FORMES MODULAIRES ET REPRESENTATIONS DE GL(2)

par P. Deligne

Introduction

Cet exposé, qui ne prétend à aucune originalité, se veut complémentaire au rapport de Robert [13] sur Jacquet-Langlands [9]. On peut le diviser en deux parties d'esprit assez différent. Les paragraphes 0, 1 et 2 se veulent un pont, dans la théorie des formes modulaires, entre le point de vue classique et celui des représentations de $GL(2)$. Le paragraphe 3 est un fascicule de résultats de la théorie de représentations de $GL(2, K)$ (K corps local). Il dépend des paragraphes 2, 3 et 8 de [4] (ce volume), eux-mêmes indépendant du reste de cet article.

Il ne sera pas question ici des théorèmes globaux fondamentaux (relations entre spectre de $GL(2)$, spectre des algèbres de quaternions et séries de Dirichlet à équations fonctionnelles), pour lesquels on renvoie au rapport cité de Robert et bien sûr à [9]. On s'étendra sur les points suivants.

(A) Relation entre le point de vue classique: formes modulaires comme fonctions sur le demi-plan de Poincaré, ou comme fonctions de réseaux, et le point de vue des représentations, où il s'agit de décomposer $L_o^2(GL(2, \mathbb{A})/GL(2, \mathbb{Q}))$ en somme de représentations irréductibles du groupe adélique.

(B) Au paragraphe 2, après le minimum requis sur $GL(2, \mathbb{R})$, on donne deux corollaires du théorème d'existence et d'unicité du modèle de Kirillov des représentations admissibles irréductibles de $GL(2, K)$ (K corps local non archimédien).

a) La théorie des nouvelles formes (new forms) d'Atkin et Lehner [1]: la démonstration que nous donnons est plus simple, et plus proche de celle d'Atkin-Lehner, que celle de Casselman [3], mais va moins loin.

b) Le théorème de multiplicité un: si, pour presque tout nombre premier p, π_p est une représentation admissible irréductible de $GL(2, \mathbb{Q}_p)$, il existe au plus une sous-représentation admissible irréductible de $GL(2, \mathbb{A})$ dans $L_o^2(GL(2, \mathbb{A})/GL(2,\mathbb{Q}))$ dont les composantes locales coïncident presque toutes avec les π_p, et de composante locale à l'infini donnée. La démonstration, très élémentaire, ne fait pas appel aux fonctions L globales.

(C) Le paragraphe 3 est un fascicule de résultats des relations entre représentations admissibles irréductibles de $GL(2, K)$ (K corps local) et représentations de dimension 2 du groupe de Galois (de Weil, plutôt) de K. Pour chaque théorème cité, j'ai tenté, dans la mesure du possible, de fournir une référence où la démonstration se fasse avec un minimum de calcul. Il n'est question dans ce paragraphe ni de la construction explicite des représentations (pour laquelle on pourra consulter l'exposé [2] de Cartier, dans ce volume), ni de la décomposition de la restriction des représentations au sous-groupe compact maximal (voir Silberger [14]).

Comme il transparaît ci-dessus, je n'ai considéré que $GL(2, \mathbb{Q})$, non $GL(2, F)$ pour un corps global F. Vu l'emphase mise sur la théorie locale cela ne porte pas trop à conséquence. Je me suis aussi limité aux formes modulaires holomorphes. Les cas général se traite de même, une fois acquis les résultats sur $GL(2, \mathbb{R})$ (et $GL(2, \mathbb{C})$) prouvés dans [9] §§5 et 6 ou [15] ch VIII.
Parmi les nombreuses questions passées sous silence, je signale encore
- les séries d'Eisenstein, pour lesquelles on peut renvoyer à Hecke [8] 24;
- la relation entre $SL(2)$ et $GL(2)$ pour laquelle je renvoie à [10].

Outre l'influence partout présenté de [9], je puis citer, comme sources dont je suis particulièrement conscient:
pour le § 1 n° 2: l'introduction de [11], pour le § 3: [12], pour le § 2, n°4 [3].

Del-4

0. Préliminaires

0.0. Notations

On pose

$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\quad$ ($n \in \mathbb{N}^+$, ordonné par divisibilité)

$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $\quad$ (même limite, selon un sous-ensemble d'indices)

$\mathbb{A}^f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q} = \bigcup \frac{1}{n} \hat{\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Q} = \bigcup \frac{1}{p^n} \hat{\mathbb{Z}}_p$

$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}^f = (\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q}$

On a

$$\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \prod_p \mathbb{Z}_p$$

et l'anneau des adèles $\mathbb{A}$ est le produit restreint, relativement aux sous-groupes compacts ouverts $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$, des complétés $\mathbb{Q}_v$ ($\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$, et les $\mathbb{Q}_p$) de $\mathbb{Q}$.

v ou v_p : $\mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$: pour $x \in p^n\mathbb{Z}_p^*$, $v_p(x) = n$; $v_p(0) = \infty$

$\|x\| : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{R}$: $\|x\| = p^{-v_p(x)}$

$\|x\| : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$: $\|x\| = \prod_v \|x_v\|$, pour $x_v \in \mathbb{Q}_v$ les composantes de x , presque toutes dans les $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$.

Pour tout anneau A et tout A-module libre V , on pose

$GL_A(V)$ = groupe linéaires des A-automorphismes de V , et

$GL(n, A) = GL_A(A^n)$: matrices inversibles $n \times n$.

corps local : corps (commutatif) localement compact non discret, par exemple $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Nous les noterons F ou K , selon les paragraphes.

corps local archimédien : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

corps local non archimédien : les autres. Pour F un tel corps, on notera $\mathcal{O}$ l'anneau de la valuation de F (anneau de valuation discrète complet à corps résiduel fini $\mathbb{F}_q$), par π une uniformisante, par v la valuation $(v(\pi) = 1)$, par $\| \ \|$ la valeur absolue $\|x\| = q^{-v(x)}$.

0.1. <u>Réseaux adéliques</u>

(0.1.1) Rappelons que, de même que $\mathbb{Z}$ est discret à quotient compact dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est discret à quotient compact dans $\mathbb{A}$.

Soit M un $\mathbb{A}$-module libre de rang n . Un <u>réseau</u> dans M est un $\mathbb{Q}$-vectoriel $R \subset M$, tel que

$$R \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} M \ .$$

Il revient au même de dire que c'est un $\mathbb{Q}$-vectoriel $R \subset M$ discret et à quotient compact (de même que les réseaux dans $\mathbb{R}^n$ sont les sous-groupes discrets à quotient compact).

Soit $R_o \subset \mathbb{R}^n$ un réseau, et pour chaque nombre premier ℓ , soit α_ℓ un isomorphisme $R_o \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_\ell^n$. Les α_ℓ correspondent à

$$\alpha : R_o \otimes \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}^n \ .$$

L'injection identique de R_o dans $\mathbb{R}^n$, et α définissent un isomorphisme

$$(1, \alpha) \ : R_o \otimes (\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{Z}})^n \ , \text{ d'où}$$

$$(1, \alpha)_{\mathbb{Q}} \ : (R_o \otimes \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \ ,$$

qui fait de $R = R_o \otimes \mathbb{Q}$ un réseau dans $\mathbb{A}^n$.

<u>Rappel</u> 0.1.2. <u>La construction précédente est une bijection de l'ensemble des réseaux</u> $R_o \subset \mathbb{R}^n$, <u>munis de</u> $\alpha : R_o \otimes \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}^n$, <u>avec l'ensemble des réseaux de</u> $\mathbb{A}^n$. <u>La bijection inverse associe à</u> $R \subset \mathbb{A}^n$ <u>le</u> $\mathbb{Z}$-<u>module</u> $R_o = R \cap (\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{Z}})^n$, <u>considéré comme réseau dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>par la première projection</u> $R_o \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, <u>et muni de la deuxième projection</u> α .

(0.1.3) Via ce dictionnaire, l'action de $GL(n, \mathbb{A})$ sur les réseaux de $\mathbb{A}^n$ se décrit comme suit. Soit R un réseau dans $\mathbb{A}^n$, correspondant à (R_o, α), et soit $g = (g_\infty, g_f) \in GL(n, \mathbb{A}) = GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q})$.
Soit R'_o le réseau isogène à R_o tel que

$$\alpha(R'_o \otimes \hat{\mathbb{Z}}) = g_f^{-1}(\hat{\mathbb{Z}}^n) \quad \text{dans} \quad \hat{\mathbb{Z}}^n \otimes \mathbb{Q} .$$

on a alors

$$(g_\infty, g_f)(R_o, \alpha) = (g_\infty R'_o, g_f \alpha \circ g_\infty^{-1})$$

et en particulier

$$\text{pour } g_\infty \in GL(n, \mathbb{R}), \quad (g_\infty, 1)(R_o, \alpha) = (g_\infty R_o, \alpha \circ g_\infty^{-1})$$

$$\text{pour } k \in GL(n, \hat{\mathbb{Z}}), \quad (1, k)(R_o, \alpha) = (R_o, k\alpha) .$$

(0.1.4) Soit $G_{\mathbb{A}} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{A}^n)$ l'ensemble des homomorphismes g d'image un réseau. Tout g se prolonge par linéarité en un automorphisme $g_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}^n$, d'où un isomorphisme $G_{\mathbb{A}} \sim GL(n, \mathbb{A})$. L'ensemble $\mathfrak{R}_{\mathbb{A}}$ des réseaux de $\mathbb{A}^n$ s'identifie au quotient

$$\mathfrak{R}_{\mathbb{A}} = GL(n, \mathbb{A})/GL(n, \mathbb{Q}) .$$

De même, l'ensemble $\mathfrak{R}_{\mathbb{Z}}$ des réseaux dans $\mathbb{R}^n$ s'identifie au quotient

$$\mathfrak{R}_{\mathbb{Z}} = GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{Z}) .$$

L'assertion 0.1.2. signifie encore que l'application

$$(0.1.4.1) \quad [GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \hat{\mathbb{Z}})]/GL(n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} GL(n, \mathbb{A})/GL(n, \mathbb{Q})$$

est un isomorphisme. A chaque réseau adélique, identifié à (R_o, α), associons le réseau R_o. L'application de $\mathfrak{R}_{\mathbb{A}}$ dans $\mathfrak{R}_{\mathbb{Z}}$ obtenue s'identifie au composé

$$\begin{array}{ll} GL(n, \mathbb{A})/GL(n, \mathbb{Q}) & \\ \uparrow \wr & \\ [GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \hat{\mathbb{Z}})]/GL(n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Elle induit un isomorphisme

(0.1.4.2) $\qquad GL(n, \hat{\mathbb{Z}}) \backslash \mathfrak{R}_{\mathbb{A}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{R}_{\mathbb{Z}}$.

0.2 Représentations admissibles.

0.2.1. Soient F un corps local non archimédien et k un corps de caractéristique 0 . Une représentation admissible de $GL(2, F)$ sur k est une représentation linéaire (de dimension finie ou infinie)

$$\pi : GL(2, F) \longrightarrow GL_k(V)$$

telle que le stabilisateur de $v \in V$ soit ouvert ($\pi(g).v$ continu pour la topologie discrète de V) et que pour $H \subset GL(2, F)$ un sous-groupe ouvert, le sous espace V^H des H-invariants dans V soit de dimension finie.

Pour la définition de la contragrédiente admissible $\check{\pi}$, voir [9] p. 28.

0.2.2. Plutôt que $GL(2, \mathbb{R})$, nous considérons le groupe isomorphe $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Ce groupe contient $\mathbb{C}^*$ (les $z \longmapsto \lambda z$) , donc $U_1 \subset \mathbb{C}^*$, et la conjugaison complexe s . Soit $K = U_1 \cup s\, U_1$ le normalisateur de U_1 dans $SL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Une représentation admissible (complexe) de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ consiste en

(a) une représentation linéaire $\pi|K : K \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$, somme directe algébrique de représentations irréductibles (usuelles, de dimension finie) de K , chacune n'apparaissant qu'un nombre fini de fois;

(b) une action sur V de l'algèbre de Lie $gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, prolongeant l'action de Lie(K) et telle que, pour $k \in K$ et $X \in gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, on ait

(0.2.2.1) $\qquad \pi(k)\, \pi(X)\, \pi(k)^{-1} = \pi(\mathrm{ad}\, k.X)$.

On vérifie facilement que la représentation donnée de K se prolonge de façon unique en une représentation de $(\mathbb{C}^* \cup s\, \mathbb{C}^*) \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ qui vérifie encore (b).

Il suffit par ailleurs de vérifier (0.2.2.1) pour $k = s$.

0.2.3. Par la définition des représentations admissibles de $GL(2, \mathbb{A})$, on renvoie à [9] § 9. Toute représentation admissible irréductible π de $GL(2, \mathbb{A})$ sur V (complexe) est un produit tensoriel restreint: pour chaque place v , il existe une représentation admissible irréductible $\pi_v : GL(2, \mathbb{Q}_v) \longrightarrow GL(V_v)$, et pour presque tout nombre premier p , un vecteur $v_p \in V_p$, invariant par $GL(2, \mathbb{Z}_p)$, de sorte que

$$V = \otimes' V_v = \varinjlim_S \bigotimes_{v \in S} V_v$$

(limite sur les ensembles finis de places assez grands, inclusions définies par les v_p). C'est facile: voir [9] 9.1. De même pour $GL(2, \mathbb{A}^f)$.

§ 1. Fonctions de Réseaux

1.1. Fonctions sur $GL(2, \mathbb{R})$

1.1.1 Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{Z}^2$. L'ensemble des homomorphismes $g : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ s'identifie à l'ensemble des couples (ω_1, ω_2) de nombres complexes par $g \longmapsto (g(e_1), g(e_2))$. Notons G l'ensemble des $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$ tel que $g(\mathbb{Z}^2)$ soit un réseau. On peut identifier G à l'ensemble des couples (ω_1, ω_2) de nombres complexes $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

Tout $g \in G$ se prolonge par linéarité en des applications $g_{\mathbb{R}}$ et $g_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{R}$- et $\mathbb{C}$-linéaires

$$g_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$g_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

Ceci fournit diverses descriptions de G , qui s'identifie respectivement à :

(a) L'ensemble des réseaux dans $\mathbb{C}$ munis d'une base
(par $g \longmapsto (g(\mathbb{Z}^2)$; base $(g(e_1), g(e_2))))$;

(b) $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ (par $g \longmapsto g_{\mathbb{R}}$) ;

(b') L'ensemble des couples formés d'une structure complexe sur $\mathbb{R}^2$, et d'un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire (pour cette structure complexe) de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$;

(c) L'ouvert de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ formé des formes ℓ dont la restriction à $\mathbb{R}^2$ est injective (par $g \longmapsto g_{\mathbb{C}}$) .

Les interprétations (a) et (c) mettent en évidence une structure complexe sur G , pour laquelle les fonctions $w_i = g(e_i)$ sont holomorphes.

L'interprétation (b) met en évidence une action à droite, par composition, de $GL(2, \mathbb{R})$ sur G . Cette action respecte la structure complexe de G et, par (a), $G/GL(2, \mathbb{Z})$ s'identifie à l'ensemble des réseaux dans $\mathbb{C}$, muni de sa structure complexe naturelle. Dans le système de coordonnées (ω_1, ω_2) , l'action s'écrit

$$(\omega_1, \omega_2) , \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(produit matriciel).

L'interprétation (b) met aussi en évidence une action à gauche de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ sur G :

$$g, (\omega_1, \omega_2) \longmapsto (g(\omega_1), g(\omega_2)) .$$

Identifions $\mathbb{C}^*$ à un sous groupe de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ par $\lambda \longmapsto (z \longmapsto \lambda z)$. L'action de $\mathbb{C}^* \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ sur G est holomorphe, et G est un espace principal homogène de groupe $\mathbb{C}^*$ sur $X^{\pm} = \mathbb{C}^* \backslash G$. D'après (b') , $X^{\pm}$ s'identifie à l'ensemble des structures complexes sur $\mathbb{R}^2$. La structure complexe quotient de celle de G obtenue sur $X^{\pm}$ se déduit aussi de l'inclusion $X^{\pm} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ suivante: à $x \in X^{\pm}$ on associe le noyau de l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{R}^2, x)$$

qui prolonge l'identité $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(1.1.2) Soit $g_o \in G$ le réseau de base $(i, 1)$.

On choisira g_o comme origine dans G, et on identifiera G à $GL(2,\mathbb{R})$ par $h \in GL(2, \mathbb{R}) \longmapsto g_o h$. Les actions à droites ou à gauche de $GL(2, \mathbb{R})$ ou $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ introduites plus haut s'identifient alors aux translations à droite ou à gauche, $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ étant identifié à $GL(2, \mathbb{R})$ à l'aide de $(i, 1) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

(1.1.3) Sur $GL(2, \mathbb{R})$, définissons une fonction $\|g\|$ par

$$\|g\| = \mathrm{Tr}({}^t gg + ({}^t gg)^{-1}) = (a^2+b^2+c^2+d^2)\ (1 + \det(g)^{-2}) \quad .$$

Une fonction f sur $GL(2, \mathbb{R})$ sera dite C^∞ à <u>croissance modérée</u> s'il existe $A > 0$, $N > 0$ tels que

(1.1.3.1) $$f(g) \leq A\ \|g\|^N \quad ,$$

et que toutes les dérivées de f (relativement à des champs de vecteurs invariants) vérifient des conditions analogues. La condition (1.1.3.1) revient à dire que f est majorée par une fonction algébrique. C'est une condition de croissance très faible (l'analogue pour $GL(1, \mathbb{R})$ est: majoré par $A.\chi$, pour χ un quasi-caractère convenable).

On transporte par (1.1.2) cette terminologie aux fonctions sur G , et on l'étend aux fonctions sur l'ensemble $G/GL(2, \mathbb{Z})$ des réseaux dans $\mathbb{C}$, identifiées à certaines fonctions sur G .

<u>Définition</u> 1.1.4. <u>Une forme modulaire holomorphe de poids</u> k , <u>de groupe</u> $GL(2, \mathbb{Z})$, <u>est une fonction de réseau</u> f(R)

$$f : G/GL(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

<u>qui est</u>

(a) <u>holomorphe</u>,

(b) <u>telle que</u> $f(\lambda R) = \lambda^{-k} f(R)$ (R <u>est un réseau et</u> $\lambda \in \mathbb{C}^*$),

(d) <u>à croissance modérée</u>.

Lorsqu'on identifie f à une fonction sur G, ces conditions deviennent:

(a_1) f est holomorphe;

(b_1) $f(\lambda g) = \lambda^{-k} f(g)$ $\quad (g \in G\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}^*)$;

(c_1) $f(g\gamma) = f(g)$ $\quad (g \in G\ ,\ \gamma \in GL(2, \mathbb{Z}))$;

(d_1) f est à croissance modérée.

(1.1.5) Deux systèmes de coordonnées sur G sont très commodes. Dans chacun d'eux, il est utile de connaître

(A) L'élément de volume invariant (par $GL(2, \mathbb{R})$ à droite et $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ à gauche).

(B) La valeur de $\det g$ (auquel on donne un sens par 1.1.2).

(C) L'action à gauche de $\mathbb{C}^*$, et l'action à droite de $GL(2, \mathbb{R})$.

(D) L'opérateur de Casimir, invariant par translations à gauche et à droite. C'est l'élément central

$$\Omega = \tfrac{1}{2} H^2 + XY + YX$$

de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $GL(2, \mathbb{R})$, agissant par convolution. On a posé, dans le complexifié de cette algèbre de Lie

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\frac{1}{2}\binom{-i}{1}$, $\frac{1}{2}\binom{i}{1}$, identifiée à la base duale de la base z , $\bar{z}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on a

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

H est le générateur infinitésimal du tore compact $U_1 \subset \mathbb{C}^*$ de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \simeq GL(2, \mathbb{R})$

(isomorphisme 1.1.2).

(1.1.5.1) Coordonnées homogènes

$$g \longmapsto (\omega_1, \omega_2) = (g(e_1), g(e_2)) \quad .$$

On pose $\omega_1 = x_1 + iy_1$, $\omega_2 = x_2 + iy_2$. Pour β une forme holomorphe, on note $|\beta|^2$ la forme réelle $\beta \wedge \bar{\beta}$ (et l'élément de volume positif correspondant pour β une 2-forme).

(A_h) $$dg = \left| \frac{d\omega_1 \wedge d\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \right|^2 = 4\ dx_1\ dy_1\ dx_2\ dy_2\ (x_1\ y_2 - x_2\ y_1)^{-2} \quad .$$

(B_h) $$\det g = x_2\ y_1 - x_1\ y_2$$

(C_h) $$\lambda.(\omega_1, \omega_2) = (\lambda\ \omega_1, \lambda\ \omega_2)$$

$$(\omega_1, \omega_2)\ \gamma = (a\ \omega_1 + b\ \omega_2,\ c\ \omega_1 + d\ \omega_2)$$

pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(D_h) $$H * f = [(-\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \bar{\omega}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_1}) + (-\omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \bar{\omega}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_2})]\ f$$

$$X * f = [- \bar{\omega}_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \bar{\omega}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}]\ f$$

$$Y * f = [- \omega_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_1} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_2}]\ f$$

1.1.5.2 Demi-plans de Poincaré

$$g \longmapsto [\lambda, z] = [\omega_2, \omega_1/\omega_2] \ :$$

$$(\omega_1, \omega_2) = \lambda.(z, 1) \quad .$$

On pose $z = x+iy$. Dans le système de coordonnées $[\lambda, z]$, λ parcourt $\mathbb{C}^*$ et z l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire $y \neq 0$.

(A_p) $\quad dg = \left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right|^2 . \; y^{-2}|dz|^2 = 2\,\frac{d\lambda}{\lambda}\,\frac{d\bar\lambda}{\bar\lambda}\,.y^{-2}\,dx.dy$.

(B_p) $\quad \det g = |\lambda|^2.y$

(C_p) $\quad \lambda\,[\mu,\ z] = [\lambda\,\mu,\ z]$

$$[\lambda,\ z]\,\gamma = [\lambda.(cz+d),\ \frac{az+b}{cz+d}\ ]$$

pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(D_p) $\quad H * f = [-\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + \bar\lambda\,\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\ ]\,f$

$$X * f = [\ 2y\,\frac{\bar\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial z}\ - \bar\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\ ]\,f$$

$$Y * f = [-2y\,\frac{\lambda}{\bar\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\bar z}\ -\lambda\,\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\ ]\,f$$

$$\Omega * f = [\tfrac{1}{2}\,(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + \bar\lambda\,\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\,)^2 + (\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + \bar\lambda\,\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\,) + 4\,(y\,\lambda\,\frac{\partial}{\partial\bar z}\,\frac{\partial}{\partial\lambda} - y\,\bar\lambda\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial\bar\lambda})$$

$$- 8\,y^2\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial\bar z}\ ]\,f$$

(1.1.6) Les formules (1.1.5.2) mettent en évidence que G est un espace principal homogène de groupe $\mathbb{C}^*$ sur le double demi-plan de Poincaré $X^{\pm} = \{z \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z) \neq 0\}$. La restriction à la section $z \longmapsto (z,\ 1)$ de $G \longrightarrow X^{\pm}$ identifie l'ensemble $\mathfrak{F}_k$ des fonctions vérifiant (b_1) (1.1.4) à l'ensemble des fonctions sur $X^{\pm} = \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Par cette identification, les fonctions holomorphes correspondent aux fonctions holomorphes. L'action à droite de $GL(2,\mathbb{R})$ sur G induit une action à gauche sur les fonctions sur G, par $(\gamma f)(g) = f(g\gamma)$. Cette action respecte $\mathfrak{F}_k$. Lorsqu'on identifie $\mathfrak{F}_k$ aux fonctions sur $X^{\pm}$, cette action devient, pour

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \ : \quad (\gamma f)(z) = (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}) \ .$$

Il est traditionnel de poser, pour avoir une action à droite

$$f|\gamma = {}^t\gamma(f) \qquad (\text{pour } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ {}^t\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}) \ .$$

Les formes modulaires holomorphes de poids n de groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ s'identifient donc aux fonctions f sur $X^{\pm}$ telles que

(a_2) f est holomorphe

(c_2) pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Z})$,

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z) \ .$$

(d_2) $|f(x+iy)| \leq Ay^N$ pour $\Re(x)$ borné, $y \longrightarrow \infty$, N convenable

(il résulte de la théorie de la réduction que cette condition entraîne la condition apparemment plus forte (d_1)).

<u>Variante</u> 1.1.7. Les éléments de $GL(2,\mathbb{Z})$ de déterminant -1 permutent les deux composantes connexes de $X^{\pm}$. On peut donc encore identifier les formes considérées aux fonctions sur le demi-plan de Poincaré

$$X = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

vérifiant (a_2), (d_2), et (c_2) pour $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$.

<u>Variante</u> 1.1.8. Soit SG l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(e_1) \wedge g(e_2) = i \wedge 1$ dans $\overset{2}{\underset{\mathbb{R}}{\wedge}} \mathbb{C}$. Sur $SG \subset G$, le sous-groupe $SL(2,\mathbb{R})$ de $GL(2,\mathbb{R})$ agit à droite, et $SL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \supset U_1$ à gauche. Une forme modulaire comme plus haut est déterminée par sa restriction à SG.

Soit $\widetilde{SG}$ l'ensemble des couples formés de $g \in SG$ et d'un isomorphisme, au-dessus de $g_{\mathbb{R}}$, du revêtement universel de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (point base $e_2 = (0, 1)$) avec celui de $\mathbb{C} - \{0\}$ (point base 1). $\widetilde{SG}$ est un revêtement universel de SG. Le revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$ agit à droite, et celui de $SL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ à gauche. En particulier, le revêtement universel $\widetilde{U}_1 \subset \widetilde{SL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ agit à gauche. Notons que pour $k \in \mathbb{C}$ et λ dans $\widetilde{\mathbb{C}^*}$, en particulier dans $\widetilde{U}_1$, λ^k est bien défini.

Pour $k \in \mathbb{R}$ et Γ un sous-groupe discret de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, une forme modulaire holomorphe de poids k de groupe Γ est une fonction f sur $\widetilde{SG}$ telle que:

(a_3) f vérifie une condition d'holomorphie (localement, quand on ramène f à une fonction sur SG par une section locale de $\widetilde{SG} \longrightarrow SG$ et qu'on la prolonge à G en $\widetilde{f}$, de sorte que $\widetilde{f}(\lambda g) = \lambda^{-k} f(g)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on veut que $\widetilde{f}$ soit holomorphe);

(b_3) $f(\lambda g) = \lambda^{-k} f(g)$ pour $\lambda \in \widetilde{U}_1$;

(c_3) $f(g\gamma) = f(g)$ pour $\gamma \in \Gamma$.

(d_3) $|f(g)|$, qui d'après (b_3) provient d'une fonction sur SG, est à croissance modérée.

1.2 <u>Fonctions sur GL(2, $\mathbb{A}$)</u>

(1.2.1) Soit $G_{\mathbb{A}} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{C} \times (\mathbb{A}^f)^2)$ l'ensemble des homomorphismes g dont l'image soit un réseau ((0.1.1); $\mathbb{C} \times (\mathbb{A}^f)^2$ est un $\mathbb{A}$-module libre de rang deux). Ces g s'identifient aux isomorphismes $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times (\mathbb{A}^f)^2$, d'où une action à droite de $GL(2, \mathbb{A})$ et une action à gauche de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{A}^f)$. Le quotient $G_{\mathbb{A}}/GL(2, \mathbb{Q})$ est l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C} \times (\mathbb{A}^f)^2$. D'après (0.1.2), l'ensemble des réseaux dans $\mathbb{C} \times (\mathbb{A}^f)^2$ s'identifie à l'ensemble des couples (R_o, α) formés d'un réseau $R_o \subset \mathbb{C}$ et de: $R_o \otimes \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}^2$.

Une fonction de réseau $f(R_o)$ $(R_o \subset \mathbb{C})$ définit donc une fonction de réseau adélique $R \longmapsto (R_o, \alpha) \longmapsto f(R_o)$ $(R \subset \mathbb{C} \times (\mathbb{A}^f)^2)$. Cette construction identifie les formes modulaires holomorphes de poids k de groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ (1.1.4) aux fonctions sur $G_{/\mathbb{A}}$ qui sont

(a_4) holomorphes en g_∞ ,

$({}_\infty b_4)$ telles que $f(\lambda g) = \lambda^{-k} f(g)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^* \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$,

$({}_f b_4)$ telles que $f(\varkappa g) = f(g)$ pour $\varkappa \in GL(2, \hat{\mathbb{Z}}) \subset GL(2, \mathbb{A}^f)$,

(c_4) telles que $f(g\gamma) = f(g)$ pour $\gamma \in GL(2, \mathbb{Q})$,

(d_4) à croissance modérée comme fonction de g_∞ .

Définition 1.2.2. Une forme modulaire holomorphe de poids k est une fonction sur $G_{/\mathbb{A}}$ vérifiant les conditions (a_4) à (d_4) ci-dessus, avec

$({}_f b_4)$ remplacé par

$({}_f b_5)$ pour $\varkappa$ dans un sous-groupe compact ouvert convenable K de $GL(2, \mathbb{A}^f)$, on a $f(\varkappa g) = f(g)$.

On dira que f est de niveau K si f est invariante sous K .

On vérifie encore qu'il suffit de vérifier (d_4) dans un domaine de Siegel.

(1.2.3) Traduisons cette définition en termes plus concrets, pour $K \subset GL(2, \hat{\mathbb{Z}})$. Il existe alors un entier n et $H \subset GL(2, \mathbb{Z}/n)$ tel que K soit l'image réciproque de H par l'application surjective

$$\begin{array}{ccc} GL(2, \hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & GL(2, \mathbb{Z}/n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & H \end{array}$$

Soit K_n défini par $H = \{e\}$. D'après (0.1.4.1), le quotient

$$K_n \backslash G_{/\mathbb{A}} / GL(2, \mathbb{Q})$$

s'identifie à l'ensemble des couples $(R_o, \bar{\alpha})$ formés d'un réseau $R_o \subset \mathbb{C}$ et de $\bar{\alpha} : R_o/n\, R_o \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^2$. Une forme modulaire holomorphe de poids k sera dite de niveau n si elle est invariante par K_n . Une telle forme s'identifie à une fonction holomorphe de réseaux marqués $f(R_o, \bar{\alpha})$, homogène de poids $-k$, vérifinat une condition de croissance convenable.

Plus généralement, pour K défini par (N, H) , le quotient

$$K \backslash G_{\mathbb{A}}/GL(2, \mathbb{Q})$$

s'identifie à l'ensemble des couples $(R_o, \bar{\alpha})$ formés d'un réseau $R_o \subset \mathbb{C}$ et d'une classe latérale

$$\bar{\alpha} \in H \backslash \mathrm{Isom}(R_o/n\, R_o, (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^2) .$$

(1.2.4) On notera que l'ensemble de réseaux marqués $K\backslash G_{\mathbb{A}}/GL(2, \mathbb{Q})$ est en général disconnexe.

D'après ce qui précède ou (0.1.4.1), il s'identifie en effet à

$$\text{(1.2.4.1)} \qquad \begin{array}{ccc} K\backslash G_{\mathbb{A}}/GL(2, \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\sim} & K\backslash (G \times GL(2, \hat{\mathbb{Z}}))/GL(2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \\ & & \downarrow \wr \\ & & G \times (H\backslash GL(2, \mathbb{Z}/n))/GL(2, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Les deux composantes connexes de G sont permutées par les éléments de $GL(2, \mathbb{Z})$ de déterminant -1, et $SL(2, \mathbb{Z})$ s'envoye sur $SL(2, \mathbb{Z}/n)$. De (1.2.4.1), on tire donc une bijection

$$\pi_o(K\backslash G_A/GL(2, \mathbb{Q})) \xrightarrow[\sim]{\mu} \det(H)\backslash (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^*$$

ou, en termes adéliques

$$\pi_o(K\backslash G_{\mathbb{A}}/GL(2, \mathbb{Q})) \xrightarrow{\sim} \det K\backslash \{\underline{+}1\} \times (\mathbb{A}^f)^* /\mathbb{Q}^* .$$

En terme de réseaux marqués $(R_o, \bar{\alpha})$, cette application se décrit comme suit. Le réseau $R_o \subset \mathbb{C}$ est muni d'une orientation naturelle: le générateur e de $\overset{2}{\wedge} R_o$ dont l'image dans $\overset{2}{\underset{\mathbb{R}}{\wedge}} \mathbb{C}$ est un multiple positif de $i \wedge 1$. Si $\alpha : R_o/n\, R_o \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^2$ est un représentant de $\bar{\alpha}$, $\det(\alpha) = \overset{2}{\wedge}\alpha(e)$ est un élément de $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^*$ dont la classe $\mu(R_o, \alpha)$ mod $\det(H)$ ne dépend que de $\bar{\alpha}$.

(1.2.5) Soit f une forme modulaire holomorphe de poids k et niveau K (K comme en 1.2.3). D'après (1.2.4.1), f est déterminée par la famille de fonctions $f(z, \sigma)$ $(z \in X^{\pm}, \sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/n))$, définie par

$$f(z; \sigma) = f((z, 1), \sigma)$$

Les propriétés de variance de f s'écrivent

(1.2.5.1) $f(z; \sigma) = f(z; h\sigma)$ pour $h \in H$;

(1.2.5.2) $f(z; \sigma) = (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}; \sigma \circ \tilde{\gamma})$ pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$,

et $\tilde{\gamma}$ sa réduction mod n.

La forme f est aussi déterminée par la famille des restrictions au demi-plan de Poincaré X des $f(z, \sigma)$, (1.2.5.2) ne devant plus être vérifié que pour $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Soit $\sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/n)$ et $\Gamma_\sigma \subset SL(2, \mathbb{Z})$ l'image réciproque de $\sigma^{-1}H\sigma$. Les conditions (1.2.5.1) et (1.2.5.2) impliquent

(1.2.5.3) $f(z; \sigma) = (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}, \sigma)$ pour $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\sigma$.

Réciproquement, si Σ est une partie de $GL(2, \mathbb{Z}/n)$ qui s'envoie bijectivement sur $\det H \backslash (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, f est uniquement déterminée par les $f(z, \sigma)$ $(z \in X; \sigma \in \Sigma)$, soumis à (1.2.5.3). En particulier, si $\det : H \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est surjectif, f est uniquement déterminée par $f(z) = f(z; 1)$ $(z \in X)$, soumise à (1.2.5.3) (pour $\sigma = 1$)

Variante. Soit $SG_{\mathbb{A}} = SG \times SL(2, \mathbb{A}^f)$. Soient $\widetilde{SG}_2$ le revêtement double de SG quotient du revêtement universel (1.1.8). Soit $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ le revêtement double de $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ (extension centrale par $\mathbb{Z}/2$). On sait que pour presque tout p $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ splitte au-dessus de $SL(2, \mathbb{Z}_p)$. Un produit restreint $SG'_{\mathbb{A}} = \widetilde{SG}_2 \times \prod_p SL(2, \mathbb{Q}_p)$ est donc défini, et est un revêtement de groupe $\sum_v (\mathbb{Z}/2)$ de $SG_{\mathbb{A}}$. Soit $\widetilde{SG}_{\mathbb{A}}$ le revêtement double qui s'en déduit, via l'application somme $\sum_v \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$. Un revêtement double de $SL(2, \mathbb{A})$ agit à droite sur $\widetilde{SG}_{\mathbb{A}}$. On sait (C.C. Moore, Publ. Math. IHES 35) que ce revêtement splitte au-dessus de $SL(2, \mathbb{Q})$, de sorte qu'une action à droite de $SL(2, \mathbb{Q})$ est définie. De même un revêtement double de $SL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{A}^f)$ agit à gauche. Pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et K un sous-groupe compact ouvert du revêtement double induit de $SL(2, \mathbb{A}^f)$ une forme modulaire holomorphe de poids k et niveau K est une fonction sur $\widetilde{SG}_{\mathbb{A}}$

(a_6) vérifiant une condition d'holomorphie

$({}_{\infty}b_6)$ telle que $f(\lambda g) = \lambda^{-k} f(g)$ $(\lambda \in \widetilde{U}_1)$,

$({}_{f}b_6)$ telle que $f(\varkappa g) = f(g)$ $(\varkappa \in K)$,

(c_6) telle que $f(g\gamma) = f(g)$ $(\gamma \in SL(2, \mathbb{Q}))$,

(d_6) et à croissance modérée comme fonction de g_{∞} .

Le quotient $\widetilde{SG}_{\mathbb{A}}/SL(2, \mathbb{Q})$ est connexe; ces formes s'identifient à des fonctions holomorphes sur X .

Identifions comme en 1.1.2 $\widetilde{SG}_{\mathbb{A}}$, et le revêtement double précédent de $SL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{A}^f)$, à un revêtement double $\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})$ de $SL(2, \mathbb{A})$. Il est possible de faire agir sur l'espace L des fonctions sur $\widetilde{SG}_{\mathbb{A}}/SL(2, \mathbb{Q})$ un groupe plus gros que $\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})$: $GL(2, \mathbb{Q})$ agit par conjugaison sur SL_2 , donc par transport de structure sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})$, et ceci permet de définir un groupe $GL(2, \mathbb{Q}).\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})$ contenant $GL(2, \mathbb{Q})$ et $\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})$, l'intersection des deux étant $SL(2, \mathbb{Q})$. On a alors

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})/SL(2, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} GL(2, \mathbb{Q}).\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})/GL(2, \mathbb{Q}) ,$$

de sorte que $GL(2, \mathbb{Q}).\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})$ agit sur L (en fait via $GL(2, \mathbb{Q}).\widetilde{SL}(2, \mathbb{A})/\mathbb{Q}^*$).

1.3 Pointes.

(1.3.1) Soit f une forme modulaire holomorphe de poids k et niveau n , décrite comme en 1.2.5 par des fonctions

$$f(z;\ \sigma) \qquad (z \in X,\ \sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/n)) \ .$$

D'après (1.2.5.3), on a $f(z+n;\ \sigma) = f(z;\ \sigma)$. Posons $q^{\lambda} = e^{2\pi i \lambda z}$. Les $f(z;\ \sigma)$ ont alors un développement en série de Fourier

$$(1.3.1.1) \qquad f(z;\ \sigma) = \sum_{\lambda} a(\lambda,\ f,\ \sigma) q^{\lambda} \qquad (\lambda \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}) \ .$$

On vérifie aussitôt que la condition de croissance (d_4) équivaut à

$$(1.3.1.2) \qquad a(\lambda,\ f,\ \sigma) = 0$$

pour $\lambda < 0$. On dit que f est <u>parabolique</u> si les $a(0,\ f,\ \sigma)$ sont nuls, i.e. si les $f(z,\ \sigma)$ sont "nulles aux pointes" .

On a

$$a(0,\ f,\ \sigma) = \int_{\mathbb{R}/n\mathbb{Z}} f(z+u)\ \frac{du}{n} \ ,$$

d'où l'écriture adélique:

<u>Rappel</u> 1.3.2. <u>Soit</u> U <u>le sous-groupe unipotent inférieur</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$. <u>La forme</u> f <u>est parabolique si et seulement si on a</u>

$$(1.3.2.1) \qquad f_P(g) = \int_{U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}}} f(g\ u)\ du = 0 \ .$$

Soit P le sous-groupe triangulaire inférieur. On a

$f_P(gp) = f_P(g)$ pour $p \in P(\mathbb{Q})U(A)$

$f_P(\lambda g) = \lambda^{-k} f_P(g)$

$f_P(\varkappa g) = f_P(g)$ pour $\varkappa \in K_n$.

Dès lors, pour vérifier que $f_P(g)$ est nul, il suffit de le vérifier pour $g \in$ (l'image de X dans G par $z \longmapsto (z,1)) \times GL(2, \hat{\mathbb{Z}})$, et on trouve la condition écrite ci-dessus.

Bien entendu, (1.3.2.1) sera vrai pour tout sous-groupe unipotent de $GL(2,\mathbb{Q})$, puisque ceux-ci sont tous conjugués.

(1.3.3) Soient f_1 et f_2 deux formes modulaires holomorphes de poids k avec f_1 parabolique. Soit n tel qu'elles soient de niveau n . La fonction $\Phi(g) = f_1(g)\,\overline{f_2(g)}$ sur $G_{\mathbb{A}}/GL(2,\mathbb{Q})$ vérifie $\Phi(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x\end{pmatrix}g) = \|x\|^{2k}\,\Phi(g)$ de sorte que

$$\|\det(g)\|^{-k}\, f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

est invariant sous le centre $Z_{\mathbb{A}}$. On pose

$$< f_1,f_2> \;=\; \int_{Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}/GL(2,\mathbb{Q})} \|\det(g)\|^{-k}\, f_1(g)\,\overline{f_2(g)}\,dg \quad .$$

C'est le <u>produit scalaire de Petersson</u> , invariant à gauche sous $GL(2,\mathbb{A})$. D'après (1.1.5.2), il s'écrit à une constante indépendante de k et n près

$$<f_1,f_2> = \frac{1}{\# GL(2,\mathbb{Z}/n)} \sum_{\sigma\in\Sigma} \int_{X/\Gamma} y^{-k-2} f_1(z;\sigma)\,\overline{f_2(z;\sigma)}\,dz\,d\bar{z}$$

où $\Gamma = \mathrm{Ker}(SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow SL(2,\mathbb{Z}/n))$ et où det envoie $\Sigma\subset GL(2,\mathbb{Z}/n)$ bijectivement sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Si D est un domaine fondamental pour $SL(2,\mathbb{Z})$, on peut encore écrire

$$< f_1,f_2> \;=\; \frac{1}{\# GL(2,\mathbb{Z}/n)} \sum_{\sigma} \int_D y^{-k-2}\, f_1(z;\sigma)\,\overline{f_2(z;\sigma)}\,dz\,d\bar{z}$$

où σ parcourt tout $GL(2,\mathbb{Z}/n)$. Sous cette forme, il est clair que l'intégrale converge dès que f_1 est parabolique car, pour D le domaine standard, f_1 décroit au moins en $e^{-y/n}$ sur D pour $y \longrightarrow \infty$, alors que f_2 est bornée.

§ 2. Formes modulaires et spectre de GL(2)

2.1. Formes modulaires holomorphes et représentations de $GL(2, \mathbb{R})$

(2.1.1) Soit $s \in GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ la conjugaison complexe et reprenons les notations de 1.1.5. Pour tout entier $k \geq 1$, nous noterons D_{k-1} la représentation admissible irréductible suivante de $GL_{\mathbb{R}}(C)$:

(a) D_{k-1} a une base e_n indexée par les entiers $n \equiv k \pmod 2$ tels que $|n| \geq k$

(b) Les actions de $gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et de $(\mathbb{C}^* \cup s\,\mathbb{C}^*) \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ vérifient

(b1) $\lambda * e_n = \lambda^k(\lambda\,\bar{\lambda}^{-1})^{\frac{n-k}{2}}\, e_n \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$

(b2) $s * e_n = e_{-n}$

(b3) $H * e_n = n.e_n$ (résulte de (b1))

(b4) $X * e_n = \frac{k+n}{2}\, e_{n+2} \qquad (0 \text{ si } n = -k)$

(b5) $Y * e_n = \frac{k-n}{2}\, e_{n-2} \qquad (0 \text{ si } n = k)$

Soit f une fonction sur G qui vérifie $f(\lambda g) = \lambda^{-k} f(g)$, i.e. $\lambda * f = \lambda^k f$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^* \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. On vérifie sur les formules (1.1.5.2) que f est holomorphe si et seulement si $Y * f = 0$. Pour f holomorphe, posons

$$e_n = \frac{(k-1)!}{((n+k-2)/2)!}\, X^{\frac{n-k}{2}} * f \qquad (n \geq k\ ,\ n \equiv k \pmod 2)$$

$$e_{-n} = s * e_n$$

On a $e_k = f$, et les e_n vérifient les formules (b). La fonction f engendre donc une représentation admissible irréductible de $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, de type D_{k-1} . A un facteur près, c'est l'unique vecteur de cette représentation qui vérifie $Y * f = 0$. On vérifie facilement une réciproque.

Soit $\mathfrak{F}(G, GL(2, \mathbb{Z}))$ l'ensemble des fonctions C^∞ à croissance modérée sur G , invariantes à droite sous $GL(2, \mathbb{Z})$.

La définition 1.1.4 peut se reformuler comme suit.

Scholie 2.1.2 L'ensemble des formes modulaires holomorphes de poids k de groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ s'identifie, par $\varphi \longmapsto \varphi(e_k)$, à l'ensemble des homomorphismes de représentations

$$\mathrm{Hom}_{Gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})}(D_{k-1}, \mathfrak{F}(G, GL(2, \mathbb{Z}))) .$$

"Homomorphisme de représentations" signifie application linéaire qui commute aux actions de K et $gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.

Dans le cadre adélique, soit de même $\mathfrak{F}(G_{\mathbb{A}})$ l'ensemble des fonctions sur $G_{\mathbb{A}}$, invariantes à droite sous $GL(2, \mathbb{Q})$, à gauche sous un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit et C^{∞} à croissance modérée en g_{∞} . On a encore

Scholie 2.1.3 L'ensemble des formes modulaires holomorphes de poids k (1.2.2) s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{Gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})}(D_{k-1}, \mathfrak{F}(G_{\mathbb{A}}))$$

Remarque 2.1.4. L'espace $\mathfrak{F}(G, GL(2, \mathbb{Z}))$ ci-dessus est stable par produit. D'autre part, $D_{k-1} \otimes D_{\ell-1}$ contient les $D_{k+\ell+2m-1}$ $(m \geq 0)$. Pour $m = 0$, ceci correspond au fait que le produit fg d'une forme modulaire holomorphe de poids k par une de poids ℓ en est une de poids $k+\ell$. Pour $m = 1$, en coordonnées (1.5.2), on trouve que $\ell \frac{\partial f}{\partial z}.g - kf.\frac{\partial g}{\partial z}$ est modulaire holomorphe de poids $k+\ell+2$, et ainsi de suite. De même dans le cadre adélique.

Variante 2.1.5 Lorsque, dans les considérations précédentes, on remplace D_{k-1} par une autre représentation admissible irréductible, munie d'un vecteur cyclique, on trouve les différents types de formes modulaires non holomorphes de Mass.

(2.1.6) La remarque ci-dessous est l'analogue, pour $GL(2, \mathbb{R})$ et les D_{k-1} , du théorème d'existence et d'unicité du modèle de Kirillov étudié aux numéros suivants.

Proposition 2.1.7 A un facteur près, il existe sur G une et une seule fonction f_k holomorphe, à croissance modérée, telle que $f_k(\lambda g) = \lambda^{-k} f_k(g)$, et telle que

$$f_k\left(g\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i u} \cdot f_k(g) \quad . \qquad (u \in \mathbb{R},\ g \in G) \quad .$$

On a, dans le système de coordonnées (1.1.5.2)

$$(2.1.7.1) \qquad f_k(\lambda, z) = \begin{cases} \lambda^{-k}\, e^{2\pi i z} & \text{pour } \mathfrak{Im}(z) > 0 \ , \\ 0 & \text{pour } \mathfrak{Im}(z) < 0 \ . \end{cases}$$

L'analogue de 2.1.7 pour toutes les représentations admissibles irréductibles de dimension infinie tant de $GL(2, \mathbb{R})$ que de $GL(2, \mathbb{C})$ figure dans [9] §§ 5 et 6 ou [15] Ch. VIII.

2.2 Modèle de Kirillov et nouveau vecteur.

Soient F un corps local non archimédien, ψ un caractère additif non trivial de F et $\pi : GL(2, F) \longrightarrow GL(V)$ une représentation admissible irréductible de $GL(2, F)$. Nous désignerons aussi par π une uniformisante; ce ne devrait pas créer de confusion. L'entier $n(\psi)$ est le plus grand entier n tel que $\psi|\pi^{-n}\mathcal{O}$ soit trivial.

Les énoncés qui suivent seront purement algébriques. On peut donc prendre pour V un espace vectoriel sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0 , ψ étant à valeurs dans les racines de l'unité de k .

Proposition 2.2.1. Si V est de dimension finie, V est de dimension un et il existe un quasi-caractère χ de F^* tel que $\pi(g) = \chi(\det g)$.

En effet, $\mathrm{Ker}(\pi)$ est un sous-groupe distingué ouvert de $GL(2, F)$, donc contient $SL(2, F)$.

<u>Théorème</u> 2.2.2. <u>Si</u> V <u>est de dimension infinie, il existe une forme linéaire</u> $L \neq 0$ <u>sur</u> V, <u>unique à un facteur près, telle que</u>

$$L(\pi\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix} v) = \psi(u)\, L(v) \quad .$$

Une démonstration conceptuelle de ce théorème, et une généralisation pour $GL(n)$, figurent dans [5], Th. 4 et 5.

Soit W l'espace des fonctions f sur $GL(2, F)$ telle que

(a) $f(\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}g) = \psi(u)\, f(g)$;

(b) pour κ dans un voisinage assez petit de e, $f(g\,\kappa) = f(g)$.

On fait agir $GL(2, F)$ sur W par translations à droite.

Par réciprocité de Frobenius, le théorème 2.2.2 permet, d'une et d'une seule façon (à un facteur près), de réaliser π dans un sous-espace $W(\pi)$ de W : à $v \in V$, on associe

$$v(g) = L(\pi(g).v) \quad .$$

$W(\pi)$ est le <u>modèle de Whittaker</u> de π. Il ne dépend que de la classe d'isomorphie de π. Dans le modèle de Whittaker, on a $L(v) = v(e)$.

<u>Proposition</u> 2.2.3. <u>Soit</u> P <u>le sous-groupe</u> $\begin{pmatrix}* & 0\\ * & *\end{pmatrix}$ <u>de</u> $GL(2, F)$. <u>L'application de restriction, de</u> $W(\pi)$ <u>dans les fonctions sur</u> P, <u>est injective.</u>

Utilisant l'unicité de L, on montre que le noyau est formé de vecteurs invariants sous $\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & 1\end{pmatrix}$, donc (2.2.5 ci-dessous) par $SL(2, F)$.

Voir [5] Th. 6 pour une généralisation à $GL(n)$.

Puisque π est irréductible, le centre de $GL(2, F)$ agit scalairement: il existe un quasi-caractère ω_π de π tel que

$$\pi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \omega_\pi(a) \quad .$$

Dans la proposition précédente, on peut donc remplacer P par le sous-groupe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ de $GL(2, F)$. On note $\mathcal{K}(\pi)$ l'ensemble des fonctions sur F^* de la forme $L(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}v)$ pour $v \in V$. Le groupe $GL(2, F)$ agit sur $\mathcal{K}(\pi)$ par transport de structure, à partir de son action sur V . C'est le <u>modèle de Kirillov</u> de π . Dans ce modèle, on a par construction

$$(2.2.3.1) \qquad \pi\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} f = \omega_\pi(a) \quad \psi(a^{-1}bx) \qquad f(a^{-1}dx)$$

<u>Théorème</u> 2.2.4(i) <u>Les fonctions dans</u> $\mathcal{K}(\pi)$ <u>sont localement constantes, et leur support est relativement compact dans</u> F .

(ii) <u>L'espace</u> $\mathcal{S}(F^*)$ <u>des fonctions localement constantes à support compact dans</u> F^* <u>est contenu dans</u> $\mathcal{K}(\pi)$, <u>et de codimension finie</u> (0, 1 ou 2) <u>dans</u> $\mathcal{K}(\pi)$

Le résultat difficile est la codimension finie. Le § 2 de Godement-Jacquet [7] en fournit une démonstration conceptuelle.

<u>Lemme</u> 2.2.5 <u>Soit</u> G'_n <u>le sous-groupe de</u> $SL(2, F)$ <u>engendré par les sous-groupes</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{O} & 1 \end{pmatrix}$ <u>et</u> $\begin{pmatrix} 1 & \pi^n\mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) <u>Pour</u> $n > 0$, G'_n <u>est le sous-groupe de</u> $SL(2, \mathcal{O})$ <u>formé des</u> $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ <u>tels que</u> c, $a-1$ <u>et</u> $d-1 \equiv 0 \pmod{\pi^n}$.

(ii) <u>Pour</u> $n = 0$, $G'_n = SL(2, \mathcal{O})$.

(iii) <u>Pour</u> $n < 0$, $G'_n = SL(2, F)$.

C'est bien connu; indiquons seulement que (i) résulte de l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{1+uv} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-u}{1+uv} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+uv} & 0 \\ 0 & 1+uv \end{pmatrix} .$$

Théorème 2.2.6. *Soit* π *une représentation admissible irréductible de dimension infinie de* $GL(2, F)$. *Soient* α *et* β *deux caractères de* $\mathcal{O}^*$ *tels que* $\alpha\beta = \omega_\pi$

(i) *Il existe des vecteurs non nuls* $v \in V$, *tels que*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} v = \alpha(a)\ \beta(d).\ v \qquad (a,\ d \in \mathcal{O}^* ,\ b \in \mathcal{O})$$

(ii) *Soit* n *le plus petit entier tel qu'il existe* v *comme en* (i), *invariant par les* $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *pour* $c \in \pi^n \mathcal{O}$. *Alors* n *est au moins égal au conducteur de* $\alpha\beta^{-1}$, *en particulier* $n \geq 0$.

(iii) *Soit* G_k *le sous-groupe de* $GL(2, F)$

$$G_k = \begin{cases} GL(2,\ \mathcal{O}) & \text{si } k = 0 \\ \{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid a,\ d \in \mathcal{O}^* ,\ b \in \mathcal{O},\ c \in \pi^k \mathcal{O}\} & \text{si } k \geq 1 . \end{cases}$$

Pour $k \geq n$, *l'espace* X_k *des* $v \in V$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} v = \alpha(a)\ \beta(d)\ v \quad \text{pour} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_k$$

est de dimension $k-n+1$, *somme directe des droites* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{-i} \end{pmatrix} X_n$ $(0 \leq i \leq k-n)$.

Prenons ψ tel que $n(\psi) = 0$. Dans le modèle de Kirillov, la condition de (i) signifie alors que v , identifié à une fonction $v(x)$ sur F^* , est à support dans $\mathcal{O}$ et vérifie $v(dx) = \beta(d)\ v(x)$. L'assertion (i) résulte donc de 2.2.3 ($\mathcal{S}(F^*) \subset \mathcal{K}(\pi)$); (ii) résulte de 2.2.5.

La transformation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^i \end{pmatrix}$ transforme vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & \pi^k\mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-invariants en vecteur invariants sous le groupe $\begin{pmatrix} 1 & \pi^{k-i}\mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (plus gros, si $i \geq 0$). Dans le modèle de Kirillov, elle transforme fonctions à support dans $\pi^{\ell}\mathcal{O}$ en fonctions à support dans $\pi^{\ell-i}\mathcal{O}$ (plus grand, si $i \geq 0$). La définition de n donne

$$X_n \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^i \end{pmatrix} X_{n+i-1} = 0 \quad , \text{ soit}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi^{-i} \end{pmatrix} X_n \cap X_{n+i-1} = 0 \quad .$$

Il reste à prouver que $\dim X_k \leq \dim X_{k-1} + 1$. Nous prouverons que

$$\dim(X_k / \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{-1} \end{pmatrix} X_{k-1}) \leq 1 \quad .$$

Soient en effect $x, y \in X_k$. Dans le modèle de Kirillov, les restriction de x et y à $\mathcal{O}^*$ sont nécessairement proportionnelles:
il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda x + \mu y$ soit à support dans $\pi\mathcal{O}$. Dès lors, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} (\lambda x + \mu y)$ vérifie encore la condition (i) du théorème, donc est dans X_{k-1} , d'où l'assertion.

Définition 2.2.7. Soit π admissible irréductible de dimension infinie et appliquons 2.2.6. aux caractères ω_π et 1. L'entier n de 2.2.6 (ii) est le conducteur de π . Le vecteur v , unique à un facteur près, invariant par les $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ($d \in \mathcal{O}^*$, $b \in \mathcal{O}$, $c \equiv 0(\pi^n)$, $a \equiv 1(\pi^n)$) est le nouveau vecteur de la représentation.

Remarque 2.2.7.1 Dans le modèle de Kirillov, le nouveau vecteur v est représenté par une fonction $v(x)$, à support dans $\pi^{-n(\psi)}\mathcal{O}$, ne dépendant que de la valuation de x , et non nulle sur $\pi^{-n(\psi)}\mathcal{O}^*$. Ce dernier point résulte de la minimalité de n : considérer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} v$.

Des arguments standards fournissent les corollaires suivants.

Corollaire 2.2.8. Pour les représentations admissibles irréductibles de $GL(2, F)$, le corps de définition d'une représentation π [plus petit corps k_o tel que π

<u>soit isomorphe à</u> π^σ <u>pour</u> $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{k}/k_o)$] <u>est aussi le plus petit corps sur lequel la représentation puisse s'écrire.</u>

C'est le corps de définition de l'idéal de l'algèbre du groupe qui annule le nouveau vecteur.

<u>Corollaire</u> 2.2.9 <u>Soient</u> α <u>et</u> β <u>deux caractères de</u> $\mathcal{O}^*$, n <u>le conducteur de</u> $\alpha\beta^{-1}$, G_n <u>comme en</u> 2.2.6 <u>et</u> $\mathcal{H}$ <u>l'algèbre (pour le produit de convolution) des fonctions localement constantes à support compact sur</u> $GL(2, F)$ <u>telles que, pour</u> $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ <u>et</u> $\gamma' \in \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ <u>dans</u> G_n , $f(\gamma g \gamma') = \alpha(a)\beta(d)f(g)\alpha(a')^{-1}\beta(d')^{-1}$.
<u>L'algèbre</u> $\mathcal{H}$ <u>est commutative.</u>

Ce corollaire figure dans Silberger - Proc. AMS 1959 p. 437-440. Pour le déduire de ce qui précède, il faut utiliser que les vecteurs K-finis de toute représentation unitaire irréductible de $GL(2, F)$ forment une représentation admissible.

2.3 Modèle de Kirillov et opérateur de Hecke.

Les calculs de ce numéro sont identiques aux calculs classiques donnant l'action des opérateurs de Hecke sur les développements aux pointes des formes modulaires. La raison en est expliquée en 2.5.

Soit $\pi : GL(2, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow GL(V)$ une représentation admissible de $GL(2, \mathbb{Q}_p)$. Posons $K = GL(2, \mathbb{Z}_p)$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ et soit φ la fonction caractéristique de la double classe $K a K$. Cette double classe est la somme disjointe des classes à droites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & p \end{pmatrix} K \quad (i \in \mathbb{Z}/p) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K \quad .$$

L'<u>opérateur de Hecke</u> T_p est la convolution avec $\frac{1}{p}\varphi$. C'est la composition de la projection $\int \pi(k)\, v\, dk$ de V dans V^K et d'un endomorphisme de V^K

Supposons que π soit admissible irréductible de dimension infinie et que $V^K \neq 0$. Si v_o est le nouveau vecteur de V , alors v_o engendre V^K et $T_p v_o = \lambda\, v_o$ pour un scalaire λ . Soit ψ un caractère additif de $\mathbb{Q}_p$, de conducteur 0 (i.e. $\mathbb{Z}_p = \mathrm{Ker}(\psi)$). Dans le modèle de Kirillov correspondant, $v_o(x)$ est une fonction F_o de la valuation de x $(x \in F^*)$, à support dans $\mathfrak{O}$. On a

$$T_p\, v_o(x) = \frac{1}{p} \sum_{i \in \mathbb{Z}/p} \psi(ix)\, v_o(px) + \frac{1}{p}\, \omega_\pi(p)\, v_o(p^{-1}x)$$

$$= \text{restriction à } \mathfrak{O} \text{ de } [v_o(px) + \frac{1}{p}\, \omega_\pi(p)\, v_o(p^{-1}x)] \; .$$

En termes de la fonction F_o , supposée normalisée de sorte que $F_o(0) = 1$,

$$\lambda\, F_o(n) = F_o(n+1) + \frac{1}{p}\, \omega_\pi(p)\, F_o(n-1) \qquad \text{pour } n \geq 0 \text{ , soit}$$

$$\sum_{n \geq 0} F_o(n)\, t^n = \frac{1}{1 - \lambda t + p^{-1}\omega_\pi(p) t^2}$$

2.4 <u>Formes nouvelles d'Atkin-Lehner</u> [1].

(2.4.1) Soit $\mathfrak{a}^o(k)$ l'espace des formes modulaires holomorphes paraboliques de poids k. C'est une représentation admissible de $GL(2, \mathbb{A}^f)$ et il résulte facilement de l'existence du produit scalaire de Petersson que c'est une somme directe (algébrique) de représentations admissibles irréductibles de $GL(2, \mathbb{A}^f)$.

Soit $V \subset \mathfrak{a}^o(k)$ une sous-représentation irréductible. Le centre de $GL(2, \mathbb{A}^f)$ agit sur V par un quasi-caractère ω . Les quasi-caractères x^k de $\mathbb{R}^*$ et ω définissent un quasi-caractère de $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Le quasi- caractère ω est donc déterminé par sa restriction à $\hat{\mathbb{Z}}^*$, assujettie à vérifier

$$\omega(-1) = (-1)^k \; .$$

La représentation π de $GL(2, \mathbb{A}^f)$ sur V est un produit tensoriel restreint (0.2.3) de représentations admissibles irréductibles de dimension infinie

π_p des groupes locaux $GL(2, \mathbb{Q}_p)$:

$$V = \otimes_p V_p .$$

Pour chaque p , soit v_p un nouveau vecteur pour π_p (on suppose que pour presque tout p , ces v_p coincident avec les vecteurs utilisés pour définir le produit tensoriel restreint (0.2.3)). On dit que $v = \otimes v_p$ (bien défini à un facteur près) est la <u>nouvelle forme</u> de V . Une forme $f \in \mathfrak{A}^o(k)$ est <u>nouvelle</u> si elle engendre une sous-représentation irréductible de $\mathfrak{A}^o(k)$ et en est une nouvelle forme. Son <u>conducteur</u> est le produit $n = \prod_p p^{f_p}$ où f_p est le conducteur de π_p .

<u>Scholie</u> 2.4.2. <u>L'application qui à une nouvelle forme</u> f <u>associe la représentation de</u> $GL(2, \mathbb{A}^f)$ <u>qu'elle engendre est une bijection de l'ensemble des nouvelles formes (à un facteur près) avec l'ensemble des sous-représentations irréductibles de</u> $\mathfrak{A}^o(k)$.

(2.4.3) Soient f une nouvelle forme de conducteur n , et ω le <u>caractère</u> de f , i.e. le caractère de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ défini par la représentation correspondante. Par définition, pour

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(2, \hat{\mathbb{Z}}) \quad , \text{ avec } \quad c \equiv 0 \pmod{n}$$

on a

(2.4.3.1) $\qquad \gamma f = \omega(a) f$

D'après 1.2.5, une forme f vérifiant 2.4.3.1 s'identifie à une famille $f(z; \sigma)$ $(\sigma \in GL(2, \mathbb{Z}(n))$ de fonctions sur le demi-plan de Poincaré, vérifiant (1.2.5.2) et

$$f(z; \gamma^{-1} \sigma) = \omega(a) f(z; \sigma)$$

pour γ comme plus haut.

Cette famille est déterminée par la seule fonction $f(z) = f(z; 1)$, sur le demi-plan de Poincaré X , vérifiant

(2.4.3.2) $\quad f(z) = (cz+d)^{-k}\ \omega(a)^{-1}\ f(\frac{az+b}{cz+d})$

pour $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, $c \equiv 0 \pmod n$ (1.2.5).

Si une forme f vérifie (2.4.3.1), on voit, en la décomposant selon les représentations irréductibles dans $\mathfrak{C}^o(k)$ et en appliquant (2.2.6) qu'elle s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de formes

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} f_{\ell,m}$ (ℓ, m entiers ≥ 1 , avec $\ell m | n$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$ est considéré comme dans $GL(2, \mathbb{A}^f)$) avec $f_{\ell,m}$ combinaison linéaire de nouvelles formes de conducteur $\frac{n}{\ell m}$. En termes de fonctions sur X ,

(2.4.3.3) $\quad f(z) = \Sigma\ f_{\ell,m}(\ell z)$

Théorème 2.4.4 Soient k un entier ≥ 1 et ω un caractère de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ tel que $\omega(-1) = k$. Pour que f soit combinaison linéaire de nouvelles formes de poids k , de caractère ω et de conducteur égal à n , il faut et il suffit que f vérifie (2.4.3.2) et que, pour toute nouvelle forme g de poids k , caractère ω et de conducteur $n/\ell m < n$, on ait $< f(z), g(\ell z)> = 0$ (produit scalaire de Petersson).

Dans la décomposition (2.4.3.3), on veut avoir $f_{\ell,m} = 0$ pour $\ell m \neq 1$. Des formes appartenant à des représentations différentes sont orthogonales pour le produit scalaire de Petersson, de sorte que $< f_{\ell,m}(\ell z), f_{\ell',m'}(\ell' z)> = 0$ pour $\ell m \neq \ell' m'$. L'assertion en résulte.

Variante 2.4.5 Soit $\mathfrak{C}^o$ l'espace des fonctions f sur $G_{\mathbb{A}}/GL(2,\mathbb{Q})$ qui sont

(a) C^∞ à croissance modérée en g_∞ ,

(b) invariantes par un sous-groupe ouvert de $GL(2,\mathbb{A}^f)$,

(c) cuspidales: $f_P \doteq 0$ (1.3.2.1).

D'après (2.1.2), la scholie 2.4.2 s'énonce encore en disant que les formes modulaires holomorphes (cuspidales) nouvelles sont en bijection avec les sous-représentations admissibles irréductibles de $\mathcal{C}^o$ de l'un des types $D_{k-1} \otimes \pi_f$ (π_f représentation de $GL(2, \mathbb{A}^f)$, $k \geq 1$) .

Pour avoir les autres, il faut aussi considérer des formes non holomorphes.

(2.4.6) Dans la fin de ce paragraphe, nous expliquons comment s'écrit en termes classiques la représentation de $GL(2, \mathbb{A}^f)$ dans $\mathcal{C}^o(k)$.

Soit $\mathcal{C}_1^o(k)$ l'espace des fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré X , telles que $f|_k \gamma = f$ pour γ dans un sous-groupe de congruence de $SL(2, \mathbb{Z})$, et qui s'annulent aux pointes. Le groupe $GL(2, \mathbb{Q})^+$ des matrices à déterminant positif agit sur $\mathcal{C}_1^o(k)$ par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} f = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) .$$

Le stabilisateur de chaque f contient un sous-groupe de congruence de $SL(2, \mathbb{Z})$, de sorte que l'action se prolonge en une action du complété de $GL(2, \mathbb{Q})^+$ pour la topologie des sous-groupe de congruence de $SL(2, \mathbb{Z})$. Le complété est le sous-groupe $GL(2, \mathbb{A}^f)_1 = GL(2, \mathbb{Q})^+ . SL(2, \hat{\mathbb{Z}})$ de $GL(2, \mathbb{A}^f)$, formé des $g \in GL(2, \mathbb{A}^f)$ de déterminant rationnel positif.

<u>Proposition</u> 2.4.7 <u>La représentation</u> $\mathcal{C}^o(k)$ <u>de</u> $GL(2, \mathbb{A}^f)$ <u>est induite par la représentation</u> $\mathcal{C}_1^o(k)$ <u>de</u> $GL(2, \mathbb{A}^f)_1$.

L'isomorphisme avec la représentation induite s'obtient en associant à $f \in \mathcal{C}^o(k)$ la fonction $f(z; \sigma) = f((z,1), \sigma))$ de $GL(2, \mathbb{A}^f)$ dans $\mathcal{C}_1^o(k)$. On a en effet

$$f(z; \sigma\gamma^{-1}) = \gamma f(z; \sigma)$$

pour $\gamma \in GL(2, \mathbb{Q})^+$, donc aussi dans son complété.

2.5 Développement aux pointes

(2.5.1) Soit ψ le caractère additif de $\mathbb{A}$ trivial sur $\mathbb{Q}$ et sur $\hat{\mathbb{Z}}$, dont la restriction à $\mathbb{R}$ est $e^{-2\pi i u}$. Pour f une fonction sur $G_{\mathbb{A}}/GL(2, \mathbb{Q})$, on pose

$$W_f(g) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} f(g\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix})\ \psi(u)\ du \quad , \quad \text{d'où}$$

$$W_f(g\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}) = \psi(u)^{-1}\ W_f(g) \quad .$$

Puisque W_f est définie par une intégration à droite, l'application $f \longmapsto W_f$ commute aux translations à gauche. Si f est une forme modulaire holomorphe de poids k, W_f sera encore holomorphe en g_∞ , C^∞ à croissance modérée et telle que $W_f(\lambda g) = \lambda^{-k}\ W_f(g)$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$. Dès lors, W_f est produit de la fonction (2.1.7.1) sur $GL(2, \mathbb{R})$ par une fonction W'_f sur $GL(2, \mathbb{A}^f)$. Nous poserons $K'_f(a) = W'_f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$. On a la formule de définition

(2.5.1.1) $$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} f(((z,1),\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix})\begin{pmatrix}1 & \\ u & 1\end{pmatrix})\ \psi(u)\ du = \exp\,(2\pi i z)\ .\ K'_f(a) \quad .$$

2.5.2 Soit $V \subset \mathcal{C}^o(k)$ une sous-représentation irréductible de $GL(2, \mathbb{A}^f)$. Soit $V = \otimes V_p$. On déduit de l'unicité des modèles de Whittaker que $f \longmapsto W_f(g^{-1})$ envoie V sur le produit tensoriel des modèles de Whittaker des V_p (l'ensemble des fonctions sur $GL(2, \mathbb{A}^f)$ combinaisons linéaires de fonctions $\prod_p f_p(g_p)$, où f_p est dans le modèle de Whittaker de V_p et où, pour presque tout p , f_p est la fonction de ce modèle $GL(2, \mathbb{Z}_p)$-invariante et telle que $f_p(e) = 1$). Dès lors, $f \longmapsto K'_f$ envoie V sur le produit tensoriel (au même sens) des modèles de Kirillov des V_p .

(2.5.3) Soit f une forme modulaire de poids k, d'un niveau N , décrite comme en (1.2.5) par des $f(z, \sigma)$ $(z \in X,\ \sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/N))$. Posons $q = \exp(2\pi i z)$ et

(2.5.3.1) $$f(z, \sigma) = \sum_n a(n, f, \sigma)\ q^n \qquad (n \in \mathbb{Q},\ n \geq 0)$$

<u>Proposition</u> 2.5.3.2. <u>Soient</u> $a_o \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ <u>et</u> $n \in \mathbb{Q}$, $n > 0$. <u>On a</u>

$$K'_f(a_o n) = n^{-k}.a(n,\ f,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_o^{-1} \end{pmatrix} \bmod N) \ .$$

Appliquons (2.5.1.1) et intégrons u dans $[0, M] \times \frac{1}{M}\hat{\mathbb{Z}}$. On trouve, pour M assez divisible, que

$$\exp(2\pi i z)\ K'_f(a_o n) = \frac{1}{M}\int_0^M f((z+u,1),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_o^{-1}n^{-1} \end{pmatrix})\ \exp(-2\pi i u)\ du$$

Puisque

$$f((z+u,1),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_o^{-1}n^{-1} \end{pmatrix}) = f((z+u,n),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_o^{-1} \end{pmatrix}) = n^{-k}\ f((\tfrac{z+u}{n},1),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_o^{-1} \end{pmatrix}) \ ,$$

on a encore

$$\exp(2\pi i z)\ K'_f(a_o n) = \frac{1}{M}\int_0^M n^{-k}\ f(\frac{z+u}{n}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_0^{-1} \end{pmatrix} \bmod N)\ \exp(-2\pi i u)\ du$$

et 2.5.3.2 en résulte.

<u>Corollaire</u>:2.5.4 <u>Une forme modulaire holomorphe parabolique de poids</u> k, <u>soit</u> f , <u>est entièrement déterminée par la fonction</u> K'_f <u>sur</u> $\mathbb{A}^f$.

Supposons f de niveau N (ou divisant N). f est alors déterminée par les $f(z;\ \sigma)$ pour σ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_o^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a_o \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, car ces σ ont n'importe quel déterminant. Ceux-ci sont déterminés par leur développement en série de Fourier à la pointe $i\infty$, i.e. par les $a(n,\ f,\ \sigma)$ $(n \in \mathbb{Q})$. Les $a(n,\ f,\ \sigma)$ pour $n \leq 0$ sont nuls, car f est à croissance modérée et parabolique. Pour $n > 0$, ils sont donnés par K'_f .

On notera que, dans ce corollaire, on n'a pas supposé que f soit dans une sous-représentation irréductible donnée de $\mathcal{C}^o(k)$. Cet énoncé, essentiellement global, ne se ramène donc pas à l'énoncé local 2.2.3.

(2.5.5) La démonstration précédente se traduit comme suit en termes adéliques. Tout d'abord, par la formule d'inversion de Fourier, on a pour f parabolique

(2.5.5.1) $$f(g) = \sum_{n \in \mathbb{Q}^*} W_f(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}) .$$

On remarque ensuite que

$$GL(2, \mathbb{R}). \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}. GL(2, \mathbb{Q})$$

est dense dans $GL(2, \mathbb{A})$. f est donc déterminé par la restriction de W_f à $GL(2, \mathbb{R}).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et, appliquant 2.1.7 comme en 2.5.1, on obtient 2.5.4.

Rappelons la démonstration du résultat de densité utilisé: à l'aide des matrices diagonales dont on dispose, et qu'on peut mettre devant, on se ramène à SL_2 . Pour toute place v , $SL(2, \mathbb{Q}_v).SL(2, \mathbb{Q})$ est alors dense dans $SL(2, \mathbb{A})$: pour chaque v' , $SL(2, \mathbb{Q}_{v'})$ est engendré par ses sous-groupes unipotent inférieurs et supérieurs, et ceci ramène au problème analogue pour le groupe additif.

Théorème 2.5.6. Soit S un ensemble fini de nombres premiers. Pour $p \notin S$, soit π_p une représentation admissible irréductible de $GL(2, \mathbb{Q}_p)$. Il existe alors au plus une sous-représentation irréductible $V \subset \mathcal{C}^o(k)$, $V \simeq \otimes_p V_p$, de composantes locales isomorphes aux π_p pour $p \notin S$.

Supposons qu'il en existe une, soit $V \simeq \otimes_p V_p$. Pour $p \notin S$, soit $v_p \in V_p$ le nouveau vecteur de V_p . Pour $p \in S$, soit $v_p \in V_p$ le vecteur de V_p qui, dans le modèle de Kirillov de V_p , s'identifie à la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^*$. L'écriture de v_p dans le modèle de Kirillov est déterminée par π_p pour $p \in S$, (on normalise $v_p(x)$ de telle sorte que $v_p(1) = 1$) . Elle est donnée pour $p \in S$. Dans tout les cas, $v_p(x)$ est une fonction de la valuation de x , est à support dans $\mathcal{O}$, et vaut 1 en 1. Pour tout entier $n > 0$, posons $a(n) = n^k \prod_p v_p(n)$.

Si $f \in \mathcal{C}^o(k)$ est la forme $\otimes_p v_p$, K'_f est connu et, par 2.5.4, f est uniquement déterminée par les $(\pi_p)_{p \notin S}$. Puisque $f \in V$, V est déterminé par ces π_p .

On a $f(z;\sigma) = \Sigma\, a(n)\, e^{2\pi i n z}$ (indépendant de σ)

pour σ de la forme $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, avec $a \in \hat{\mathbb{Z}}^*$.

En termes classiques, le point de cette démonstration est la possibilité de modifier une forme modulaire $f = \Sigma\, a_n q^n$ en une forme modulaire $f = \Sigma\, a'_n q^n$, avec $a'_n = 0$ pour $p | n$ et $p \in S$.

Proposition 2.5.7. Soit $f \in \mathcal{C}^o(k)$ une forme modulaire de niveau N , et

$$f(z;\sigma) = \sum_{\lambda > 0} a(\lambda, f, \sigma)\, q^{\lambda} .$$

Si f engendre une sous-représentation irréductible $V \subset \mathcal{C}^o(k)$ de $GL(2, \mathbb{A}^f)$, et est produit tensoriel de vecteurs des composantes locales, il existe une constante c et des fonctions $a_p(n, f, \sigma_p)$ (n entier, $\sigma_p \in GL(2, \mathbb{Z}/p^{v_p(N)})$) telles que, pour $\lambda > 0$,

$$a(\lambda, f, \sigma) = c.\ \prod_p a_p(v_p(\lambda), f, \sigma_p)$$

(v_p désigne la valuation p-adique et σ_p est la p-composante de $\sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/N) \simeq \prod_p GL(2, \mathbb{Z}/N_p)$).

Ceci exprime que W_f est un produit. En particulier, si $f(z) = \Sigma\, a_n e^{2\pi i n z}$ est une nouvelle forme de poids k , normalisée pour que $a_1 = 1$,

a) $a_{nm} = a_n a_m$ pour $(n, m) = 1$

b) si p ne divise pas le conducteur de f , f est vecteur propre de T_p (2.3).

Posons $p^k.T_p f = \lambda f$ et $\omega = \omega_k.\varepsilon$. On a (2.3) et (2.5.3.2)

$$\sum_n a_{p^n} t^n = \frac{1}{1 - \lambda\, t + p^{k-1}\varepsilon_p(p) t^2}$$

c) f est uniquement déterminée par ω et par les a_p pour presque tout p (traduction de 2.5.6).

L'analogue de b) pour p divisant le conducteur est traité dans le même esprit dans Casselman [3]; cf. 3.2.

3. Corps de classe local et représentations de $GL(2, F)$

3.1. Préliminaires.

3.1.1 Dans ce paragraphe, nous ferons usage des notations et des résultats des §§ 2, 3 et 8 de [4] (ce volume).

Soit K un corps local. On sait ce qu'est le groupe de Weil $W(\bar{K}/K)$, relatif à une clôture séparable $\bar{K}$ de K ([4] § 2). Pour K non archimédien, nous avons introduit dans [4] § 8 un "groupe" $W'(\bar{K}/K)$, qui n'interviendra que via la catégorie de ses représentations. Par définition, une représentation de $W'(\bar{K}/K)$ sur un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0 consiste en

(a) une représentation $\sigma : W(\bar{K}/K) \longrightarrow GL(V)$ (triviale sur un sous-groupe ouvert du groupe d'inertie I);

(b) un endomorphisme nilpotent N de V, tel que

$$w N w^{-1} = \omega_1(w).N \qquad (w \in W(\bar{K}/K)) .$$

Rappelons que ω_1 est le quasi-caractère non ramifié donnant l'action de $W(\bar{K}/K)$ sur les racines de l'unité, et que $\omega_n(x) = \omega(x)^n$. Les Frobenius géométriques F vérifient $\omega_1(F) = \frac{1}{q}$. Via l'isomorphisme de la théorie du corps de classe local (normalisé pour transformer Frobenius géométriques en uniformisantes), il s'identifie à la valeur absolue normalisée.

Soit E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ $(\ell \neq p)$. L'ensemble des classes d'isomorphie de représentations de $W'(\bar{K}/K)$ sur E_λ est en bijection canonique avec l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations λ-adiques de $W(\bar{K}/K)$. Ceci est la raison d'être de $W'(\bar{K}/K)$.

Nous aurons exclusivement à considérer des représentations F- semi-simples ([4] 8.6) de $W'(\overline{K}/K)$ (les Frobenius sont semi-simples). Pour unifier le langage, si K est archimédien et que $k = \mathbb{C}$, nous définisons une représentation F-semi-simple de $W'(\overline{K}/K)$ comme étant une représentation semi-simple du groupe de Lie $W(\overline{K}/K)$.

Dans la fin de ce numéro, on suppose K non archimédien.

3.1.2 On définit de façon évidente sommes, quotients et produits tensoriels de représentations de $W'(\overline{K}/K)$. Ainsi

$$(\sigma', N') \otimes (\sigma'', N'') = (\sigma' \otimes \sigma'', N' \otimes 1 + 1 \otimes N'') .$$

Soit $sp(n)$ la représentation (σ, N) suivante de $W(\overline{K}/K)'$ sur $\mathbb{Q}$

- L'espace de la représentation est $\mathbb{Q}^n$. On note $e_i (0 \leq i < n)$ la base canonique
- $\sigma(w)e_i = \omega_i(w)e_i$
- $N e_i = e_{i+1}$ $(0 \leq i < n)$ et $N e_{n-1} = 0$.

Proposition 3.1.3 (i) *Les représentations irréductibles* (σ, N) *de* $W'(\overline{K}/K)$ *sur* k *sont les* $(\sigma, 0)$ *avec* σ *irréductible.*

(ii) *Les représentations F-semi-simples indécomposables de* $W'(\overline{K}/K)$ *sur* k *sont les* $\rho \otimes sp(n)$ *avec* ρ *irréductible.*

L'assertion (i) résulte de ce que $\mathrm{Im}(N)$ est une sous-représentation.

Soit (σ, N) une représentation F-semi-simple de $W'(\overline{K}/K)$ sur V. L'hypothèse implique que la représentation σ est semi-simple. Pour chaque classe d'isomorphie τ de représentations de $W(\overline{K}/K)$, soient $V(\tau)$ la composante isotypique de type τ de (V, σ), $R(\tau)$ un représentant de τ, $k(\tau)$ le commutant de $R(\tau)$ et $S(\tau) = \mathrm{Hom}_W(R(\tau), V)$. On a

$$V = \bigoplus_{\tau} V(\tau) = \bigoplus R(\tau) \otimes_{k(\tau)} S(\tau) .$$

La représentation (σ, N) est somme directe des sous-représentations $\bigoplus_i V(\tau \otimes \omega_i)$, donc égale à l'une d'elle. Soit $S = \bigoplus_i S(\tau \otimes \omega_i)$. On a $V = R(\tau) \otimes_{k(\tau)} S$. On peut d'une seule façon faire agir $W'(\overline{K}/K)$ sur S , par (σ', N') de sorte que cet isomorphisme soit un isomorphisme de représentations. On a alors $\sigma'(w)|S(\tau \otimes \omega_i) = \omega_i(w)$. , et $N'S(\tau \otimes \omega_i) \subset S(\tau \otimes \omega_{i+1})$. Prenant une base de S adaptée à la décomposition en les $S(\tau \otimes \omega_i)$ et dans laquelle N' soit sous forme de Jordan, on obtient (ii).

<u>Proposition</u> 3.1.4. <u>Supposons</u> k <u>algébriquement clos. Toute représentation irréductible</u> ρ <u>de</u> $W(\overline{K}/K)$, <u>de dimension</u> $n < p$, <u>est induite par un quasi-caractère d'un sous-groupe d'indice</u> n <u>de</u> $W(\overline{K}/K)$.

On fixe p (mais non K), et on procède par récurrence (limitée à p) sur n . Rappelons que la dimension de toute représentation irréductible d'un groupe fini (ou profini) divise l'ordre du groupe. Puisque $n < p$, la restriction à $P \subset I$ de la représentation est somme de représentations de dimension un. Soit χ un caractère de P qui apparaît dans ρ , V^{χ} le sous-espace correspondant de V et $W' \subset W(\overline{K}/K)$ le stabilisateur de χ (ou V^{χ}) . Distinguons deux cas

(a) $W' \neq W$. Alors, ρ est induite par la représentation $W' - V^{\chi}$, à laquelle on applique l'hypothèse de récurrence (W' est de la forme $W(\overline{K}/K)$) .

(b) $W' = W$, donc $V^{\chi} = V$ et $\rho(I)$ est commutatif. Il existe alors un caractère de I qui apparaît dans ρ , et on raisonne comme avant: soit on conclut par récurrence, soit $\rho(W(\overline{K}/K))$ est commutatif, auquel cas $n = 1$.

<u>Exemple</u> 3.1.5. Si $p \neq 2$, les représentations F-semi-simples complexes de dimension deux de $W(\overline{K}/K)$ sont les suivantes.

(a) la somme $[\lambda] \oplus [\mu]$ de deux représentations de dimension 1.

(b) une représentation $[\lambda] \otimes sp(2)$.

(c) une représentation induite par un quasi-caractère d'une extension quadratique de K .

3.2 Représentations de GL(2, K)

Ce numéro est un fascicule de résultats. Des références pour des démonstrations seront données en 3.2.9.

3.2.1 Soit K un corps local. Si π est une représentation de $GL(2, K)$ et ω un quasi-caractère de K^*, nous noterons $\pi \otimes \omega$ la représentation, réalisée dans le même espace, pour laquelle $(\pi \otimes \omega)(g) = \pi(g).\omega(\det g)$, $\check{\pi}$ le dual admissible de π, et ω_π le quasi-caractère de K^* tel que $\pi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}$ soit $\omega_\pi(a)$. : on a

(3.2.1.1) $$\omega_{\pi \otimes \chi} = \omega_\pi \chi^2 \quad \text{et}$$

(3.2.1.2) $$\omega_{\check{\pi}} = \omega_\pi^{-1} \quad .$$

3.2.2. Soient Φ une forme bilinéaire non dégénérée sur K^2 et $g \longmapsto g^{\vee}$ l'automorphisme extérieur de $GL(2, K)$ tel que

$$\Phi(x, g\, y) = \Phi(g^{\vee} x, y) \quad .$$

Pour Φ alternée, on a $g = \det(g)^{-1}.g$.

La représentation duale $\check{\pi}$ est isomorphe à la représentation $g \longmapsto \pi(g^{\vee})$:

(3.2.2.1) $$\check{\pi} \sim (g \longmapsto \pi(g^{\vee}))$$

En particulier,

(3.2.2.2) $$\check{\pi} \sim \pi \otimes \omega_\pi^{-1} \quad .$$

Supposons choisi un caractère additif non trivial ψ, et soit $\mathcal{K}(\pi)$ l'espace du modèle de Kirillov de π. On a

(3.2.2.3) $$\mathcal{K}(\pi \otimes \omega) = \mathcal{K}(\pi).\omega$$

Changer ψ ne modifie pas l'espace $\mathcal{K}(\pi)$. Dans le modèle de Kirillov, la dualité entre π et $\pi \otimes \omega_\pi^{-1}$ est donnée par la formule suivante, pour $v_1 \in \mathcal{K}(\pi)$, $v_2 \in \mathcal{K}(\pi \otimes \omega_\pi^{-1})$ et v_1 ou v_2 dans $\mathcal{S}(F^*)$.

$$(3.2.2.4) \qquad \langle v_1, v_2 \rangle = \int v_1(x)\, v_2(-x)\, d^*x \ .$$

3.2.3. Lorsque K est archimédien ou de caractéristique résiduelle $\neq 2$, et sans doute toujours, il existe une correspondance bijective naturelle entre classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles de $GL(2, K)$ et classes d'isomorphie de représentations F-semi-simples de $W'(\overline{K}/K)$. Il y a plusieurs façons naturelles de normaliser cet isomorphisme, faisant passer de $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ à $\sigma \longmapsto \pi(\sigma) \otimes \omega_k$. Nous supposerons tout d'abord que le corps de base des représentations est $\mathbb{C}$, et décrirons la <u>correspondance unitaire</u> $\sigma \longleftrightarrow \pi_u(\sigma)$, implicitement utilisée dans [7], [9] et [11]. Elle est caractérisée par les propriétés suivantes (en fait, déjà par (E)).

(A) <u>Fonctorialité</u>

(1) $\pi_u(\sigma \otimes \omega) = \pi(\sigma) \otimes \omega$ (twist)

(2) $\omega_{\pi_u(\sigma)} = \det \sigma$ (restriction au centre)

(3) $\pi_u(\check{\sigma}) = \pi_u(\sigma)^{\vee}$ (Automorphismes de $GL(2)$ (cf. 3.2.2.1)).

(B) <u>Série discrète</u>

Dans le cas non archimédien,

$\pi_u(\sigma)$ supercuspidale $\Leftrightarrow$ σ irréductible

$\pi_u(\sigma)$ de la série discrète $\Leftrightarrow$ σ indécomposable

Dans le cas archimédien,

$\pi_u(\sigma)$ de la série discrète $\Leftrightarrow$ σ irréductible (i.e. indécomposable) .

Rappelons qu'une représentation est dite de la série discrète (resp. supercuspidale) si un de ses coefficients (donc tous) est de carré sommable (resp. à support compact) modulo le centre.

(C) Induction

Soit $\mathrm{Ind}(\chi_1, \chi_2)$ la représentation de $GL(2, K)$ induite par deux quasi-caractères χ_1 et χ_2 de K^* (induction unitaire). Pour K non archimédien, les constituants (= quotients de Jordan-Hölder) de $\mathrm{Ind}(\chi_1, \chi_2)$ sont exactement les $\pi_u(\sigma)$, pour σ de semi-simplifiée $[\chi_1] \oplus [\chi_2]$. Dans tous les cas, $\pi_u(\chi_1, \chi_2) =_{\mathrm{dfn}} \pi_u([\chi_1] \oplus [\chi_2])$ est un constituant de $\mathrm{Ind}(\chi_1, \chi_2)$.

(D) Représentations dégénérées

Les représentations de dimension 1 de $GL(2, F)$ sont les $\Pi_u(\chi_1, \chi_2)$ pour $\chi_1 \chi_2^{-1} = \omega_{\pm 1}$.

Pour F réel, et x le plongement de F dans $\mathbb{C}$, les représentations irréductibles de dimension $(n+1)$ de $GL(2, F)$ sont les $\pi_u(\chi_1, \chi_2)$ pour $(\chi_1 \chi_2^{-1})^{\pm 1} = \omega_{-1}.x^n$.

Pour F complexe, et z et $\bar{z}$ les plongements de F dans $\mathbb{C}$, les représentations irréductibles de dimension finie de $GL(2, F)$ sont les $\pi_u(\chi_1, \chi_2)$ pour $(\chi_1 \chi_2^{-1})^{\pm 1} = \omega_{-1}.z^n \bar{z}^m$ $(n, m \geq 0)$.

Dans tous les cas, la représentation unité est $\pi_u(\|x\|^{\frac{1}{2}}, \|x\|^{-\frac{1}{2}})$.

(E) Equation fonctionnelle de Tate

Soient ψ un caractère additif non trivial de K et dx la mesure autoduale de K, relativement à ψ. Sur l'espace $M_2(K)$ des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note encore dx la mesure $da\, db\, dc\, dd$, et pour f de Schwartz-Bruhat sur $M_2(K)$, on pose

$$\hat{f}(y) = \int f(x)\, \psi(\mathrm{Tr}(xy))\, dx$$

Pour π une représentation de $GL(2, K)$ sur V et $f \in \mathcal{S}(M_2(K))$, on note $Z(f, \pi)$ l'endomorphisme de V

$$Z(f, \pi) = \int f(g)\, \pi(g)\, d^*g$$

(d^*g est une mesure de Haar sur $GL(2, F)$). Cette intégrale est définie par prolongement analytique dans la famille de représentations $\pi \otimes \omega_s$, toutes réalisées dans le même espace.

Le quotient

$$\frac{Z(f,\ \pi_u(\sigma) \otimes \omega_s \otimes \omega_{\frac{1}{2}})}{L(\sigma \otimes \omega_s)}$$

est fonction holomorphe de s , et une combinaison linéaire finie de coefficients de ces endomorphismes, pour f variable, est une fonction sans zéro de s . On a l'équation fonctionnelle

$$\frac{{}^t Z(\hat{f}, (\check{\pi}_u(\sigma) \otimes \omega_1) \otimes \omega_{\frac{1}{2}})}{L(\check{\sigma} \otimes \omega_1)} = \epsilon(\sigma,\ \psi,\ dx) \quad \frac{Z(f,\ \pi_u(\sigma) \otimes \omega_{\frac{1}{2}})}{L(\sigma)}$$

(F) <u>Equation fonctionnelle de Hecke</u>

Soient ψ et dx comme en (E), et σ tel que $\pi_u(\sigma)$ soit de dimension infinie.

Pour $\varphi \in \mathcal{K}(\pi(\sigma) \otimes \omega_{-\frac{1}{2}}) = \mathcal{K}(\pi(\sigma)).\omega_{-\frac{1}{2}}$ (3.2.2.3), le quotient

$$\frac{\int_{K^*} \varphi(x)\ \omega_s(x)\ d^*x}{L(\sigma \otimes \omega_s)}$$

est une fonction holomorphe de s (intégrale définie par prolongement analytique en s). Pour φ convenable, cette fonction de s est sans zéro.

Posons $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\varphi \in \mathcal{K}(\pi(\sigma))$, on a l'équation fonctionnelle

$$\frac{\int \omega_1(x)\omega^{-1}(x)\ w\varphi(x).\ \omega_{-\frac{1}{2}}(x).d^*x}{L(\omega_1\ \check{\sigma})} = \epsilon(\sigma,\ \psi,\ dx) \ \frac{\int \varphi(x).\omega_{-\frac{1}{2}}(x)\ d^*x}{L(\sigma)} ,$$

et donc pour tout caractère χ de F^*

$$\frac{\int \omega_1(x)\ \omega_\pi^{-1}(x)\ \chi^{-1}(x).\ w\varphi(x).\omega_{-\frac{1}{2}}(x).d^*x}{L(\omega_1\ \chi^{-1}\ \check{\sigma})} = \epsilon(\sigma\ \chi,\psi,dx)\frac{\int \varphi(x)\ \chi(x).\omega_{-\frac{1}{2}}(x)\ d^*x}{L(\sigma\ \chi)}$$

(G) Nouveau vecteur

On suppose K non archimédien et $\pi_u(\sigma)$ de dimension infinie. Le conducteur de $\pi_u(\sigma)$, défini en 2.2.7, coïncide alors avec le conducteur [4] 8.12.1 de σ .

Soit v_o le nouveau vecteur de $\pi_u(\sigma)$. Dans le modèle de Kirillov, $v_o(x)$ est une fonction F'_o de la valuation de x . Son support est contenu dans $\pi^{-n(\psi)}\mathcal{O}$. Posons $F_o(n) = F'_o(n-n(\psi))$, et normalisons v_o pour que $F_o(0) = 1$. On a

$$\Sigma\ F_o(n)\ q^{-n/2}\ t^{nd} = L(\sigma\otimes\omega^t)\ .$$

Rappelons que $q = p^d$ et que $\omega^t(\pi) = t^d$ $(\omega^{p^{-s}} = \omega_s)$.

(3.2.4) La normalisation choisie de la correspondance $\sigma \longleftrightarrow \pi_u(\sigma)$ a l'avantage de donner lieu à des formules (A) très simples. De (A)(2) résulte aussi que π_u met en correspondance bijective représentations de $PGL(2, K)$ et représentations F-semi-simples de $W'(\overline{K}/K)$ dans $SL(2, \mathbb{C})$.

En contrepartie, cette normalisation conduit à parsemer les formules de $\frac{1}{2}$. Dans le cas non archimédien, le seul où le problème se pose, elle n'est pas invariante par automorphismes de $\mathbb{C}$ si $\sqrt{q}$ n'est pas entier.

(3.2.5) Définissons la correspondance de Tate $\sigma \longmapsto \pi_t(\sigma)$ par $\pi_t(\sigma) = \pi_u(\sigma)\otimes\omega_{\frac{1}{2}}$. On a alors

$A(3)_t$ $\qquad \pi_t(\check{\sigma}\otimes\omega_1) = \check{\pi}_t(\sigma)\otimes\omega_2$.

Soit ψ un caractère additif non trivial de K , dx la mesure de Haar autoduale sur K . On note encore dx la mesure $da\,db\,dc\,dd$ sur $M_2(K)$, et on définit $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(x) = \int f(y)\ \psi(\mathrm{Tr}(xy))dy \quad .$$

L'équation fonctionnelle de Tate prend la forme rationalisée

$$(E)_t \qquad \frac{{}^t Z(\hat{f},\ \check{\pi}_t(\sigma)\otimes\omega_2)}{L(\check{\sigma}\otimes\omega_1)} = \varepsilon(\sigma,\ \psi,\ dx)\ \frac{Z(f,\ \pi_t(\sigma))}{L(\sigma)}$$

(Pour dx quelconque, multiplier le membre de droite par dx/dx').

(C) (Induction) devient: $\pi_t(\chi_1,\ \chi_2)$ figure dans la représentation de $GL(2,\ K)$, par translation à droite, sur l'espace des fonctions sur $GL(2,\ F)$, K-finies à droite, telles que

(5.2.3.1) $$f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} g) = \chi_1\omega_1(a).\chi_2(d).f(g) \quad .$$

(D) (Représentations dégénérées) devient:

a) la représentation unité est $\pi_t(\omega_{-1},\ 1)$.

b) Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et V la représentation évidente de dimension 2,

$$\mathrm{Sym}^n(V) = \pi_t(\omega_{-1}.x^n,\ 1) \qquad \text{(cas réel)}$$

$$\mathrm{Sym}^n(V)\otimes\mathrm{Sym}^m(\overline{V}) = \pi_t(\omega_{-1}.z^n.\bar{z}^m,\ 1) \qquad \text{(cas complexe)}$$

(5.2.6) Définissons la <u>correspondance de Hecke</u> par

$$\pi_h(\sigma) = \pi_u(\sigma)\otimes\omega_{-\frac{1}{2}} = \pi_t(\sigma)\otimes\omega_{-1} \quad .$$

Cette fois, $\pi_h(\chi_1,\ \chi_2)$ figure dans l'espace des fonctions vérifiant

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}) = \chi_1(a).\chi_2(d)\ \omega_{-1}(d)f(g) \quad ,$$

et, avec les notations de (D) ci-dessus, on a

$$(D)_h \qquad 1 = \pi_h(1, \omega_1)$$

$$\mathrm{Sym}^n(V) = \pi_h(x^n, \omega_1) \qquad (K = \mathbb{R})$$

$$\mathrm{Sym}^n(V) \otimes \mathrm{Sym}^m(\bar{V}) = \pi_h(z^n \bar{z}^m, \omega_1) \qquad (K = \mathbb{C}) \quad .$$

L'équation fonctionnelle de Hecke prend la forme simple suivante. Soit ψ un caractère additif non trivial de K et dx autoduale (pour dx quelconque, multiplier le membre de droite par dx'/dx) . Pour φ dans le modèle de Kirillov de $\pi_h(\sigma)$

$$(F)_h \qquad \frac{\int \omega_1(x)\, \omega_\pi^{-1}(x)\, \chi^{-1}(x)\, w\varphi(x)\, d^*x}{L(\omega_1\, \chi^{-1}\, \check{\sigma})} = \varepsilon(\sigma\,\chi, \psi, dx) \frac{\int \chi(x)\, \varphi(x)\, d^*x}{L(\chi\,\sigma)}$$

Avec les notations de (G) , le nouveau vecteur $v_o(x) = F_o(v(x) + n(\psi))$ de $\mathcal{H}(\pi_h(\sigma))$ vérifie

$$(G)_h \qquad \Sigma\, F_o(n) t^{nd} = L(\sigma \otimes \omega^t) \quad .$$

3.2.7 Pour K non archimédien, la correspondance $\sigma \longleftrightarrow \pi_t(\sigma)$ (resp. $\sigma \longleftrightarrow \pi_h(\sigma)$) est invariante par automorphisme de $\mathbb{C}$. Dès lors (2.2.8), si la classe d'isomorphie de σ est définie sur un corps K de caractéristique 0 , $\pi_t(\sigma)$ (resp. $\pi_h(\sigma)$) se réalise sur K . Ainsi, à chaque représentation ℓ-adique

$$\sigma : W(\bar{K}/K) \longrightarrow GL(2, \mathbb{Q}_\ell)$$

correspond une classe d'isomorphie de représentations $\pi_t(\sigma)$ (resp. $\pi_h(\sigma)$) de $GL(2, K)$ sur $\mathbb{Q}_\ell$.

Dans la correspondance conjecturale entre classes d'isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ et nouvelles formes de poids 2, la conjecture est que la représentation ℓ-adique $H_1(E, \mathbb{Z}_\ell) = T_\ell(E)$, restreinte au groupe de décomposition en p , correspond par la correspondance de Hecke au facteur en p de la représentation de

$GL(2, \mathbb{A})$ associée à la nouvelle forme.

3.2.8. Supposons que $K \neq \mathbb{C}$ et soit H "le" corps de quaternion sur K. Puisque tout automorphisme de H est intérieur, le groupe H^* ne dépend, à automorphisme intérieur près, que de K. Les groupes $GL(2, F)$ et H^* sont des formes intérieures l'un de l'autre. Dès lors

(a) On peut comparer les classes de conjugaison dans $GL(2, F)$ et H^*. On trouve que l'ensemble des classes de conjugaison dans H^* s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaison elliptiques ou centrales dans $GL(2, F)$.

(b) $\overset{4}{\Lambda}\, \mathrm{Lie}(GL(2, F))$ et $\overset{4}{\Lambda}\, \mathrm{Lie}(H^*)$ sont canoniquement isomorphes.

Passant aux valeurs absolues, on trouve une correspondance entre mesures de Haar sur $GL(2, F)$ et mesures de Haar sur H^*.

On transpose de façon évidente les notations (3.2.1) à H^*. Il existe une correspondance naturelle bijective $\pi \longmapsto \pi'$ entre classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles (de dimension finie) de H^*, et classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles de la série discrète de $GL(2, F)$. Cette correspondance est caractérisée par les propriétés suivantes

(H) L'analogue de (3.2.2.1) (3.2.2.2) est vrai pour les représentations de H^*. On a

(H 1) $\quad (\pi \otimes \omega)' = \pi' \otimes \omega$

(H 2) $\quad \omega_\pi = \omega_{\pi'}$

(H 3) $\quad (\pi^\vee)' = (\pi')^\vee$

(I) Le conducteur de π' est le plus petit entier n tel que $\pi(x)$ soit trivial pour $x - 1$ de valuation $\geq n$ dans H.

(J) Sur les éléments elliptiques (cf. (a)), le caractère de π est l'opposé du caractère de π'. Les degrés formels de π et π' sont égaux (cf. (b)).

(K) A un changement de signe près, π et π' vérifient la même équation fonctionnelle de Tate: pour des facteurs eulériens $L(\pi, s)$ et des "constantes" convenables, on a

$$\frac{{}^t Z(\hat{f}, \check{\pi}' \otimes \omega_{2-s})}{L(\check{\pi}, 2-s)} = \varepsilon(s, \pi, \psi) \frac{Z(f, \pi' \otimes \omega_s)}{L(\pi, s)} \qquad \text{et}$$

$$\frac{{}^t Z(\hat{g}, \check{\pi} \otimes \omega_{2-s})}{L(\check{\pi}, 2-s)} = -\varepsilon(s, \pi, \psi) \frac{Z(g, \pi \otimes \omega_s)}{L(\pi, s)}$$

avec des quotients Z/L holomorphes en s et dont une combinaison linéaire est parfois sans 0 , comme en (E) . ψ désigne un caractère additif de K , et les transformées de Fourier sont prises relativement à une mesure de Haar autoduale pour $\psi\,\mathrm{Tr}(x\,y)$ ou $\psi\,\mathrm{Tr\,red}(x\,y)$.

3.2.9. Voici des références pour les démonstrations. Sauf mention expresse du contraire, on n'exclut pas la caractéristique résiduelle 2.

3.2.9.1. Une démonstration conceptuelle de (3.2.2.1) figure dans [5] Th. 2. La démonstration de loc. cit. vaut pour $GL(n)$.

La formule (3.2.2.4) est la seule compatible à l'invariance de $<\ >$ sous le groupe triangulaire inférieur. Une démonstration directe en est par ailleurs donnée dans [6], qui traite aussi du cas archimédien.

3.2.9.2. L'existence d'une équation fonctionnelle à la Tate est prouvée a priori, dans [7], pour les représentations admissibles irréductibles du groupe multiplicatif de toute algèbre simple.

3.2.9.3. L'équivalence entre (E) et (F) (équations fonctionnelles de Tate et de Hecke) est prouvée dans [9] § 13.

3.2.9.4. Les résultats (3.2.8) (H) (J) (K) constituent les §§ 1 et 15 de [9]. (I) m'a été signalé par Weil, et résulte assez facilement de (G) et (K).

3.2.9.5. La preuve de (G) est donnée dans [3].

3.2.9.6. Le dictionnaire $\sigma \longleftrightarrow \pi(\sigma)$ pour les représentation π qui sont constituents d'une représentation induite (toutes, pour K archimédien), et la preuve de (A) (B) (C) (D) (F) pour celles-ci sont donnés, pour $K = \mathbb{R}$, dans [9] § 5, pour $K = \mathbb{C}$ dans [9] § 6 et pour K non archimédien dans [9] § 3. Voir aussi [6].

3.2.9.7. Le dictionnaire $\sigma \longrightarrow \pi(\sigma)$ pour σ induite par un caractère d'une extension quadratique et la preuve de (F) sont donnés en [9] 4.7.. Je n'ai pas vérifié l'injectivité de $\sigma \to \pi(\sigma)$. On m'a dit qu'elle se lisait sur les formules donnant le caractère. Jacquet sait la déduire de sa théorie [9 bis].

3.2.9.8. D'après 3.1.5, si $p \neq 2$, toutes les représentations σ ont maintenant été considérées. D'après [7] §2, toutes les représentations π non supercuspidales l'ont été également. Les représentations π oubliées ont donc une masse non nulle dans la formule de Plancherel. Si $p \neq 2$, que le dictionnaire soit complet se lit donc sur la formule de Plancherel sous sa forme explicite (voir par exemple [2]).

3.2.9.8. Langlands a vérifié, à l'aide de (3.2.8) et (I), que, pour $\mathbb{Q}_2$, il existe d'autres représentations π que celles considérées jusqu'ici. Il existe aussi d'autres σ.

En égale caractéristique (fût-elle 2), [9] § 12 prouve par voie globale qu'à chaque représentation F-semi-simple σ de $W'(\overline{K}/K)$ correspond une (unique) représentation $\pi(\sigma)$ vérifiant (F) (et (E)). La démonstration utilise la conjecture d'Artin, connue pour les corps de fonctions.

Bibliographie

[1] A.O.L. Atkin and J. Lehner - Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. Math. Ann. 185 (1970) 134-160.

[2] P. Cartier

[3] W. Casselman - On some results of Atkin and Lehner.

[4] P. Deligne - Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . Ce volume.

[5] I.M. Gel'fand and D.A. Kajdan - Representations of the group GL(n, K) where K is a local field - Moscou 1971.

[6] R. Godement - Notes on Jacquet-Langlands theory. IAS Princeton 1970.

[7] R. Godement et H. Jacquet - Zêta functions of simple algebras - Lecture Notes in Math. 260 - Springer Verlag 1972.

[8] E. Hecke - Mathematische Werke - Vandenhoeck & Reprecht. Göttingen 1970.

[9] H. Jacquet and R.P. Langlands - Automorphic forms on GL(2) . Lecture Notes in Math. 114, Springer Verlag.

[9 bis] H. Jacquet. Automorphic forms on GL(2). II. Lecture Notes 278.

[10] J. Labesse - L-undistinguishable representations and trace formula for SL(2)

[11] R.P. Langlands - Euler Products. James K.Whittemore Lecture in Math. Yale University, 1967.

[12] R.P. Langlands - Problems in the theory of Automorphic Forms - in: Conference on Modern analysis and applications, Washington 1969, Lecture Notes in Math . Springer Verlag.

[13] A. Robert - Formes automorphes sur GL(2) (Travaux de H. Jacquet et R.P. Langlands). Séminaire Bourbaki 415, juin 1972. Lecture Notes in Math. 317 Springer Verlag.

[14] A.J.Silberger - PGL(2) over the p-adics, its representations, spherical functions and Fourier analysis. Lecture Notes in Math. 166, Springer Verlag 1970.

[15] A. Weil - Dirichlet series and automorphic forms. Lecture Notes in Math. 181, Springer Verlag 1971.