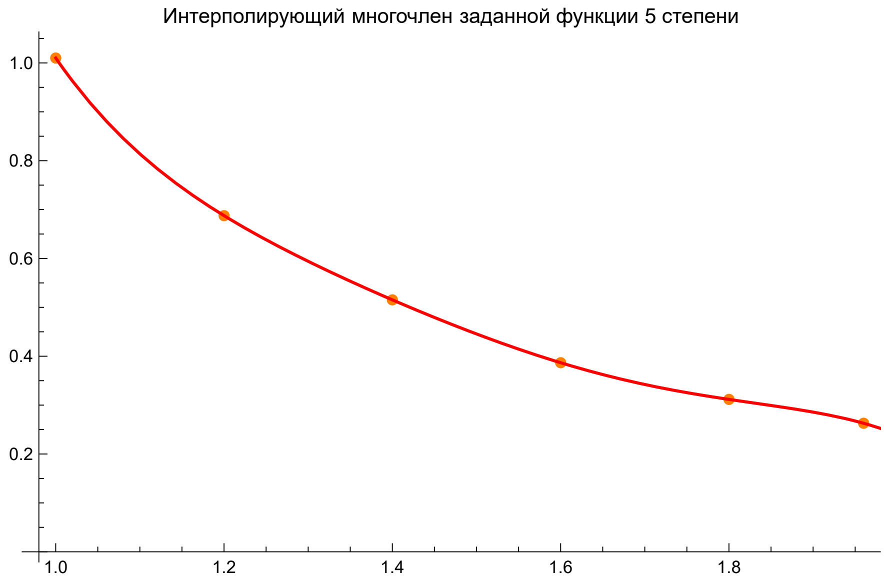
In[∘]:=
```
indexes = {1, 6, 11, 16, 21, 25};
funcTable5 = Table[{func⟦indexes⟦i⟧, 1⟧, func⟦indexes⟦i⟧, 2⟧}, {i, 1, 6}];
Polynomial5 = InterpolatingPolynomial[funcTable5, x];
plot5 = Plot[Polynomial5, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Red}];
Expand[Polynomial5]
```

Out[∘]=

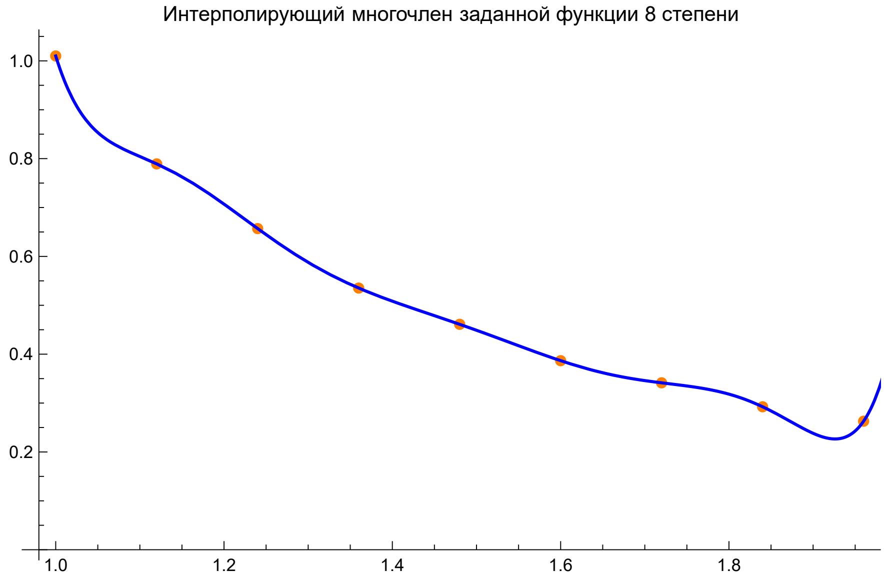
$$39.111 - 124.429\,x + 163.161\,x^2 - 107.564\,x^3 + 35.3468\,x^4 - 4.61544\,x^5$$

In[ ]:=
```
Show[ListPlot[funcTable5, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}], plot5,
 PlotLabel → "Интерполирующий многочлен заданной функции 5 степени"]
Show[ListPlot[funcTable8, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}], plot8,
 PlotLabel → "Интерполирующий многочлен заданной функции 8 степени"]
Show[ListPlot[funcTable12, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}], plot12,
 PlotLabel → "Интерполирующий многочлен заданной функции 12 степени"]
Show[ListPlot[funcTable, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}], plot24,
 PlotLabel → "Интерполирующий многочлен заданной функции 24 степени"]
```

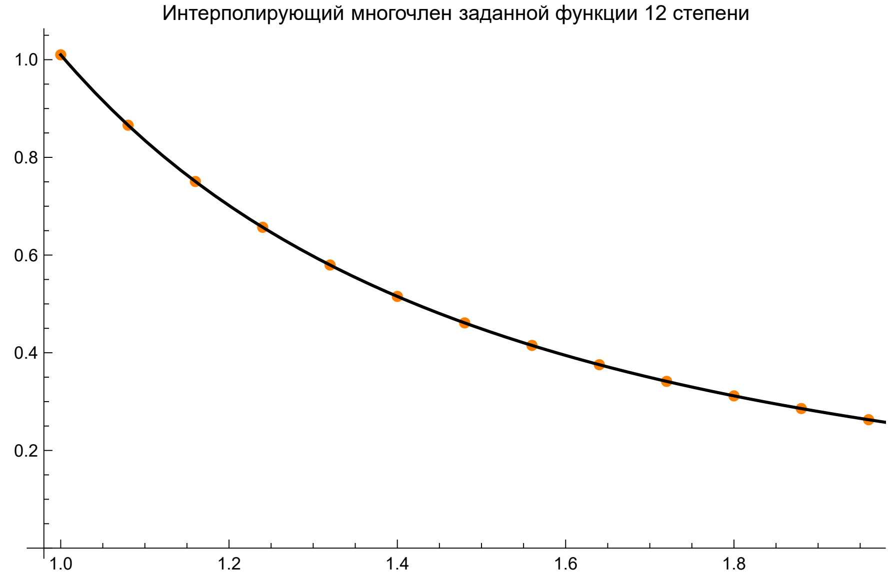
Out[ ]=



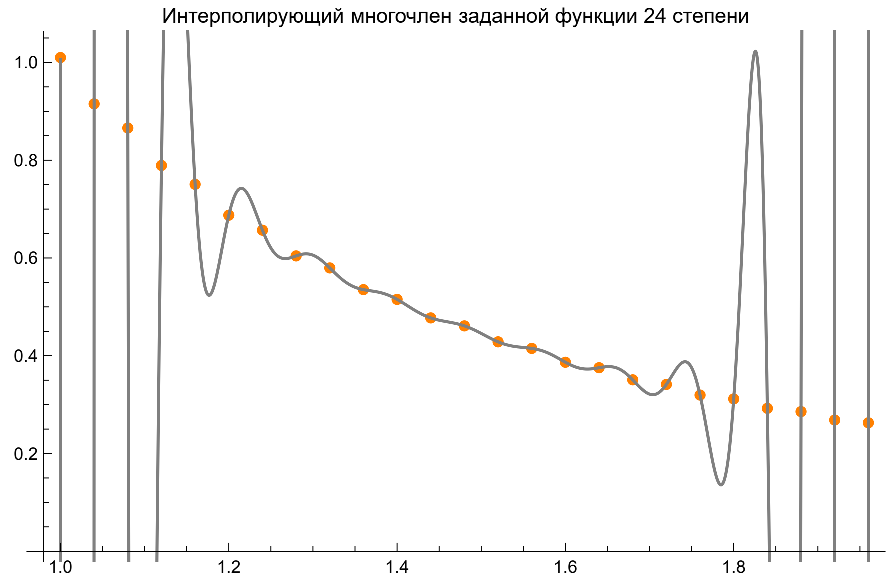
Out[ ]=



Out[ ]=



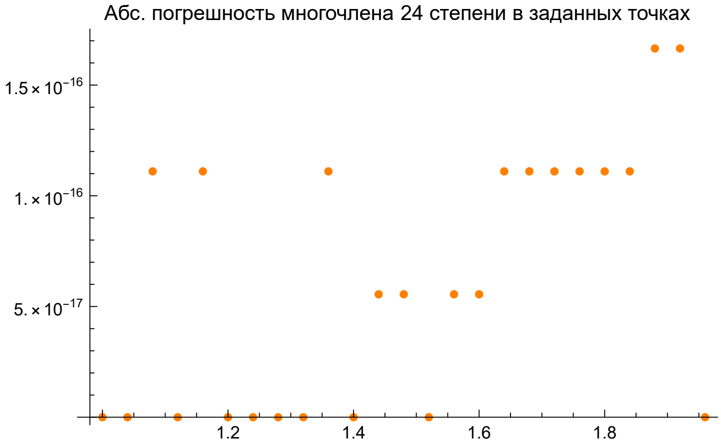
Out[ ]=



In[ ]:=
```
DifferencesTable24 = Table[{funcTable[[i, 1]],
    (Polynomial24 /. x → funcTable[[i, 1]]) - funcTable[[i, 2]]}, {i, 1, points}];
DifferencesTable12 = Table[{funcTable[[i, 1]],
    (Polynomial12 /. x → funcTable[[i, 1]]) - funcTable[[i, 2]]}, {i, 1, points}];
DifferencesTable8 = Table[{funcTable[[i, 1]],
    (Polynomial8 /. x → funcTable[[i, 1]]) - funcTable[[i, 2]]}, {i, 1, points}];
DifferencesTable5 = Table[{funcTable[[i, 1]],
    (Polynomial5 /. x → funcTable[[i, 1]]) - funcTable[[i, 2]]}, {i, 1, points}];
```

In[ ]:=
```
Show[ListPlot[DifferencesTable24, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}],
 PlotLabel → "Абс. погрешность многочлена 24 степени в заданных точках"]
Polynomial24S = Sum[((Polynomial24 /. x → func〚i, 1〛) - func〚i, 2〛)^2, {i, points}]
Show[ListPlot[DifferencesTable12, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}],
 PlotLabel → "Абс. погрешность многочлена 12 степени в заданных точках"]
Polynomial12S = Sum[((Polynomial12 /. x → func〚i, 1〛) - func〚i, 2〛)^2, {i, points}]
Show[ListPlot[DifferencesTable8, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}],
 PlotLabel → "Абс. погрешность многочлена 8 степени в заданных точках"]
Polynomial8S = Sum[((Polynomial8 /. x → func〚i, 1〛) - func〚i, 2〛)^2, {i, points}]
Show[ListPlot[DifferencesTable5, PlotStyle → {PointSize[0.013], Orange}],
 PlotLabel → "Абс. погрешность многочлена 5 степени в заданных точках"]
Polynomial5S = Sum[((Polynomial5 /. x → func〚i, 1〛) - func〚i, 2〛)^2, {i, points}]
```

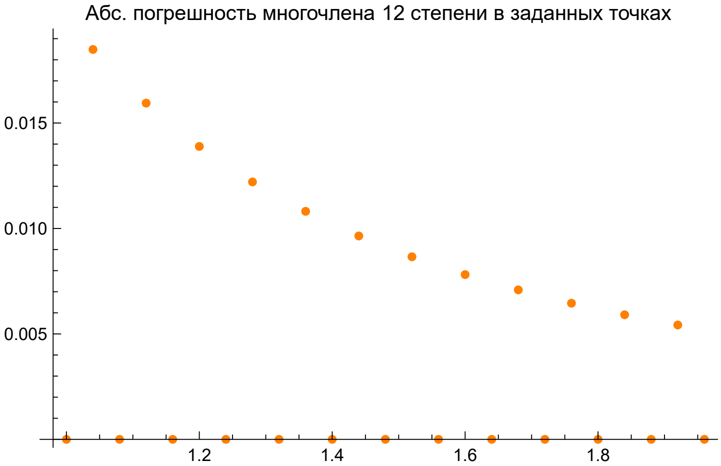
Out[ ]=



Out[ ]=

1.78726×10^{-31}

Out[ ]=



Out[ ]=

0.00144011

Out[ ]=

Out[ ]=

0.00771268

Out[ ]=

Out[ ]=

0.00151517

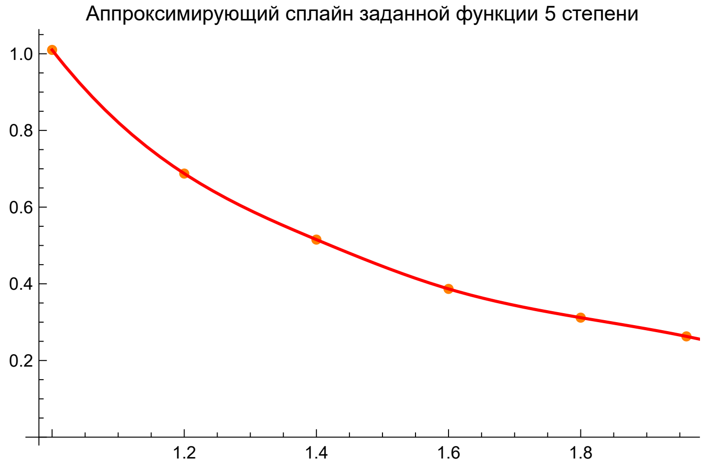
Таким образом, наилучшим в сравнении по сумме квадратов разностей функции в заданных узлах оказался многочлен 24-й степени. По графикам можно заметить, что погрешность увеличивается ближе к крайним значениям интерполируемой функции . Несмотря на это, интерполяция не гарантирует, что поведение полученной функции между узлами интерполяции будет повторять поведение исходной функции. Об этом свидетельствует увеличение погрешности в узлах, которые не были выбраны для интерполяции 12, 8 и 5 степеней, а также графики многочленов высоких степеней (в частности, ближе к крайним значениям отрезка интерполяции).

Задание 2

In[∘]:=
```
Spline5 := Interpolation[funcTable5, x, Method → "Spline"]
SplinePlot5 = Plot[Spline5, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Red}];
Spline8 := Interpolation[funcTable8, x, Method → "Spline"]
SplinePlot8 = Plot[Spline8, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Blue}];
Spline12 := Interpolation[funcTable12, x, Method → "Spline"]
SplinePlot12 = Plot[Spline12, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Black}];
Spline24 := Interpolation[funcTable, x, Method → "Spline"]
SplinePlot24 = Plot[Spline24, {x, 1, 2}, PlotStyle → {Gray}];
```

In[∘]:=
```
Show[ListPlot[funcTable5, PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}],
 SplinePlot5, PlotLabel → "Аппроксимирующий сплайн заданной функции 5 степени"]
Spline5S = Sum[((Spline5 /. x → func[[i, 1]]) - func[[i, 2]])^2, {i, points}]
Show[ListPlot[funcTable8, PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}],
 SplinePlot8, PlotLabel → "Аппроксимирующий сплайн заданной функции 8 степени"]
Spline8S = Sum[((Spline8 /. x → func[[i, 1]]) - func[[i, 2]])^2, {i, points}]
Show[ListPlot[funcTable12, PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}], SplinePlot12,
 PlotLabel → "Аппроксимирующий сплайн заданной функции 12 степени"]
Spline12S = Sum[((Spline12 /. x → func[[i, 1]]) - func[[i, 2]])^2, {i, points}]
Show[ListPlot[funcTable24, PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}], SplinePlot24,
 PlotLabel → "Аппроксимирующий сплайн заданной функции 24 степени"]
Spline24S = Sum[((Spline24 /. x → func[[i, 1]]) - func[[i, 2]])^2, {i, points}]
```

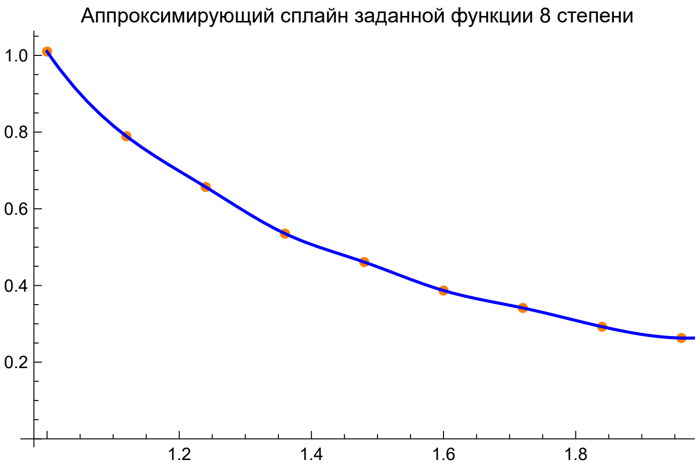
Out[∘]=



Out[∘]=

```
0.00113297
```

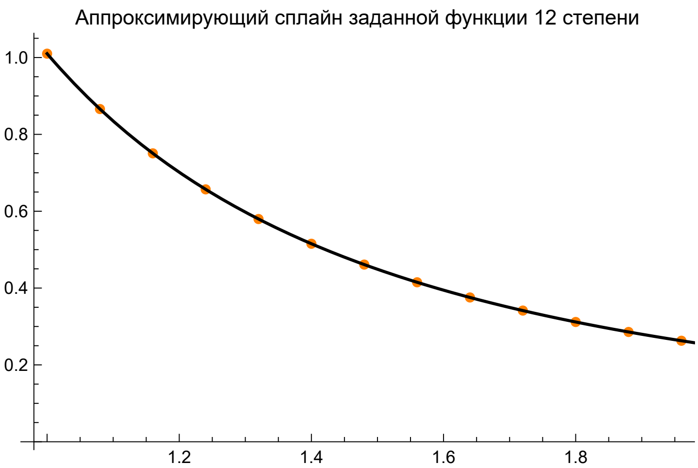
Out[ ]=



Out[ ]=

0.0010783

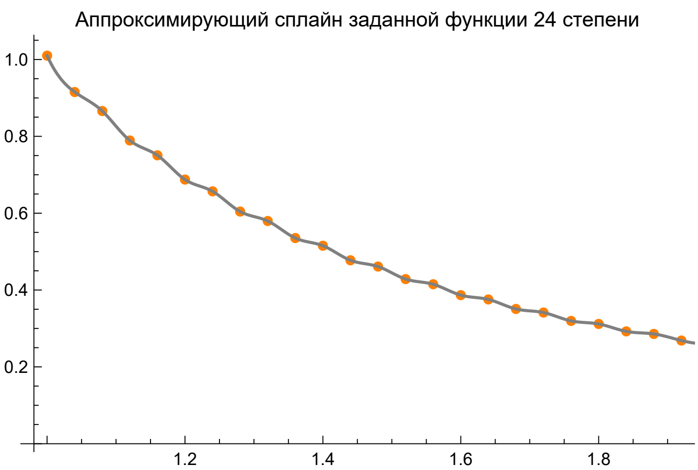
Out[ ]=



Out[ ]=

0.00144203

Out[ ]=



Out[ ]=

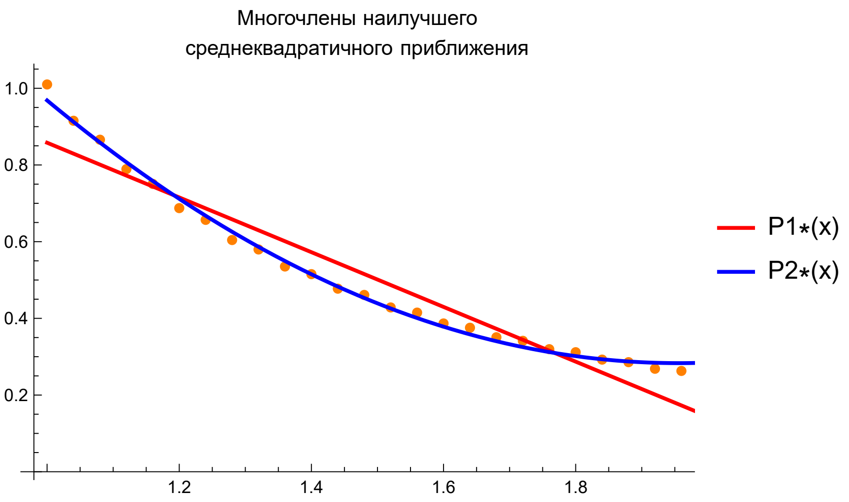
1.17097×10^{-31}

Таким образом, наилучшим в сравнении по сумме квадратов разностей функции в заданных узлах оказался сплайн 24 - й степени . Погрешность оказалась меньше, чем в случае интерполяционного многочлена из задания 1.

Задание 3

In[ ]:=
```
P1 = Fit[funcTable, {1, x}, x];
P2 = Fit[funcTable, {1, x, x^2}, x];
PPlot = Plot[{P1, P2}, {x, 1, 2},
   PlotStyle → {Red, Blue}, PlotLegends → {"P1*(x)", "P2*(x)"}];
Show[ListPlot[funcTable, PlotStyle → {PointSize[0.015], Orange}],
 PPlot, PlotLabel → "Многочлены наилучшего
среднеквадратичного приближения"]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
S1 = Sum[((P1 /. x → func[[i, 1]]) - func[[i, 2]])^2, {i, points}]
S2 = Sum[((P2 /. x → func[[i, 1]]) - func[[i, 2]])^2, {i, points}]
```

Out[ ]=

0.0828803

Out[ ]=

0.00547391

Таким образом, многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения второго порядка показал лучшую точность как графически, так и исходя из высчитанной суммы квадратов разностей

Задание 4

Метод левых прямоугольников

In[ ]:=
```
(*For[i=1,i≤points,i++, x_i=step+x_{i-1};]*)
```

$$LeftRectangle = step * \sum_{i=1}^{points-1} func[[i, 2]]$$

Out[ ]=

0.504976

Метод правых прямоугольников

In[ ]:= $\text{RightRectangle} = \text{step} * \sum_{i=2}^{\text{points}} \text{func}[[i, 2]]$

Out[ ]=

0.475092

Метод средних прямоугольников

In[ ]:= AverageRectangle =

$\text{step} * \sum_{i=1}^{\text{points}-1} \frac{\text{func}[[i, 2]] + \text{func}[[i+1, 2]]}{2}$ (* В данном случае аналогичен методу трапеций, так как функция задана таблично и значение функции в середине отрезка принимается среднему арифметическому крайних значений на отрезке *)

Out[ ]=

0.490034

Метод трапеций

In[ ]:= $\text{Trapezoidal} = \text{step} * \sum_{i=1}^{\text{points}-1} \frac{\text{func}[[i, 2]] + \text{func}[[i+1, 2]]}{2}$

Out[ ]=

0.490034

Метод Симпсона

n = 12;

$h = \frac{(b - a)}{2\,n};$

For[i = 0, i ≤ 2 * n, i++, y_i = func[[i + 1, 2]];]

$\text{Simpsons} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2i} + 4\, y_{2i+1} + y_{2i+2})$

Out[ ]=

0.48817

Таким образом, методы правых и левых прямоугольников могут давать завышенные или заниженные результаты в зависимости от производной исходной функции . Методы трапеций и Симпсона позволяют получить более точный результат .

Задание 5

Первая производная (1 порядок точности)

In[ ]:=
```
FirstDerivativesFirstAccuracy = Table[
  {i, func[[i, 1]], (func[[i + 1, 2]] - func[[i, 2]]) / step}, {i, 1, points - 1}]; (* Узлы 1-24 *)
TableForm[FirstDerivativesFirstAccuracy,
 TableHeadings → {None, {"Узел", "xᵢ", "y'ᵢ"}}, ]
```

Out[ ]//TableForm=

Узел	x_i	y'_i
1	1	-2.36723
2	1.04	-1.23497
3	1.08	-1.91725
4	1.12	-0.965675
5	1.16	-1.57738
6	1.2	-0.7658
7	1.24	-1.3155
8	1.28	-0.6147
9	1.32	-1.11022
10	1.36	-0.498625
11	1.4	-0.946875
12	1.44	-0.4082
13	1.48	-0.81515
14	1.52	-0.33685
15	1.56	-0.7076
16	1.6	-0.27995
17	1.64	-0.6189
18	1.68	-0.2341
19	1.72	-0.544975
20	1.76	-0.19685
21	1.8	-0.482825
22	1.84	-0.1663
23	1.88	-0.4302
24	1.92	-0.1411

Первая производная (2 порядок точности)

In[ ]:=
```
FirstDerivativesSecondAccuracy = Table[
  {i, func[[i, 1]], (func[[i + 1, 2]] - func[[i - 1, 2]])/(2 * step)}, {i, 2, points - 1}]; (* Узлы 2–24 *)
TableForm[FirstDerivativesSecondAccuracy,
 TableHeadings → {None, {"Узел", "xi", "y'i"}}, ]
```

Out[ ]//TableForm=

Узел	x_i	y'_i
2	1.04	-1.8011
3	1.08	-1.57611
4	1.12	-1.44146
5	1.16	-1.27152
6	1.2	-1.17159
7	1.24	-1.04065
8	1.28	-0.9651
9	1.32	-0.862462
10	1.36	-0.804425
11	1.4	-0.72275
12	1.44	-0.677538
13	1.48	-0.611675
14	1.52	-0.576
15	1.56	-0.522225
16	1.6	-0.493775
17	1.64	-0.449425
18	1.68	-0.4265
19	1.72	-0.389538
20	1.76	-0.370913
21	1.8	-0.339838
22	1.84	-0.324563
23	1.88	-0.29825
24	1.92	-0.28565

Вторая производная (2 порядок точности)

In[34]:=
```
SecondDerivativesSecondAccuracy = Table[
  {i, func[[i, 1]], (func[[i + 1, 2]] - 2 * func[[i, 2]] + func[[i - 1, 2]]) / step^2}, {i, 2, points - 1}];
TableForm[SecondDerivativesSecondAccuracy,
 TableHeadings → {None, {"Узел", "xi", "y''i"}}, ]
```

Out[35]//TableForm=

Узел	x_i	y''_i
2	1.04	28.3063
3	1.08	-17.0569
4	1.12	23.7894
5	1.16	-15.2925
6	1.2	20.2894
7	1.24	-13.7425
8	1.28	17.52
9	1.32	-12.3881
10	1.36	15.29
11	1.4	-11.2063
12	1.44	13.4669
13	1.48	-10.1737
14	1.52	11.9575
15	1.56	-9.26875
16	1.6	10.6913
17	1.64	-8.47375
18	1.68	9.62
19	1.72	-7.77188
20	1.76	8.70313
21	1.8	-7.14938
22	1.84	7.91313
23	1.88	-6.5975
24	1.92	7.2275

Таким образом, использование формул численного дифференцирования может дать удовлетворительные результаты для нахождения производных 1 и 2 порядка . Однако при шаге сетки, близком к нулю, неустранимые погрешности в значениях функции оказывают сильное влияние на результат (замечание из лекции 10), о чём свидетельствуют вычисленные значения 2 - й производной .