

Introduction aux ∞ -catégories

Robin Carlier

13 novembre 2022

1 Introduction

Ce document compile les notes des exposés donnés le 17/10/22 et le 7/11/22 lors du groupe de travail “Faisceaux pervers relatifs”, à l’UMPA.

La théorie des ∞ -catégories vise à fournir un cadre formel capable de gérer de manière efficace les phénomènes homotopiques. L’idée générale à garder en tête est qu’une ∞ -catégorie est une catégorie “faiblement” enrichie en types d’homotopies. Le mot faiblement signifie ici que la composition n’est pas définie de manière unique, mais plutôt de manière “unique à choix contractile près”. Nous présentons ici les ∞ -catégories via le modèle des *quasi-catégories*, introduit par Boardman et Vogt en 73. Il existe de nombreux autres modèles¹ tous équivalents au modèle décrit ci-dessus. Le modèle quasi-catégorique a l’avantage d’être particulièrement bien étudié, grâce aux travaux de Joyal et Lurie.

Des références pour les bases des ∞ -catégories sont [LurKer], [Cis19] et la référence pour les ∞ -catégories stables est le chapitre 1 de [LurHA].

2 Définitions et première propriétés

2.1 Langage simplicial et ∞ -catégories

Définition 1. On définit Δ , la catégorie des simplexes (ou catégorie simpliciale) comme la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n] := \{0, \dots, n\}$ ordonnés par l’ordre usuel des entiers naturels, et dont les flèches $[n] \rightarrow [m]$ sont les fonctions croissantes de $[n]$ dans $[m]$.

On définit \mathbf{sSet} comme la catégorie des foncteurs $\Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ et on appelle ensemble simplicial un élément de \mathbf{sSet} .

Remarque. La catégorie des ensembles simpliciaux doit ici être vue comme un cadre pour exprimer le langage des quasi-catégories. Pour cette raison, il convient de ne pas restreindre la taille des ensembles simpliciaux considérés : ici \mathbf{sSet} est bien la catégorie des foncteurs de Δ^{op}

1. Catégories simpliciales, espaces de Segal complets, catégories relatives, etc.

dans *tous* les ensembles. Ceci ne pose pas de problèmes puisque Δ est bien une petite catégorie. Lorsqu'il faudra faire attention aux questions de taille, on fixera des univers. Si \mathbb{U} est un univers, on notera $\mathbf{sSet}_{\mathbb{U}}$ la catégorie des foncteurs $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}_{\mathbb{U}}$, où $\mathbf{Set}_{\mathbb{U}}$ désigne la catégorie des ensembles appartenants à \mathbb{U} . Avec nos conventions, $\mathbf{sSet}_{\mathbb{U}}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de \mathbf{sSet} .

Étant donné un ensemble simplicial X , on notera généralement X_n au lieu de $X([n])$. On dira qu'un élément x de X_n est non dégénéré s'il n'est pas de la forme f^*y , où $f : [n] \rightarrow [m]$ est tel que $m < n$.

La donnée d'un ensemble simplicial est essentiellement une donnée combinatoire : les morphismes de la catégorie des simplexes sont parfaitement compris. Soit n un entier naturel et $0 \leq i \leq n$. On note

$$\partial_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$$

l'unique application croissante injective ne prenant pas la valeur i , et

$$\sigma_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$$

l'unique application croissante surjective prenant deux fois la valeurs i . La combinatoire de base des ensembles simpliciaux peut se résumer ainsi :

Proposition 2. (i) *Les morphismes ∂_i^n et σ_i^n sont soumis aux relations*

$$\begin{aligned} \partial_j^{n+1} \partial_i^n &= \partial_i^{n+1} \partial_{j-1}^n & \text{si } i < j \\ \sigma_j^n \sigma_i^{n+1} &= \sigma_i^{n+1} \sigma_{j+1}^n & \text{si } i < j \\ \sigma_j^{n-1} \partial_i^n &= \begin{cases} \partial_i^{n-1} \sigma_j^{n-2} & \text{si } i < j \\ \text{id}_{[n-1]} & \text{si } i \in \{j, j+1\} \\ \partial_{i-1}^{n-1} \sigma_j^{n-2} & \text{si } i > j+1 \end{cases} . \end{aligned}$$

(ii) *Tout morphisme dans Δ s'écrit de manière unique comme un épimorphisme suivi d'un monomorphisme. Les monomorphismes sont exactement les compositions des ∂_i^n et les épimorphismes sont exactement les compositions des σ_i^n .*

(iii) *Si $X_{\bullet} \in \mathbf{sSet}$, alors tout $x \in X_n$ s'écrit de manière unique comme f^*y , où $f : [n] \rightarrow [m]$ est une surjection, et $y \in X_m$ est non dégénéré.*

Étant donné un entier naturel n , on note Δ^n l'élément de \mathbf{sSet} représenté par n . Explicitement, il s'agit du préfaisceau

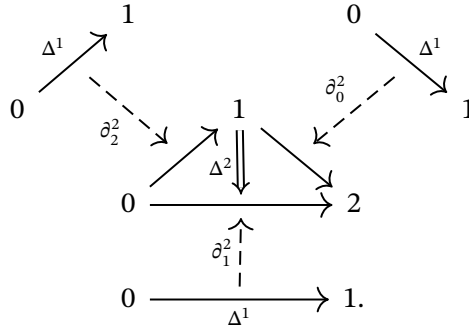
$$[m] \mapsto \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]).$$

Soit X un ensemble simplicial. Par le lemme de Yoneda, un élément $x \in X_n$ correspond bijectivement à un morphisme $\Delta^n \rightarrow X$ dans \mathbf{sSet} . Par abus, on notera encore x le morphisme $\Delta^n \rightarrow X$

correspondant. Si $f : [n] \rightarrow [m]$ est un morphisme dans Δ et $x \in X_m$, alors f^*m correspond à la composée

$$\Delta^n \xrightarrow{\tilde{f}} \Delta^m \xrightarrow{x} X$$

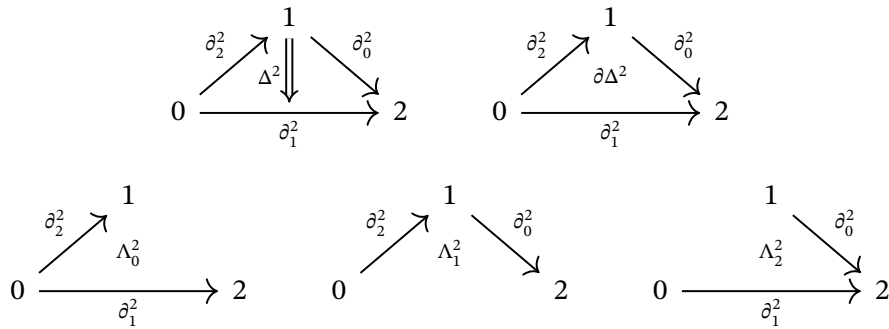
où $\tilde{f} : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ désigne l'image de f par le plongement de Yoneda. On ne distinguera plus entre $f : [n] \rightarrow [m]$ et $\tilde{f} : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$. En particulier, les morphismes ∂_i^n s'interprètent comme des morphismes $\Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$. Ces morphismes admettent une interprétation "géométrique" : si on se représente Δ^n comme un n -simplexe dont les sommets sont indicés par l'ensemble $\{0, \dots, n\}$, alors ∂_i^n s'identifie à l'inclusion de la face opposée au sommet d'indice i (qui est bien un $n-1$ -simplexe).



On définit ensuite $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ comme le sous-objet $\bigcup_i \text{im}(\partial_i^n)$ ². Enfin, on définit $\Lambda_i^n \subset \partial\Delta^n$ comme $\partial\Delta^n \setminus \text{im}(\partial_i^n)$. Plus explicitement :

$$\begin{aligned} \partial\Delta^n : [m] &\mapsto \{f : [m] \rightarrow [n] \mid f \text{ non surjective}\} \\ \Lambda_i^n : [m] &\mapsto \{f : [m] \rightarrow [n] \mid [n] \not\subset f([m]) \cup \{i\}\}. \end{aligned}$$

Le sous-objet $\partial\Delta^n$ s'interprète comme le "bord" de Δ^n : si Δ^n est un n -simplexe plein, $\partial\Delta^n$ est un n -simplexe évidé de son intérieur. De même, Λ_i^n est un n -simplexe évidé, dont on a retiré la face opposée au sommet d'indice i .



2. On rappelle que les unions sont des colimites et sont donc calculées objets par objets dans les catégories de préfaisceaux, et que si $f : F \rightarrow G$ est un morphisme de préfaisceaux sur une petite catégorie C , alors $\text{im}(f)$ est le préfaisceau décrit par $c \mapsto \text{im}(f_c : F(c) \rightarrow G(c))$.

On peut finalement introduire l'objet principal.

Définition 3. Un ensemble simplicial C est une ∞ -catégorie (resp. un complexe de Kan) si pour tout n et tout $0 < k < n$ (resp. $0 \leq k \leq n$), toute flèche $\Lambda_k^n \rightarrow C$ s'étend en une flèche $\Delta^n \rightarrow C$. Un foncteur d' ∞ -catégories est un morphisme d'ensemble simpliciaux entre deux ∞ -catégories.

Par définition, un foncteur $F : C \rightarrow D$ est donc une collection de morphismes $F_n : C_n \rightarrow D_n$ soumis à des compatibilités venant des identités simpliciales. Étant donné $\sigma \in C_n$, on notera $F(\sigma)$ à la place de $F_n(\sigma)$ afin d'alléger les notations.

Soit C une ∞ -catégorie. On appelle ensemble des objets de C l'ensemble C_0 et on appelle ensemble des morphismes de C l'ensemble C_1 . La terminologie de morphisme se justifie de la manière suivante : puisqu'un élément de C_1 est donné par un morphisme $\Delta^1 \rightarrow C$, on voit Δ^1 comme un "morphisme libre". Ainsi, si $f \in C_1$, on appelle source de f l'objet $(\partial_1^1)^*(f)$ de C , et but de f l'objet $(\partial_0^1)^*(f)$. On représente alors f par un diagramme

$$(\partial_1^1)^*(f) \xrightarrow{f} (\partial_0^1)^*(f).$$

Si t est un élément de C_2 , on peut se représenter t comme un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & \Downarrow t & \nwarrow g \\ x & \xrightarrow{h} & z \end{array} .$$

Ici, $f = (\partial_2^2)^*(t)$, $g = (\partial_0^2)^*(t)$ et $h = (\partial_1^2)^*(t)$ sont des morphismes de C et $x = (\partial_1^1)^*(f) = (\partial_1^1)^*(h)$, $y = (\partial_0^1)^*(f) = (\partial_1^1)^*(g)$ et $z = (\partial_0^1)^*(g) = (\partial_0^1)^*(h)$ sont des objets de C . Toutes ces données sont déterminées par t et par l'action des faces et des dégénérescences sur C .

En présence d'un 2-simplexe $t \in C_2$ comme ci-dessus (en conservant les notations), on dit que t exhibe h comme une composée de g et de f , et on note parfois

$$g \circ f \simeq h.$$

Bien que la notation soit pratique, cette notation est abusive, et il faut garder à l'esprit que cette notation exprime une *structure* (celle d'un élément de C_2 exhibant h comme une composée de g et de f) et non une *propriété*.

On peut alors comprendre la définition d' ∞ -catégorie de la manière suivante : étant donné $f : x \rightarrow y$ et $g : y \rightarrow z$ deux éléments de C_1 , le couple (f, g) détermine un morphisme d'ensemble simpliciaux $\Lambda_1^2 \rightarrow C^3$, qu'on représente alors par

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \nwarrow g \\ x & & z \end{array} .$$

3. On peut par exemple le voir en réalisant que Λ_1^2 est un pushout de deux copies de Δ^1 au dessus de Δ^0 par les flèches ∂_0^1 et ∂_1^1 .

L'existence d'une extension de ce morphisme en un 2-simplexe de \mathcal{C} signifie qu'il existe $t : \Delta^2 \rightarrow \mathcal{C}$ dont la restriction à Λ_1^2 est le diagramme précédant, si bien que t exhibe $h := (\partial_1^1)^*(t)$ comme composée de g et de f . Ainsi : dans une ∞ -catégorie, une composée de deux morphismes compatible existe toujours. Notons cependant que cette composée n'est pas nécessairement unique !

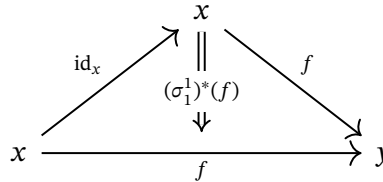
Exemple. Soit $x \in C_0$. Alors $(\sigma_0^0)^*(x) \in C_1$ est un morphisme qu'on note id_x . Les identités simpliciales montrent que sa source et son but sont bien x puisque $(\partial_0^1)^*(\sigma_0^0)^*(x) = (\sigma_0^0 \partial_0^1)^*(x) = \text{id}_{[0]}^*(x)$, de même pour $(\partial_1^1)^*(\sigma_0^0)^*(x)$. Si $f : x \rightarrow y$ est un élément de C_1 , alors $(\sigma_0^1)^*(f) \in C_2$. On a

$$\begin{aligned} (\partial_2^2)^*(\sigma_0^1)^*(f) &= (\sigma_0^1 \partial_2^2)^*(f) \\ &= (\partial_1^1 \sigma_0^0)^*(f) \\ &= (\sigma_0^0)^*((\partial_1^1)^*(f)) \\ &= (\sigma_0^0)^*(x) \end{aligned}$$

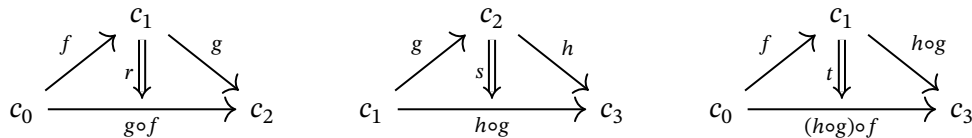
et

$$\begin{aligned} (\partial_1^2)^*(\sigma_0^1)^*(f) &= (\sigma_0^1 \partial_1^2)^*(f) \\ &= (\text{id}_{[1]})^*(f) \\ &= f \\ &= (\partial_0^2)^*(\sigma_0^1)^*(f) \end{aligned}$$

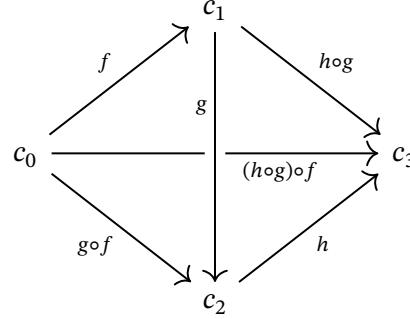
et donc $(\sigma_0^1)^*(f)$ exhibe f comme composée de f et de id_x , comme on peut s'y attendre. Le point ici est que ce fait est forcé par les identités simpliciales.



Exemple. La propriété de relèvement des ∞ -catégories le long de l'inclusion $\Lambda_0^2 \hookrightarrow \Delta^2$ donne "l'existence des compositions" dans \mathcal{C} . Les propriétés de relèvement pour des cornets de plus haute dimension assure une certaine "cohérence" de cette composition. Par exemple, on peut s'assurer que la composition est en un certain sens associative : si $f : c_0 \rightarrow c_1$, $g : c_1 \rightarrow c_2$ et $h : c_2 \rightarrow c_3$ sont trois morphismes dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} , on peut se donner des 2-simplexes



et on peut organiser ces 2-simplexes en un morphisme $\Lambda_1^3 \rightarrow \Delta^3$: dans le diagramme suivante (de “forme” $\text{Sk}_1(\Delta^3)$, le 1-squelette de Δ^3) :



, toutes les faces exceptée celle opposée à c_1 peuvent être rempli par un 2-simplexe dont on dispose déjà, et ceci définit le morphisme $\Lambda_1^3 \rightarrow \Delta^3$ voulu. Par définition d’une ∞ -catégorie, ce morphisme s’étend en un morphisme $T : \Delta^3 \rightarrow \mathbf{C}$, et la face $(\partial_1^3)^* T \in \mathbf{C}_2$ est alors un 2-simplexe qui exhibe $(hog) \circ f$ comme composée de h et de $(g \circ f)$.

Exemple. La catégorie Δ possède un automorphisme $(-)^{\text{op}}$, qui consiste à renverser les inclusions, ce foncteur induit un foncteur $(-)^{\text{op}}$ sur ensembles simpliciaux. Explicitement, X^{op} possède les même n -simplexes que X , mais ∂_i^n agit sur X^{op} par l’action de ∂_{n-i}^n sur X , et de même pour l’action de σ_i^n . Si \mathbf{C} est une ∞ -catégorie, alors \mathbf{C}^{op} aussi, en vertu du fait que $(\Lambda_i^n)^{\text{op}} = \Lambda_{n-i}^n$.

On rappelle le “paradigme nerf-réalisation” des ensembles simpliciaux : la catégorie des ensembles simpliciaux est la cocomplétion libre par colimites⁴ de la catégorie Δ . Pour tout catégorie \mathbf{C} admettant des colimites, tout foncteur $Q : \Delta \rightarrow \mathbf{C}$ (on parle d’objet cosimplicial dans \mathbf{C}) s’étend de manière unique en une adjonction

$$\mathbf{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|_Q} \\ \perp \\ \xleftarrow{N_Q} \end{array} \mathbf{C} .$$

Le fait que tout ensemble simplicial est canoniquement colimite de représentables détermine $| - |_Q$. Le foncteur N_Q est donné par

$$c \mapsto ([n] \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Q(n), c)) .$$

L’exemple prototypique d’une adjonction de ce type est celle donnée par la réalisation géométrique : si $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$, en choisissant le foncteur $\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ envoyant $[n]$ sur le n -simplexe

4. Avec nos conventions sur la taille des ensembles simpliciaux, les colimites considérées sont celles indicées par des catégories dont les objets et les morphismes forment un ensemble et non une classe propre.

standard⁵, on obtient le foncteur de réalisation géométrique usuel des ensembles simpliciaux. Le nerf s'appelle dans ce cas l'ensemble simplicial singulier.

Un second exemple est donné par le foncteur $\Delta \rightarrow \text{Cat}$ (où Cat est la catégorie des catégories dont les objets et les morphismes forment un ensemble) qui envoie l'objet $[n]$ sur la catégorie $[n]$ associé à l'ensemble partiellement ordonné $[n]$. Explicitement, $[n]$ est la catégorie dont les objets sont les entiers $0, \dots, n$, et tel que $\text{Hom}_{[n]}(i, j)$ est un singleton si $i < j$ et est vide sinon. Ce foncteur induit une adjonction

$$\text{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau} \\ \perp \\ \xleftarrow{N} \end{array} C$$

dont l'adjoint à droite est simplement appelé le nerf. Explicitement, pour une catégorie C , on a

$$N(C)_n = \text{Hom}_{\text{Cat}}([n], C),$$

c'est-à-dire que $N(C)_0$ est l'ensemble des objets de C , $N(C)_1$ est l'ensemble des flèches de C , et $N(C)_n$ est plus généralement l'ensemble des chaînes de n morphismes composable.

Remarque. Soit C une catégorie ordinaire, on voit qu'en interprétant C comme un ensemble simplicial via le foncteur nerf , les interprétations "simpliciales" des mots *objets*, *morphismes*, *compositions* et *morphismes identités* coïncident avec leurs interprétations dans le langage catégorique usuel.

Proposition 4. (i) Pour toute catégorie ordinaire C , l'ensemble $N(C)$ est une ∞ -catégorie. De plus, c'est un complexe de Kan si et seulement si C est un groupoïde⁶.

(ii) Le foncteur nerf est pleinement fidèle : il induit une bijection entre l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux $N(C) \rightarrow N(D)$ et l'ensemble des foncteurs $C \rightarrow D$.

Le second point peut être amélioré en utilisant le fait que les ensembles simpliciaux forment une catégorie cartésienne fermée et sont donc enrichis sur eux-même. Plus précisément, si K et L sont deux ensembles simpliciaux, on peut définir un ensemble simplicial $\underline{\text{Hom}}(K, L)$ via

$$[n] \mapsto \text{Hom}(K \times \Delta^n, L)$$

et on a un isomorphisme canonique (et naturel en chaque variable) d'ensembles simpliciaux

$$\underline{\text{Hom}}(J, \underline{\text{Hom}}(K, L)) \simeq \underline{\text{Hom}}(J \times K, L).$$

On peut alors montrer que $\underline{\text{Hom}}(N(C), N(D))$ est isomorphe au nerf de la catégorie des foncteurs de C dans D .

L'interprétation de la théorie des catégories dans le langage des ensembles simpliciaux motive la définition des ∞ -catégories : on peut montrer que l'image essentielle du nerf est engendrée par les ∞ -catégories dont toutes les extensions le long des morphismes $\Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n$ sont

5. C'est-à-dire $|\Delta^n| := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1\}$.

6. On rappelle qu'un groupoïde est une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes.

uniques (en particulier, la composition est réellement unique dans ce cadre). En relâchant cette unicité, la notion de quasi-catégorie apparaît naturellement.

On termine cette section par quelques éléments de langage.

Définition 5. Soit C une ∞ -catégorie et $f : x \rightarrow y$, $g : x \rightarrow y$. On dit que f et g sont homotopes s'il existe un 2-simplexe qui exhibe g comme composée de f et de id_x . On dit que f est un isomorphisme (ou encore une équivalence) s'il existe $h_0 : y \rightarrow x$ et $h_1 : y \rightarrow x$ tels qu'une (et en fait, toute) composée de h_0 et f est homotope à l'identité de x et une composée de f et de h_1 est homotope à l'identité de y .

En relevant intelligemment des diagrammes de forme Λ_1^3 et Λ_2^3 , on peut montrer que la relation d'homotopie défini ci-dessus est bien une relation d'équivalence, et que f et g sont bien homotopes s'il existe un deux simplexe exhibant g comme composée de id_y et de f . On montre de manière similaire que la relation d'homotopie est compatible avec la notion de composition.

Proposition 6. Soit C une ∞ -catégorie, alors la catégorie ordinaire $\tau(C)$ est isomorphe à la catégorie dont les objets sont ceux de C , les morphismes sont les classes d'homotopies de morphismes de C , et telle que $[h] = [g] \circ [f]$ si et seulement s'il existe un 2-simplexe de C exhibant h comme composition de g et de f .

Dans la situation de la proposition, la catégorie ordinaire $\tau(C)$ est généralement appelée la catégorie homotopique de C , et on la note plutôt $\text{ho}(C)$.

Définition 7. Soient C et D deux ∞ -catégories, $F : C \rightarrow D$ et $G : C \rightarrow D$ deux foncteurs. Une transformation naturelle de F à G est un foncteur $H : C \times \Delta^1 \rightarrow D$ tel que la restriction le long de

$$C \simeq C \times \Delta^0 \xrightarrow{\text{id}_C \times \partial_1^1} C \times \Delta^1$$

est égale à F et tel que la restriction le long de

$$C \simeq C \times \Delta^0 \xrightarrow{\text{id}_C \times \partial_0^1} C \times \Delta^1$$

est égale à G .

En jouant avec la "curryfication", on voit qu'une transformation naturelle correspond à un 1-simplexe de $\underline{\text{Hom}}(C, D)$ de source F et de but G . Pour cette raison, on note parfois $\alpha : F \rightarrow G$ une transformation naturelle. En jouant encore avec la curryfication, un 1-simplexe de $\underline{\text{Hom}}(C, D)$ s'identifie aussi à un élément de $\text{Hom}_{\text{Set}}(C, \underline{\text{Hom}}(\Delta^1, D))$. Si $\alpha : C \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta^1, D)$ est un tel élément, et $c \in C_0$, alors $\alpha(c)$ est un élément de $\text{Hom}_{\text{Set}}(\Delta^1, D) \simeq D_1$, si α est une transformation de F à G , alors cette flèche a pour source l'objet $F(c)$ et pour but l'objet $G(c)$. On notera généralement α_c cette flèche. Si pour tout $c \in C_0$, la flèche α_c , on dit que α est une équivalence naturelle (ou encore un isomorphisme naturel).

Définition 8. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur d' ∞ -catégories. On dit que F est une équivalence d' ∞ -catégories s'il existe $G : D \rightarrow C$ et $H : D \rightarrow C$ ainsi que des équivalences naturelles de $F \circ H$ à id_D et de $G \circ F$ à id_C .

2.2 Propriétés de base

On donne ici une liste (non exhaustive!) de propriétés des ∞ -catégories. Le but est de persuader de l'extrême similarité entre la théorie formelle des ∞ -catégorie et celle des catégories ordinaires. Malgré l'aspect innocent de certains énoncés, les preuves sont en générales bien plus difficiles et requièrent de manipuler intelligemment la combinatoire des ensembles simpliciaux.

Proposition 9. *Si C est une ∞ -catégorie et K est un ensemble simplicial quelconque, l'ensemble simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}(K, C)$ est une ∞ -catégorie.*

On voit que le problème d'extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(K, C) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

correspond à un problème d'extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n \times K & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n \times K & & \end{array}$$

qui ne semble pas immédiat à résoudre compte tenu du fait que C n'admet des relèvement *a priori* que dans le cas $K = \Delta^0$. Le point clé, dû à Joyal, consiste à établir un second critère exprimant le fait d'être une ∞ -catégorie :

Proposition 10. *Soit $C \in \mathbf{sSet}$. L'ensemble simplicial C est une ∞ -catégorie si et seulement si pour tout monomorphisme d'ensemble simpliciaux $\iota : K \hookrightarrow L$ et tout carré commutatif comme*

ci-dessous, il existe un relèvement comme indiqué en pointillés.

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2, C) \\ \iota \downarrow & \nearrow & \downarrow i^* \\ L & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda_1^2, C) \end{array} .$$

Les flèches admettant une telle propriété de relèvement sont appelées des *fibrations triviales*. Une des conséquences de cette condition de relèvement est la fibre en tout point est un complexe de Kan contractile, c'est-à-dire tel que la flèche canonique vers Δ^0 est en fait une équivalence d' ∞ -catégorie. Ceci s'interprète comme une forme d'unicité des compositions : un objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda_1^2, C)$ est un couple de flèche composable, la fibre en un tel objet est l'ensemble simplicial des compositions possibles de ces deux flèches. Les ∞ -catégories sont essentiellement les ensembles simpliciaux pour lesquels toutes ces compositions sont "homotopiquement

unique”, c’est-à-dire contractile (bien qu’ayant plutôt plusieurs objets). Via ce critère, pour vérifier que $\underline{\text{Hom}}(K, C)$ est bien une ∞ -catégorie, il suffit de vérifier que

$$\underline{\text{Hom}}(\Delta^2, \underline{\text{Hom}}(K, C)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\Lambda_1^2, \underline{\text{Hom}}(K, C))$$

est une fibration triviale, en identifiant cette flèche à

$$\underline{\text{Hom}}(K, \underline{\text{Hom}}(\Delta^2, C)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(K, \underline{\text{Hom}}(\Lambda_1^2, C))$$

et en utilisant le fait (relativement élémentaire) que $\underline{\text{Hom}}(K, -)$ préserve les fibrations triviales, on peut conclure. Le critère de Joyal, quant à lui, se prouve par un argument combinatoire : un argument purement formel montre que le problème se réduit au cas où $K \hookrightarrow L$ est une des inclusion $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta^2, C) \\ \downarrow \iota & \nearrow & \downarrow i^* \\ L & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Lambda_1^2, C) \end{array}$$

se traduit en un problème de relèvement de la forme

$$\begin{array}{ccc} (\Delta^n \times \Lambda_1^2) \coprod_{\partial\Delta^n \times \Lambda_1^2} (\partial\Delta^n \times \Delta^2) & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n \times \Delta^2 & & \end{array}$$

. La preuve consiste alors à écrire l’inclusion

$$(\Delta^n \times \Lambda_1^2) \coprod_{\partial\Delta^n \times \Lambda_1^2} (\partial\Delta^n \times \Delta^2) \hookrightarrow \Delta^n \times \Delta^2$$

comme une succession d’inclusions individuellement de la forme “cornet intérieur à remplir”, ce qu’on peut bien faire dans C . Les détails sont dans [LurKer], 007F.

Proposition 11. *Soit C une ∞ -catégorie et K un ensemble simplicial. Un morphisme $\alpha : K \times \Delta^1 \rightarrow C$ de l’ ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}(K, C)$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout $k \in K_0$, $\alpha(k)$ est un isomorphisme. En particulier, une transformation naturelle est une équivalence naturelle si et seulement si c’est une équivalence dans l’ ∞ -catégorie des foncteurs.*

Là encore, la preuve n’est pas aussi simple qu’on pourrait le croire. à priori, le fait que $\alpha(k)$ soit un isomorphisme pour tout $k \in K_0$ indique l’existence de 2-simplexes de C mettant en jeu. Il n’est pas clair *a priori* qu’il est possible d’assembler ces données en un vrai morphisme

d'ensembles simpliciaux $K \times \Delta^1 \rightarrow C$, avec les identités requises entre faces et dégénérescences. Le point clé est encore dû à Joyal et consiste à observer qu'on peut aussi étendre les morphismes $\Lambda_0^n \rightarrow C$ dans une ∞ -catégorie C pour $n \geq 2$ à condition que le morphisme image de $\partial_n^n : \Delta^1 \rightarrow \Lambda_0^n \subset \Delta^n$ soit une équivalence et que cette propriété pour tout n caractérise les isomorphismes. Une fois cette caractérisation donnée, la preuve est alors un dévissage combinatoire proche de celui précédent. Les détails sont donnés dans [LurKer], 01DK.

Ce second critère pour les isomorphismes montre aussi

Proposition 12. *Une ∞ -catégorie est un complexe de Kan si et seulement si tous ses morphismes sont des équivalences.*

Pour cette raison, on appelle aussi les complexes de Kan des ∞ -groupoïdes.

Toujours à l'aide de propriété de relèvements, on peut montrer

Proposition 13. *Soit C une ∞ -catégorie et $\iota : K \hookrightarrow L$ un monomorphisme d'ensembles simpliciaux. Le morphisme induit*

$$\iota^* : \underline{\mathrm{Hom}}(L, C) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(K, C)$$

est une isofibration, c'est-à-dire qu'étant donné un isomorphisme $f : x \rightarrow y$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(K, C)$ et un objet \tilde{x} tel que $\iota^(\tilde{x}) = x$, il existe un isomorphisme $\tilde{f} : \tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(L, C)$ tel que $\iota^*(\tilde{f}) = f$.*

Cette proposition permet de voir que les ∞ -catégorie permettent bel et bien de travailler "à homotopie près" : en appliquant par exemple ceci à l'inclusion d'un objet ou d'une flèche C , on voit qu'on peut remplacer à isomorphisme près la valeur d'un foncteur par n'importe quelle valeur isomorphe, la machinerie ∞ -catégorique produira automatiquement les données de cohérences pour assembler le tout en un nouveau foncteur (avec identités simpliciales etc.) et en un isomorphisme naturel vers l'ancien foncteur, qui vaudra exactement les isomorphismes données sur les valeurs remplacées.

Définition 14. *Soit C une ∞ -catégorie et soient $x, y \in C_0$ deux objets de C . On définit un ensemble simplicial $C(x, y)$ comme le produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} C(x, y) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^1, C) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow (ev_0, ev_1) \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(x, y)} & C \times C \end{array}$$

On note aussi cet ensemble simplicial $\mathrm{Hom}_C(x, y)$.

Ici, ev_0 et ev_1 sont les morphismes induits par ∂_1^1 et ∂_0^1 et par l'identification $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^0, C) \simeq C$. Dit d'une autre manière, $C(x, y)$ est l'ensemble simplicial des flèches de C de source x et de but y .

Proposition 15. *1. Soit C une catégorie ordinaire. Pour tout couple d'objets (x, y) , l'ensemble simplicial $N(C)(x, y)$ est constant, égal à l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(x, y)$*

2. Soit C . Pour tout $x, y \in C_0$, l'ensemble simplicial $C(x, y)$ est un complexe de Kan.

En admettant temporairement que les complexes de Kan sont des modèles des types d'homotopies, cette proposition exprime que dans une ∞ -catégorie générale, les morphismes ne forment pas seulement un ensemble, mais un *espace*. Les potentiels groupes d'homotopie supérieurs non triviaux de ces espaces sont des informations de la catégorie.

Tel que défini $C(x, y)$ est fonctoriel en C : pour tout foncteurs d' ∞ -catégories $F : C \rightarrow D$, on a un morphisme d'ensembles simpliciaux $C(x, y) \rightarrow D(F(x), F(y))$ induit par F .

Définition 16. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur d' ∞ -catégories. On dit que F est pleinement fidèle si pour tout $(x, y) \in C_0$, le morphisme $C(x, y) \rightarrow D(F(x), F(y))$ est une équivalence d' ∞ -groupoïdes. On dit que F est essentiellement surjectif si tout $x \in D$ est isomorphe à un objet dans l'image de F .

Comme en théorie des catégories usuelles, on a

Théorème 17. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur d' ∞ -catégories, alors F est une équivalence d' ∞ -catégories si et seulement si F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

La définition de $C(x, y)$ reste cependant peu satisfaisante : tel que décrite, la construction n'est pas fonctorielle en x et y ! Il n'est même pas complètement clair ce que cela serait censé signifier : on pourrait s'attendre à un foncteur $C^{\text{op}} \times C \rightarrow \infty\text{-Grpd}$ où le but serait l' ∞ -catégorie des ∞ -groupoïdes. Mais à ce stade, on ne sait que construire des ∞ -catégories comme nerfs de 1-catégories !

Cependant, à ce stade, on peut toujours définir une notion de morphisme de composition par un morphisme donné. Plus précisément, pour tout triplets d'objets (x, y, z) dans une ∞ -catégorie C , on peut considérer un diagramme d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\quad r \quad} & \underline{\text{Hom}}(\Delta^2, C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\quad r \quad} & \underline{\text{Hom}}(\Lambda_1^2, C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(x, y, z)} & C \times C \times C \end{array}$$

dont les carrés sont cartésiens. En utilisant le fait que Λ_1^2 est un pushout de deux copies de Δ_1 au dessus des morphismes sources et but, on peut montrer que P est en fait canoniquement isomorphe à $C(x, y) \times C(y, z)$. Le morphisme $Q \rightarrow C(x, y) \times C(y, z)$ est alors un pullback d'une fibration triviale (vu la proposition 10) et est donc une fibration triviale (il est aisé de voir que les fibrations triviales sont stables par pullback). En utilisant la propriété de relèvement des fibrations triviales, on voit donc qu'il existe une flèche

$$s : C(x, y) \times C(y, z) \rightarrow Q$$

venant compléter la flèche en pointillés dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \xrightarrow{\quad} & Q \\
 \downarrow & \searrow s & \downarrow \\
 C(x, y) \times C(y, z) & \xrightarrow{\text{id}} & C(x, y) \times C(y, z)
 \end{array}$$

où \emptyset désigne l'ensemble simplicial initial. On peut donc considérer la composée

$$C(x, y) \times C(y, z) \xrightarrow{s} Q \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta^2, C) \xrightarrow{(\partial_1^2)^*} \underline{\text{Hom}}(\Delta^1, C)$$

et une inspection des diagrammes en présence montre que cette flèche se factorise à travers $C(x, z)$. Cette flèche agit sur les objets en envoyant un couple $(f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow z)$ sur *une* composée de g et de f .

Ainsi même sans unicité des compositions, il est néanmoins possible de définir des foncteurs de compositions. Les propriétés précédentes (notamment la propriété 13) montre qui plus est que, si on se donne n'importe quel choix pour tout (f, g) d'une composition $(g \circ f)$, le foncteur ci-dessus peut être remplacé par un *foncteur* (avec toutes les données de cohérences nécessaires pour en faire un morphisme d'ensemble simpliciaux) isomorphe prenant *exactement* la valeur $(g \circ f)$ en (f, g) .

3 Construction d' ∞ -catégories

3.1 Nerf homotopiquement cohérent

Le modèle des quasi-catégories que nous avons exposé jusqu'ici prend le parti d'être le moins strict possible : le modèle est tellement peu strict que les compositions ne sont même pas uniques ! Afin de définir des quasi-catégories plus intéressantes que les nerfs de catégorie ordinaire, on peut tenter de passer par un modèle intermédiaire un peu plus stricte : si les ∞ -catégories sont censées être des catégories enrichies faiblement en type d'homotopies (ou en tous objets équivalents, par exemple, en complexes de Kan), alors *a minima* une catégorie *strictement* enrichie en complexes de Kan devrait définir une ∞ -catégorie. On note Cat_{Set} la catégorie des catégories enrichies en ensembles simpliciaux.

Définition 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $\llbracket n \rrbracket$ comme la catégorie enrichie en ensembles simpliciaux dont les objets sont les entiers $0, \dots, n$, et dont l'ensemble simplicial des morphismes de i à j est le nerf de l'ensemble partiellement ordonné

$$P_{i,j} := \{S \subset [n] \mid \min(S) = i \text{ et } \max(S) = j\},$$

l'ordre étant l'inclusion inverse (de sorte que $\{i, j\}$ est maximal dans $P_{i,j}$). La composition

$$N(P_{i,j}) \times N(P_{j,k}) \rightarrow N(P_{i,k})$$

est définie comme le nerf du foncteur $\cup : P_{i,j} \times P_{j,k} \rightarrow P_{i,k}$ induit par la fonction croissante entre ensembles ordonnés donnée par la réunion des sous-ensembles.

L'application $n \mapsto \llbracket n \rrbracket$ s'étend en un foncteur bien défini $\llbracket - \rrbracket : \Delta \rightarrow \text{Cat}_{\text{sSet}}$ et comme précédemment, on obtient une adjonction

$$\text{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{G}[-]} \\ \xleftarrow{\perp} \\ \xleftarrow{N^{\text{hc}}} \end{array} \text{Cat}_{\text{sSet}}$$

dont l'adjoint à droite N^{hc} est appelé le *nerf homotopiquement cohérent*. Explicitement,

$$N^{\text{hc}}(C) = \text{Hom}_{\text{Cat}_{\text{sSet}}}(\llbracket n \rrbracket, C).$$

Cette définition peut se motiver à partir de la théorie des catégories de modèles et de l'homotopie abstraite. Sans rentrer trop dans les détails, on peut espérer comparer les *théories de l'homotopie* des quasi-catégories et des catégories enrichies en complexe de Kan : les quasi-catégories admettent une notion d'équivalence plus faible que les isomorphismes (à savoir les équivalences d' ∞ -catégories) et les catégories enrichies en ensembles simpliciaux admettent une notion similaire d'équivalence, à savoir les foncteurs essentiellement surjectifs induisant des équivalences d'homotopies entre tous les ensembles simpliciaux de morphismes. pour espérer obtenir une bonne comparaison ces théories, il est nécessaires de prendre un nerf associé à un objet cosimplicial *cofibrant*. Très informellement, cela signifie que les ensembles simpliciaux de morphismes entre objets doivent être suffisamment "gros" pour avoir "de la place" pour faire de l'homotopie. Du point de vue de la théorie de l'homotopie, tous les $N(P_{i,j})$ sont contractiles (ils ont tous un objet final), si bien qu'on peut voir $\llbracket n \rrbracket$ comme un "épaississement cofibrant" de la catégorie $[n]$ usuelle (qu'on peut voir comme une catégorie enrichie en ensembles simpliciaux, dont les Hom sont des ensembles simpliciaux constant).⁷ Le fait d'avoir choisi un objet cosimplicial cofibrant donne des bonnes propriétés au foncteur de nerf associé.

Théorème 19. *Soit C une catégorie enrichie en ensemble simpliciaux telle que, pour tout $x, y \in C$ l'ensemble simplicial $\underline{\text{Hom}}_C(x, y)$ est un complexe de Kan.*

- (i) *L'ensemble simplicial $N^{\text{hc}}(C)$ est une ∞ -catégorie.*
- (ii) *Pour tout $(x, y) \in C$, on a une équivalence d' ∞ -groupoïdes canonique $C(x, y) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_C(x, y)$*

Dans le deuxième point du théorème, il est important de constater que la flèche n'est en général *pas* un isomorphisme d'ensemble simpliciaux, mais seulement une équivalence de complexes de Kan⁸. Soit C une catégorie enrichie en complexes de Kan, on peut expliciter un petit peu plus les simplexes de basse dimension de $N^{\text{hc}}(C)$.

7. Cette idée d'épaississement d'un objet contractile se retrouve d'ailleurs dans la réalisation topologique usuelle : le n -simplexe standard est contractile et le foncteur ayant les bonne propriétés homotopique est bien celui associé à l'objet cosimplicial envoyant $[n]$ sur le n -simplexe standard, et non $[n]$ sur un singleton.

8. Comme on le verra, cela signifie aussi que c'est une équivalence d'homotopie quand on réalise géométriquement cette flèche.

- Les 0-simplexes de $N^{hc}(C)$ sont les objets de C .
- Les 1-simplexes de $N^{hc}(C)$ sont les flèches dans C (c'est-à-dire les 0-simplexes des ensembles simpliciaux de morphismes dans C).
- La donnée d'un 2-simplexe $\Delta^2 \rightarrow N^{hc}(C)$ est la donnée de morphismes $f : x \rightarrow y$, $g : y \rightarrow z$ et $h : x \rightarrow z$ dans C , ainsi que d'un 1-simplexe H de $\underline{\text{Hom}}_C(x, z)$ de source $g \circ f$ et de but h . On représente cette donnée par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & \Downarrow H & \searrow g \\ x & \xrightarrow{h} & z \end{array} .$$

- Étant donnés quatre 2-simplexes de $N^{hc}(C)$ représentés par

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & \Downarrow H_3 & \searrow g \\ x & \xrightarrow{h} & z \end{array} & \begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & \Downarrow H_2 & \searrow i \\ x & \xrightarrow{k} & t \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & z & \\ h \nearrow & \Downarrow H_1 & \searrow j \\ x & \xrightarrow{k} & t \end{array} & \begin{array}{ccc} & z & \\ g \nearrow & \Downarrow H_0 & \searrow j \\ y & \xrightarrow{i} & t \end{array} \end{array} ,$$

on peut définir un diagramme $\partial\Delta^3 \rightarrow N^{hc}(C)$ bordé par ces simplexes, dont le 1-squelette est représenté par

$$\begin{array}{ccccc} & & y & & \\ & f \nearrow & \downarrow g & \searrow i & \\ x & \xrightarrow{k} & & \xrightarrow{\quad} & t \\ & h \searrow & \downarrow & \nearrow j & \\ & & z & & \end{array} .$$

La donnée d'une extension de ce diagramme en un 3-simplexe de $N^{hc}(C)$ correspond à la donnée d'un 1-simplexe H_4 dans $\underline{\text{Hom}}_C(x, t)$, de source $j \circ g \circ f$ ⁹, ainsi que de deux 2-simplexes α, β de l'ensemble simplicial $\underline{\text{Hom}}_C(x, t)$ tels que α et β décrivent un dia-

9. On rappelle que dans une catégorie enrichie en ensembles simpliciaux, la composition est strictement associative

gramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & j \circ g \circ f & & \\
 & H_0 f \swarrow & \downarrow H_4 & \searrow j H_3 & \\
 i \circ f & \xRightarrow{\alpha} & & \xleftarrow{\beta} & j \circ h \\
 & \searrow H_2 & \downarrow & \swarrow H_1 & \\
 & & k & &
 \end{array}$$

dans $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, t)$. Ici, $H_0 f$ désigne l'image de $H_0 \in \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, t)_1$ par le morphisme d'ensemble simpliciaux

$$(-) \circ f : \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, t) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, t).$$

De même, $j H_3$ désigne l'image de $H_3 \in \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z)_1$ par

$$j \circ (-) : \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, t).$$

Sans surprise, les données combinatoires d'un n -simplexe d'un nerf homotopiquement cohérent deviennent de plus en plus dures à décrire quand n augmente. Cette construction permet malgré tout de définir des ∞ -catégories importantes.

Exemple. Soit \mathbb{U} un univers et soit $\text{Kan}_{\mathbb{U}}$ la catégorie (au sens usuel) des complexes de Kan \mathbb{U} -petits¹⁰, vue comme sous-catégorie pleine de sSet . Si X et Y sont deux complexes de Kan, alors $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$ est encore un complexe de Kan : en effet on a vu que $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$ est une ∞ -catégorie, et on a vu qu'un morphisme dans $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$ est inversible si et seulement si sa valeur en tout x est une flèche inversible de Y . Puisque Y est un complexe de Kan, toutes ses flèches sont inversibles, et donc $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$ est encore un complexe de Kan, qui est par ailleurs \mathbb{U} -petit si X et Y le sont. On peut donc définir

$$\infty\text{-Grpd}_{\mathbb{U}} := \mathcal{N}^{hc}(\text{Kan}_{\mathbb{U}})$$

en considérant $\text{Kan}_{\mathbb{U}}$ comme une catégorie enrichie en ensembles simpliciaux \mathbb{V} -petite pour un univers \mathbb{V} contenant \mathbb{U} . Notons que par définition de l'enrichissement simplicial considéré, et par la description explicite des 2-simplexes d'un nerf homotopiquement cohérent, on voit qu'un morphisme $F : X \rightarrow Y$ dans $\text{Kan}_{\mathbb{U}}$ définit une équivalence dans $\infty\text{-Grpd}_{\mathbb{U}}$ précisément si c'est une équivalence d' ∞ -groupoïdes.

Exemple. Soit \mathbb{U} un univers et $\text{QCat}_{\mathbb{U}}$ la catégorie (au sens usuel) des ∞ -catégories, vue comme sous-catégorie pleine de sSet . Si C et D sont des ∞ -catégories, alors $\underline{\text{Hom}}(C, D)$ n'est pas nécessairement un complexe de Kan. On peut cependant considérer $\underline{\text{Hom}}(C, D)^{\approx}$, le sous-complexe de Kan maximal dans $\underline{\text{Hom}}(C, D)$. Puisque les foncteurs d' ∞ -catégories sont des morphismes d'ensembles simpliciaux, et donc induisent des morphismes entre les 2-simplexes et respectent

10. C'est-à-dire tels que l'image de tout $[n] \in \mathbb{A}$ soit un ensemble appartenant à \mathbb{U}

les faces et dégénérescence, si f est un isomorphisme dans C et $F : C \rightarrow D$ est un foncteur d' ∞ -catégories, alors $F(f)$ est un isomorphisme dans D , et F induit donc un foncteur $C^\simeq \rightarrow D^\simeq$. En particulier, on a un enrichissement en complexes de Kan sur $\mathbf{QCat}_{\mathbb{U}}$ si on considère $\underline{\mathbf{Hom}}(C, D)^\simeq$ comme ensemble simplicial de morphismes plutôt que $\underline{\mathbf{Hom}}(C, D)$. On note encore $\mathbf{QCat}_{\mathbb{U}}$ la catégorie simplicialement enrichie ainsi obtenue. On peut alors définir

$$\mathbf{Cat}_{\infty, \mathbb{U}} := \mathbf{N}^{\mathrm{hc}}(\mathbf{QCat}_{\mathbb{U}}).$$

Cette ∞ -catégorie est l' ∞ -catégorie des ∞ -catégories \mathbb{U} -petites. On remarquera qu'un morphisme d' ∞ -catégories $F : C \rightarrow D$ définit un isomorphisme dans cette catégorie si et seulement si c'est une équivalence d' ∞ -catégories (à l'inverse de $\mathbf{QCat}_{\mathbb{U}}$, où les isomorphismes sont les isomorphismes d'ensembles simpliciaux).

On remarque aussi que vu la définition des 2-simplexe du nerf homotopiquement cohérent, la notion de diagramme “strictement commutatif” n'a pas de sens dans $\mathbf{Cat}_{\infty, \mathbb{U}}$. Un foncteur à valeur dans \mathbf{Cat}_{∞} ¹¹ est nécessairement un “pseudo-foncteur”. Notons cependant que tout diagramme “strict” (c'est-à-dire tout diagramme au sens usuel, partant d'une 1-catégorie et à valeur dans \mathbf{QCat}) définit bel et bien un diagramme à valeurs dans \mathbf{Cat}_{∞} , mais que tous les foncteurs ne se relèvent pas nécessairement en des foncteurs à valeurs dans \mathbf{QCat} .

Remarque. Le choix de l'enrichissement simplicial de \mathbf{QCat} peut sembler un peu artificiel : il serait plus naturel d'enrichir \mathbf{QCat} en ensembles simpliciaux via son enrichissement canonique usuel, sans passer aux sous- ∞ -groupoïdes maximaux. Si on fait cela, l'ensemble simplicial obtenu en appliquant le nerf homotopiquement cohérent n'est plus une $(\infty, 1)$ -catégorie, mais une $(\infty, 2)$ -catégorie au sens de [LurKer], 5.5. Bien que ce point de vue est “philosophiquement” meilleur, nous restons dans le monde de $(\infty, 1)$ -catégories dans ces notes.

Exemple. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. La catégorie des complexes de chaînes d'objet de \mathcal{A} admet un enrichissement naturel en complexe de chaîne de groupes abéliens. La construction de Dold-Kan permet de donner une adjonction entre les complexes de chaînes de groupe abéliens et les groupes abéliens simpliciaux, et les propriétés monoïdales de cette adjonction permettent d'enrichir les complexes de chaîne d'objets de \mathcal{A} en ensembles simpliciaux.

Explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, on peut construire le complexe de chaîne normalisé $N_*(\Delta^n; \mathbb{Z})$ de Δ^n : pour tout $k \geq 0$, $N_k(\Delta^n; \mathbb{Z})$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble des k -simplexes non dégénérés de Δ^n (en particulier, $N_k(\Delta^n; \mathbb{Z})$ est nul pour $k > n$). Pour tout n , la différentielle

$$\partial : N_k(\Delta^n; \mathbb{Z}) \rightarrow N_{k-1}(\Delta^n; \mathbb{Z})$$

est définie sur les générateurs par la formule

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (\partial_i^k)^* \sigma.$$

11. À partir de maintenant, on ne notera plus toujours les univers en indice.

et l'enrichissement simplicial de $\text{Ch}(\mathcal{A})$ est alors donné par

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{Ch}(\mathcal{A})}(C_*, D_*)_n = \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathbb{Z})}(N(\Delta^n; \mathbb{Z})_*, \underline{\text{Hom}}_{\text{Ch}(\mathcal{A})}(C_*, D_*)_n).$$

La composition est plus compliquée à définir et met en jeu les morphismes dit d'Alexander-Whitney. Nous renvoyons à [LurKer], 00SC pour les détails.

On peut alors prendre le nerf homotopiquement cohérent de $\text{Ch}(\mathcal{A})$ muni de cet enrichissement simplicial. On obtient alors une ∞ -catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ dont on peut vérifier que les objets sont les complexes de chaines, les morphismes les morphismes de complexes de chaine, et dont les 2-simplexes sont donnés par des triplets de morphismes $f : C_* \rightarrow D_*, g : D_* \rightarrow E_*$, ainsi que $h : C_* \rightarrow E_*$, ainsi que d'une homotopie (au sens des complexes de chaine) de $g \circ f$ à h . En particulier, un morphisme dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ est un isomorphisme si et seulement si c'est une équivalence d'homotopies de complexe de chaines.

Remarque. Contrairement à ce qui a été annoncé à l'oral lors de l'exposé, la construction ci-dessus n'est pas exactement ce qui est parfois appelé le dg-nerf d'une catégorie enrichie en complexes de chaines de groupe abélien (c'est-à-dire d'une dg-catégorie). La différence reste cependant négligeable, puisque la construction ci-dessus fournit une ∞ -catégorie équivalente (mais non isomorphe) au dg-nerf. On renvoie encore une fois à [LurKer] 00SC pour les détails.

3.2 Localisation de catégories

La deuxième méthode la plus courante pour définir des ∞ -catégories est de procéder par localisation de catégories déjà connues et comprises (le plus souvent, des 1-catégories). On se donne une ∞ -catégorie \mathcal{C} , ainsi qu'un sous-ensemble simplicial $W \subset \mathcal{C}$. Étant donné une ∞ -catégorie \mathcal{D} , on note $\underline{\text{Hom}}_W(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tels que pour tout $f \in W_1$, le morphisme $F(f)$ est un isomorphisme dans \mathcal{D} .

Définition 20. Soient \mathcal{C} et W comme ci-dessus. Soit $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre ∞ -catégories. On dit que γ exhibe \mathcal{D} comme localisation de \mathcal{C} par W si $\gamma \in \underline{\text{Hom}}_W(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, et si pour toute ∞ -catégorie \mathcal{E} , le foncteur

$$\gamma^* : \underline{\text{Hom}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

est pleinement fidèle, d'image essentielle $\underline{\text{Hom}}_W(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Remarque. En utilisant le fait que le foncteur “catégorie homotopique” est adjoint à gauche du foncteur nerf, ainsi que la pleine fidélité du nerf, on voit que si \mathcal{C} est une 1-catégorie et si W est une collection de flèche de \mathcal{C} , alors si $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ exhibe \mathcal{D} comme localisation de \mathcal{C} par rapport à W , la catégorie homotopique de \mathcal{D} est une localisation au sens 1-catégorique usuel de \mathcal{C} par rapport à W . On prendra garde qu'une localisation (au sens ∞ -catégorique) d'une 1-catégorie n'a pas de raison de rester une 1-catégorie. En fait, on peut même montrer que toute ∞ -catégorie peut s'écrire comme une localisation d'une 1-catégorie par un ensemble de flèches.

Théorème 21. Soient C et W comme ci-dessus. Il existe une localisation de C par W .

L'idée pour montrer ce théorème est relativement simple, mais requiert un certain bagage technique afin de pouvoir se réaliser à ce stade. L'idée est de former un hypothétique pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{f \in W_1} \Delta^1 & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \coprod_{f \in W} \Delta^0 & \longrightarrow & C[W^{-1}] \end{array}$$

dans l' ∞ -catégorie des ∞ -catégories. Bien sûr, n'ayant à ce stade ni la définition de pushout dans une ∞ -catégorie, ni l'existence de colimites dans Cat_∞ , cette idée ne peut se réaliser directement, mais elle est en filigrane de la construction de $C[W^{-1}]$. On commence par montrer qu'il est possible de trouver une équivalence d'homotopie faible de W dans un ∞ -groupeïde (qui sera nécessairement, à homotopie près, un modèle de $W[W^{-1}]$). La construction explicite passe par le foncteur Ex^∞ de Kan, qui informellement, inverse toutes les flèches d'un ensemble simplicial¹². On peut alors considérer le pushout

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ex}^\infty(W) & \longrightarrow & C' \end{array}$$

dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Le pushout C' n'a pas de raison d'être une ∞ -catégorie, on ajoute alors inductivement des simplexes à C' jusqu'à en faire une ∞ -catégorie, qu'on note $C[W^{-1}]$. On peut alors vérifier que le foncteur $\gamma : C \rightarrow C[W^{-1}]$ obtenu exhibe bien $C[W^{-1}]$ comme localisation de C par rapport à W . Le point clé étant que la construction ci-dessus (remplacement de W par un ∞ -groupeïde, pushout, puis remplacement du pushout par une ∞ -catégorie) est une manière indirecte de construire un pushout dans Cat_∞ .

Remarque. Le résultat d'existence donné ici est formel, mais ne permet pas vraiment de description explicite d'une catégorie localisée. De manière générale, on fait des hypothèses variées sur C et sur W (par exemple, la stabilité de W par pullbacks, l'existence de structures sur C permettant de bien approximer des flèches par des flèches dans W , etc.) pour tenter de mieux contrôler la localisation et le foncteur de localisation. On appelle généralement "algèbre homotopique" la collection de résultats permettant de mieux comprendre les localisations en présence de bonnes structures sur C . Le chapitre 7 de [Cis19] est une excellente référence sur ces sujets.

12. Plus formellement, on commence par définir un foncteur Sd de division barycentrique des ensembles simpliciaux dans eux-même. Ce foncteur admet un adjoint à droite Ex qui vérifie $\text{Ex}(X)_n = \text{Hom}_{\text{Set}}(\text{Sd}(\Delta^n), X)$. En particulier, Ex "ajoute un 1-simplexe par zigzag dans X ". On peut alors considérer les itérées successives de Ex , et on peut montrer que $\text{Ex}^\infty(X) := \text{colim}_n \text{Ex}^n(X)$ est un infini groupeïde peut importe l'ensemble simplicial de départ

On peut alors retrouver certaines catégories connues via des localisations :

Théorème 22. *On a des équivalences canoniques*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cat}_\infty &\simeq \mathrm{N}(\mathrm{QCat})[W_0^{-1}] \\ \infty\text{-Grpd} &\simeq \mathrm{N}(\mathrm{Kan})[(W_0 \cap \mathrm{Kan})^{-1}]\end{aligned}$$

où W_0 désigne l'ensemble des équivalences d' ∞ -catégories.

Notons que dans le théorème ci-dessus, on est passé d'un nerf homotopiquement cohérent à un nerf usuel. On se doit alors de mentionner un des résultats fondamentaux de la théorie de l'homotopie, qui motive une partie de la terminologie et des résultats attendus :

Théorème 23. *L'adjonction*

$$\mathrm{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathrm{Sing}} \end{array} \mathrm{Top}$$

induit une équivalence d' ∞ -catégories $\infty\text{-Grpd} \simeq \mathrm{N}(\mathrm{Top}_{\mathrm{CGH}})[W^{-1}]$, où $\mathrm{Top}_{\mathrm{CGH}}$ est la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés et séparés, et W est la classe des équivalences d'homotopies. En particulier, un foncteur entre ∞ -groupoïdes est une équivalence d' ∞ -groupoïdes si et seulement si sa réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie.

Définition 24. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et soit W la classe des quasi-isomorphismes de complexes de chaîne d'objets de \mathcal{A} . On définit $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, l' ∞ -catégorie dérivée de \mathcal{A} , comme la localisation $\mathrm{K}(\mathcal{A})[W^{-1}]$.

4 Limites, colimites et fibrations

Dans cette section, on avance un petit peu l'étude de la théorie formelle des ∞ -catégories.

4.1 Jointures et tranches

Afin de définir les limites et les colimites dans les ∞ -catégories, on doit malheureusement introduire encore quelques constructions simpliciales.

Définition 25. Soient K et L deux ensembles simpliciaux. L'application

$$[n] \mapsto \coprod_{i+j+1=n} K_i \times L_j$$

s'étend canoniquement en un ensemble simplicial noté $K * L$ et appelé jointure de K et de L .

Remarque. On peut définir $K * L$ plus formellement comme suit : on introduit Δ_+ , la catégorie simpliciale augmentée, comme la catégorie simpliciale à laquelle on adjoint l'ensemble vide (on garde les fonctions croissantes comme morphismes), qu'on note $[-1]$. Un ensemble simplicial augmenté est alors un préfaisceau sur Δ_+ . Tout ensemble simplicial X admet une augmentation canonique, en posant $X_{-1} = *$, et on note X_+ l'ensemble simplicial augmenté ainsi obtenu. La catégorie simpliciale augmentée admet une structure monoïdale symétrique \oplus , définie par $[m] \oplus [n] := [m+n+1]$. Cette structure monoïdale symétrique en induit une sur les ensembles simpliciaux augmentés par convolution de Day : si X et Y sont deux ensembles simpliciaux augmentés, alors $X \tilde{*} Y$ est défini comme l'extension de Kan à gauche de

$$(\Delta_+)^{\text{op}} \times (\Delta_+)^{\text{op}} \xrightarrow{X \times Y} \text{Set} \times \text{Set} \xrightarrow{\times} \text{Set}$$

le long de

$$\oplus^{\text{op}} : (\Delta_+)^{\text{op}} \times (\Delta_+)^{\text{op}} \rightarrow (\Delta_+)^{\text{op}}.$$

L'ensemble simplicial $K * L$ est alors l'ensemble simplicial augmenté $K_+ \tilde{*} L_+$ dont on a oublié l'augmentation. La formule annoncée sur les n -simplexes est alors une conséquence directe de la formule en terme de colimites pour les extensions de Kan à gauche.

La description de la remarque ci-dessus, bien qu'un peu abstraite, rend immédiat le fait que $\Delta^p * \Delta^q \simeq \Delta^{p+q+1}$, qu'il existe une flèche canonique et bifonctorielle $K \coprod L \rightarrow K * L$ et que pour tout $K \in \text{sSet}$, le foncteur

$$K * (-) : \text{sSet} \rightarrow K \backslash \text{sSet}$$

commute aux colimites, où $K \backslash \text{sSet}$ désigne la catégorie des flèches de source K dans sSet . Le fait que ce foncteur commute aux colimites implique formellement qu'il admet un adjoint à droite

$$(f : K \rightarrow X) \mapsto f \backslash X.$$

Explicitement, $(f \backslash X)$ est l'ensemble simplicial défini par

$$[n] \mapsto \text{Hom}_{\text{sSet}, f}(K * \Delta^n, X)$$

où $\text{Hom}_{\text{sSet}, f}(K * \Delta^n, X)$ désigne l'ensemble des flèches d'ensembles simpliciaux $g : K * \Delta^n \rightarrow X$ dont la restriction le long de l'inclusion canonique $K \rightarrow K * \Delta^n$ est égale à f .

Remarque. Pour $K = \Delta^0$, $x : \Delta^0 \rightarrow C$, un k -simplexe de $x \backslash C$ est donc un diagramme $\Delta^0 * \Delta^k = \Delta^{k+1} \rightarrow C$ envoyant le sommet 0 de Δ^{k+1} sur l'objet x de C . Pour K plus général, un objet de $f \backslash C$ est un diagramme $\tilde{f} : K^{\triangleright} := K * \Delta^0 \rightarrow C$ dont la restriction à K est f , c'est-à-dire un co-cône sous f : si $\sigma : \Delta^n \rightarrow K$ est un n -simplexe de K et $\tilde{f} \in (f \backslash C)_0$, on a un $n+1$ -simplexe dans C , dont la restriction à la face ∂_{n+1}^{n+1} est $f(\sigma)$, et dont l'image du sommet $(n+1)$ est un objet noté $\tilde{f}(\infty)$: le "sommet" du co-cône.

De manière duale, on peut définir X/f comme la valeur en $f : K \rightarrow X$ de l'adjoint à droite du foncteur $(-) * K$. Cette fois, on a $(X/f)_n = \text{Hom}_{\text{Set}, f}(\Delta^n * K, X)$. Les objets de (X/f) s'identifient aux cônes dans X au dessus du diagramme f . On remarque qu'on a canoniquement $(X/f)^{\text{op}} \simeq (f^{\text{op}} \backslash X^{\text{op}})$.

Remarque. Si C est le nerf d'une catégorie ordinaire et K aussi, alors $f \backslash C$ est isomorphe au nerf de la catégorie des co-cônes sous f .

Toujours à l'aide de dévissages pour se ramener à de la combinatoire sur des ensembles simpliciaux simples (i.e de type Δ^n , $\partial\Delta^n$, λ_i^n , etc.), on peut montrer

Proposition 26. (i) Si C et D sont des ∞ -catégories, alors $C * D$ est une ∞ -catégorie.
(ii) Si C est une ∞ -catégorie et si $f : K \rightarrow C$ est un diagramme dans C , alors (C/f) et $(f \backslash C)$ sont des ∞ -catégories.

Remarque. Comme dans le cas 1-catégorique, on peut identifier les co-cônes sous $f : K \rightarrow C$ de sommet $c \in C_0$ aux transformations naturelles de f vers le foncteur constant sur C égal à c . La construction requiert cependant une certaine quantité de combinatoire simpliciale. L'idée est de définir une version alternative de la jointure, notée \diamond et définie par

$$K \diamond L := K \coprod_{K \times \{0\} \times L} K \times \Delta^1 \times L \coprod_{K \times \{1\} \times L} L.$$

Le foncteur $K \diamond (-)$ a encore un adjoint à droite

$$(f : K \rightarrow X) \mapsto (f \backslash \backslash X)$$

et les objets de $f \backslash \backslash X$ sont les diagrammes $K \diamond \Delta^0 \rightarrow X$ au dessus de f , dont on voit qu'il s'agit exactement des transformations naturelles de f vers un foncteur constant. On peut alors montrer que $f \backslash \backslash X$ est une ∞ -catégorie équivalente (mais non isomorphe!) à $f \backslash X$ via un foncteur de comparaison canonique venant d'une comparaison naturelle $(-) \diamond (-) \rightarrow (-) * (-)$. En passant par cette équivalence de catégories, on peut transformer une transformation naturelle de f vers un foncteur constant en un co-cône et vice-versa.

4.2 Limites et colimites

Définition 27. Soit C une ∞ -catégorie et x un objet de C . On dit que x est initial (resp. final) si pour tout $y \in C_0$, le complexe de Kan $C(x, y)$ (resp. $C(y, x)$) est contractile.

Les objets finaux sont sans surprise homotopiquement unique

Proposition 28. Soit C une ∞ -catégorie. Alors la sous-catégorie pleine des objets finaux de C est soit vide, soit un ∞ -groupeïde contractile.

Munis de cette définition et de la définition des catégories de cône, la définition des limites et des colimites est aisée.

Définition 29. Soit $\tilde{f} : K^\triangleright := K * \Delta^0 \rightarrow C$ un diagramme dans une ∞ -catégorie C . On dit que \tilde{f} est un diagramme colimite si ce diagramme est un objet initial de l' ∞ -catégorie $(\tilde{f}_{\downarrow K} \backslash C)$. De manière duale, un diagramme $\tilde{f} : K^\triangleleft := \Delta^0 * K \rightarrow C$ est un diagramme limite si c'est un objet final de $(C / \tilde{f}_{\downarrow K})$. Si $\tilde{f} : K^\triangleright := K * \Delta^0 \rightarrow C$ est un diagramme colimite, on dit que $\tilde{f}(\infty)$ (où ∞ désigne ici le sommet de $K * \Delta^0$, correspondant à l'objet $\Delta^0 \rightarrow K * \Delta^0$ canonique) est une colimite de $f_{\downarrow K}$.

Remarque. Vu l'unicité forte des objets initiaux et finaux dans une ∞ -catégorie, les diagrammes colimites, s'ils existent, sont unique "à choix contractile près". Il faut insister sur le fait que l'unicité concerne les *diagrammes colimites* et non l'*objet colimite*. Une colimite peut avoir un grand nombre d'automorphismes, mais un seul respecte co-cône colimite.

Remarque. Vu la remarque concernant les catégories $(f \backslash C)$ si K et C sont des nerfs de 1-catégories, un diagramme de catégorie usuelle est un diagramme colimite au sens usuel si et seulement si son nerf est un diagramme colimite au sens ∞ -catégorique.

Exemple. Un calcul direct montre que $\Lambda_0^2 * \Delta^0 \simeq \Delta^1 \times \Delta^1$, et que $\Delta^0 * \Lambda_2^2 \simeq \Delta^1 \times \Delta^1$. Un carré commutatif dans une ∞ -catégorie C est par définition un diagramme $\Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow C$. En vertu des calculs ci-dessus, on peut parler de carrés cartésiens et de carrés cocartésiens dans une ∞ -catégorie C .

Remarque. Il faut faire attention au fait que, dans le cas d'une ∞ -catégorie présentée comme localisation d'une catégorie ordinaire, les diagrammes limites et colimites n'ont pas de raisons de rester des diagrammes colimites dans les localisations ∞ -catégoriques. La théorie des *colimites homotopiques* dans les catégories de modèle sert précisément à étudier quels diagrammes colimites dans la catégorie de départ restent des diagrammes colimites dans l' ∞ -catégorie localisée. Par exemple, dans l' ∞ -catégorie des ∞ -groupoïdes, on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 \amalg \Delta^0 & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{\quad j \quad} & S^1 \end{array}$$

alors qu'on a pas de tel carré cocartésien dans \mathbf{Top} . En revanche, le carré

$$\begin{array}{ccc} * \amalg * & \xrightarrow{(0,1)} & [0, 1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\quad j \quad} & S^1 \end{array}$$

est bien cocartésien dans \mathbf{Top} et présente un carré cocartésien dans $\infty\text{-Grpd}$ en vertu de la contractibilité de l'espace topologique $[0, 1]$: c'est un pushout *homotopique*.¹³

Remarque. Les diagrammes limites dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} ne définissent en général *pas* des diagrammes limites dans la catégorie homotopique de \mathcal{C} . Le point étant que la catégorie homotopique de $\underline{\mathbf{Hom}}(K, \mathcal{C})$ n'est en général pas équivalente (même si K est le nerf d'une 1-catégorie) à la catégorie des foncteurs de $\mathbf{ho}(K)$ dans $\mathbf{ho}(\mathcal{C})$. De manière générale, les catégories homotopiques ont très peu de limites. Par exemple, on peut montrer que $\mathbf{ho}(\infty\text{-Grpd})$ n'admet même pas toutes les limites finies. C'est une des raisons pour laquelle il est souvent préférable de travailler avec les localisations ∞ -catégoriques plutôt qu'avec les localisations 1-catégoriques.

4.3 Extensions de Kan

On suit ici de près l'exposition de [LurKer]. Soient $\delta : K \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme où \mathcal{C} est une ∞ -catégorie, $F_0 : K \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, où \mathcal{D} est une ∞ -catégorie, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur et $\alpha : F \circ \delta \rightarrow F_0$ dans $\underline{\mathbf{Hom}}(K, \mathcal{D})$.

Définition 30. Soit $c \in \mathcal{C}$. On dit que α exhibe F comme extension de Kan à droite de F_0 le long de δ en c si la transformation naturelle

$$\tilde{\alpha}_c : \mathbf{Const}_{F(c)} \xrightarrow{F(\gamma)} (F \circ \delta)_{|c \setminus K} \xrightarrow{\alpha} (F_0)_{|c \setminus K}$$

exhibe $F(c)$ comme limite de $(F_0)_{|c \setminus K}$.

On dit que α exhibe F comme extension de Kan à droite de F_0 le long de δ si c'est le cas en tout point.

Ici, $c \setminus K$ est défini par le carré cartésien d'ensembles simpliciaux¹⁴

$$\begin{array}{ccc} c \setminus K & \longrightarrow & c \setminus \mathcal{C} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ K & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C} \end{array}$$

et γ est la transformation naturelle “tautologique” informellement¹⁵ décrite de la manière suivante : pour un objet $u : c \rightarrow \delta(k)$ de $c \setminus K$, γ_c est la flèche

$$u : c = \mathbf{const}_c(u) \rightarrow \delta(k) = \delta_{|c \setminus K}(u).$$

On compile l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les extensions de Kan.

13. On retrouve l'idée déjà évoquée qu'il est parfois nécessaire d'épaissir homotopiquement des objets pour obtenir une bonne construction homotopique : ici, on a épaissi le point par $[0, 1]$.

14. En fait, si K est une ∞ -catégorie, alors ce carré cartésien est homotopique et définit même un carré catésien dans \mathbf{Cat}_∞ .

15. Pour décrire cette transformation naturelle plus formellement avec toutes ses données de cohérence, on peut utiliser la version alternative de la jointure déjà mentionnée.

- Théorème 31.** (i) Si $\forall c \in C, (F_0)_{|c \setminus K}$ admet une limite, alors il existe (F, α) exhibant F comme extension de Kan à droite de F_0 le long de δ .
- (ii) La sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(K, D)$ des foncteurs admettant une extension de Kan le long de δ est équivalente à la catégorie des triplets (F_0, F, α) , où α exhibe F comme extension de Kan à droite de F_0 le long de δ .
- (iii) Si δ est pleinement fidèle, alors pour toute extension de Kan (F_0, F, α) , la transformation α est un isomorphisme naturel.
- (iv) Si (F_0, F, α) est une extension de Kan à droite, alors pour tout $G : C \rightarrow D$, la composée

$$\text{Hom}_{\underline{\text{Hom}}(C, D)}(G, F) \xrightarrow{(-) \circ \delta} \text{Hom}_{\underline{\text{Hom}}(K, D)}(G \circ \delta, F \circ \delta) \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}_{\underline{\text{Hom}}(K, D)}(G \circ \delta, F_0)$$

est une équivalence d' ∞ -groupoïdes.

4.4 Fibrations cocartésienne

À ce stade, il est toujours difficile de définir des foncteurs à valeurs dans Cat_∞ , même venant du nerf d'une 1-catégorie : la combinatoire du nerf homotopiquement cohérent rend trop difficile les définitions "à la main" de foncteurs, en donnant explicitement les valeurs sur les 1-simplexes, les 2-simplexes, etc... À la place, comme en théorie des catégories usuelles, on passe par des notions de fibrations.

Définition 32. Soient C et D deux ∞ -catégories et $F : C \rightarrow D$ un foncteur. Soit $f : x \rightarrow y$ une flèche dans C . On dit que la flèche f est F -cocartésienne si pour tout $z \in C$, le carré commutatif canonique

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(y, z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_C(x, z) \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ \text{Hom}_D(F(y), F(z)) & \xrightarrow{F(f)^*} & \text{Hom}_D(F(x), F(z)) \end{array}$$

est cartésien dans $\infty\text{-Grpd}$. On dit que F est une fibration cocartésienne si toute flèche $F(x) \rightarrow \tilde{y}$ dans D se relève en un morphisme F -cocartésien dans D .

Remarque. On peut montrer que Set (vu comme sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Grpd}$) est stable par limites. En particulier, une fibration cocartésienne au sens usuel définit une fibration cocartésienne au sens ∞ -catégorique.

Remarque. On remarque que le fait d'être une fibration cocartésienne est une *propriété* d'un foncteur et non une *structure*.

Définition 33. On définit $\text{Cat}_{\infty, \text{obj}}$, l' ∞ -catégorie des (petites) ∞ -catégories avec un objet distingué de la manière suivante : on considère dans un premier temps l'ensemble simplicial

$$\underline{\text{Cat}}_{\infty, \text{obj}} := \Delta^0 \backslash N^{\text{hc}}(\underline{\text{QCat}})$$

où $\underline{\text{QCat}}$ est la 1-catégorie des quasi-catégories, muni de son enrichissement simplicial usuel venant de celui des ensembles simpliciaux (et non pas celui utilisé pour définir Cat_∞). On définit $\text{Cat}_{\infty, \text{obj}}$ comme le sous-ensemble simplicial de $\underline{\text{Cat}}_{\infty, \text{obj}}$ dont les n -simplexes sont les diagrammes $\Delta^0 * \Delta^n \rightarrow \text{N}^{\text{hc}}(\underline{\text{QCat}})$ dont tous les 2-simplexes de $\Delta^n \subset \Delta^0 * \Delta^n$ se factorisent à travers $\text{Cat}_\infty \subset \text{N}^{\text{hc}}(\underline{\text{QCat}})$.

On peut expliciter en basse dimension les simplexes de cet objet :

- Les objets de $\text{Cat}_{\infty, \text{obj}}$ sont les couples (c, C) , où $c : \Delta^0 \rightarrow C$.
- Les morphismes de $\text{Cat}_{\infty, \text{obj}}$ sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ c \nearrow & \Downarrow \alpha & \searrow F \\ \Delta^0 & \xrightarrow{d} & D \end{array}$$

où $\alpha \in \underline{\text{Hom}}(\Delta^0, D)_1 \simeq D$ est un 1-simplexe (non nécessairement inversible) allant de $F(c)$ à d

- La donnée d'un 2-simplexe

$$\begin{array}{ccc} & (d, D) & \\ (F, \alpha) \nearrow & \Downarrow \tau & \searrow (G, \beta) \\ (c, C) & \xrightarrow{(H, \gamma)} & (e, E) \end{array}$$

dans $\text{Cat}_{\infty, \text{obj}}$ correspond à la donnée d'un isomorphisme naturel $\mathfrak{p} : G \circ F \rightarrow H$, ainsi que d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} G(F(c)) & \xrightarrow{G(\alpha)} & G(d) \\ \mathfrak{p}_c \downarrow & \swarrow \parallel & \downarrow \beta \\ H(c) & \xrightarrow{\gamma} & e \end{array}$$

dans E .

On a un foncteur canonique $\pi_{\text{univ}} : \text{Cat}_{\infty, \text{obj}} \rightarrow \text{Cat}_\infty$, donné informellement sur les objets par $(c, C) \mapsto C$.

On peut alors énoncer l'un des théorèmes principaux de la théorie des ∞ -catégories. C'est sans doute l'un des théorèmes les plus fondamentaux de la théorie, et la source d'un grand nombre de constructions.

Théorème 34. (i) L'ensemble simplicial $\text{Cat}_{\infty, \text{obj}}$ est une ∞ -catégorie.

- (ii) Le foncteur $\pi_{\text{univ}} : \text{Cat}_{\infty, \text{obj}} \rightarrow \text{Cat}_\infty$ est une fibration cocartésienne, une flèche $(F, \alpha) : (c, C) \rightarrow (d, D)$ est π_{univ} -cocartésienne si et seulement si $\alpha : F(c) \rightarrow d$ est un isomorphisme.

(iii) Le foncteur de pullback le long de π_{univ} induit une équivalence d' ∞ -catégories

$$\pi_{\text{univ}}^* : \underline{\text{Hom}}(\mathbf{C}, \text{Cat}_{\infty}) \rightarrow \text{CoCart}_{\mathbf{C}}$$

où $\text{CoCart}_{\mathbf{C}}$ est la sous-catégorie non pleine de $\text{Cat}_{\infty}/\mathbf{C}$ dont les objets sont les fibrations cocartésiennes à fibres petites et les morphismes les foncteurs respectant les flèches cocartésiennes.

(iv) Si \mathbb{U} est un univers et \mathbb{V} un univers contenant \mathbb{U} , et si $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fibration cocartésienne à fibres \mathbb{U} -petites, alors la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(\Delta^1 \times \Delta^1, \text{Cat}_{\infty, \mathbb{V}})$ engendrée par les carrés cartésiens de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \xrightarrow{\sigma} & \text{Cat}_{\infty, \text{obj}, \mathbb{U}} \\ F \downarrow & \ulcorner & \downarrow \pi_{\text{univ}} \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \text{Cat}_{\infty, \mathbb{U}} \end{array}$$

est un ∞ -groupeïde contractile. De plus, un élément de cet ∞ -groupeïde est l'image d'un carré cartésien strictement commutatif d'ensembles simpliciaux.

En pratique, la correspondance peut s'exprimer ainsi : à un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \text{Cat}_{\infty}$, on associe sa construction de Grothendieck, qui est l' ∞ -catégorie dont les objets sont les couples (c, x) , où $c \in \mathbf{C}$ et $(x \in F(c))$. Réciproquement, à une fibration cartésienne $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, on associe le foncteur qui a un objet c associe l' ∞ -catégorie $\mathbf{D}_c = F^{-1}(c)$, à une flèche $f : c \rightarrow d$, on associe le foncteur qui envoie $x \in \mathbf{D}_c$ sur le but d'un relevé F -cocartésien de f en x , qui existe car F est une fibration cocartésienne!

Bien sûr, l'essentiel de la difficulté de la preuve consiste à rendre précis cette définition informelle.

Exemple. Soit $F : \mathbf{C}_0 \rightarrow \text{Cat}_{\infty}$ un foncteur et $\pi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ une fibration cocartésienne classifiant F . Si $G : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_0$ est un foncteur, alors la fibration cocartésienne $\pi \times_{\mathbf{C}_0} \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1$ classifie le foncteur $F \circ G$.

Exemple. Puisque $\infty\text{-Grpd}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Grpd}$, on voit que les foncteurs à valeurs dans $\infty\text{-Grpd}$ s'identifie aux fibrations cocartésiennes dont les fibres sont des ∞ -groupeïdes (on parle alors de fibration à gauche). On peut alors finalement définir un Hom-foncteur dans une ∞ -catégorie : étant donné une ∞ -catégorie \mathbf{C} , on considère une fibration à gauche $\text{Tw}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{C}$, qui classifie le bifoncteur $\text{Hom}_{\mathbf{C}}$. Explicitement,

$$\text{Tw}(\mathbf{C})_n = \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n * (\Delta^n)^{\text{op}}, \mathbf{C})$$

et la flèche vers $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{\text{op}}$ est donnée par les restrictions le long de $\Delta^n \rightarrow \Delta^n * (\Delta^n)^{\text{op}}$ et $(\Delta^n)^{\text{op}} \rightarrow \Delta^n * (\Delta^n)^{\text{op}}$. Le fait que c'est une fibration à gauche n'est alors plus qu'une vérification essentiellement combinatoire.

Exemple. Si c est un objet d'une ∞ -catégorie C , on peut montrer que le foncteur d'oubli $c \backslash C \rightarrow C$ est une fibration à gauche. Une comparaison explicite avec une restriction du foncteur $\text{Tw}(C) \rightarrow C \times C^{\text{op}}$ montre que cette fibration classe le foncteur $\text{Hom}_C(c, -)$. De manière plus générale, on peut montrer qu'une fibration à gauche $\pi : D \rightarrow C$ classe un foncteur co-représentable si et seulement si la catégorie totale D de la fibration admet un objet initial. Dans ce cas, l'objet co-représenté par le foncteur classifié par π est l'image de l'objet initial de D .

Exemple. Soit R un anneau commutatif. On peut considérer $D(R)$, la catégorie dérivée des R -modules. On peut assembler $R \mapsto D(R)$ en un foncteur d' ∞ -catégories bien défini : un morphisme d'anneau est alors envoyé sur le foncteur d'extension des scalaires dérivée

$$M \mapsto M \otimes_A^L B.$$

L'une des manière de le faire consiste à construire une bonne ∞ -catégorie fibrée sur les anneaux.

5 Descente

5.1 Limite et colimites dans Cat_∞

Théorème 35. Soit $F : C \rightarrow \text{Cat}_\infty$ un foncteur et soit $\pi : D \rightarrow C$ la fibration cocartésienne classifiant ce foncteur.

(i) Il existe un diagramme limite $\tilde{F} : C^\triangleleft \rightarrow \text{Cat}_\infty$. On a une équivalence canonique

$$\tilde{F}(-\infty) \simeq \underline{\text{Hom}}_{/C}^{\text{Cocart}}(C, D)$$

où le codomaine désigne l' ∞ -catégorie des sections de π dont toutes les flèches sont envoyées sur des morphismes π -cocartésiens. Via cette équivalence, pour tout objet de C , l'image par \tilde{F} du morphisme canonique $-\infty \rightarrow C$ de C^\triangleleft s'identifie au foncteur

$$\text{ev}_c : \underline{\text{Hom}}_{/C}^{\text{Cocart}}(C, D) \rightarrow D_c \simeq F(c).$$

(ii) Il existe un diagramme colimite $\tilde{F} : C^\triangleright \rightarrow \text{Cat}_\infty$. La valeur de \tilde{F} en ∞ s'identifie à la localisation de D en les flèches π -cocartésienne. Pour tout $c \in C$, l'image du morphisme canonique $c \rightarrow \infty$ dans C^\triangleright par \tilde{F} s'identifie au foncteur $F(c) \simeq D_c \subset D \rightarrow D[(\pi\text{-cocart})^{-1}]$

Exemple. Dans le cas $C = \Lambda_2^2$, un foncteur $F : \Lambda_2^2 \rightarrow \text{Cat}_\infty$ s'identifie à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & F(0) & \\ & \downarrow F(\{0<2\}) & \\ F(1) & \xrightarrow{F(\{1<2\})} & F(2) \end{array}$$

et si $\pi : D \rightarrow \Lambda_2^2$ est la fibration cocartésienne classifiant F , une section cartésienne consiste en la donnée de $x_0 \in F(0)$, $x_1 \in F(1)$, $x_2 \in F(2)$, ainsi que de morphismes cocartésien dans D de $x_0 \rightarrow x_2$ et $x_1 \rightarrow x_2$. La description de D comme pullback le long de la fibration cocartésienne universelle montre que la donnée d'un morphisme cocartésien $x_0 \rightarrow x_2$ dans D correspond exactement à la donnée d'un isomorphisme $F(\{0 < 2\})(x_0) \simeq x_2$ dans $F(2)$. De même un morphisme cocartésien $x_1 \rightarrow x_2$ dans D correspond à un isomorphisme $F(\{1 < 2\})(x_1)$. Ces isomorphismes font partie de la donnée de la section cocartésienne. La composition dans D donne toute la combinatoire nécessaire pour décrire les morphismes dans la limite.

Exemple. Si $C^{\text{op}} \rightarrow \infty\text{-Grpd}$ est un foncteur classifié par une fibration cocartésienne $\pi : D \rightarrow C^{\text{op}}$, puisque toutes les fibres sont des ∞ -groupoïdes, on peut montrer que toutes les flèches de D sont alors π -cocartésiennes, si bien que la colimite de ce foncteur est donné par $D[D^{-1}]$ et est encore un ∞ -groupoïde. Ainsi, $\infty\text{-Grpd}$ est stable par colimites dans Cat_∞ . De même, $\infty\text{-Grpd}$ est stable par limites, puisque toute section de π est automatiquement cocartésienne et puisqu'on peut montrer que $\underline{\text{Hom}}_{/C^{\text{op}}}(C^{\text{op}}, D)$ est un ∞ -groupoïde¹⁶.

Exemple. Soit $F : C^{\text{op}} \rightarrow \infty\text{-Grpd}$ un foncteur, classifié par une fibration à gauche $\pi : D \rightarrow C^{\text{op}}$. On peut composer π^{op} avec le plongement de Yoneda $\mathcal{Y} : C \rightarrow \underline{\text{Hom}}(C^{\text{op}}, \infty\text{-Grpd})$ et on peut montrer qu'on a une extension canonique δ de $\mathcal{Y} \circ \pi^{\text{op}}$ à $(D^{\text{op}})^{\triangleright} : \text{envoyant le point } \infty \in (D^{\text{op}})^{\triangleright} \text{ sur } F$. Informellement, $\delta(d \rightarrow \infty)$ correspond à une flèche $\mathcal{Y}(\pi^{\text{op}}(d)) \rightarrow F$, c'est-à-dire à un élément de $F(\pi^{\text{op}}(d))$ par le lemme de Yoneda, l'élément correspondant est alors l'élément tautologique associé à d : puisque $D \rightarrow C^{\text{op}}$ classifie F , tout élément d de D s'identifie à un élément de $F(\pi^{\text{op}}(d))$ puisque cet infini-groupoïde s'identifie canoniquement à la fibre de $\pi : D \rightarrow C^{\text{op}}$ en $\pi^{\text{op}}(d) \in C$. Une définition rigoureuse de cette extension nécessite bien sûr quelques techniques supplémentaires pour fournir les cohérences nécessaires à cette construction.

On peut en fait montrer que le diagramme décrit ci-dessus est un diagramme colimite dans l' ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}(C^{\text{op}}, \infty\text{-Grpd})$, autrement dit, tout préfaisceau en ∞ -groupoïdes F est canoniquement colimite de représentables, la catégorie d'indice étant la catégorie totale de la fibration à gauche classifiant F .

Exemple. Les colimites dans $\infty\text{-Grpd}$ apparaissent naturellement lorsqu'on cherche à décrire des espaces de morphismes dans des ∞ -catégories localisées. Si C est une ∞ -catégorie et W un ensemble de flèche de C contenant les isomorphismes et stable par composition et par changement de base (par un morphisme arbitraire), alors pour tout $x \in C$, on a une équivalence canonique de foncteurs

$$\text{Hom}_{C[W^{-1}]}(x, -) \simeq \text{colim}_{(y \rightarrow x) \in W} \text{Hom}_C(y, -)$$

16. En effet, toute transformation naturelle α de foncteurs dans $\underline{\text{Hom}}_{/C^{\text{op}}}(C^{\text{op}}, D)$ est telle que α_c est une flèche dans la fibre D_c pour tout c , cette fibre est un ∞ -groupoïde si bien que la flèche est inversible.

En combinant les techniques déjà expliquées de calcul des colimites, ceci traduit le fait que $\text{Hom}_C(x, y)$ est l' ∞ -groupeïde obtenu en inversant toutes les flèches de $\text{Span}_W(x, y)$, la catégorie des “toits”

$$x \xleftarrow{s} z \rightarrow x$$

où $s \in W$.

Ceci s'applique en particulier dans le cas de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne. Par ailleurs, si $y_0 \rightarrow x$ est un élément de W tel que le foncteur $\text{Hom}_C(y, -)$ envoie les flèches dans W sur des équivalences d' ∞ -groupeïdes, alors il devient formel à partir de la description ci-dessus que $\text{colim}_{(y \rightarrow x) \in W} \text{Hom}_C(y, -) \simeq \text{Hom}_C(y_0, -)$: dans le cadre de la catégorie dérivée, on retrouve donc bien la possibilité de calculer des objets à partir de résolutions. On a une description similaire pour des foncteurs plus généraux que les foncteurs dérivés, en utilisant des foncteurs dérivés (au sens de l'algèbre homotopique). Voir [Cis19], chapitre 7 pour les détails.

5.2 Descente

Soit C une petite ∞ -catégorie. Une topologie de Grothendieck sur C est par définition la donnée d'une topologie de Grothendieck sur sa catégorie homotopique. On identifie cette donnée à la donnée, pour tout $c \in C$, d'un ensemble de *cribles couvrants*, c'est-à-dire de sous-catégories pleines $C^{(0)}/c$ de C/c . On prendra garde au fait que malgré la notation, un crible sur c ne provient pas nécessairement d'une sous-catégorie pleine $C^{(0)}$ de C .

Définition 36. Soit D une ∞ -catégorie. Un foncteur $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ est un faisceau si pour tout $c \in C$ et tout crible couvrant $C^{(0)}/c \subseteq C/c$, F exhibe $F(c)$ comme colimite de $C^{(0)}/c$. Plus précisément, la transformation naturelle identité exhibe

$$c \setminus F : c \setminus C^{\text{op}} \simeq (C/c)^{\text{op}} \rightarrow F(c) \setminus D$$

comme extension de Kan à droite de $(c \setminus F)|_{(C^{(0)}/c)^{\text{op}}}$ en id_c le long de l'inclusion $(C^{(0)}/c)^{\text{op}} \rightarrow (C/c)^{\text{op}}$.

Cette définition de faisceau est la plus générale possible (le site C n'a pas à avoir de limites ou de colimites finies), mais se simplifie bien lorsque le site C est raisonnable. Plus précisément, on se donne une petite ∞ -catégorie C telle que

- l' ∞ -catégorie C admet des limites et des colimites finies,
- les coproduits finis dans C sont disjoints, c'est-à-dire que si \emptyset désigne un objet initial de C , alors pour tout $c \in C$, le carré commutatif cocartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \longrightarrow & c \amalg c \end{array}$$

est aussi cartésien,

- les coproduits finis sont universels dans \mathcal{C} , c'est-à-dire que pour toute flèche $c \rightarrow c'$, le foncteur $(c \times_{c'} -)$ préserve les coproduits finis.

On fait ensuite l'hypothèse que la topologie τ sur \mathcal{C} vient d'une bonne classe de flèches S . Plus précisément, on se donne un ensemble S de flèches de \mathcal{C} qui sont stables par composition, produits, coproduits finis et contiennent tous les isomorphismes. On suppose qu'un crible $\mathcal{C}^{(0)}/c$ est couvrant si et seulement si il contient un ensemble fini de morphismes $c_i \rightarrow c_i$ tel que $\coprod c_i \rightarrow c$ est un élément de S .

Exemple. Par exemple, on peut prendre la catégorie des schémas quasi-compacts quasi-séparés¹⁷ sur une base donnée, et prendre pour S une des classes de morphismes générant une des topologies usuelles (fppf, fpqc, étale, Zariski, Nisnevich, etc...).

L'avantage des sites de la forme considérée ci-dessus est que la condition de faisceau prend une forme mieux connue.

Définition 37. Soit \mathcal{C} comme ci-dessus et $f : U \rightarrow X$ un morphisme dans \mathcal{C} . On voit f comme un foncteur $\Delta^1 \simeq (\Delta_+)^{\text{op}}_{\leq 0} \rightarrow \mathcal{C}$ et on appelle nerf de Čech de f l'extension de Kan à droite de f le long de $(\Delta_+)^{\text{op}}_{\leq 0} \rightarrow \Delta_+^{\text{op}}$. On note $\check{C}(f)$, l'objet simplicial de \mathcal{C} ainsi obtenu.

Ici, Δ_+ désigne la catégorie simpliciale *augmentée*. C'est la catégorie Δ^\triangleleft , c'est-à-dire la catégorie simpliciale à laquelle on a librement ajouté un objet initial, noté $[-1]$ ¹⁸.

La formule des extensions de Kan à droite assure que $\check{C}(f)_n$ est bien un produit fibré de $n + 1$ copies de U au dessus de X , et que les morphismes de faces de Δ sont envoyés sur les projections sur certains facteurs.

On note $i : \Delta_{+,s} \rightarrow \Delta_+$ l'inclusion de la sous-catégorie non pleine dont les morphismes sont donnés uniquement par les morphismes injectifs (autrement dit, on oublie les dégénérescences). On appelle $\Delta_{+,s}$ la catégorie semi-simpliciale augmentée.

Proposition 38. Soit (\mathcal{C}, τ) un site comme précédemment et \mathcal{D} une ∞ -catégorie, alors $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ est un faisceau si et seulement si F est additif (c'est-à-dire préserve les produits) et si pour tout $f : U \rightarrow X$ dans S , le diagramme

$$\Delta_{+,s} \xrightarrow{i} \Delta_+ \xrightarrow{\check{C}(f)^{\text{op}}} \mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

est un diagramme limite dans \mathcal{D} . C'est-à-dire si le diagramme co-semisimplicial

$$F(X) \longrightarrow F(U) \rightrightarrows F(U \times_X U) \rightrightarrows F(U \times_X U \times_X U) \rightrightarrows \dots$$

est un diagramme limite dans \mathcal{D} .

17. Quitte à la considérer comme une petite catégorie pour un univers, sinon, on peut se restreindre aux schémas de cardinalité bornée.

18. On peut par exemple réaliser Δ_+ comme la catégorie dont les objets sont les ensembles $[k]$, pour $k \geq -1$, où $[-1]$ désigne l'ensemble vide et $[n]$ l'élément usuel de Δ et dont les flèches sont les applications croissantes.

On note que si F est un préfaisceau d'ensemble et $f : \coprod U_i \rightarrow X$ est un morphisme dans S , on reconnaît la condition de faisceau usuelle, excepté que les termes supérieurs du diagramme co-simplicial sont présents. En fait, pour des faisceaux d'ensemble, on peut montrer que ces termes sont inutiles, de même, pour des faisceaux en groupoïdes, les termes au-delà des triples intersections sont inutiles. De manière plus générale, pour un préfaisceau en ∞ -catégories dont les valeurs sont des n -catégories¹⁹, la limite du diagramme reste inchangée lorsqu'on restreint le diagramme jusqu'aux intersections $(n + 1)$ -ème.

La preuve de la proposition 38 repose sur un argument de cofinalité : si $C^{(0)}/X$ désigne le crible engendré par le morphisme f , alors le nerf de Čech de f s'identifie à un foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C/X$ (puisque $(\Delta_+)^{\text{op}} \simeq \Delta^{\triangleright}$) et ce foncteur se factorise à travers la sous-catégorie pleine $C^{(0)}/X$. En notant $\phi : \Delta^{\text{op}} \rightarrow C^{(0)}/X$ le foncteur obtenu, il suffit de voir que V est cofinal, c'est-à-dire que pour tout foncteur $G : (C^{(0)}/X) \rightarrow E$, le foncteur G admet une colimite si et seulement si le foncteur $G \circ \phi$ en admet une, et que dans ce cas la flèche de comparaison canonique entre les colimites est une équivalence. On a en fait un critère (appelé "théorème A de Quillen") pour détecter les foncteurs cofinaux : pour que V soit cofinal, il faut et il suffit que pour tout objet $V \rightarrow X$ dans $(C^{(0)}/X)$, l' ∞ -catégorie $(V \rightarrow X) \backslash \Delta$ soit faiblement contractile, c'est-à-dire que l' ∞ -groupoïde obtenu en inversant toutes ses flèches soit contractile²⁰, ce qui peut se vérifier explicitement. De même, l'inclusion de Δ_S dans Δ est cofinale, par un calcul explicite. Les hypothèses faites sur C servent alors à ramener le cas d'un crible arbitraire au cas d'un crible engendré par un unique morphisme.

Remarque. Si $F : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}_{\infty}$, alors F est un faisceau si et seulement si F est additif et si pour tout $f : U \rightarrow X$ dans S , le diagramme

$$F(X) \longrightarrow F(U) \rightrightarrows F(U \times_X U) \rightrightarrows F(U \times_X U \times_X U) \rightrightarrows \dots$$

est un diagramme limite dans Cat_{∞} . En utilisant la description des limites dans Cat_{∞} , si $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$ est une fibration cocartésienne classifiant la restriction du diagramme ci-dessus, alors F est un faisceau si $F(X)$ s'identifie aux sections co-cartésiennes de π .

On voit que la donnée d'une telle section α est la donnée d'un objet $\alpha_{U \times_X^n} \in F(U^{\times_X n})$ pour tout n (ici, $U^{\times_X n}$ est un produit fibré de $n + 1$ copies de U sur X), ainsi que pour toute flèche injective $f : [k] \rightarrow [n]$ d'isomorphismes $\alpha_f : f^* \alpha_{U \times_X^k} \simeq \alpha_{U \times_X^n}$ dans $F(U^{\times_X n})$. Ces isomorphismes sont soumis à des relations de cohérences entre eux venant de la structure de section (et donc de foncteur) de α .

Par exemple, en basse dimension, on a un isomorphisme $\phi_0^1 : (\partial_0^1)^* \alpha_U \simeq \alpha_{U \times_X U}$ et un isomorphisme $\phi_1^1 : (\partial_1^1)^* \alpha_U \simeq \alpha_{U \times_X U}$, qui fournit par composition un isomorphisme $\phi :$

19. C'est-à-dire les ∞ -catégories dont les ∞ -groupoïdes de morphismes entre deux objets quelconques ont des groupes d'homotopie supérieurs π_k nuls pour tout $k > n$ (pour tout choix de point base)

20. On pourra comparer avec le critère de finalité 1-catégorique, qui demande simplement que cette catégorie soit *connexe*.

$(\partial_0^1)^* \alpha_U \simeq (\partial_1^1)^* \alpha_U$. Puis des isomorphismes

$$\phi_0^2 : (\partial_0^2)^* \alpha_{U \times_X U} \simeq \alpha_{U \times_X U \times_X U}$$

$$\phi_1^2 : (\partial_1^2)^* \alpha_{U \times_X U} \simeq \alpha_{U \times_X U \times_X U}$$

$$\phi_2^2 : (\partial_2^2)^* \alpha_{U \times_X U} \simeq \alpha_{U \times_X U \times_X U}$$

qui sont par ailleurs soumis à des compatibilités imposant un diagramme commutatif dans $F(U \times_X U \times_X U)$ (dont on a omis les différents 2-simplices!)

$$\begin{array}{ccccc}
 & (\partial_2^2)^* \alpha_{U \times_X U} & & (\partial_0^2)^* \alpha_{U \times_X U} & \\
 (\partial_0^2)^* \phi_1^1 \nearrow & & \phi_2^2 \searrow & \phi_0^2 \searrow & (\partial_1^1)^* \phi_0^1 \nwarrow \\
 (\partial_2^2)^* (\partial_1^1)^* \alpha_U & & \alpha_{U \times_X U \times_X U} & & (\partial_0^2)^* (\partial_0^1)^* \alpha_U \\
 \searrow \simeq & & \uparrow \phi_1^2 & & \swarrow \simeq \\
 (\partial_1^2)^* (\partial_1^1)^* \alpha_U & \xrightarrow{(\partial_1^2)^* \phi_1^1} & (\partial_1^2)^* \alpha_{U \times_X U} & \xleftarrow{(\partial_1^2)^* \phi_0^1} & (\partial_1^2)^* (\partial_0^1)^* \alpha_U
 \end{array}$$

où les deux isomorphismes non marqués proviennent de la fonctorialité de la section et des relations simpliciales. On voit que ce diagramme impose une condition de cocycle sur l'isomorphisme ϕ !

Si F est un faisceau à valeurs dans les groupoïdes, ou dans les 1-catégories, les données décrites ci-dessus sont exactement les données de descentes pour F le long de f . En fait, une version n -catégorique du critère de cofinalité assure que pour les diagrammes à valeurs dans les n -catégories, la limite reste inchangée en restreignant le diagramme à $\Delta_{\leq n+1}$. Par exemple, on voit qu'un champ (au sens du premier exposé) est exactement un faisceau en 1-catégories.

L'avantage d'exprimer les champs dans le contexte précédent, est qu'il permet d'étudier les propriétés formelles des champs manière systématique en même temps que celles des faisceaux à valeurs dans n'importe quelle ∞ -catégorie. Par exemple, l'existence de limite et colimites dans Cat_∞ impliquent l'existence d'une notion de faisceautisation.

6 ∞ -catégories stables.

Les ∞ -catégories stables sont les équivalents des catégories triangulées dans le monde ∞ -catégorique.

Définition 39. Soit C une ∞ -catégorie. On dit que C est stable si

- elle est pointée, c'est-à-dire qu'elle admet un objet à la fois initial et final,
- elle admet toutes les limites et colimites finies,
- un carré de \mathcal{C} est cartésien si et seulement si il est cocartésien.

Remarque. Le troisième point peut à juste titre surprendre. Le nerf d'une catégorie ordinaire \mathcal{C} est en fait stable si et seulement si la catégorie est équivalente à la catégorie nulle : on peut le voir en prenant $c \in \mathcal{C}$, et en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', -)$ à un carré cocartésien (et donc cartésien)

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & c[1] \end{array}$$

On obtient un carré cartésien d'ensemble

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow_0 \\ * & \xrightarrow{0} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c) \end{array}$$

et la description des produits fibrés dans les ensembles. montre que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c)$ est alors un singleton si bien que c est final, et donc que tous les objets de \mathcal{C} sont finaux.

Remarque. Puisque les carrés cartésiens et cocartésiens d'une ∞ -catégorie stable coïncide, les produits et les coproduits binaires coïncident. Les produits et coproduits finis peuvent en fait être détectés au niveau des catégories homotopiques (ce sont essentiellement les seuls type de colimites qui peuvent l'être), et donc la catégorie homotopique de \mathcal{C} est munie d'un bi-produit et ceci muni les ensembles de morphismes d'une structure canonique de monoïde. Plus précisément, si $f : x \rightarrow y$ et $g : x \rightarrow y$, alors leur somme est la composée

$$x \xrightarrow{\Delta} x \oplus x \xrightarrow{f \oplus g} y \oplus y \xrightarrow{\nabla} y$$

où Δ est l'application diagonale et ∇ l'application codiagonale.

Définition 40. Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable et $c \in \mathcal{C}$, on appelle suspension de c , et on note $c[1]$, l'objet de \mathcal{C} défini par le carré cocartésien.

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & c[1] \end{array} .$$

Puisque les carrés co-cartésiens sont aussi cartésiens, le foncteur de suspension $c \mapsto c[1]$ est une équivalence, dont l'inverse de c est donné par l'objet $c[-1]$ défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} c[-1] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & c \end{array}.$$

Remarque. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_C(-, y)$ au carré cocartésien définissant $c[1]$, on obtient un carré cartésien d' ∞ -groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(c[1], y) & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow_0 \\ \Delta^0 & \xrightarrow{0} & \text{Hom}_C(c, y) \end{array}$$

si bien que $\text{Hom}_C(c[1], y)$ s'identifie à l'espace des lacets pointés en 0 de $\text{Hom}_C(c, y)$, si bien que

$$\pi_0(\text{Hom}_C(c[1], y)) \simeq \text{Hom}_{\text{ho}(C)}(c[1], y)$$

s'identifie à $\pi_1(\text{Hom}_C(c, y); 0)$, le groupe fondamental de $\text{Hom}_C(c, y)$ pointé en 0. La structure de monoïde ainsi obtenu sur $\text{Hom}_{\text{ho}(C)}(c[1], y)$ est *a priori* différente de celle venant du biproduit dans $\text{ho}(C)$, mais on peut montrer que ces deux structures sont en fait les mêmes. Le point clé est l'argument dit de Eckmann-Hilton, qui affirme que deux structures de monoïdes sur un même ensemble telles que la multiplication par l'une est une application linéaire pour l'autre sont automatiquement égales, et que les deux structures sont en fait commutatives. Puisque tout $c \in C$ est équivalent à $c[-1][1]$, ceci montre que les ensembles de morphismes dans la catégorie homotopique de C sont en fait canoniquement des groupes abéliens.

Remarque. Par définition, la donnée d'un morphisme $f : c[1] \rightarrow y$ correspond à la donnée d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \searrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \swarrow \beta \\ & & 0 \end{array}$$

dans C . On a ici représenté les 2-simplexes, car ces données sont importantes et encodent des informations non triviales. Par exemple, on peut voir que si f est représenté par un diagramme

comme ci-dessus, alors le carré

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & y \end{array}$$

β

représente $-f$. En effet, l'identification de $\text{Hom}_{\text{ho}(\mathcal{C})}(c[1], y)$ avec $\pi_1(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, y); 0)$ envoie le carré représentant f sur le lacet dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, y)$ obtenu en parcourant β puis α^{-1} , si bien que transposer le carré revient à parcourir le lacet en sens inverse, c'est-à-dire à prendre son inverse dans le groupe fondamental.

Définition 41. Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable et soit

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X'$$

une suite de morphismes dans \mathcal{C} . On dit que cette suite est un triangle distingué s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{h} & X' \end{array}$$

dans \mathcal{C} dont les carrés sont cartésiens.

Remarque. On remarque que tout triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X'$$

définit une équivalence $X' \simeq X[1]$.

Théorème 42. En prenant le foncteur induit par la suspension et la notion de triangle distingué définie ci-dessus, la catégorie homotopique d'une ∞ -catégorie stable admet une structure triangulée.

Démonstration. On montre seulement que les axiomes de rotation et de l'octaèdre sont vérifiés, les autres axiomes étant les plus simples. On commence par l'axiome de rotation, il s'agit de vérifier que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

est un triangle distingué si et seulement si

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

est distingué. On suppose que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

est distingué on choisit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \square & \downarrow g & \square & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \end{array}$$

dont les carrés sont cartésiens. En formant un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ 0 & \longrightarrow & P \end{array}$$

et en collant ce carré un au diagramme précédent, on obtient diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & 0 & & \\ g \downarrow & \square & \downarrow & & \\ Z & \xrightarrow{h} & X[1] & & \\ \downarrow & \square & \downarrow p & & \\ 0 & \longrightarrow & P & & \end{array}$$

dont les deux carrés sont cartésiens, si bien que le rectangle extérieur est cartésien, ce qui fournit une identification $P \simeq Y[1]$, via cette identification, on peut voir que le morphisme p s'identifie bien au morphisme $-f[1]$ en utilisant la remarque faite plus haut qui identifie les changement de signes dans $\text{Hom}_C(X[1], Y[1])$ avec les transpositions de carrés. Ce diagramme exhibe bien

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

comme un triangle distingué.

Pour l'axiome de l'octaèdre, il s'agit de montrer qu'étant donné des triangles distingués

$$\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} Y/X \xrightarrow{d} X[1] \\ Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{v} Z/Y \xrightarrow{d'} Y[1] \\ X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{w} Z/X \xrightarrow{d''} X[1] \end{array}$$

il existe un triangle distingué

$$Y/X \xrightarrow{\phi} Z/X \xrightarrow{\psi} Y/X[1]$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{v} & Z/Y & \xrightarrow{\theta} & Y/X[1] \\
 & \searrow f & \nearrow g & \searrow w & \nearrow \psi & \searrow d' & \nearrow u[1] \\
 & Y & & Z/X & & Y[1] & \\
 & \searrow u & \nearrow \phi & \searrow d'' & \nearrow f[1] & & \\
 & Y/X & \xrightarrow{d} & X[1] & & &
 \end{array}$$

commute dans $\text{ho}(\mathcal{C})$. On commence par se donner un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & \square & \downarrow u \\
 0 & \longrightarrow & Y/X
 \end{array}$$

et on forme le pushout de $u : Y \rightarrow Y/X$ le long de $g : Y \rightarrow Z$, pour obtenir un diagramme.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow & \square & \downarrow u & \square & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y/X & \longrightarrow & P
 \end{array}$$

Le rectangle extérieur du diagramme est cocartésien puisque les deux carrés le sont, et ceci détermine donc une équivalence entre la flèche $Z \rightarrow P$ et la flèche $w : Z \rightarrow Z/X$. On pose donc $\theta : Y/X \rightarrow Z/X$ et on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow & \square & \downarrow u & \square & \downarrow w \\
 0 & \longrightarrow & Y/X & \xrightarrow{\theta} & Z/X
 \end{array}$$

On peut ensuite former le pushout de θ le long de l'application nulle $Y/X \rightarrow 0$ et obtenir un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 Y/X & \xrightarrow{\theta} & Z/X \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P''
 \end{array}$$

et un argument similaire au précédent montre qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & & \\
 \downarrow & \square & \downarrow u & \square & \downarrow w & & \\
 0 & \longrightarrow & Y/X & \xrightarrow{\theta} & Z/X & & \\
 & & \downarrow & \square & \downarrow \psi & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & Y/Z & &
 \end{array}$$

et encore deux applications de cette même procédure (formation d'un carré cocartésien, puis identification des termes en utilisant que les rectangles extérieurs de deux carrés cocartésiens collés sont cocartésiens) montrent qu'on a finalement un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \downarrow & \square & \downarrow u & \square & \downarrow w & \square & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & Y/X & \xrightarrow{\theta} & Z/X & \xrightarrow{d''} & X[1] & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & \square & \downarrow \psi & \square & \downarrow f[1] & \square & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & Z/Y & \xrightarrow{d'} & Y[1] & \xrightarrow{d[1]} & Y/X[1] & &
 \end{array}$$

qui exhibe toutes le triangle et les commutativités désirées. \square

Remarque. Toutes les catégories triangulées ne se réalisent pas nécessairement comme catégorie homotopique d'une ∞ -catégorie stable. Les exemples connus sont cependant assez pathologiques. Les exemples sont fondés sur l'idée qu'une ∞ -catégorie stable doit nécessairement admettre une action à gauche de l' ∞ -catégorie stable universelle, qui se trouve être l' ∞ -catégorie $\mathrm{Sp}^{\mathrm{fin}}$ des spectres finis. Cette ∞ -catégorie peut être présentée comme un objet venant de la théorie de l'homotopie stable (en un sens, les objets de $\mathrm{Sp}^{\mathrm{fin}}$ sont les théories cohomologiques généralisées sur les espaces topologiques, qui vérifient la dualité de Poincaré). Sans rentrer dans les détails, l'existence de cette action implique formellement l'existence d'une action des groupes d'homotopie stable des sphères sur les objets et les morphismes entre deux objets dans toute ∞ -catégorie stable²¹ et en particulier, la fibration de Hopf $\eta : S^3 \rightarrow S^2$, qui s'identifie à un générateur du π_1 stable des sphères doit agir sur les objets d'une ∞ -catégorie stable et fournir une flèche canonique $\eta_c : c[1] \rightarrow c$ dans toute ∞ -catégorie stable, soumise à des propriétés particulières²², et on construit alors manuellement une catégorie triangulée où on montre qu'aucun élément ne peut admettre de telle flèche.

21. Un avatar déjà expliqué de ce fait est l'existence d'une structure de groupe abélien sur les Hom de la catégorie homotopique d'une ∞ -catégorie stable : cette structure est un avatar du fait que le π_0 stable des sphères est simplement \mathbb{Z} .

22. Précisément, si on se donne un triangle distingué

$$c \xrightarrow{2} c \xrightarrow{p} d \xrightarrow{q} c[1]$$

Exemple. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne, alors l' ∞ -catégorie $D(\mathcal{A})$ est une ∞ -catégorie stable. Une manière de le voir consiste à utiliser un second critère pour montrer qu'une ∞ -catégorie pointée est stable, à savoir le fait que l' ∞ -catégorie admet toutes les limites et colimites finies, et que le foncteur de suspension est une équivalence. Dans le cas des complexes de chaînes, puis de $K(\mathcal{A})$, on peut décrire explicitement les pullbacks et les pushouts, et en étudiant la localisation $K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$, on peut voir que le foncteur de localisation préserve les limites et colimites finies, et le foncteur de suspension est littéralement le foncteur de décalage sur les complexes de chaîne, et est donc une équivalence. On remarque que dans ce modèle, étant donné un morphisme $f : C \rightarrow D$ dans $K(\mathcal{A})$, le pushout de f le long du morphisme nul est le cône de f au sens des complexes de chaîne.

6.1 Catégories dérivées et faisceaux

Soit (C, τ) un site vérifiant les hypothèses précédentes et \mathcal{A} une catégorie abélienne. Alors $\mathrm{Sh}_\tau(C; \mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, dont on peut considérer la catégorie dérivée. D'autre part, puisqu'en considérant $D(\mathcal{A})$ comme une ∞ -catégorie on a une bonne notion de limites et de colimites, on peut aussi considérer $\mathrm{Sh}_\tau(C; D(\mathcal{A}))$. Il est alors possible de comparer ces deux constructions.

Théorème 43. *On suppose que \mathcal{A} est une catégorie de Grothendieck. L' ∞ -catégorie $D(\mathrm{Sh}_\tau(C; \mathcal{A}))$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Sh}_\tau(C; D(\mathcal{A}))$ formée des objets hypercomplets.*

Sans rentrer dans les détails de la notion d'hypercomplétude, on se contentera de dire que les objets hypercomplets sont les faisceaux dont on peut détecter les isomorphismes sur l'homologie : il existe parfois dans $\mathrm{Sh}_\tau(C; D(\mathcal{A}))$ des flèches induisant des isomorphismes sur tous les faisceaux d'homologies mais qui ne sont pas pour autant des isomorphismes, alors que dans $D(\mathrm{Sh}_\tau(C; \mathcal{A}))$, un isomorphisme est par définition une flèche induisant un isomorphisme sur tous les faisceaux d'homologie. Il est à remarquer que tout morphisme entre objets *bornés* de $\mathrm{Sh}_\tau(C; D(\mathcal{A}))$ qui induit un isomorphisme sur tous les faisceaux d'homologie est automatiquement un isomorphisme : la différence entre $\mathrm{Sh}_\tau(C; D(\mathcal{A}))$ et $D(\mathrm{Sh}_\tau(C; \mathcal{A}))$ ne se voit donc que pour des objets non bornés.

Exemple. Si S est un schéma quasi-compact quasi-séparé de dimension de Krull fini, alors les petit et gros sites Zariski, Nisnevich sont tels que tous les objets sont automatiquement hypercomplets. Ce n'est en général pas le cas pour le petit site étale de S .

alors $2\mathrm{id}_d = p\eta_c q$.

Références

- [Cis19] Denis-Charles CISINSKI. *Higher Categories and Homotopical Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2019. ISBN : 978-1-108-47320-0. DOI : 10.1017/9781108588737. URL : <https://www.cambridge.org/core/books/higher-categories-and-homotopical-algebra/C5509D2179302B3F3876A00781>
- [LurHA] Jacob LURIE. *Higher Algebra*. URL : <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.
- [LurKer] Jacob LURIE. *Kerodon*. URL : <https://kerodon.net/>.