# Rapport de stage

Cohomologie $\ell$-adique, formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich et Conjectures de Weil.

Robin Carlier

02/09/2019

# 1 Introduction

## 1.1 Remerciements

Ce document constitue le rapport d'un stage effectué du 6 mai 2019 au 29 Juin 2019 à l'Université de Zurich (UZH), sous la direction de M. Joseph Ayoub, professeur à l'UZH. Je tiens tout d'abord à remercier M. Ayoub pour avoir accepté de m'encadrer pendant cette période. Je remercie aussi l'intégralité de l'équipe de géométrie algébrique de l'UZH pour son accueil chaleureux. Je tiens enfin à remercier M. Frédéric Déglise pour m'avoir conseillé la référence [FK88], dont la lecture des deux derniers chapitres aura été d'une grande aide.

## 1.2 Un fil d'Ariane : Les conjectures de Weil

L'essentiel du stage aura consisté à comprendre la construction et les propriétés de la cohomologie étale, puis $\ell$-adique, en géométrie algébrique. La motivation de cette construction vient des conjectures de Weil, et ces conjectures fournissent un fil d'Arianne qui guide les développements de la théorie de la cohomologie étale et $\ell$-adique. Nous présentons donc ici ces conjectures. Afin de ne pas perdre de temps dans la rédaction, il sera nécessaire de supposer connu le langage des schémas en géométrie algébrique, le langage de la théorie des catégories, ainsi qu'un peu d'algèbre homologique sur les catégories abéliennes.

Soient $p$ un nombre premier et $X_0$ une variété (c'est à dire un schéma séparé, irréductible, de type fini) sur $\mathbb{F}_p$. Pour tout $r$, les $\mathbb{F}_{p^r}$-points (noté $X_0(\mathbb{F}_{p^r})$) de $X_0$ forment un ensemble fini. L'ensemble $X_0(\mathbb{F}_{p^r})$ étant fini, il est naturel de s'intéresser à sa cardinalité, et de s'intéresser, par exemple, à la suite définie par les $(\#X_0(\mathbb{F}_{p^r}))_{r>0}$. Si $X_0$ est défini par une seule équation algébrique, ce nombre de points correspond au nombre de solutions de cette équation dans $\mathbb{F}_{p^r}$. Pour étudier cette suite, on introduit une forme modifiée de sa fonction génératrice : sa fonction $\zeta$, définie par

$$\zeta(X_0, s) = \exp\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r}{r} \#X_0(\mathbb{F}_{p^r})\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Le choix de cette série formelle particulière pour étudier la suite des $\#X_0(\mathbb{F}_{p^r})$ vient d'une deuxième expression possible, sous forme de produit Eulerien :

$$\zeta(X_0, s) = \prod_{x \in |X_0|} \frac{1}{1 - \#(\kappa(x))^{-s}}$$

où $\kappa(x)$ désigne le corps résiduel en $x$ et $|X_0|$ l'ensemble des points fermés de $X_0$. Cette expression, lorsqu'on remplace $X_0$ par $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, donne la fonction $\zeta$ de Riemann usuelle, sous sa forme de produit Eulerien.
On considère plus souvent $Z(X_0, t) = \prod_{x \in |X_0|} \frac{1}{1 - t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]}}$. On a alors $Z(X_0, p^{-s}) = \zeta(X, t)$. Weil, dans [Wei49], en étudiant le cas des courbes, vient à établir plusieurs conjectures lorsqu'on suppose que $X_0$ est projective, lisse, purement de dimension $d$ (nous reviendrons sur la notion de lissité dans la section suivante) et absolument irréductible[1]. Ces conjectures, connues sous le nom de "Conjectures de Weil", sont les suivantes :

1. C'est-à-dire telle que son changement de base dans une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ soit irreductible

(W1) La fonction $Z(X_0, t)$ est une fraction rationnelle, de la forme $\prod_{i=1}^{2d} (P_i(t))^{(-1)^{i+1}}$ où

   (a) Les $P_i$ sont des polynômes à coefficients entiers, de termes constant égaux à 1.

   (b) Pour tout plongement complexe $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, les racines de $P_i$ sont de valeur absolue $p^{\frac{i}{2}}$.

(W2) La fonction $Z$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$Z\left(X_0, \frac{1}{p^d t}\right) = \pm p^{\frac{n\chi}{2}} t^\chi Z(X_0, t)$$

où $\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \deg(P_i)$.

(W3) Si la variété $X_0$ provient par réduction modulo $p$ d'un schéma projectif lisse $\tilde{X}$ de même dimension sur $\mathbb{Q}$, alors $\deg(P_i) = \dim_{\mathbb{Q}} \left( H^i_{\mathrm{Sing}}(\tilde{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \right)$.

La conjecture sur les racines des $P_i$ est connue sous le nom d'"Hypothèse de Riemann sur les corps finis".
La dernière conjecture est sans doute celle qui donne le plus d'indication pour une éventuelle preuve, elle suggère une interprétation cohomologique des fonctions $Z$. En effet, on peut montrer que toutes ces conjectures (sauf l'hypothèse de Riemann sur les corps finis) peuvent se montrer formellement si on dispose d'une "bonne" théorie cohomologique des $\mathbb{F}_p$-schémas, à valeur dans un corps de caractéristique zéro $k$, qui vérifie des propriétés analogues à celles de la cohomologie singulière, entre autres : la dualité de Poincaré, la formule des traces de Lefschetz, les théorèmes de changements de bases, de pureté... On appelle d'ailleurs une "cohomologie de Weil" toute théorie cohomologique qui vérifie ces propriétés. La liste exacte des propriétés attendues d'une cohomologie de Weil est donnée dans [Kle68].
Malheureusement, un exemple fondamental dû à Jean-Pierre Serre montre qu'on ne peut pas trouver de telle cohomologie à valeur dans $\mathbb{Q}$, ni dans $\mathbb{Q}_p$. Grothendieck, aidé (parmi d'autres) par Artin, Verdier, Deligne, a alors entrepris de construire une cohomologie de Weil à valeur dans $\mathbb{Q}_\ell$, pour $\ell \neq p$. C'est cette "cohomologie $\ell$-adique", que nous nous efforcerons de construire dans ce qui suit. Néanmoins, cette construction n'est pas suffisante pour prouver l'hypothèse de Riemann sur les corps finis, qui sera finalement prouvée par Deligne dans [Del74], par une méthode très différente de celle envisagée par Grothendieck. Nous tenterons d'esquisser sa preuve à la fin de ce rapport.

# 2 Cohomologie étale et $\ell$-adique

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des schémas noetheriens, en particulier, tous les morphismes seront quasi-compacts et quasi-séparés. Les anneaux seront commutatifs unifères sauf mention explicite. On notera $A$ un anneau.

## 2.1 Morphismes étales et lisses

Afin de construire une cohomologie convenable, il faut tout d'abord considérer une classe d'application particulière de morphismes : les morphismes étales. Intuitivement, un morphisme étale est un morphisme dont la différentielle est bijective. Précisons cela.
On rappelle qu'étant donné $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, le morphisme diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée dans un ouvert convenable $U$ du produit fibré, et est donc défini par un faisceau d'idéaux de $U$ noté $\mathscr{I}$. On note $\Delta_{X/Y}$ le faisceau $\Delta^{-1}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$, on l'appelle le faisceau des différentielles de $X$ sur $Y$. C'est un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules, lorsque $V = \mathrm{Spec}(B)$ est un ouvert affine de $Y$ et $U = \mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert affine de $X$ tel que $f(U) \subset V$, $(\Delta_{X/Y})_{|W}$ est le faisceau associé à $\Delta_{B/A}$, le module des différentielles de Kähler de l'extension d'anneau associée. On dit qu'un morphisme localement de type fini est non ramifié en $x$ si $(\Delta_{X/Y})_x = 0$. Cela équivaut ([Fu11], 2.2.1) à ce que $\kappa(x)$ soit une extension finie séparable de $\kappa(f(x))$.
On rappelle qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est plat en $x$ si $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-algèbre plate.

**Définition 1** *Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est dit* étale *en $x$ s'il est localement de présentation finie, plat et non ramifié en $x$. On dit que $f$ est* étale *si $f$ l'est en tout points.*

La classe des morphismes étales est l'une des "bonnes classes" de morphismes de la géométrie algébrique, plus précisément :

**Proposition 2** *La composée de deux morphismes étales est étale. Les immersions ouvertes sont étales. Le changement de base d'un morphisme étale est étale. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont tels que $g \circ f$ est étale et $g$ est étale, alors $f$ est étale.*

Un théorème de Chevalley affirme :

**Théorème 3** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation fini, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* *$f$ est étale.*

*(ii)* *Pour tout $x$ dans $X$, il existe un polynôme unitaire $F \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}[t]$ et un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $R = \mathcal{O}_{Y,f(x)}[t]/(F)$ qui ne contient pas l'image de $F'(t)$, tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-isomorphe au localisé $R_{\mathfrak{m}}$.*

Définissons une seconde classe de morphismes, dit lisses :

**Définition 4** *Un morphisme localement de type fini $f : X \to Y$ est dit* lisse *en $x$ s'il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ et un morphisme $j : U \to \mathbb{A}^n_Y$ étale tel que $f_{|U}$ se factorise en $\pi \circ j$ où $\pi : \mathbb{A}^n_Y \to Y$ est la projection canonique. On dit que $f$ est* lisse *si $f$ l'est en tout points.*

Un morphisme étale est donc un morphisme lisse de dimension relative nulle. La définition en terme de platitude est de non-ramification est utile pour travailler avec les morphismes étales, mais souvent moins pratique pour montrer qu'un morphisme est étale. De même, avec notre définition des morphismes lisses, il est difficile de montrer qu'un morphisme est lisse. Nous caractérisons ces morphismes :

**Théorème 5** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation fini, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* *$f$ est lisse (resp. etale).*

*(ii)* *Pour tout $x \in X$, il existe $U = \mathrm{Spec}(B)$ ouvert affine contenant $x$, $V = \mathrm{Spec}(A)$ contenant $f(x)$, tel que $B \cong A[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_c)$ (resp. $B \cong A[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$) et un des $c \times c$ (resp. $n \times n$) mineurs de $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{1 \le i,j \le n}$ est dans $A^{\times}$.*

*(iii)* *Pour tout $Y$-schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$, tout idéal $I$ de $A$ tel que $I^2 = 0$, alors l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(A), X) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(A/I), X)$$

*induite par l'application de $\mathrm{Hom}_Y(-, X)$ à l'immersion fermée $\mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$, est surjective (resp. bijective).*

Le critère (ii) est un critère dit "Jacobien", on bénéficie d'un critère similaire pour tester la lissité en un point $x$. Le critère (iii) est un critère de relèvement infinitésimal. Ces critères collent à l'intuition d'un morphisme étale comme ayant "une différentielle bijective". Ce théorème est prouvé dans une plus grande généralité dans [EGAIV-4] 17.5.1, ou dans [Fu11], II.2. Notre définition des morphismes lisses est empruntée à [Fu11] et diffère légèrement de celle de [EGAIV-4], qui prend le critère *(iii)* pour définition. Ce théorème montre qu'elles coïncident.

## 2.2 Groupe fondamental étale

Nous aurons besoin, pour la preuve des conjectures de Weil, de la notion de groupe fondamental étale. En topologie algébrique classique, le revêtement universel $\tilde{X}$ d'un espace peut être définit comme le représentant du foncteur de la catégorie des revêtement d'un espace topologique pointé $(B, b)$ vers la catégorie des groupes, qui à un revêtement $(E, e)$, associe les automorphismes de $(E, e)$. En géométrie algébrique, les morphismes étales finis font office de revêtements, et les pointages sont la donnée de points géométriques de $X$, c'est-à-dire de morphismes $j : \mathrm{Spec}(k) \to X$ où $k$ est un corps séparablement clos. On se fixe $\omega$ un tel morphisme. On définit alors $\mathrm{FinEt}/(X)$ la catégorie des $X$-schémas $Y$, de morphismes structurels étales finis. Les morphismes sont alors les $X$-morphismes (automatiquement étales). On dispose alors, pour tout point géométrique $\omega : \mathrm{Spec}(k) \to X$ [2] d'un foncteur "Fibre" : $\mathrm{FinEt}/X \to$ **Set**, qui à un objet $Y$ associe l'ensemble $Y_\omega = \mathrm{Hom}_X(\omega, Y)$. En toute généralité, ce foncteur n'est pas représentable dans $\mathrm{FinEt}/X$ [3]. Dans [SGA1] V, Grothendieck montre qu'il est pro-représentable :

2. Par abus, on note souvent $\omega$ au lieu de $\mathrm{Spec}(k)$, et on confond le point, le corps, et le morphisme.
3. Bien qu'il le soit trivialement, i.e par $\omega$, dans $\mathrm{Schm}/X$.

**Theorème et définition 6** *Pour tout point géométrique $\omega$ de $X$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_X(\omega, Y)$ est pro-représentable : il existe un système projectif $\hat{X} = \{X_i\}_{i \in I}$ de revêtements Galoisiens (c'est-à-dire tels que $\#\mathrm{Hom}_X(\omega, X_i) = \#(X_i \times_X \omega)$) tel que, pour tout $Y$ dans* FinEt$/X$*, $Y_\omega = \varinjlim_I \mathrm{Hom}(X_i, Y)$. On définit alors $\pi_1(X, \omega)$, le* groupe fondamental de $X$ en $\omega$, *comme $\varprojlim \mathrm{Aut}_X(X_i)$.*

Par construction, $\pi_1(X, \omega)$ est un groupe profini, il possède donc naturellement une topologie qui en fait un groupe compact séparé totalement discontinu. Le cas du $\pi_1$ d'un corps est particulièrement important :

**Proposition 7** *Soit $k$ un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable de $k$. Alors $\pi_1(\mathrm{Spec}(k), \bar{k}) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.*

Mentionnons un théorème important dans la preuve des conjectures de Weil, prouvé dans une plus grande généralité dans [SGA1] IX, 6 :

**Théorème 8** *Soit $k$ un corps, $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$, $X_0$ un schéma propre sur $k$ et $X = X_0 \times_k \bar{k}$. Supposons $X$ connexe (on dit aussi que $X_0$ est géométriquement connexe). Soit $a_0$ un point géométrique de $X_0$, $a$ le point géométrique de $X$ au dessus de $a_0$, alors on a une suite exacte courte*

$$0 \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(X_0, a_0) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 0.$$

Dans les conjectures de Weil, nous sommes dans le cas où $k = \mathbb{F}_p$, on sait alors que $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$, le complété profini de $\mathbb{Z}$. Cette suite exacte montre que dans ce cas, $\pi_1(X_0, a_0)$ est une extension de $\pi_1(X, a)$ par $\hat{\mathbb{Z}}$.

## 2.3 Topologies de Grothendieck, site étale

Une des obstructions à la construction d'une bonne cohomologie à valeur dans des faisceaux sur la catégorie des schéma est que la topologie de Zariski est trop faible pour rendre compte de tous les phénomènes, la topologie de Zariski ne prend en compte que l'aspect topologique d'un schéma et oublie son aspect algébrique. Pour palier à ce problème, Grothendieck a introduit dans [SGA4-1] la notion de "site" et de "topos", qui viennent généraliser respectivement celle d'espace topologique et de faisceaux et fournissent le bon cadre à la cohomologie étale.

**Définition 9** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie contenant tous les produits fibrés. On appelle* topologie de Grothendieck sur *$\mathcal{C}$ la donnée, pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$, d'une collection* Cov$(X)$ *de familles de morphismes de codomaine $X$ appelés recouvrements de $X$, qui vérifie :*

(GT1) *Si $\phi : U \to X$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, $\{U \to X\}$ est un recouvrement de $X$.*

(GT2) *Si $\{U_\alpha \to X\}_\alpha$ est un recouvrement de $X$ et $V \to X$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors $\{U_\alpha \times V \to V\}_\alpha$ est un recouvrement de $V$.*

(GT3) *Si $\{U_\alpha \to X\}_\alpha$ est un recouvrement de $X$ et $\{U_{\alpha\beta} \to U_\alpha\}_\beta$ est un recouvrement de $U_\alpha$ pour tout $\alpha$, alors $\{U_{\alpha\beta} \to X\}_{\alpha,\beta}$ est un recouvrement de $X$.*

*On appelle* site *toute catégorie munie d'une topologie de Grothendieck*[4].

Ces axiomes miment le comportement des recouvrements d'ouverts dans un espace topologique. Ils permettent de donner un sens à la notion de faisceau dans un site :

**Définition 10** *Soit $\mathcal{C}$ un site. Un* préfaisceau *(resp.* préfaisceau de groupes abéliens*, resp.* préfaisceau d'anneaux *...) sur $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant $\mathscr{F}$ à valeur dans* **Set** *(resp.* **Ab***, resp.* **Rng** *...). On dit que c'est un* faisceau *s'il vérifie la propriété suivante :*
*Pour tout $U \in \mathcal{C}$, et pour tout recouvrement $\{U_\alpha \to U\}_\alpha$, le diagramme suivant est un diagramme d'égaliseur, où $\mathscr{F}(U)$ est l'égaliseur :*

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(U_\alpha \times_U U_\beta).$$

*Les deux flèches $\prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha) \to \prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(U_\alpha \times_U U_\beta)$ sont définies par $(s_\alpha)_\alpha \mapsto (s_\alpha \times s_\beta)_{\alpha,\beta}$ et $(s_\alpha)_\alpha \mapsto (s_\beta \times s_\alpha)_{\alpha,\beta}$ respectivement. Un* morphisme de préfaisceaux *$\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est une transformation naturelle de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$. Un* morphisme de faisceaux *est un morphisme de préfaisceaux dont le domaine et le codomaine sont des faisceaux.*

4. Par l'abus de notation usuel, on donnera en général la catégorie sans préciser la topologie, si elle est claire.

On note $\mathscr{P}_{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ et $\mathscr{S}_{\mathcal{C}}$ sa sous-catégorie pleine des faisceaux sur $\mathcal{C}$. Un topos, au sens de Grothendieck, est la catégorie des faisceaux sur un site.
Dans le cas d'un espace topologique, ses ouverts forment une catégorie posétale, les recouvrements d'ouverts usuels forment une topologie de Grothendieck sur cette catégorie, le produit fibré y est l'intersection et on recouvre la notion usuelle de faisceau. Tout comme pour les espaces topologiques, on dispose d'un foncteur de faisceautisation, dont la construction est néanmoins plus complexe que dans le cas topologique, pour la décrire, il faut donner un peu de terminologie.
Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha \to U\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement de $U \in \mathcal{C}$, on appelle complexe de Čech de $\mathcal{U}$ pour un préfaisceau $\mathscr{F}$ le complexe donné par

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I^n} \mathscr{F}(U_{\alpha_1} \times_U U_{\alpha_2} \times_U \cdots \times_U U_{\alpha_n})$$

muni de la différentielle $\delta^n : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ suivante : pour $s(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathscr{F}(U_{\alpha_1} \times_U U_{\alpha_2} \times_U \cdots \times_U U_{\alpha_n})$, on pose $\delta(s)(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} s(\alpha_1, \ldots, \check{\alpha_i}, \ldots, \alpha_{n+1})_{|U_{\alpha_1} \times_U U_{\alpha_2} \times_U \cdots \times_U U_{\alpha_{n+1}}}$ où la restriction est à comprendre comme l'image par $\mathscr{F}$ de la projection

$$U_{\alpha_1} \times_U U_{\alpha_2} \times_U \cdots \times_U U_{\alpha_{n+1}} \to U_{\alpha_1} \times_U U_{\alpha_2} \times_U \cdots \times_U \check{U_{\alpha_i}} \times_U \cdots \times_U U_{\alpha_{n+1}}$$

où le $\check{\cdot}$ désigne une variable omise. On vérifie que $\delta^2 = 0$. On note $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \frac{\ker(\delta^n)}{\mathrm{im}(\delta^{n-1})}$ son $i$-ième groupe de cohomologie. Par convention, $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \ker(\delta^0)$.
Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha \to U\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement de $U \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{V} = \{V_\beta \to U\}_{\beta \in J}$ un second recouvrement, on appelle morphisme $f$ de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{V}$ la donnée d'un morphisme $\phi : I \to J$ et de morphismes $f_\alpha : U_\alpha \to V_{\phi(\alpha)}$. On peut vérifier grâce aux axiomes des topologies de Grothendieck que si $g$ est un second morphisme de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{V}$, les morphismes induits sur les complexes de Čech de tout préfaisceau par $f$ et $g$ sont homotopes et donc induisent le même morphisme sur la cohomologie.
Ainsi si $\mathrm{Cov}(U)$ est la catégorie des recouvrements de $U$ (avec pour morphismes les morphismes de recouvrements), $\mathscr{F}^+(U) \overset{\mathrm{def}}{:=} \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)} \check{H}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ est bien défini. On peut vérifier que cette construction est fonctorielle en $\mathscr{F}$, et que $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}^+, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, et que par ailleurs, si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau, $(\mathscr{F}^+)^+$ (qu'on note plus souvent $\mathscr{F}^\#$) est un faisceau. Enfin, on peut vérifier que $\# = + \circ +$ préserve les limites finies. On a obtenu :

**Théorème 11** *Le foncteur d'inclusion $\mathscr{S}_{\mathcal{C}} \to \mathscr{P}_{\mathcal{C}}$ a un adjoint à gauche, celui-ci préserve les limites finies. On l'appelle "foncteur de faisceautisation".*

Un théorème de Giraud dont nous n'aurons pas besoins affirme d'ailleurs que c'est une caractérisation des topos.

## 2.4 Site étale et algèbre homologique des faisceaux

À partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des préfaisceaux et faisceaux de groupes abéliens. La catégorie des groupes abéliens est une catégorie abélienne qui vérifie l'axiome "AB5" de Grothendieck : les colimites filtrantes sont exactes. Des propriétés de permanences données dans [Gro57a] 1.6 et 1.9 permettent d'affirmer que dans ce cas, $\mathscr{P}_{\mathcal{C}}$ est une catégorie abélienne qui vérifie cet axiome. Puisque le foncteur d'inclusion $\mathscr{S}_{\mathcal{C}} \to \mathscr{P}_{\mathcal{C}}$ a un adjoint à gauche, on peut faire de $\mathscr{S}_{\mathcal{C}}$ une catégorie abélienne, qui vérifie encore "AB5". Par ailleurs, on peut montrer que $\mathscr{S}_{\mathcal{C}}$ possède un générateur, pour le construire : posons dans un premier temps le préfaisceau $Z_U$ définit par $Z_U(V) = \bigoplus_{\mathrm{Hom}(V,U)} \mathbb{Z}$. On peut montrer que $\bigoplus_{U \in \mathcal{C}} Z_U$ est un générateur de $\mathscr{P}_{\mathcal{C}}$ et son faisceautisé est un générateur de $\mathscr{S}_C$. Notons que pour éviter les problèmes de "taille" des catégories mises en jeu, il faut avoir recours à la notion d'univers de Grothendieck, exposé dans [SGA4-1] I, pour pouvoir considérer que toute les catégories mises en jeu sont "petites". Sans entrer dans de telles considérations, il suffit de noter que cette somme directe a un sens pour une catégorie essentiellement petite (si on remplace chaque objet par sa classe d'isomorphisme) et reste un générateur dans ce cas. Le site étale que nous construirons sera essentiellement petit.
Un théorème général de Grothendieck (exposé dans [Gro57a]) est alors qu'une catégorie abélienne qui vérifie AB5 et qui possède un générateur a suffisamment d'injectifs. Ainsi, $\mathscr{S}_{\mathcal{C}}$ a suffisamment d'injectifs. On peut alors

déployer toute la théorie de l'algèbre homologique des catégories abéliennes (développée par Grothendieck dans [Gro57a] et [Gro57b]) dans la catégorie des faisceaux de n'importe quel site. Nous n'aurons pas besoin d'une telle généralité, et nous allons nous restreindre à certains sites :

**Définition 12** *Soit $X$ un schéma. On appelle* site étale *de $X$, noté $X_{\mathrm{et}}$ le site sur la catégorie* $\mathrm{Et}/X$ *des $X$-schémas étales, muni des recouvrements suivants : on dit que $\{U_i \to U\}_i$ est un* recouvrement étale *de $U$ si tous les $f_i : U_i \to U$ sont étales et si $\bigcup_i f_i(U_i) = U$.*

Les propriétés des morphismes étales énoncées dans la proposition 2 montrent que ceci forme bien un site. On appelle préfaisceau (resp. faisceau) étale tout préfaisceau (resp. faisceau) vis-à-vis de ce site. A partir de maintenant, on ne considère plus que des faisceaux et préfaisceaux étales.

Tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ définit une paire d'adjoints $\mathscr{S}_X \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathscr{S}_Y$ qui sont définis de la manière suivante :

— Pour $\mathscr{F} \in \mathscr{S}_X$, $V \ \mapsto \mathscr{F}(V \times_X Y)$ est dans $\mathscr{S}_Y$ ( et non juste dans $\mathscr{P}_Y$). On note $f_*\mathscr{F}$ ce faisceau.

— Pour $\mathscr{F} \in \mathscr{S}_Y$ et $U \in X_{et}$, on considère la catégorie des "voisinages" étales de $U$ dans $Y_{et}$, c'est-à-dire la catégorie $\mathcal{V}_U$ des $U' \in Y_{et}$ munis d'un $Y$-morphisme $U \to U'$. La règle $U \mapsto \varinjlim_{U' \in \mathcal{V}_U^\circ} \mathcal{F}(U')$ définit un préfaisceau sur $X$, et on pose $f^*\mathscr{F}$ son faisceautisé.

Ces constructions sont analogues à celles pour les faisceaux sur les espaces topologiques. Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(k) = \omega$ est le spectre d'un corps séparablement clos et où $f$ est donc un point géométrique de $Y$, on note $\mathscr{F}_\omega = f^*\mathscr{F}$. C'est un groupe abélien [5], qu'on appelle la "tige" de $\mathscr{F}$ en $\omega$.
Par définition, la tige est donc la limite directe sur la catégorie opposée des voisinages étales de $\omega$, c'est-à-dire la catégorie des diagrammes

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "etale"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Cette tige vérifie les propriétés usuelles de la tige des faisceaux, à savoir :

**Proposition 13** *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ trois faisceaux, la suite*

$$\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$$

*est exacte si et seulement si*

$$\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$$

*l'est pour tout points géométriques de $X$.*

Rappellons qu'un anneau local $A$ de corps résiduel $k$ est dit henselien s'il satisfait à la propriété du lemme de Hensel : si un polynôme $P \in A[t]$ est tel que $\overline{P} = (X - r)G$ dans $k[t]$, alors il existe un unique $a \in A$ tel que $P = (X - a)H$ dans $A[t]$, $\bar{a} = r$ et $\overline{H} = G$. Par ailleurs, si $k$ est séparablement clos, on dit que $A$ est strictement henselien, ou encore strictement local. Tout anneau local $A$ admet une henselisation $A^{\mathrm{h}}$, unique à isomorphisme près. De même, étant donnée une clôture séparable $\bar{k}$ du corps résiduel de $A$, il existe un unique anneau henselien $A^{sh}$ de corps résiduel $\bar{k}$, qu'on appelle l'henselisation stricte de $A$. Si on se donne deux clôtures séparables de $k$, les henselisés stricts pour ces clôtures sont (non-cannoniquement) isomorphes. Le henselisé strict est défini comme la limite projective des $A$-algèbres étales. Si on considère le "faisceau structurel étale" de $X$ $\mathcal{O}_{X_{et}}$ défini par $\mathcal{O}_{X_{et}}(U) = \mathcal{O}_U(U)$ pour tout $U \to X$ étale, on obtient donc :

**Proposition 14** *La tige en un point géométrique $\bar{x}$ de $\mathcal{O}_{X_{et}}$ est le henselisé strict de $\mathcal{O}_{X,x}$* [6].

Définissons maintenant la cohomologie étale. Notons $\Gamma : \mathscr{S}_X \to \mathbf{Ab}$ le foncteur des sections globales, donné par $\Gamma(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$. Ce foncteur est exact à gauche. On note $H^i_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{F})$ (ou juste $H^i(X, \mathscr{F})$) son $i$-ème foncteur dérivé appliqué à $\mathscr{F}$. Ce foncteur se calcule à l'aide de résolution injectives. On appelle ce groupe le $i$-ème groupe de cohomologie étale de $X$ à valeurs dans $\mathscr{F}$.
Pour $f : X \to Y$, le foncteur $f_*$ est aussi exact à gauche, on note $R^if_*$ son $i$-ième foncteur dérivé, c'est le faisceautisé de $V \mapsto H^i(V \times_Y X, \mathscr{F}_{V \times_Y X})$.

5. La catégorie des faisceaux sur $\omega$ est équivalente à celle des groupes abéliens par le foncteur de sections globale.
6. Où $x$ est l'image de $\bar{x}$ dans $X$ (on utilisera souvent une telle notation)

## 2.5 Catégories triangulées et dérivées

Avant d'aller plus loin dans les propriétés de la cohomologie étale, il est utile d'introduire le formalisme des catégories dérivées pour présenter les propriétés de la cohomologie étale. Ce formalisme est dû à Verdier, et est exposé en détail dans [Ver96]. Le passage par les catégories dérivées permet de considérer les foncteurs dérivés de manière plus "globale" que comme une simple suite de foncteurs. Il permettra par ailleurs, dans une section ultérieure, de donner un sens à la trace d'un morphisme induit sur les groupes de cohomologie. Nous suivons l'exposition des catégories triangulées et dérivées donnée dans [KS10].

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, on note $\mathrm{Comp}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{A}$. Par convention, nos complexes seront notés en notation cohomologique, c'est-à-dire que la différentielle est de degré $+1$. Pour tout complexe $C$ de différentielle $d$, on peut définir la cohomologie de $C$, notée $H^i(C)$, comme $\ker(d^i)/\mathrm{im}(d^{i-1})$. Etant donné deux morphismes de complexes $f, g : (C, d) \to (C', d')$ de même domaines et co-domaines, on rappelle que si $f$ et $g$ sont homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application $h$ de $C$ vers $C'$, de degré $-1$, telle que $\delta h + hd = f - g$, alors $f$ et $g$ induisent les mêmes morphismes sur l'homologie. On note alors $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ la catégorie homotope de $\mathcal{A}$, c'est la catégorie dont les objets sont les complexes d'objets de $\mathcal{A}$, et les morphismes sont les classes d'homotopies de morphismes de complexes. Cette catégorie, avec comme automorphisme de translation $S : (C^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (C^{n+1}, -d^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ a une structure de catégorie "triangulée". Nous énonçons ici les axiomes d'une catégorie triangulée :

**Définition 15** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie additive muni d'un automorphisme additif $S$. Pour tout objet $X$, on note $X[n] = S^n(X)$. On appelle* triangle de $\mathcal{T}$ *un sextuplet $(X, Y, Z, f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to X[1])$ où $X, Y$ et $Z$ sont des morphismes. On note $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ pour désigner un triangle. On appelle* morphisme de $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ vers $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1]$ *la donnée de trois morphismes $\alpha, \beta, \gamma$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & X[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1] \end{tikzcd}.$$

*On dit que ces deux triangles sont isomorphes si $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des isomorphismes.*
*On se donne une classe $\Delta$ de triangle. On appelle* triangles distingués *les éléments de $\Delta$.*
*On dit que $\mathcal{T}$, muni de $S$ et de $\Delta$ est* triangulée *si les axiomes suivants sont satisfaits :*

(TR0) *Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.*

(TR1) *Le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \to 0 \to X[1]$ est distingué pour tout $X$.*

(TR2) *$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ est distingué si et seulement si $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ est aussi distingué.*

(TR3) *Étant donné deux triangles distingués $X \to Y \to Z \to X[1]$ et $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ et un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd},$$

*il existe $\gamma : Z \to Z'$ tel que $(\alpha, \beta, \gamma)$ constitue un morphisme de triangle.*

(TR4) *Soient $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes. et trois triangles distingués :*

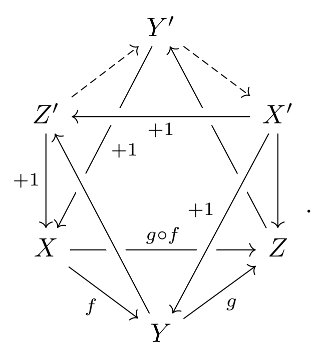
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p_1} Q_1 \xrightarrow{q_1} X[1]$$
$$X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{p_2} Q_2 \xrightarrow{q_2} X[1]$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{p_3} Q_3 \xrightarrow{q_3} Y[1].$$

*Alors il existe $\alpha : Q_1 \to Q_2$ et $\beta : Q_2 \to Q_3$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "g"] & Q_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\alpha"] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
X \arrow[r, "g\circ f"'] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & Q_2 \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "\beta"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "p_3"] & Q_3 \arrow[r, "q_3"] \arrow[d] & Y[1] \arrow[dl, "p_1[1]"] \\
 & & Q_1[1] &
\end{tikzcd}$$

*et tel que* $Q_1 \overset{\alpha}{\to} Q_2 \overset{\beta}{\to} Q_3 \overset{p_1[1]\circ q_3}{\to} Q_1[1]$ *soit un triangle distingué.*

Le dernier axiome d'une catégorie triangulée est peut-être le plus compliqué. Si on se représente les triangles comme des "extensions", le troisième objet peut-être vu comme le quotient des deux précédents, on aurait alors $Q_1 \simeq Y/X$, $Q_2 \simeq Z/X$ et $Q_3 \simeq Y/Z$, le fait que $Q_1 \to Q_2 \to Q_3 \to Q_1[1]$ soit distingué serait alors que $(Z/X)/(Y/X) \simeq Y/Z$. Cette heuristique n'a rien de formelle et ne sert que d'intuition. Par ailleurs il est à noter que rien dans les axiomes d'une catégorie triangulée n'assure que le troisième objet d'un triangle soit fonctoriel en les deux autres, ainsi, si on avait un isomorphisme $(Z/X)/(Y/X) \simeq Y/Z$, il n'aurait rien de canonique. Cet axiome est souvent appelé "axiome de l'octaèdre" à cause de la représentation suivante qu'il est possible de s'en faire :




Les flèches notées $A \overset{+1}{\to} B$ sont à comprendre comme de la forme $A \to B[1]$.

Revenons à la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Nous avons défini son automorphisme de translation, reste à définir ses triangles distingués pour en faire une catégorie triangulée : un triangle dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ est distingué s'il est isomorphe à un triangle de la forme $X \xrightarrow{f} Y \overset{y\mapsto(y,0)}{\longrightarrow} Y \oplus X[1] \overset{(y,x)\mapsto x}{\longrightarrow} X[1]$. Le terme $Y \oplus X[1]$ est un complexe muni de la différentielle donnée par la matrice $\begin{pmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_X^{n+1} \end{pmatrix}$ où les différentielles de $X$ et $Y$ sont notées $d_X$ et $d_Y$ respectivement. Ce complexe est aussi appelé le "cône" de $f$. De l'algèbre classique sur les complexes montre que la classe de triangle ainsi considérée satisfait à tous les axiomes d'une catégorie triangulée. On définit un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées [7] comme étant un foncteur additif commutant aux translations et envoyant les triangles distingués sur des triangles distingués. Les axiomes d'une catégorie triangulée imposent en réalité des conditions assez fortes sur les triangles, par exemple, si $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \to X[1]$ est un triangle distingué, alors $g \circ f = 0$.

Les triangles distingués d'une catégorie triangulée modélisent des suites exactes courtes généralisées : c'est l'idée de la définition suivante :

7. Parfois appelé foncteur "exact", chose que nous éviterons pour ne pas introduire de confusion avec les foncteurs exacts au sens des catégories abéliennes.

**Définition 16** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée, et $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ un foncteur additif de $\mathcal{T}$ à valeur dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. On dit que $F$ est cohomologique si pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to X[1]$, la suite $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ est exacte.*

En vertu de (TR1), si $F$ est cohomologique et $X \to Y \to Z \to X[1]$ est distingué, en notant $F^n(X) = F(X[n])$, on a une suite exacte longue

$$\cdots \to F^n(X) \to F^n(Y) \to F^n(Z) \to F^{n+1}(X) \to F^{n+1}(Y) \to \cdots .$$

Un résultat important des catégories triangulés est que, pour tout objet $X \in \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est triangulée, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, -)$ sont cohomologiques. De même, le foncteur $K \mapsto H^0(K)$ est cohomologique. On obtient alors un résultat sur les morphismes de triangles analogue à un résultat classique d'algèbre homologique

**Lemma 17 (2 sur 3)** *Soit $(f, g, h)$ un morphisme de triangles distingués dans une catégorie triangulée, si deux des morphismes sont des isomorphismes, il en est de même du troisième.*

Définissons un certain type de classe d'objets :

**Définition 18** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulé, et $\mathcal{N}$ une classe d'objets de $\mathcal{T}$. On dit que cette classe est un* système nul *si elle vérifie les axiomes suivants :*

(N1) $0 \in \mathcal{N}$.

(N2) $X \in \mathcal{N} \iff X[1] \in \mathcal{N}$.

(N3) *Si $X \to Y \to Z \to X[1]$ est distingué et deux des objets $X, Y, Z$ sont dans $\mathcal{N}$, alors il en est de même du troisième.*

Pour une catégorie triangulée, on note $G(\mathcal{T})$ quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes de $\mathcal{T}$ par la relation engendré par les $(X) + (Z) - (Y)$ lorsque $X \to Y \to Z \to X[1]$ est un triangle distingué. On l'appelle le Groupe de Grothendieck de $\mathcal{T}$.
Les axiomes de catégorie triangulées sont en réalité faits pour que, si $\mathcal{N}$ est un système nul, la classe de morphismes

$$S(\mathcal{N}) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y), \exists Z \in \mathcal{N}, a : Y \to Z, b : Z \to X[1], X \to Y \to Z \to X[1] \text{ est distingué}\}$$

soit un "système multiplicatif" au sens des catégories. Il existe donc une catégorie $\mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$, essentiellement unique, qui est encore triangulée, et un foncteur triangulé $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S(\mathcal{N}^{-1})]$ tel que $Q(f)$ soit un isomorphisme pour tout $f \in S(\mathcal{N})$. Par ailleurs, tout foncteur de $\mathcal{T}$ dans une catégorie arbitraire tel que les éléments de $S(\mathcal{N})$ soient envoyés sur des isomorphismes se factorise par $\mathcal{T}[S(\mathcal{N}^{-1})]$. $Q$ envoie par ailleurs les éléments de $\mathcal{N}$ sur $0$ [8].
Dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, la catégorie homotopes des complexes de $\mathcal{A}$, les complexes acycliques (c'est-à-dire de cohomologie nulle), forment un système nul. La classe de morphisme associée est celle des quasi-isomorphismes, c'est-à-dire des morphismes dont le cône est acyclique, ou encore, par la suite exacte longue, des morphismes qui induisent un isomorphisme sur chaque groupe de cohomologie. On note $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ la catégorie localisée par rapport à cette classe et on l'appelle "catégorie dérivée de $\mathcal{A}$". On note $Q_{\mathcal{A}} : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ le foncteur canonique, et on omet $\mathcal{A}$ en indice s'il n'y a pas d'ambiguité. En ne considérant que les complexes bornés inférieurement (resp. bornés supérieurement, resp. bornés), on construit de même $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ resp. $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$) et $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ resp. $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$). Nous notons de manière générique $K^\star(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{D}^\star(\mathcal{A})$) pour désigner l'une de ces catégories.

**Définition 19** *Etant donné deux catégories abéliennes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et un foncteur $F : \mathcal{K}^\star(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}(\mathcal{B})$, additif, triangulé, on appelle* foncteur dérivé de *$F$. Noté $RF$, l'unique foncteur triangulé $\mathcal{D}^\star(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$, muni d'une transformation naturelle $Q_{\mathcal{B}} \circ F \to RF \circ Q_{\mathcal{A}}$, tel que pour tout foncteur additif triangulé $G : \mathcal{D}^\star(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$, s induise un isomorphisme entre* $\mathrm{Hom}(RF, G)$ *et* $\mathrm{Hom}(Q_{\mathcal{B}} \circ F, G \circ Q_{\mathcal{A}})$.

Ce foncteur s'interprète comme un foncteur induit par $F$ sur les catégories dérivées. Cette définition n'est pas très pratique, on donne une méthode explicite pour calculer le foncteur dérivé :

**Théorème 20** *Gardons les notations précédentes. Supposons qu'il existe une famille $\mathscr{F}$ d'éléments de $\mathcal{K}^\star(\mathcal{A})$ qui satisfait aux propriétés suivantes :*

8. Ou plutot, sur des objets canoniquement isomorphes à 0.

— *Pour tout $X \in \mathcal{K}^\star(\mathcal{A})$, il existe un quasi-isomorphisme $X \to X'$ où $X' \in \mathscr{F}$.*
— *Le foncteur $F$ envoie des quasi-isomorphismes entre objets de $\mathscr{F}$ sur des quasi-isomorphismes dans $\mathcal{K}(\mathcal{B})$*
— *Si $X \to X'$ est un morphisme entre deux objets de $\mathscr{F}$, il existe $X'' \in \mathscr{F}$ et un triangle distingué $X \to X' \to X'' \to X[1]$.*

*Une telle famille est dite* adaptée à $F$. *Si une telle famille existe, alors $RF$ existe, et pour tout quasi-isomorphisme $X \to X'$ où $X' \in \mathscr{F}$, $RF(X) \cong Q_{\mathcal{B}}(F(X'))$.*

Le point important, qui permet de raccrocher ce formalisme à celui de la théorie de l'algèbre homologique "classique", est le suivant :

**Théorème 21** *Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, exact à gauche, alors $F$ induit un foncteur triangulé $\mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{B})$, si $\mathcal{A}$ a suffisemment d'objet injectifs, la famille $\mathscr{I}$ des complexes d'objets injectifs bornés inférieurement de $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ est adaptée à $F$, et donc $RF$ existe.*

Avec ces notations, un quasi-isomorphisme $K^\cdot \to I^\cdot$ où $I^\cdot$ est un complexe d'injectifs borné inférieurement n'est rien d'autre qu'une résolution injective de $K$, et $RF(K^\cdot) \cong F(I^\cdot)$. On a alors $H^n(RF(K^\cdot)) \cong H^n(F(I^\cdot)) \cong R^nF(K^\cdot)$, on retrouve donc la théorie usuelle ! De manière duale, on peut définir les foncteurs dérivés gauches $LF$ d'un foncteur exact à droite, sous réserve de l'existence de suffisamment d'objets projectifs.
La composition de foncteurs dérivé devient alors simple (alors que par exemple dans [Gro57a], il faut faire appel à des suites spectrales pour obtenir les résultats).

**Proposition 22** *Si $F : \mathcal{K}^\star(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^*(\mathcal{B})$ et $G : \mathcal{K}^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{K}(\mathcal{C})$ sont des foncteurs triangulés, si $\mathcal{F}$ est une famille adaptée à $F$, et $\mathscr{G}$ est une famille adaptée à $G$, et si $F(\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$, alors $R(G\circ F)$ est définit et $R(G\circ F) = RG\circ RF$.*

On dispose de plus du résultat suivant, utile pour les calculs :

**Proposition 23** *Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est exact à gauche, et si $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, alors pour tout $K^\cdot \in \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, on a une suite spectrale bi-régulière :*

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = R^pF(H^q(K^\cdot)) \Rightarrow R^{p+q}F(K^\cdot).$$

En effet, il suffit de prendre une résolution "de Cartan-Eilenberg" $I^{\cdot\cdot}$ de $K^\cdot$ (c'est-à-dire telle que pour tout $n$, $I^{\cdot,n}$ est une résolution injective de $K^n$), d'appliquer $F$ et d'utiliser la suite spectrale du bicomplexe associée à la filtration par les lignes (voir par exemple [Wei95] 5.6 pour les suites spectrales associées à un bicomplexe). En combinant cette proposition avec celle précédente, on retrouve la suite spectrale de Grothendieck [Gro57a] 2.4.1.

Enfin, nous remarquerons que si $\mathcal{A}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ telle que, si $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ est exacte et $X', X''$ sont dans $\mathcal{A}'$, alors $\mathcal{A}$, la sous-catégorie de $\mathcal{K}$ des objets dont les objets de cohomologie sont dans $\mathcal{A}'$ forment une sous-catégorie triangulé de $\mathcal{K}^\star(\mathcal{A})$, notée $K^\star_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. On définit de même $\mathcal{D}^\star_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$.

## 2.6 Produit tensoriel et Hom dérivé

Le formalisme des catégories dérivées permet de définir, de nouvelles opérations.
La première est le Hom dérivé. Etant donnés deux complexes d'objets $K^\cdot$ et $L^\cdot$ de $\mathcal{K}^+(A)$, on définit le complexe $(\mathrm{Hom}^n(K^\cdot, L^\cdot))_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\prod_i \mathrm{Hom}_A(X^i, Y^{i+n})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. C'est le complexe total produit associé au bicomplexe $(\mathrm{Hom}(K^i, L^j))_{i,j}$. On notera les relation $\mathrm{Hom}^\cdot(K^\cdot[-1], L^\cdot) \cong \mathrm{Hom}^\cdot(K^\cdot, L^\cdot[1]) \cong \mathrm{Hom}^\cdot(K^\cdot, L^\cdot)[1]$. Le $-1$ du premier membre exprime la contravariance en la première variable [9]. Pour $K^\cdot$ fixé (resp. $L^\cdot$) fixé, $\mathrm{Hom}^\cdot(K^\cdot, -)$ (resp. $\mathrm{Hom}(-, L^\cdot)$) respecte les triangles distingués. On peut montrer que si $L^\cdot$ est un complexe borné inférieurement d'injectifs et $K^\cdot$ est acyclique, alors $\mathrm{Hom}^\cdot(K^\cdot, L^\cdot)$ est acyclique. Ceci montre qu'on peut dériver $\mathrm{Hom}^\cdot(-,-)$ d'abord en la deuxième, puis en la première variable pour obtenir un foncteur $R\mathrm{Hom} : \mathcal{D}^+(\mathcal{A})\times\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Ab})$. On a par ailleurs $H^i(R\mathrm{Hom}(K^\cdot, L^\cdot)) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{K}^+(\mathcal{A})}(K^\cdot, L^\cdot)$. Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathscr{S}_{X_{et}}$, on dispose aussi du Hom faisceautisé $\mathscr{H}om$, et on définit de la même manière $R\mathscr{H}om$.

La seconde construction importante est aussi donnée dans le cas des faisceaux de $A$-modules sur $X_{et}$ : on dispose d'un produit tensoriel de faisceaux, et donc d'un bifoncteur $- \otimes_A -$ (qui par ailleurs est, à une variable

9. Pour une pénible discussion sur les signes dans les foncteurs triangulés d'arité supérieure à 1, voir [SGA4-3], XVIII 1

fixée $X$, adjoint à $\mathscr{H}om(X, -)$). On peut transporter ce foncteur sur $\mathcal{K}(\mathscr{S}_X)$ en définissant le produit tensoriel de complexes de faisceaux $K^\cdot$ et $L^\cdot$ comme le complexe total somme associé au bicomplexe $(K^i \otimes L^j)_{i,j}$. On montre que la famille adapté à ce foncteur est celle des complexes bornés supérieurement dont chaque composante est plate, et on définit donc un foncteur $- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A - : \mathcal{K}^-(\mathscr{S}_X) \times \mathcal{K}^-(\mathscr{S}_X) \to \mathcal{K}^-(A - \mathbf{Mod})$. Par ailleurs, si l'une des deux variables est un complexe $K^\cdot$ borné de Tor-dimension finie, on peut définir $K^\cdot \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A L^\cdot$ pour tout $L^\cdot$ dans $\mathcal{K}(X, A)$.
Afin de simplifier les notations, on notera $\mathcal{D}^*(X, A)$ la catégorie dérivée des faisceaux étales de $A$-modules. On ajoutera $tf$ en indice pour désigner la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^\star(A)$ formé des complexes de tor-dimension finie. On dispose alors de formules analogues à celles du cas non dérivé, qui permettent un calcul formel dans les catégories dérivées, nous les énonçons ici. On notera que dans la formule suivante, on requiert que $Rf_*$ soit de dimension cohomologique fini. Les cas où nous serons amenés à utiliser cette formule (schémas séparés de types finis sur des corps ou bien sur des anneaux de valuation discrète strictement locaux, ou morphismes entre schémas de ce type), cette hypothèses sera valable par des théorèmes généraux de finitude ([Fu11], 7.5).

**Théorème 24** *On a les formules suivantes :*

1. *Pour tout* $L \in \mathcal{D}(A), M \in \mathcal{D}^b_{tf}(A), N \in \mathcal{D}^+(A)$, *on a* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X,A)}\left(L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} M, N\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X,A)}\left(L, R\mathscr{H}om(M, N)\right)$. *Cet isomorphisme est naturel en* $L, M$ *et* $N$.
2. *Si* $Rf_*$ *est de dimension finie,* $A \to B$ *est un morphisme d'anneaux,* $K \in \mathcal{D}^-(B - \mathbf{Mod}), L \in \mathcal{D}^-(X, A)$, *on a* $K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A Rf_* L \cong Rf_*\left(f^*K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A L\right)$.

Dans la deuxième formule, on aurait pu remplacer $M$ par un complexe de faisceaux de cohomologie localement constante.

## 2.7 Faiceaux localement constants, de torsions, et constructibles

Revenons aux faisceaux étales. Afin de pouvoir faciliter le travail, il est nécessaire d'imposer des conditions de finitude aux faisceaux sur lesquels nous travaillerons. On rappelle qu'un faisceau est constant s'il est la faisceautisation d'un préfaisceau constant. On dira qu'un faisceau $\mathscr{F}$ est localement constant s'il existe un recouvrement étale $\{U_i \to X\}_{i \in I}$ tel que $\mathscr{F}_{|U_i}$ soit constant pour tout $i$.
Dans la topologie étale, les faisceaux localement constants à tige finie admettent des propriétés remarquables :

**Proposition 25**
1. *Si $\mathscr{F}$ a toute ses tiges finies, alors $\mathscr{F}$ est localement constant si et seulement si il est représentable par un morphisme étale fini. Par ailleurs, dans ce cas, il existe un morphisme fini étale surjectif $\pi$ tel que $\pi^*\mathscr{F}$ soit constant.*
2. *Il existe un ouvert $U$ dense de $X$ tel que $\mathscr{F}_{|U}$ soit constant sur $U$.*

La deuxième propriété est vraie de manière plus générale si $X$ a un nombre fini de composantes irréductibles, ce qui est automatique ici car on ne considère que des schémas noethériens.
La preuve du sens direct de 1 utilise la technique de descente fidèlement plate pour construire le schéma qui représente $\mathscr{F}$. En effet, dans un premier temps, on montre qu'on peut se ramener au cas d'un revêtement fini $\{U_j \to X\}$ tel que $\mathscr{F}_{|U_j}$ soit fini. En posant $U$ la somme disjointe des $U_i$, c'est un revêtement étale de $X$, fidèlement plat tel que $\mathscr{F}_{|U}$ est représenté par un revêtement étale trivial de $U$. Par descente fidèlement plate, la donnée des $\mathcal{F}_{|U_i}$ permet de descendre $U' \to U$ en $X' \to X$, et d'avoir $\mathscr{F}$ représenté par $X'$ (on note aussi $\mathscr{F} \cong \tilde{X'} \cong \mathbf{y}X'$ [10]).

**Définition 26** *Si $A$ est un anneau noetherien. On dit qu'un faisceau $\mathscr{F}$ d'ensemble (resp. de A-module) est* constructible *s'il existe une partition de $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ en réunion finie d'ensemble localement fermés, tels que $\mathscr{F}_{|X_i}$ soit localement constant sur $X_i$, et si ses tiges sont des ensembles finis (resp. des A-modules de type finis).*

10. La notation $\mathbf{y}U$ pour désigner le faisceau representé par $U$ viens du plongement de Yoneda $\mathbf{y} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, qui existe dans toute catégorie.

Cette définition fait écho à celle "d'ensemble constructible" de Chevalley (voir [EGAIV-1], 1.8 sur le sujet par exemple).
On a vu que les morphismes étales finis représentent les faisceaux localement constants à tige finie. On a, de manière similaire : si $U \to X$ est étale et de type fini, alors $\mathbf{y}U$ est constructible. Il existe une autre caractérisation des faisceaux constructibles : ce sont les objets noetheriens de la catégorie abélienne des faisceaux de $A$-module : c'est-à-dire les faisceaux dont toute chaine décroissante de sous-faisceaux est stationnaire au bout d'un certain rang.
Notons une dernière caractérisation des faisceaux constructibles : un faisceau est constructible si et seulement si il existe une suite exacte $A_U \to A_V \to \mathscr{F} \to 0$ où $U$ et $V$ sont des morphismes étales de type finis et $A_U$ désigne le faisceautisé de $U' \mapsto \bigoplus_{\mathrm{Hom}(U',U)} \mathbb{Z}$. Cette caractérisation vient faire écho à la définition d'un faisceau cohérent en géométrie algébrique classique. Enfin, on dit qu'un faisceau est de torsion si pour tout $x \in X$, $\mathscr{F}_{\bar{x}}$ est un $A$-module de torsion, les faisceaux de torsion vérifient le "2 sur 3" et on définit donc $\mathcal{D}^{\star}_{\mathrm{tor}}(X, A)$ la catégorie dérivée des faisceaux de torsion (voir 2.5). L'interêt des faisceaux constructibles réside dans la proposition suivante.

**Proposition 27** *Tout faisceau de torsion est limite directe de ses sous-faisceaux constructibles.*

Ainsi, les théorèmes sur des faisceaux de torsions se ramènent souvent par passage à la limite à des théorèmes sur les faisceaux constructibles, qui eux-même se peuvent se ramener à des théorèmes sur des faisceaux localement constants par des récurrences noetheriennes et en vertu de la proposition suivante.

**Proposition 28** *Un faisceau d'ensemble (resp. de $A$-modules) sur $X$ est constructible si et seulement si, pour tout fermé irréductible $Y$ de $X$, il existe un ouvert dense $V$ de $Y$ tel que $\mathscr{F}_{|V}$ soit localement constant à tiges finies (resp. à tiges de type finies sur $A$).*

Enfin, en prenant un autre ouvert dense, les propriétés des faisceaux localement constants se ramènent à celles correspondantes sur des faisceaux constants. Ces réductions successives [11] sont souvent utilisées dans les preuves des propriétés de la cohomologie étale.
Les faisceaux constructibles forment une "bonne classe", c'est-à-dire qu'ils vérifient la propriété du 2 sur 3. Par ailleurs, l'image, le noyau et le conoyau d'un morphisme entre faisceaux constructibles sont des faisceaux constructibles. Dans une catégorie dérivée ou homotope, on notera un $c$ en indice pour indiquer qu'on considère les faisceaux constructibles.

## 2.8 Suite de localisation en cohomologie étale et image à support propre

Les deux derniers outils fondamentaux dont nous aurons besoin seront ceux de la suite de localisation et de l'image à support propre, essentiels en cohomologie étale. Nous suivons l'exposé de [Fu11] 5.4 et 5.5 dans cette section. Soit $X$ un schéma, $Y$ un sous-schéma fermé de $X$ défini par une immersion fermée $i$. Soit $j : X \setminus Y \to X$ l'immersion ouverte complémentaire.
On a déjà deux paires d'adjoints $i^* \dashv i_*$ et $j^* \dashv j_*$. On peut en réalité définir d'autres foncteurs qui mettent en jeu $i$ et $j$.

**Theorème et définition 29** *Le foncteur $i_*$ a un adjoint à droite, noté $i^!$. Le foncteur $j^*$ a un adjoint à gauche, noté $j_!$. Les foncteurs $i_*$, $i^*$, $j_!$, $j^*$ sont exacts. Les foncteurs $j_*$ et $i^!$ sont exacts à gauche. On a par ailleurs les relations suivantes*

$$\begin{aligned} i^! i_* &\cong i^* i_* \cong \mathrm{id} \\ j^* j_! &\cong j^* j_! \cong \mathrm{id} \\ i^* j_! \cong i^! j_! &\cong i^! j_* \cong 0 \\ j^* i_* &\cong 0. \end{aligned}$$

*Enfin, on a deux triangles distingués :*

$$\begin{aligned} i_* R i^! \mathscr{F} &\to \mathscr{F} \to j_* j^* \to (i_* R i^! \mathscr{F})[1] \\ j_! j^* \mathscr{F} &\to \mathscr{F} \to i_* i^* \mathscr{F} \to j_! j^* \mathscr{F}[1]. \end{aligned}$$

*et $R^q i^! = 0$ pour $q > 1$.*

11. Réductions qu'on ne peut néanmoins effectuer que si l'on sait ce qui se passe sur le complémentaire des ouverts dense qu'on considère, ceci est généralement fait en prouvant les propositions par récurrence sur la dimension des schémas.

Dans les deux triangles, on a omis le "$R$" lorsque les foncteurs étaient déjà exacts, dans ce cas, ils représentent des complexes concentrés en degré zéro, et ces triangles ne sont que des suites exactes à 4 (resp. 3) termes consécutifs non nuls. Les propriétés d'exactitude découlent partiellement du fait qu'un adjoint à gauche est exact à droite et qu'un adjoint à droite est exact à gauche. L'exactitude de $i^*$ et $j^*$ est un fait général, en effet si $f : X \to Y$, alors $(f^*\mathscr{F})_{\bar{x}} = \mathscr{F}_{f(\bar{x})}$ pour tout point géométrique $x$. Le fait que $i_*$ soit exact est un fait général pour les morphismes finis. Explicitons les constructions de ces deux foncteurs, les relations entre des foncteurs découleront de leurs définitions. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$, $U$ étale sur $X$ et $s \in \mathscr{F}(U)$ une section, on définit le support de $s$ comme le plus petit fermé $F$ de $U$ tel que $s$ soit nul sur le complémentaire de $F$. On peut montrer qu'un faisceau $\mathscr{F}$ sur $X$ est de la forme $i_*\mathscr{G}$ si et seulement si $j_*\mathscr{F}$ est nul. C'est en particulier le cas du faisceau $\mathscr{K}$, le noyau du morphisme d'unité de l'adjonction $\mathscr{F} \to j^*j_*\mathscr{F}$. En effet $j^*\mathscr{K}$ est le noyau de $j^*\mathscr{F} \to j^*(j_*j^*\mathscr{F})$, qui est toujours un isomorphisme lorsque $f$ est une immersion ([Fu11], 5.3.8), donc $j^*\mathscr{K}$ est nul et il existe un unique faisceau sur $Y$, que nous noterons $i^!\mathscr{F}$, tel que $i_*i^! = \mathscr{K}$. Cette construction est bien fonctorielle en $\mathscr{F}$ et donne le premier des deux triangles. Que $i^!$ soit adjoint à $i_*$ est alors purement formel : tout morphisme $i_*\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ a son image dans le noyau de $\mathscr{G} \to j_*j^*\mathscr{G}$, et donc s'envoie dans le noyau, qui par définition est $i_*i^!\mathscr{G}$, ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(i_*\mathscr{F}, \mathscr{G}) &\cong \mathrm{Hom}(i_*\mathscr{F}, i_*i^!\mathscr{G}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, i^!\mathscr{G}).\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que $i_*$ est pleinement fidèle, ce qui est encore une fois une propriété générale des immersions fermés ([Fu11], 5.4.1).
Reste à définir le foncteur $j_!$. Il est plus simple à définir. En effet, définissons un préfaisceau $\mathscr{P}$ par $\mathscr{F}(V)$ si l'image de $V$ dans $X$ est incluse dans $X \setminus Y$, et 0 sinon, et prenons son faisceautisé, notons le $j_!\mathscr{F}$. C'est le faisceau "d'extension par 0 hors de $X \setminus Y$". On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(j_!\mathscr{F}, \mathscr{G}) &\cong \mathrm{Hom}(\mathscr{P}, \mathscr{G}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathscr{P}, j^*\mathscr{G}).\end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme provient du fait que, pour une immersion ouverte (ou un morphisme étale en générale), $j^*\mathscr{G}(V) = \mathscr{G}(V)$ où $V$ est vu comme préfaisceau sur $X$ par l'inclusion $j$. Il suffit donc de se donner les morphismes pour $V$ étale sur $X \times_X Y$.
Des considérations tige par tige montrent que le deuxième triangle est bien distingué, c'est-à-dire exact. En effet, pour tout faisceau $\mathscr{F}$, $j_!\mathscr{F}_{\bar{x}} = \mathscr{F}_{\bar{x}}$ si $x \in X \setminus Y$ et est nul sinon, de même on peut montrer que $i_*\mathscr{F}_{\bar{x}} = \mathscr{F}_{\bar{x}}$ si $x \in Y$ et est nulle sinon (nous donnerons dans la section suivante le calcul de la tige général pour un morphisme fini). La nullité de $R^q i^!$ provient du fait que $i^!$ a un adjoint à gauche exact, et préserve donc les injectifs.
Ces suites exactes sont des outils extrêmement importants dans la théorie de la cohomologie étale : elles permettent de décrire les morphismes canoniques des différentes adjonctions entre les foncteurs que nous avons, et permettent donc de donner, par exemple, des informations quand à la surjectivité ou l'injectivité d'un morphisme induit par une de ces adjonctions en fonction de celle du morphisme qui l'induit.

Définissons de manière plus générale le foncteur $f_!$ pour tout morphisme $f$ étale. Pour $f : Y \to X$ étale, et pour $U$ étale sur $Y$, muni d'un $X$-morphisme de $U$ vers $Y$ noté $\psi$, notons $U_\psi$ le schéma $U$ vu comme un $X$-schéma via $\psi$. On a alors, pour tout faisceau $\mathscr{F}$, un préfaisceau $U \mapsto \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Hom}_X(U,Y)} \mathscr{F}(U_\psi)$. On note $f_!\mathscr{F}$ son faisceautisé. On peut montrer qu'il est encore adjoint à droite de $f^*$, exact à gauche, pleinement fidèle, qu'il coïncide avec $j_!$ pour une immersion ouverte, et que ses tiges sont données par $(f_!\mathscr{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{y \in f^{-1}(x)} \mathscr{F}_{\bar{y}}$. Enfin, si $f$ est fini, $f_!$ et $f_*$ coïncident.

## 2.9 Calculs basiques de cohomologie étale

Maintenant que nous avons décrit tous les principaux outils théoriques, nous pouvons énoncer plusieurs résultats, nous emprunterons la plupart des propriétés à [Fu11] 5.8 et 7.2. Le premier résultat et sans doute le plus important, est celui relatif à la cohomologie des corps :

**Théorème 30** *Soit $k$ un corps. et soit $s : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(k)$ une clôture séparable de $k$. Alors le foncteur $s^*$ induit une équivalence (de catégories abéliennes) entre la catégorie des faisceaux étales sur $\mathrm{Spec}(k)$ et les $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules continus. En particulier, $H^q(\mathrm{Spec} k, \mathscr{F}) \cong H^q_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathscr{F}_{\bar{k}})$ pour tout faisceau $\mathscr{F}$ et tout entier $q$.*

On voit la richesse de la théorie de la cohomologie étale : la cohomologie galoisienne en est le cas le plus simple : la cohomologie des corps.
Par des considérations élémentaires, on peut montrer que la cohomologie des anneaux strictement locaux est concentrée en degré 0, que les morphismes finis n'ont pas d'image directe supérieure en degré supérieur ou égal à 1, que, pour le $H^1$, on peut se passer de l'algèbre homologique et calculer le $H^1$ par la cohomologie de Čech du préfaisceau sous-jacent en prenant la limite sur les recouvrements. En combinant ce résultat à un résultat de descente, on montre que le $H^1$ étale à coefficient dans $\mathcal{O}^*_{X_{et}}$ coincide avec son analogue en topologie de Zariski, et est donc égal au groupe de Picard du schéma qu'on considère. On montre enfin que les morphismes finis surjectifs radiciels induisent des isomorphismes sur tous les groupes de cohomologie étale, en particulier, on pourra toujours considérer nos schémas comme réduits.
En utilisant les propriétés de la cohomologie étale par rapport aux passages aux limites, qui sont en pratiques assez techniques, et sont exposées dans [Fu11], 5.9, on montre que pour tout $f : X \to Y$, et $\bar{s}$ point géométrique de $Y$, si $\tilde{Y}_{\bar{s}}$ désigne le hensélisé strict en $\bar{s}$ de $\mathcal{O}_{Y,s}$, alors $(Rf_*\mathscr{F})_{\bar{s}} \cong H^q(X \times_Y \tilde{Y}_{\bar{s}}, \mathscr{F}_{|X \times_Y \tilde{Y}_{\bar{s}}})$. Autrement dit, les situations locales pour la topologie étale reviennent à considérer des schémas sur des spectres d'anneaux strictement henseliens.

Nous avons donné la cohomologie des points, l'étape suivante est de donner celle des courbes. Pour cela, nous aurons besoin dans un premier temps de la théorie de Kummer : fixons nous un entier $n$ inversible dans $X$ (c'est à dire inversible dans $\mathcal{O}_X(X)$) le morphisme $\mathcal{O}^*_{X_{et}} \to \mathcal{O}^*_{X_{et}}$ défini par $x \mapsto x^n$ est surjectif, en effet, pour un schéma $U$ étale sur $X$, $s \in \mathcal{O}_U(U)^*$, $\underline{\mathrm{Spec}}\,(\mathcal{O}_U[t]/(t^n - s))$ est un revêtement étale fini de $U$ [12] et $s$ est donc bien, localement pour la topologie étale, de la forme $t^n$. Le noyau de ce morphisme est un faisceau localement constant. En effet, le noyau de ce morphisme est représenté par le revêtement étale fini $\underline{\mathrm{Spec}}\,(\mathcal{O}_X[t]/(t^n - 1))$. La tige en un point géométrique est (non-canoniquement !) isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\mu_{X,n}$ ce noyau, et on l'appelle "faisceau des racines $n$-ièmes de l'unité" sur $X$.
Ce faisceau est extrêmement important, il joue le rôle de "faisceau d'orientation" sur $X$. Le fait que ce faisceau ne soit pas canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modélise précisément l'indétermination dans l'orientation. Par exemple, pour $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, une fois qu'on s'est fixé une racine primitive $n$-ième de l'unité, cette indétermination disparait et l'isomorphisme $\mu_{\mathbb{C},n} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ "devient" canonique.
C'est à cause de cette fonction de faisceau d'orientation qu'on fait de $\mu_{X,n}$ le faisceau de coefficients privilégié pour calculer la cohomologie des courbes.
Dans le cas d'un schéma de caractéristique $p$, on considère aussi la théorie d'Artin-Schreier, et le morphisme $\mathcal{O}^*_{X_{et}} \to \mathcal{O}^*_{X_{et}}$ définit par $x \mapsto x^p - x$. Cette fois, le noyau est canoniquement isomorphe au faisceau constant égal à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a un premier résultat sur la dimension cohomologique des courbes vis-à-vis des faisceaux de torsions :

**Théorème 31** *Soit $X$ un schéma réduit sur un corps séparablement clos de caractéristique $p$. De dimension inférieure ou égale à 1. Alors :*

1. *La cohomologie d'un faisceau de torsion est nulle au delà du degré 2.*
2. *Les groupes $H^q(X, \mathcal{O}^*_{X_{et}})$ sont des groupes de $p$-torsion pour $q = 2$ et $q = 3$, et sont nuls pour $q \geq 4$. Par ailleurs, si $k$ est algébriquement clos, ils sont nuls pour $q \geq 2$.*

La preuve de ce théorème peut être esquissée comme suit : il faut dans un premier temps considérer les points génériques $\eta_1, \ldots, \eta_n$ qui engendrent les composantes irréductibles de dimension 1. L'anneau $R = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X,\eta_i}$ s'envoie dans $X$ par un morphisme canonique $j :\ \mathrm{Spec}R \to X$. Pour un faisceau $\mathscr{F}$ sur $X$, on considère alors un triangle distingué

$$\mathscr{F} \to Rj_*j^*\mathscr{F} \to \Delta \to \mathscr{F}[1]. \tag{1}$$

Puisque le complexe $\mathscr{F}$ est concentré en degré 0, la cohomologie de $\Delta$ et de $Rj_*j^*$ coincident en degré supérieur ou égal à 1. Par définition de $R$, on peut vérifier que $H^q(\Delta)$ a un support qui ne peut être non nul que sur les points fermés de $X$ [13], et on peut montrer que la cohomologie de $X$ à valeur dans un tel faisceau est nulle en degré strictement positifs. La suite spectrale $\mathrm{E}_2^{p,q} = H^p(X, H^q(\Delta)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \Delta)$ est donc dégénérée et $H^q(X, \Delta) = H^0(X, H^q(\Delta))$, cela décrit un des termes de la suite exacte longue associée à

12. Puisque $n$ est inversible, la dérivée $nt$ de $t^n - s$ est bien non nulle.
13. On parle dans ce cas de "faisceau gratte-ciel".

(1). Par ailleurs $H^q(X, R_j * j^*\mathscr{F}) = H^q(R, j^*\mathscr{F})$ (cela provient de la décomposition de $R$ comme produit de corps). Un résultat de cohomologie galoisienne (essentiellement impliqué par le théorème de Tsen, voir [Fu11] 4.5.11) permet alors de conclure quand à la nullité de $H^q(R, j^*\mathscr{F})$ pour $q \geq 2$. Ceci permet de se ramener à $H^q(X, \mathscr{F}) \cong H^0(X, H^{q-1}(\Delta))$, encore une fois, un théorème de cohomologie galoisienne permet de montrer que $R^q j_* j^*\mathscr{F}$ est nul pour $q \geq 2$, et donc que $H^q(\Delta) = 0$ pour $q \geq 3$ en considérant le triangle (1). Une méthode similaire appliquée à $\mathscr{F} = \mathcal{O}^*_{X_{et}}$ et en utilisant des théorèmes de cohomologie galoisienne qui permettent de conclure sur la torsion dans ce cas, montrent la deuxième partie.

On peut calculer la cohomologie des courbes lisses (voir [Fu11] 7.2.9 pour le détail du calcul) :

**Théorème 32** *Soit $X$ une courbe algébrique projective lisse irréductible de genre $g$ sur un corps algébriquement clos $k$. On a des isomorphismes :*

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si} \quad q = 0 \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \text{si} \quad q = 1 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si} \quad q = 2 \\ 0 & \text{si} \quad q \geq 3 \end{cases}.$$

*Plus précisément, on a des isomorphismes canoniques :*

$$H^q(X, \mu_{X,n}) \cong \begin{cases} \mu_{k,n} & \text{si} \quad q = 0 \\ \mathrm{Pic}_n(X) & \text{si} \quad q = 1 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si} \quad q = 2 \\ 0 & \text{si} \quad q \geq 3 \end{cases}$$

*où* $\mathrm{Pic}_n(X)$ *désigne le groupe des éléments de torsion $n$ dans le groupe de Picard de $X$.*

Ce théorème est fondamental en ce que la plupart des démonstrations en cohomologie étale procèdent par des "dévissages" qui permettent de se ramener au cas d'un schéma de dimension 1, en considérant alors la tige en un point géométrique qui correspond à un corps algébriquement clos, on est alors ramené au cas des courbes sur un corps algébriquement clos.

## 2.10 Formules de changement de base

Nous donnons ici deux des théorèmes les plus fondamentaux en cohomologie étale : les théorèmes de changement de base, qui permettent de développer un véritable "calcul" en cohomologie étale. Considérons un carré cartésien de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}.$$

Pour tout $K \in \mathcal{D}^+(X, A)$, il existe un morphisme canonique :

$$g^* Rf_* K \to Rf'_* g'^* K. \tag{2}$$

**Théorème 33 (Changements de base)** *On se place dans la situation précédente.*

*(i) Si $f$ est propre et $K \in \mathcal{D}^+_{tor}(X, A)$, alors (2) est un isomorphisme. (Changement de base propre)*

*(ii) Si $g$ est lisse, $n$ inversible sur $X$ et $K \in \mathcal{D}^+(X, \mathbb{Z}/n)$, alors (2) est un isomorphisme. (Changement de base lisse)* [14]

14. Il faudrait aussi supposer $f$ quasi-compact et quasi-séparé. Mais puisqu'on ne considère que des schémas noetheriens, cette condition est automatiquement satisfaite.

Les hypothèses de torsion sont essentielles ici, et ces deux théorèmes, sur lesquels reposent beaucoup des "bonnes" propriétés de la cohomologie étale, montrent aussi qu'on ne peut en faire une cohomologie de Weil, puisqu'on ne peut pas espérer prendre des coefficients dans un corps de caractéristique 0. Pour ce qui suit et jusqu'à la considération de la cohomologie $\ell$-adique, $A$ désignera un anneau de torsion, tel qu'il existe $n$ tel que $nA = 0$ et $n$ soit inversible sur tous les schémas avec lesquels nous travaillerons.
Un corollaire important est un calcul explicite de la tige étale de l'image directe dérivée d'un morphisme propre :

**Corollaire 34** *Si $f : X \to Y$ est propre, $s$ un point géométrique de $Y$ et $\mathscr{F}$ est un faisceau de torsion sur $Y$, alors $(R^q f_* \mathscr{F})_s = H^q(Y_s, \mathscr{F}_s)$.*

Un deuxième corollaire important du changement de base propre est qu'il permet la définition d'image directe à support propre dérivée. Soit $f : X \to Y$ un $S$-morphisme de schémas, on dit que $f$ est $S$-compactifiable s'il existe un schéma $P$ propre sur $S$ tel qu'il existe un morphisme quasi-fini séparé $f_1 : X \to Y \times_S P$ tel que $f$ soit la composée $X \xrightarrow{f_1} Y \times_S P \xrightarrow{p_1} Y$[15]. Cette condition implique l'existence (par le "Main Theorem" de Zariski, voir [EGAIII-1] 4.4) d'une factorisation $X \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$ où $j$ est une immersion ouverte et $\bar{X}$ est un $S$-schéma propre et $\bar{f}$ est propre. On parle alors d'une "compactification de $X$". Un théorème de Nagata affirme que tout morphisme séparé de type fini est compactifiable. En pratique, on ne rencontrera jamais de morphismes non compactifiables.
Le théorème de changement de base propre permet de montrer la chose suivante :

**Theorème et définition 35** *Pour tout $K \in \mathcal{D}^+_{\mathrm{tor}}(X, A)$, $R\bar{f}_* j_! K$ ne dépend pas de la compactification de $X$ choisie, on définit $Rf_! K = R\bar{f}_* j_! K$ pour tout $K \in \mathcal{D}^+_{\mathrm{tor}}(X, A)$ et on l'appelle* l'image directe à support propre dérivée.

Le $Rf_!$ ainsi défini jouit de la plupart des propriétés d'un foncteur dérivé (fonctorialité, foncteur triangulé, suite spectrale...), mais il faut prendre garde à ce qu'il n'est pas le foncteur dérivé du foncteur $f_!$. Dans le cas où $Y = \mathrm{Spec}(k)$, on note $Rf_!(K) = H^q_c(X, K)$. Ce foncteur joue un rôle de "cohomologie à support compact", et il sera naturellement d'une grande importance pour énoncer la dualité de Poincaré en toute généralité. Par sa définition, ce foncteur joui aussi d'une propriété de changement de base : on a le même isomorphisme que (2), en remplaçant $Rf_*$ par $Rf_!$. On peut par ailleurs montrer que si $d$ est le supremum de la dimension des fibres de $f$, alors $Rf_!$ est de dimension cohomologique finie, égale à $2d$[16]. On peut alors étendre dans ce cas la définition de $Rf_!$ à $\mathcal{D}_{\mathrm{tor}}(X)$ entier.
On dispose d'une formule importante : la formule de projection.

**Proposition 36** *Soit $f : X \to Y$ $S$-compactifiable, $K \in \mathcal{D}^-(X, A)$, $L \in \mathcal{D}^-(Y, A)$. On a un isomorphisme*

$$L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A Rf_! K \cong Rf_!(f^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A K).$$

Cette formule se montre de manière formelle : il suffit de le montrer sur chaque tiges (après avoir remplacé $K$ et $\bar{f}^* L$ par des complexes d'objets plats appropriés). Le corollaire 34 du théorème de changement de base propre permet de calculer la tige de $Rf_*$, on est alors réduit au cas de 24.
De là, on peut montrer, de manière purement formelle la formule de Künneth :

**Théorème 37** *Formule de Künneth Soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ quatre $S$-schémas, $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$. Supposons ces deux morphismes, $Y_1 \to Z$, et $Y_2 \to Z$ $S$-compactifiables. Fixons les notations par le diagramme suivant, où chaque carré est cartésien :*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times_Z X_2 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "b_2"'] \arrow[dr, "f_1 \times_Z f_2"] \arrow[rr, bend left, "p_1"] \arrow[dd, bend right=60, "p_2"'] & Y_2 \times_Z X_1 \arrow[r, "a_1"'] \arrow[d, "f'_1"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
X_2 \times_Z Y_1 \arrow[r, "f'_2"'] \arrow[d, "a_2"] & Y_1 \times_Z Y_2 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[d, "q_2"] & Y_1 \arrow[d] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}.$$

15. Ici encore, il faut normalement se restreindre à $S$ quasi-compact quasi-séparé, ce qui est le toujours le cas dans le cas noetherien.
16. En particulier, si $f$ est propre, $Rf_! = Rf_*$, et on a donc la finitude de la dimension cohomologique de l'image directe dérivée d'un morphisme propre.

*Alors, pour $K_1 \in \mathcal{D}^-(X_1, A)$, $K_2 \in \mathcal{D}^-(X_2, A)$. On a*

$$q_1^* Rf_{1!}K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q_2^* Rf_{2!}K_1 \cong R(f_1 \times_Z f_2)_!(p_1^* K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p_2^* K_2).$$

La preuve est purement formelle en utilisant la formule de changement de base et de projection :

$$\begin{aligned} q_1^* Rf_{1!}K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q_2^* Rf_{2!}K_2 &\cong Rf'_{1!} a_1^* K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q_2^* Rf_{2!}K_2 \\ &\cong Rf'_{1!}\left(a_1^* K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} f_1'^* q_2^* Rf_{2!}K_2\right) \\ &\cong Rf'_{1!}\left(a_1^* K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} Rb_{1!} p_2^* K_2\right) \\ &\cong Rf'_{1!} Rb_{1!}\left(b_1^* a_1^* K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p_2^* K_2\right) \\ &\cong R(f_1 \times_Z f_2)\left(p_1^* K_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p_2^* K_2\right). \end{aligned}$$

Comme en cohomologie classique, on peut définir un cup product $H^i(X,K) \otimes H^j(X,L) \to H^{i+j}(X, K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} L)$. Lorsqu'on considère deux $k$-schéma propres $X$ et $Y$ sur un corps algébriquement clos et les projections $p$ (resp. $q$) $X \times Y \to X$ (resp. $X \times Y \to Y$), l'isomorphisme de la formule de Künneth, appliqué au terme de dimension maximale, donne un isomorphisme $H^{2\dim X}(X, \mathscr{F}) \otimes_A H^{2\dim Y}(Y, \mathscr{G}) \to H^{2(\dim(X)+\dim(Y))}(X \times Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{G})$, et cet isomorphisme coïncide avec le cup product. Si de plus les $H^i$ de $X$ ou de $Y$ sont plats (par exemple, s'ils sont libres), chaque isomorphisme de la formule de Künneth est en fait induit par le cup product.
On montre que si $f : X \to Y$ est un morphisme de $k$-schémas de types finis pour un corps $k$, alors $Rf_*$ est de dimension cohomologique finie, bornée par le double du supremum de la dimension de ses fibres, et enfin, on montre que tous les $R^q f_!$ envoient des faisceaux constructibles sur des faisceaux constructibles.

### 2.11 Dualité de Poincaré

Nous arrivons à l'un des points les plus importants de la cohomologie étale : la dualité de Poincaré. Nous suivons l'exposition de [Fu11]. Dans cette section et la suivante, nous ajoutons la restriction supplémentaire sur $A$, que $A$ soit un $A$-module injectif, cette hypothèse est vérifiée, par exemple, si $A = \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$.
De manière générale, le foncteur $Rf_!$ possède un adjoint à droite $Rf^!$. La construction de cet adjoint est purement formelle, est due à Verdier et est décrite dans [SGA4-3] XVIII. L'idée est de définir, au niveau de $\mathcal{K}(X, A)$, en passant par une résolution fonctorielle de chaque faisceau, des foncteurs $f_!^q$, qui seraient les composantes d'un foncteur qu'on dériverait pour obtenir $Rf_!$. Chaque $f_!^q$ a alors un adjoint à droite $f_{-q}^!$ donné par

$$f_{-q}^! \mathscr{G}(U) = \mathrm{Hom}(f_!^q j_! A, \mathscr{G})$$

où $j : U \to X$ est étale. Cette formule nécessaire puisque $\mathscr{G}(U) = \mathrm{Hom}(j_! A, \mathscr{G})$ pour tout faisceau $\mathscr{G}$. On montre qu'elle définit bien un adjoint, aux $f_!^q$, et devient un adjoint au foncteur induit au niveau des complexes, en dérivant ce foncteur, on trouve un adjoint à $Rf_!$, qui vérifie par ailleurs $R\mathscr{H}om(Rf_! K, L) \cong Rf_* R\mathscr{H}om(K, Rf^! L)$, qu'on peut voir comme une seconde formule d'adjonction "interne".

Dans le cas général, il est difficile de calculer $Rf^!$. Mais dans le cas d'un morphisme lisse de dimension pure $d$, il est possible de le décrire explicitement. Pour tout $S$-morphisme $f : X \to Y$ lisse de dimension pure $d$ et $n$ inversible sur $S$, on définit un morphisme $Tr : R^{2d} f_! f^* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)$ représente $\mu_n^{\otimes d}$ ou son dual, selon le signe de $d$, puis $R^{2d} f_! f^* \mathscr{F}(d) \to \mathscr{F}$ pour tout $\mathscr{F}$ où $\mathscr{F}(d) = \mathscr{F} \ \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)$.
Ce morphisme se construit petit à petit : déjà dans le cas d'une application étale, on le définit comme la co-unité de l'adjonction $f_! \dashv f^*$. Puis, si $X$ est une courbe irréductible sur un corps algébriquement clos, on le définit comme le morphisme induit par le degré sur son $H^2$ (qui est $\mathrm{Pic}(X)/n\mathrm{Pic}(X)$) vers $\mathbb{Z}/n$. Puis, Pour $f$ de la forme $\mathbb{P}^1_Y \to Y$, en prenant l'inverse de l'isomorphisme $1 \mapsto c_1(\mathcal{O}_{P^1_Y/Y}(1))$, où $c_1$ désigne la première classe de Chern associée à un fibré en ligne. Ceci permet de définir le morphisme de trace pour pour une application de la forme $f : \mathbb{A}^1_Y \to Y$.
Si $\mathrm{Tr}_{X/Y} : R^{2d} f_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Tr}_{Y/Z} R^{2e} g_! \mathbb{Z}/n(e) \to \mathbb{Z}/n$ sont définis, on peut considérer les morphismes

induits sur les catégories dérivées $\mathrm{Tr}_{X/Y} : Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d] \to \mathbb{Z}/n$ et $\mathrm{Tr}_{Y/Z} Rg_!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e)[2d] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En utilisant la formule de projection,

$$\begin{aligned} Rf_!(\mathbb{Z}/n(d+e)) &\cong Rf_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} f^*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e)) \\ &\cong Rf_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e). \end{aligned}$$

On peut alors définir $\mathrm{Tr}_{X/Z}$ comme la composée

$$\begin{aligned} R(g \circ f)_!(\mathbb{Z}/n(d+e))[2(d+e)] &\cong Rg_! \left( Rf_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e) \right) [2(d+e)] \\ &\cong Rg_! \left( Rf_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))[2d] \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e) \right) [2e] \\ &\to Rg_! \left( \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e) \right) [2e] \\ &\cong Rg_!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(e)[2e] \\ &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Puisqu'on peut définir $\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}^1_Y/Y}$, on peut définir $\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}^n_Y/Y}$ par la méthode de composition exhibée ci-dessus. Par ailleurs, on peut montrer que cela est indépendant de la manière de décomposer $\mathbb{A}^n_Y \to Y$ en succession de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^{k-1}_Y} \to \mathbb{A}^{k-1}_Y$. Enfin, pour un morphisme lisse quelconque, qui est localement une composée d'un morphisme étale et d'une projection $\mathbb{A}^m_Y \to Y$, on peut définir la trace. Encore une fois, cela ne dépend pas de cette décomposition, et ces définitions se recollent pour former un morphisme global bien défini.

Le théorème de dualité de Poincaré affirme alors que cette construction détermine $Rf^!$ dans le cas d'un morphisme lisse.

**Théorème 38** *Si $f : X \to Y$ est lisse, $S$-compactifiable, purement de dimension $d$. Alors, pour tout $K \in \mathcal{D}^+(Y, A)$, $Rf^! \cong f^*L(d)[2d]$. Le morphisme de trace est la counité de l'adjonction $Rf_! \dashv Rf^!$.*

On peut alors obtenir, en utilisant les propriété de l'adjonction, un résultat analogue à celui sur les variétés en topologie algébrique :

**Corollaire 39** *Si $f : X \to k$ est lisse sur $k$ un corps algébriquement clos, $S$-compactifiable, purement de dimension $d$, $\mathscr{F}$ un faisceau de $A$-modules. Alors on a une dualité parfaite*

$$H^q_c(X, \mathscr{F}) \times H^{2d-q}(X, \mathscr{H}om(\mathscr{F}, A(d))) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Dans le cas d'un schéma propre purement de dimension $d$ sur un corps algébriquement clos $k$, cette dualité correspond à celle induite par les cup products :

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathbb{Z}/n) \times H^{2d-q}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (s,t) & \mapsto & \mathrm{Tr}(s \cup t) \end{array}.$$

Enfin, nous énonçons ici une conséquence de la dualité de Poincaré :

**Théorème 40 (Théorème de Lefschetz "faible")** *Si $X$ est un sous-schéma fermé d'un espace projectif, et $H$ un hyperplan telle que $X \setminus X \cap H$ soit lisse, alors, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $X$ localement constant constructible sur $X \setminus X \cap H$,*

$$H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X \cap H, \mathscr{F})$$

*est bijectif pour $q < \dim X - 1$ et injectif pour $q = \dim X - 1$.*

## 2.12 Classe d'un cycle et formule des traces

Soit $g : Y \to Z$ un morphisme lisse $S$-compactifiable, $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de codimension $c$ et $f : X \to Z$ tel que $f \circ i = g$. Puisque $\mathrm{Tr}_g \in \mathrm{Hom}(Rf_! A(d), A)$, par adjonction, on peut lui associer un élément dans $\mathrm{Hom}(A, R^{-2d}g^! A(-d))$. En écrivant $g = f \circ i$, on voit que $R^{-2d}g^! A(-d) = R^{2c}i^! A(c)$, et $\mathrm{Hom}(A, R^{2c}i^! A(-c)) = H^{2c}_Y(X, A(c))$, où $H_Y$ désigne la cohomologie à support dans $Y$. Cette classe s'envoie de manière canonique sur une classe de $H^{2c}(X, A(d))$, qu'on appelle la classe de Y et on la note $\mathrm{Cl}(Y)$. En réalité, cette classe ne dépend pas de $Z$. On peut étendre linéairement cette définition de classe pour obtenir un morphisme du groupe des cycles algébriques de $X$ vers l'anneau gradué associé à la cohomologie de $X$. Dans le cas où $Y$ est un diviseur $D$, la classe de $D$ correspond à la première classe de Chern du $\mathcal{O}_X$-module associé à $D$. On peut alors montrer la formule des traces de Lefschetz, dans le cas des courbes, dans ce contexte.

**Théorème 41 (Formule des traces de Lefschetz)** *Soit $X$ une courbe projective lisse sur un corps algébriquement clos $k$, $h : X \to X$ un $k$-morphisme, $\Gamma_h : X \to X \times_k X$ le graphe de $h$, $\Delta$ le diviseur de $X \times_k X$ induit par le morphisme diagonal. On a*

$$\deg(\Gamma_h^*(\Delta)) \equiv \mathrm{Tr}(h^*, H^0(X, \mathbb{Z}/n)) - \mathrm{Tr}(h^*, H^1(X, \mathbb{Z}/n)) + \mathrm{Tr}(h^*, H^2(X, \mathbb{Z}/n)) \mod n.$$

Notons dans un premier temps que la formule a un sens car par 32, les $H^q(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modules libres, on peut donc parler de traces. Fixons une racine de l'unité pour ne pas se soucier des questions d'orientation. Pour prouver cette formule, il faut calculer ces quantités dans une base. Prenons une base $e_{q,1}, \dots, e_{q,r_q}$ de $H^q(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et en prenons $f_{2-q,1}, \dots, f_{2-q,r_q}$ la base duale pour la dualité de Poincaré. En notant $\pi_1$ et $\pi_2$ les projections $X \times_k X \to X$, la classe de $\Delta$ dans $H^2(X \times_k X, \mathbb{Z})$ s'écrit $\sum_{q,k} \pi_1^* f_{q,k} \cup \pi_2^* e_{q,k}$. En effet, les $\{\pi_1^* f_{q,k} \cup \pi_2^* e_{q,k'}\}_{q,k,k'}$ forment une base de $H^2(X \times_k X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et il suffit de calculer les coefficients de la classe de $\Delta$ dans cette base, ce qui se fait par le calcul de $\mathrm{Tr}_{X \times_k X/k}(\Delta \cup \pi_1^* f_{q,k} \cup \pi_2^* e_{q,k'})$. En reprenant la définition de la classe d'un cycle et de la dualité de Poincaré, on vérifie que la forme linéaire $s \mapsto \mathrm{Tr}_{X \times_k X/k}(\mathrm{Cl}(\Delta) \cup s)$ est égale à $s \mapsto \mathrm{Tr}_{X/k}(\Delta^*(s))$. En utilisant la définition de $\Delta$ et le fait que $\Delta^*$ respecte le cup product, on trouve $\mathrm{Tr}_{X \times_k X/k}(\Delta \cup \pi_1^* f_{q,k} \cup \pi_2^* e_{q,k'}) = \delta_k^{k'}$. On vérifie que $\sum_{q,k} \pi_1^* f_{q,k} \cup \pi_2^* e_{q,k}$ vérifie aussi cette relation. Il suffit ensuite d'appliquer $\Gamma_h^*$ à cette classe, et d'en calculer la trace. On trouve d'un côté $\deg(\Gamma_h^*(\Delta))$ [17] et de l'autre côté, en calculant explicitement $\Gamma_h^*$ en fonction des coefficients de $h^*$ et en l'appliquant à $\sum_{q,k} \pi_1^* f_{q,k} \cup \pi_2^* e_{q,k}$, on trouve la trace attendue.

## 2.13 Cohomologie $\ell$-adique

Comme nous l'avons constaté, la cohomologie étale possède toutes les bonnes propriétés attendues d'une cohomologie de Weil. Néanmoins, elle se borne à considérer des faisceaux de torsion, alors qu'on attend d'une cohomologie de Weil qu'elle ait ses coefficients dans un corps de caractéristique 0. On définit donc la cohomologie $\ell$-adique comme une "limite" de cohomologie étale à coefficient dans $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. En pratique, le passage à la limite n'est pas si simple, car on cherche a conserver la structure de catégorie triangulée de $\mathcal{D}^\star(X, A)$. Nous esquissons rapidement comment cela est fait.
On considère dans un premier temps la catégorie des systèmes projectifs $(\mathscr{F}_n, u_n)$ de faisceaux de $\lambda$-torsion de modules sur l'anneau $R$ des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ où $\lambda$ est une uniformisante de $R$.
On note $\mathscr{F}[r]$ le système $(\mathscr{F}_{n+r}, u_{n+r})$. En composant les morphismes de transition, on a un morphisme $\mathscr{F}[r] \to \mathscr{F}$ pour tout $r$. On dit qu'un faisceau vérifie la condition ARML s'il existe $r$ tel que $\mathrm{im}(\mathscr{F}[r] \to \mathscr{F}) = \mathrm{im}(\mathscr{F}[t] \to \mathscr{F})$ pour tout $t \geq r$. Si $\mathscr{F}[r] \to \mathscr{F}$ est nul pour un entier $r$, alors on dit que système est un système nul. Les systèmes nuls forment un système multiplicatif et on peut localiser la catégorie des systèmes projectifs de faisceaux pour ce système. On parle alors de la A-R-catégorie. On définit un système projectif de faisceau comme étant $\lambda$-adique si les $\mathscr{F}_n$ sont constructibles, $\lambda^{n+1}\mathscr{F}_n = 0$, et $\mathscr{F}_{n+1}/\lambda^{n+1}\mathscr{F}^{n+1} = \mathscr{F}_n$. On dit qu'un faisceau $\lambda$-adique est lisse si les $\mathscr{F}_n$ sont localement constants. On considère enfin l'image essentielle des faisceaux $\lambda$-adique dans la A-R-catégorie, et on appelle de tels faisceaux A-R $\lambda$-adique. Ces constructions sont nécessaires pour avoir une catégorie qui se comporte bien par rapport aux opérations définies sur les faisceaux, comme le pullback ou le pushforward d'un morphisme. Par ailleurs, cette catégorie est abélienne. Si on remplace les faisceaux par des $R$-modules, elle est équivalente à la catégorie des $R$-modules finiment engendrés. Les opérations de noyau,

17. On rappelle que la trace est définie comme le degré dans le cas des courbes sur un corps algébriquement clos !

conoyau, suites exactes se comportent bien. Néanmoins, il ne suffit pas de dériver cette catégorie pour obtenir quelque chose de satisfaisant. En effet, il faut demander à ce que dans les systèmes projectifs de complexes, les morphismes de transitions eux-mêmes soient des isomorphismes dans la catégorie dérivée des $R/(\lambda)^{n+1}$-module. Ainsi, on définit $\mathcal{D}^b_c(X,R)$ comme la catégorie des familles $(K_n,u_n)$ où $K_n \in \mathcal{D}^-(X,R/(\lambda)^{n+1})$, $u_n$ : $K_{n+1} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbb{R}/(\lambda^{n+2})} R/(\lambda^{n+1}) \to K_n$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}^-(X,R/(\lambda^{n+2}))$ et $K_0 \in \mathcal{D}^b_c(X,R/(\lambda))$. Tout faisceau $\lambda$-adique définit naturellement un objet de cette catégorie, et pour tout objet de cette catégorie, le système projective des groupes de cohomologie d'un tel complexe est un système A-R $\lambda$-adique.
Il faut alors trianguler "manuellement" cette catégorie en passant à la limite dans la structure triangulée de $\mathcal{D}^-(X,R/(\lambda)^{n+1})$. On montre que cette construction permet définir les foncteurs $Rf_*, Rf^*, Rf_! \ldots$. Ces foncteurs hérites de leurs propriétés issues de la cohomologie étale (changement de base, dualité...) [18].
Si $E$ est le corps de fraction de $R$, alors, en inversant $\lambda$ dans la catégorie des faisceaux A-R, on peut définir la catégorie des faisceaux à valeurs dans $E$ en prenant le produit tensoriel d'un faisceau $\lambda$-adique et de $E$ en tant que $R$-module. On peut reprendre la construction de la catégorie dérivée, et en passant à la limite sur les extensions de $\mathbb{Q}_\ell$, on définit ainsi les faisceaux à valeur dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et la catégorie $D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ correspondante.
Le point important de cette construction, outre le fait que ceci décrit bien une cohomologie de Weil est que, pour tout schéma noetherien connecté, muni d'un point de base $x$, on a un foncteur "fibre", qui à un faisceau $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-adique $\mathscr{F}$ fait correspondre $\mathscr{F}_{\bar{x}}$. Cette fibre est munie d'une action continue de $\pi_1(X,\bar{x})$, et ce foncteur est une équivalence de catégorie entre les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et les représentations continues de $\pi_1(X;\bar{x})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On peut donc jongler entre le langage "géométrique" de la cohomologie et le langage "galoisien" des représentations du $\pi_1$.
Finalement, dans le cas de variétés sur $\mathbb{C}$, la cohomologie $\ell$-adique coïncide avec la cohomologie singulière des $\mathbb{C}$-points associés. Ceci impliquera la conjecture de Weil (W3) pour les variétés provenant d'une réduction modulo $p$ d'un schéma sur $\mathbb{Q}$.
Notons enfin que cette manière de construire $\mathcal{D}^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ n'est pas très "naturelle" en ce qu'elle ne fait pas apparaitre cette catégorie comme la véritable catégorie dérivée d'une catégorie abélienne. Des travaux récents de Bhatt et Scholze [BS15] permettent de simplifier grandement cette construction et de la faire apparaitre comme telle. [19]

# 3 Formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich

Dans cette section, nous prouvons une formule qui met en relation la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau sur un ouvert dense d'une courbe projective lisse, et la théorie de la ramification issue des corps locaux. Bien que non nécessaire pour les conjectures de Weil, cette formule permet de montrer un exemple concret de manipulation d'invariants cohomologiques et leur mise en relation avec d'autres invariants. Nous suivons encore une fois l'exposition de [Fu11], 10.2.

## 3.1 Traces

Pour un anneau $\Lambda$, non nécessairement commutatif, on définit $\Lambda^\natural$ le quotient de $(\Lambda,+)$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $ab-ba$. Le quotient a une structure d'anneau commutatif. Pour un endomorphisme $f:\Lambda^n \to \Lambda^n$. On peut définir $\mathrm{Tr}(f)$ comme l'image dans $\Lambda^\natural$ de la somme des coefficients diagonaux de la matrice de $f$ dans le $\Lambda$-module libre $\Lambda^n$. Puisque cette trace est dans $\Lambda^\natural$, on retrouve $\mathrm{Tr}(fg)=\mathrm{Tr}(gf)$. Plus généralement si $f:P\to P$ est un endomorphisme d'un $\Lambda$-module projectif de type fini, alors on peut définir la trace de $f$ en considérant $P$ comme un facteur direct d'un module libre. Ceci ne dépend pas de la manière dont on réalise $P$ comme facteur direct d'un module libre. Si $K$ est un complexe borné de $\Lambda$-modules projectifs, et $f$ un endomorphisme de complexe, alors on peut définir $\mathrm{Tr}(f,K)=\sum(-1)^i\mathrm{Tr}(f^i,K^i)$. Si $f$ est homotope à zéro cette trace est nulle est cela définit donc la trace pour un objet de $\mathcal{K}_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$, la catégorie homotope des complexes bornés de $\Lambda$-modules projectifs de type fini. De même, on définit la trace de $f$ pour $K\in\mathcal{D}^b_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$, l'image essentielle de $\mathcal{K}_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ dans $\mathcal{D}^b(\Lambda)$.
On considère ensuite les $\Lambda$-modules filtrés, c'est-à-dire muni d'une filtration $\cdots\supset F^iP\supset F^{i+1}P\supset\cdots$, et tels que $F^kP=P$ pour $k<<0$ et $F^kP=0$ pour $k>>0$. On peut alors définir la catégorie dérivés $\mathcal{DF}_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ des

18. Sous réserve que le schéma $S$ de base soit régulier de dimension au plus 1, ce qui sera le cas dans nos applications, où $S$ sera un corps, une droite projective, ou le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement henselien.
19. Cependant, par ignorance des détails du sujet, nous n'en dirons pas plus.

complexes parfait bornés filtrés. Et définir encore une fois une trace sur ces objets comme la somme des traces sur le gradué associé à la filtration $F$. Ces considérations ont pour but de définir une trace sur $\mathcal{D}^p_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ additive en les triangles distingués, et donc de définir la trace comme un morphisme du groupe de Grothendieck de $\mathcal{DF}_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ vers $\Lambda^\natural$. On peut répéter ce sorite pour $\mathcal{D}^b_{\mathrm{perf}}(X, A)$, et obtenir par exemple (en s'aidant de la suite de localisation), que si $U$ est un ouvert de $X$ et $X\backslash U$ le fermé complémentaire, $\mathrm{Tr}(f, K) = \mathrm{Tr}(f, K_{|U}) + \mathrm{Tr}(f, K_{|X\backslash U})$.

## 3.2 Représentations d'Artin et de Swan

Dans cette section, nous rappelons des résultats de théorie des représentations et de théorie de la ramification. Les résultats donnés ici sont issus de [Ser79] et [Ser77].
Étant donné un corps $K$ complet pour une valuation $v_K$, $K'$ une extension galoisienne de $K$, d'extension résiduelle séparable. Notons $A_K$ l'anneau des entiers de $K$ et $A_{K'}$ celui de K'. Ce sont tous deux des anneaux de valuation discrète. Par ailleurs. On peut trouver un uniformisant $x \in A_{K'}$ tel que $A_K[x] = A_{K'}$. On définit alors la suite de ramification de $G = \mathrm{Gal}(K'/K)$ comme une suite de sous-groupe normaux $G_i$ définis par $\sigma \in G_i \iff v_{K'}(\sigma(x) - x) \geq i + 1$.
En particulier, $G_0$ est le groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(K'/K)$, $G_1$ est le groupe de "ramification sauvage" de l'extension, si le corps résiduel de $K$ est de caractéristique $p$, c'est un $p$-groupe. Si $f$ est le degré d'inertie de l'extension. On pose une fonction $a_G$ définie par :

$$a_G(\sigma) = \begin{cases} -f.v_{K'}(\sigma(x) - x) & \text{si} \quad \sigma \neq \mathrm{Id} \\ f \sum\limits_{\mu \neq \mathrm{Id}} v_{K'}(\mu(x) - x) & \text{si} \quad \sigma = \mathrm{Id} \end{cases} .$$

Enfin, soit $u_G$ le caractère d'augmentation de $G$ (c'est à dire la différence du caractère de la représentation régulière et du caractère constant égal à 1). On peut définir $b_G = a_G - u_G$. On appelle $a_G$ le caractère d'Artin de $G$ et $b_G$ le caractère de Swan de $G$. Des considérations de théorie de la ramification ([Ser79], VI) permettent de montrer que ce sont effectivement des caractères de représentations. Par ailleurs, ces représentations sont réalisables sur $\mathbb{Q}_\ell$ pour $\ell$ différent de la caractéristique résiduelle de $K$, et la représentation de Swan correspond à un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ module projectif ([Ser77], chapitre 19). Ces représentations "mesurent" la ramification sauvage, en effet, Si $K'/K$ est modérément ramifié, alors $b_G = 0$.

## 3.3 Formule G-O-S

Soit $X$ une courbe projective lisse de genre $g$ sur un corps algébriquement clos $k$, $K$ son corps de fonction. Soit $K'$ une extension finie galoisienne de $K$, $X'$ le normalisé de $X$ dans $K'$ et $p : X' \to X$ le morphisme canonique. Si $G = \mathrm{Gal}(K'/K)$, alors $G$ agit à droite sur $X'$. Cette situation est l'analogue en géométrie algébrique de celle d'un revêtement ramifié d'une surface de Riemann [20], de groupe d'automorphisme $G$. Soit $x'$ est un point fermé de $X'$, au dessus de $x$ et $G_{x'}$ est son stabilisateur. On peut alors considérer $K'_{x'}$, le complété de $K'$ pour la valuation induite par $x'$, c'est une extension finie de $K_x$, le complété de $K$ pour la valuation induite par $x$, de groupe de Galois $G_{x'}$. On est donc dans la situation de la section précédente, et on peut définir $\mathrm{sw}_{x'}$, le caractère de Swan en $x'$, associé au point $x'$, et on peut de même définir $\mathrm{Sw}_{x'}$, le $\mathbb{Z}_\ell[G_{x'}]$ module projectif tel que $\mathrm{Sw}_{x'} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ soit une représentation de caractère $\mathrm{sw}_{x'}$. On pose alors $\mathrm{Sw}_x = \mathbb{Z}_\ell[G] \otimes_{\mathbb{Z}/\ell[G_{x'}]} \mathrm{Sw}_{\mathrm{x}'}$ le module de la représentation induite par $\mathrm{Sw}_{x'}$ sur $G$. Ce module ne dépend pas du point $x'$ choisi au dessus de $x$ et mesure la ramification sauvage au dessus de $x$.

**Proposition 42** *Dans la situation précédente, si $U$ est un ouvert dense de $X$ tel que $p^{-1}(U)$ soit étale sur $U$, et $j' : U' \hookrightarrow X'$ l'immersion ouverte correspondante, aors $R\Gamma(X', j_!\mathbb{Z}/\ell^n) \in D_{\mathrm{perf}}(\mathbb{Z}/\ell^n[G])$ et, dans $G(\mathcal{D}^b_{\mathrm{perf}}(\mathbb{Z}/\ell^n[G]))$, on a :*

$$(2-2g)\,[\mathbb{Z}/\ell^n[G]] + \sum_{x \in X\backslash U} \left(\left[\mathbb{Z}\ell^n[G] \otimes_{\mathbb{Z}_\ell[G]} \mathrm{Sw}_x\right] - [\mathbb{Z}/\ell^n[G]]\right)$$

*où les crochets désignent la classe dans le groupe de Grothendieck des complexes parfaits.*

20. En effet, on peut montrer qu'il existe un ouvert dense $U$ de $X$ dont l'image inverse $p^{-1}(U)$ sur $X'$ soit étale sur $U$, cet ouvert correspond aux points hors du lieu de ramification du revêtement.

En effet, cette formule porte sur les classes d'isomorphismes de $\mathbb{Z}/\ell^n[G]$-modules. Il suffit donc de montrer que les caractères de ces objets sont égaux. Cela revient à prouver

$$\mathrm{Tr}(\sigma, R\Gamma(X', j'_!\mathbb{Z}/\ell^n)) \equiv \left((2-2g)r_G + \sum_{x\in X\setminus U}(\mathrm{sw}_x + r_G)\right)(\sigma) \mod \ell^n.$$

Il y a deux cas : celui où $\sigma \neq \mathrm{Id}$ (où aucun des termes $r_G$ ne contribue) et le cas $\sigma = \mathrm{Id}$. Dans le premier cas, on en revient à prouver

$$\mathrm{Tr}(\sigma, R\Gamma(X', j'_!\mathbb{Z}/\ell^n)) \equiv \sum_{x\in X\setminus U}(\mathrm{sw}_x) \mod \ell^n$$

Les caractères de Swan en $x'$ au dessus de $x$ se calculent en prenant $v_{x'}(\sigma(t)-t)$ où $t$ est un paramètre local régulier. Cette quantité est en fait exactement la multiplicité de $x'$ en tant que point fixe ! en décomposant $\mathrm{Tr}(\sigma, R\Gamma(X', j'_!\mathbb{Z}/\ell^n))$ en $\mathrm{Tr}(\sigma, R\Gamma(X', \mathbb{Z}/\ell^n)) - \mathrm{Tr}(\sigma, R\Gamma(X'\setminus U', \mathbb{Z}/\ell^n))$, on est en fait réduit à la formule des traces 41.
Dans le cas $\sigma = \mathrm{Id}$, on montre que la formule se ramène en fait à la formule de Hurwitz, en utilisant que la valeur de $a_{G_{x'}}(\mathrm{Id})$ est égale au degré du différent de $K'_{x'}/K_x$.
Lorsqu'on considère $L \in \mathcal{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X, A)$ où $A$ est une $\mathbb{Z}/\ell^n$-algèbre noetherienne, on peut remplacer $L$ par un complexe borné de faisceaux plats constructibles, et on fera cette hypothèse. La clôture séparable $\overline{K}$ du corps de fonction de $X$ agit sur la tige générique $L_{\bar\eta}$ de manière continue, où $\eta$ est le point générique de $X$. Cette action se factorise par un quotient fini $\mathrm{Gal}(K'/K)$ [21] pour une extension galoisienne $K'$ de $K$. On est alors dans la situation précédente, on peut définir $\mathrm{Sw}_x$ pour tout $x$, par ailleurs, on définit $\alpha_x(L) = \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/\ell^n[G]}\left(\mathbb{Z}/\ell^n[G]\otimes_{\mathbb{Z}_\ell[G]}\mathrm{Sw}_x, L_{\bar\eta}\right)\right]$. Cela ne dépend pas de l'extension $K'$ choisie. On définit $\epsilon_x(L) = \alpha_x(L) + [L_{\bar\eta}] - [L_{\bar x}]$. On montre que, dans le cas où $x$ appartient à l'ouvert $U$ de $X$ sur lequel le revêtement induit par $K'$ est non ramifié, $\alpha_x$ et $\epsilon_x$ sont nuls, et il sont donc nuls sur tous sauf un nombre fini de points.
Le calcul précédent de montrer le théorème suivant.

**Théorème 43**

$$[R\Gamma(X,L)] = (2-2g)[L_{\bar\eta}] - \sum_{x\in|X|}\epsilon_x(L).$$

En effet, en gardant les notations de la proposition précédente, on peut supposer $K_{|U'}$ constant. L'idée est de décomposer $[R\Gamma(X,L)]$ en $[R\Gamma(X, j_!(L_{|U}))] + [R\Gamma(X\setminus U, (L_{|X\setminus U}))]$. Un calcul permet de relier $[R\Gamma(X, j_!(L_{|U}))]$ à $[R\Gamma(X, j_!\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})]$, en constatant que $j_!(L_{|U})$ s'écrit comme le foncteur dérivé des $G$-invariants de $p_*p^*j_!(L_{|U})$, le foncteur dérivé des $G$-invariants de faisceaux avec $G$-action devient le foncteur dérivé des $G$-invariants d'un $G$-modules lorsqu'on le fait commuter avec le foncteur des sections globales. Par ailleurs $R\Gamma(X, p_*p^*j_!L_{|U}) = L_{\bar\eta} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} R\Gamma(X, j_!(L_{|U}))$ par une application de la formule de projection. On peut alors conclure pour ce terme en utilisant le calcul précédent.
Pour le terme $[R\Gamma(X\setminus U, (L_{|X\setminus U}))]$, il s'agit de la cohomologie d'un faisceau dont le support est un ensemble fini de point fermé, il est donc la somme directe des tiges en chacun de ces points. La formule suit en recollant les deux termes. Cela montre une autre formule.

**Théorème 44** *Sous les mêmes hypothèses et en gardant les notations pour $A$ et $U$. Pour $L \in \mathcal{D}^b_{ctf}(U, A)$, $R\Gamma_c(U,L)$ et $R\Gamma(U,L)$ sont des complexes dérivés parfaits et*

$$\begin{aligned}[R\Gamma_c(U,L)] &= [R\Gamma(U,L)] \\ &= (2-2g-\#(X\setminus U))[L_{\bar\eta}] - \sum_{x\in|U|}\epsilon_x(L) + \sum_{x\in X\setminus U}\alpha_x(L).\end{aligned}$$

En constatant que $R\Gamma_c(U,L) = R\Gamma_c(X, j_!L)$ et en appliquant le théorème précédent, on trouve l'égalité désirée pour $[R\Gamma_c(U,L)]$. Afin de montrer que $R\Gamma_c(U,L)$ et $R\Gamma(U,L)$ sont des complexes dérivés parfaits et que $[R\Gamma_c(U,L)] = [R\Gamma(U,L)]$, il faut prendre le cône $C$ du morphisme $j_!L \to Rj_*L$. Il suffit alors de montrer que ce

21. Cela vient de la structure de groupe profini de $\mathrm{Gal}(\bar K/K)$ et du fait que $L_{\bar\eta}$ soit borné constructible, donc de type fini en chaque degré sur un nombre fini de degrés, il suffit donc de prendre l'intersection (finie !) des stabilisateurs des générateurs concernés.

cône est un complexe parfait et a une classe triviale dans le groupe de Grothendieck, ce cône ayant un support réduit à un nombre fini de nombre fermé, il faut montrer que c'est le cas de chaque tige $C_{\bar{x}}$ pour $x \in X \setminus U$. En chaque point, cette tige est le foncteur dérivé des $G_{\bar{x}}$ invariant appliqué à la tige générique de $L$ où $G_{\bar{x}}$ est le groupe de Galois absolu du point générique du hensélisé strict de $X$ en $x$. Le problème est alors un problème de cohomologie des groupes, et on peut montrer que dans cette situation, la tige est effectivement nulle dans le groupe de Grothendieck de la catégorie dérivée des complexes parfaits.

Ce dernier théorème, lorsqu'on passe à la limite et considère le rang des objets considérés plutôt que leur classe dans le groupe de Grothendieck, donne la formule suivante.

**Corollaire 45 (Grothendieck-Ogg-Shafarevich)** *Soit $X$ une courbe projective sur un corps algébriquement clos $k$. $U$ un ouvert dense de $X$. $\eta$ le point générique de $X$. Pour $K \in \mathcal{D}_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. En notant : $\chi(U, K) = \dim^*(R\Gamma(U, L))$, $\chi_c(U, K) = \dim^*(R\Gamma_c(U, L))$, on a*

$$\chi(U, K) = \chi_c(U, K) = (2 - 2g - \#(X \setminus U))\dim^*(L_\eta) - \sum_{x \in |U|} \dim^* \epsilon_x(L) + \sum_{x \in X \setminus U} \dim^* \alpha_x(L)$$

*où $\dim^*$ d'un objet de $\mathcal{D}^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie de ses composantes.*

Cette formule fournie donc un calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un ouvert d'une courbe en fonction de la ramification sauvage des points "à l'infini".

# 4 Les conjectures de Weil

## 4.1 Formule des traces généralisée

La formule des traces de Lefschetz 41 prend une forme particulièrement intéressante lorsqu'on l'applique à un automorphisme du type "Frobenius". Supposons donc que nous sommes dans le cadre des conjectures de Weil, énoncé dans l'introduction, et dont nous reprendrons les notations. Nous fixerons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{F}_p$. Pour un schéma $X$ et une application $h : X \to X$, nous notons $X^h$ l'ensemble de ses points fixes.
Pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma $S$, il existe un automorphisme canonique $S \to S$, qui provient de l'automorphisme de Frobenius de $k$. Cet automorphisme s'appelle le Frobenius "absolu", il est égal à l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à $S$ et à $s \mapsto s^p$ sur $\mathcal{O}_X$. On le note $\mathrm{Fr}_X$. On peut, par contraste, définir un Frobenius "relatif" : étant donné un morphisme de schémas $S \to S'$, on définit $S'^{(p)} = S' \times_{S, \mathrm{Fr}_S} S$, et on définit $\mathrm{Fr}_{S'/S}$ le morphisme $S' \to S'^{(p)}$ tel que la composée avec la projection $S'^{(p)} \to S'$ soit $\mathrm{Fr}_{S'}$. Si $S'$ est étale sur $S$, $\mathrm{Fr}_{S'/S}$ est un isomorphisme et dans ce cas, on peut donc définir, pour tout faisceau $\mathscr{F}$, un morphisme $\mathrm{Fr}_{\mathscr{F}} : \mathrm{Fr}_S^* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ donné par adjonction de l'isomorphisme $\mathscr{F} \to \mathrm{Fr}_{S*}(\mathscr{F})$.
Dans le cadre des conjectures de Weil, on a donc un endomorphisme de Frobenius sur $X_0$. Et donc un morphisme $F$ induit sur $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$. Ce morphisme s'appelle le "Frobenius géométrique" de $X$. Les points fixes de $F^r$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^r}$ points de $X$. Soit $K_0 \in \mathcal{D}_{ctf}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, $K$ son image réciproque dans $X$. On a un morphisme $F_{K_0} : F^*K \to K$ induit par changement de base de $\mathrm{Fr}_{K_0}$. et on en déduit un morphisme $F^* : R\Gamma_c(X, K) \to R\Gamma_c(X, K)$. Si $x$ est un point fixe de $F$, le morphisme $F_{\bar{x}}^*$ induit par $F_{K_0}$ sur les tiges est un endomorphisme de $K_{\bar{x}}$ [22]. Le résultat essentiel, permet de relier les traces "globales", et "locales", c'est-à-dire :

**Théorème 46 (Formule des traces généralisée)**

$$\mathrm{Tr}(F^*, R\Gamma_c(X, K)) = \sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F_{\bar{x}}^*, K_{\bar{x}}).$$

Ce théorème se prouve en revenant d'abord au cas étale, c'est-à-dire en considérant $K_0 \in \mathcal{D}^b(X_0, A)$ où $A$ est une $\mathbb{Z}/\ell^n$-algèbre noetherienne. Par une méthode de dévissage purement formelle et de récurrence noetherienne, on peut se ramener au cas des courbes. Une méthode attribuée à Nielsen-Wecken permet de prouver ce théorème depuis la formule des Traces de Lefschetz dans le cas des courbes. Dans le cas des courbes, on montre dans un

22. Il est important de noter que dans ce cas, le point géométrique $\bar{x}$ n'est plus quelconque mais doit être compatible à la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ qu'on s'est fixé.

premier temps qu'on peut enlever un nombre fini de points si nécéssaire (la formule étant simple si la dimension du schéma est nulle, en découpant la trace, on peut donc "enlever" tout fermé qui vérifie la formule), et donc on peut considérer un ouvert dense de la courbe. On peut se ramener au cas d'un faisceau localement constant, de tige égale à un $A$-module projectif de type fini, trivialisé par un revêtement fini étale galoisien $U'$ de l'ouvert $U$ qu'on considère. Toujours en enlevant un nombre fini de points, on peut se ramener au cas où il n'y a aucun point fixe. La méthode de Nielsen-Wecken consiste alors à comparer finement la trace des endomorphisme de $A$-module, et la trace des endomorphismes de $A[G]$-module, où $G$ est le groupe de Galois du revêtement étale qu'on considère. Cela permet de se ramener à montrer que, pour $g \in G$, $\sum(-1)^i \mathrm{Tr}(F^* g^{-1}, H^i_c(U', \mathbb{Q}_\ell)) = 0$ si $F$ n'a pas de points fixes dans $U$. En compactifiant $X$ et en appliquant la formule des traces 41, sachant que tout point fixe dans $\overline{U'}$, la compactification de $U'$, est de multiplicité 1 [23] et ne peut pas être dans $U'$, on arrive à montrer cette égalité et donc la formule des traces. On notera par ailleurs que ce théorème reste valable si on considère les itérées de $F^*$ à la place de $F$.

## 4.2 Rationalité des fonctions Z et équation fonctionnelle

Nous pouvons maintenant prouver la forme conjecturée par Weil des fonction $Z$. On rappelle que

$$Z(X_0, t) = \prod_{x \in |X_0|} \frac{1}{1 - t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]}}.$$

On peut réécrire cette expression, en effet, pour $x \in |X_0|$, $\frac{1}{1-t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]}} = \det\left(1 - \left(F_{\bar{x}}^{[\kappa(x):\mathbb{F}_q]}\right)^* t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]}, (\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{x}}\right)^{-1}$ où $\mathbb{Q}_\ell$ désigne le faisceau constant associé à $\mathbb{Q}_\ell$. On notera encore $\left(F_{\bar{x}}^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]}\right)^* = F^*_{\bar{x}}$, cette notation coïncide avec celle déjà existante si $x$ est un point fixe de $F$. Cette égalité vient simplement du fait que $F^*_{\bar{x}}$ coïncide avec l'inverse du morphisme $f_x$ induit par le Frobenius $\alpha \to \alpha^{p^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]}}$de $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(x)}/\kappa(x))$ sur la tige de $\mathbb{Q}_\ell$ en $\bar{x}$, et cette action est triviale car $\mathbb{Q}_\ell$ est un faisceau constant. Ceci motive une généralisation des fonctions $Z$, en posant :

$$\begin{aligned} Z(X_0, K_0, t) &= \prod_{x \in |X_0|} \det\left(1 - F^*_{\bar{x}} t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_q]}, K_{\bar{x}}\right)^{-1} \\ &= \prod_{x \in |X_0|} \det\left(1 - t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_p]} f_x^{-1}, K_{\bar{x}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

où $K_0 \in \mathcal{D}^b_{ctf}(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et det désigne le produit alterné des déterminants sur chaque groupe de cohomologie du complexe $K_0$.
On peut développer le déterminant en série entière [24], en effet :

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \ln \det\left(1 - F^*_{\bar{x}} t^{[\kappa(x):\mathbb{F}_q]}, K_{\bar{x}}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [\kappa(x) : \mathbb{F}_q] \mathrm{Tr}\left(\left(F^*_{\bar{x}}\right)^k, K_{\bar{x}}\right) t^{k[\kappa(x):\mathbb{F}_q]}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \ln Z(X_0, K_0, t) &= \sum_{x \in |X_0|} \sum_{k=0}^{\infty} [\kappa(x) : \mathbb{F}_q] \mathrm{Tr}\left(\left(F^*_{\bar{x}}\right)^k, K_{\bar{x}}\right) t^{k[\kappa(x):\mathbb{F}_q]} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x \in |X_0| \\ [\kappa(x):\mathbb{F}_q] | n}} [\kappa(x) : \mathbb{F}_q] \mathrm{Tr}\left(\left(F^*_{\bar{x}}\right)^n, K_{\bar{x}}\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \mathrm{X}^{\mathrm{F}^n}} \mathrm{Tr}\left(\left(F^*_{\bar{x}}\right)^n, K_{\bar{x}}\right) t^n. \end{aligned}$$

23. Car la multiplicité est la valuation de $g^{-1*}(t)^p - t$ pour un paramètre local $t$, qui est donc égale à 1.
24. On rappelle que nous considérons ici des séries formelles, ainsi, toutes les manipulations sont justifiés.

Il y a en effet exactement $[\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$ points de $X$ fixés pas $F^n$ au dessus de $x$ dont le degré résiduel divise $n$. On peut alors utiliser la formule des traces généralisés à $F^n$, et obtenir :

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \ln Z(X_0, K_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}((F^n)^*, R\Gamma_c(X, K))t^n.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} Z(X_0, K_0, t) &= \det\left((1 - F^*t), R\Gamma_c(X, K)\right)^{-1} \\ &= \prod_i \det\left((1 - F^*t), H^i_c(X, K)\right)^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_{i=0}^{2d} \det\left((1 - F^*t), H^i_c(X, K)\right)^{(-1)^{i+1}} \end{aligned}$$

où $d = \dim(X)$. En particulier, $Z(X_0, K_0, t)$ est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$. Dans le cas où $K_0$ est le faisceau constant égal à $\mathbb{Q}_\ell$, on a la forme conjecturée par Weil, avec $P_i = \det\left((1 - F^*t), H^i_c(X, K)\right)$. On a par ailleurs montré cela sans utiliser la projectivité de $X_0$.
Par ailleurs, si on applique la dualité de Poincaré à $X$, on a $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_\ell(d))^\vee$. On peut vérifier que si $\alpha$ est une valeur propre de $F$ sur $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, alors $q^d\alpha^{-1}$ est une valeur propre de $F$ sur $H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_\ell)$. L'apparition du facteur $q^d$ provient du fait que l'action du Frobenius sur $\mathbb{Q}_\ell(d)$ n'est plus constante, mais égale à la multiplication par $q^d$. En utilisant ces relations, on peut montrer l'équation fonctionnelle de $Z(X_0, t)$ conjecturée par Weil (W2) : $Z\left(X_0, \frac{1}{p^d t}\right) = \pm p^{\frac{n\chi}{2}} t^\chi Z(X_0, t)$ où $\chi = \chi(X, \mathbb{Q}_\ell)$ au sens de 45.

## 4.3 Hypothèse de Riemann sur les corps finis

Il ne reste plus qu'à montrer l'hypothèse de Riemann sur les corps finis pour achever la démonstration des conjectures de Weil. La démonstration est due à Deligne et est exposée dans [Del74], elle fait appel à de nombreux résultats de [SGA7-1], résumés dans [FK88]. Nous nous contenterons ici d'esquisser la démonstration de Deligne, en ne rentrant dans aucun détail.
L'une des idées principales est, dans un premier temps, de remplacer $X$ par un "pinceau de Lefschetz", c'est-à-dire une variété $\tilde{X_0}$, birationellement équivalente à $X_0$, telle qu'il existe un morphisme $f : \tilde{X} \to D_0 = \mathbb{P}^1$ dont il n'y a qu'un nombre fini de fibres singulières, singulières en un seul point, et dont les singularités en question sont des points doubles ordinaires. Plus précisément, si $R$ est l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_{s,D_0}$ en un point singulier $s$, $a$ son point fermé et $\eta$ son point générique, tel que $\tilde{X}_\eta$ soit lisse et $X_a$ soit singulière en seulement un point $p$. Alors l'hensélisation stricte de $\mathcal{O}_{X,a}$ est $R$-isomorphe à une quadrique singulière en un unique point. On peut par ailleurs supposer la dimension des fibres impaires, de dimension $n$. Dans ce cas, la dualité de Poincaré induit sur le $H^n$ de chaque fibre, une forme bilinéaire alternée non dégénérée.
En étudiant la cohomologie des quadriques, et en utilisant le formalisme dit des "cycles évanescents", qui compare, dans la situation présente, la cohomologie de la fibre spéciale (dans ce cas, la fibre singulière) et la cohomologie de la fibre générique, on peut décrire précisément la monodromie locale en $a$, c'est-à-dire l'action d'un cycle de $\pi_1(\mathbb{P}^1, \omega)$ (où $\omega$ est une clôture séparable du corps de fonction de $\mathbb{P}^1$) "autour" d'une singularité. Formellement, de tels cycles correspondent à des morphismes $\hat{\mathbb{Z}} \to \pi_1(D_0 \setminus A_0, \omega)$ où $A_0$ est l'ensemble fini des points singuliers. Le point important de cette étude monodromie est que cette action est triviale sur tous les degrés différents de $n$, en degré $n$, il y a un "cycle évanescent" dans la fibre générique, qui devient nul dans la fibre spéciale, pour tout $u \notin A$, l'espace des $E$ cycles évanescents de $H^n(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$ est tel que son orthogonal pour la dualité de Poincaré est l'espaces des invariants pour la monodromie, et les cycles évanescents, qui engendrent topologiquement $\pi_1(D_0 \setminus A_0, \omega)$, agissent sur $E/(E \cap E^\perp)$ par similarités symplectiques [25].
Par ailleurs, l'image de $\pi_1(D \setminus A,\ \omega)$ (où on enlève les 0 en indice pour signifier le changement de base sur $\overline{\mathbb{F}_p}$) agit par transformations symplectiques et est un ouvert dense de $\mathrm{Sp}(E/(E \cap E^\perp))$. Ces conditions permettent en fait de donner un encadrement précis des valeurs propres. Nous énonçons sans preuve l'un des théorème clé de la preuve de Deligne, résultat de cette étude :

25. Pour la forme bilinéaire alternée induite par la dualité de Poincaré.

**Théorème 47 (Deligne)** *Soit $X_0$ une variété projective lisse géométriquement connexe de dimension paire $d$ sur $\mathbb{F}_p$, et soit $X$ déduit par changement de base à $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit $\alpha$ une valeur propre de $F$ sur $H^d(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Alors $\alpha$ est un nombre algébrique dont les conjugués complexes ont tous une norme comprise entre $p^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}$ et $p^{\frac{d}{2}+\frac{1}{2}}$*

On peut montrer à partir de là, que cela implique que, sans hypothèse sur la parité de $d$, les valeurs propres sont en fait toutes égales à $p^{\frac{d}{2}}$, en effet, si $\alpha$ est une valeur propre, par la formule de Künneth 37, $\alpha^{2k}$ est une valeur propre de $F$ agissant sur $H^{2kd}(X^{2k}, \mathbb{Q}_\ell)$, en applicant l'estimation du théorème et en prenant la limite lorsque $k$ tend vers l'infini, on obtient l'égalité désirée.
Reste à montrer que l'hypothèse de Riemann est impliquée par ce corollaire : on procède alors par récurrence, en notant $W(X_0, i)$ la propriété que toute les valeurs propres et leurs conjugués complexes de $F^*$ agissant sur $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ ont pour norme $p^{\frac{i}{2}}$. Pour toute extension fini de $\mathbb{F}_p$, $W(X_0, i)$ équivaut à $W(X_0 \times_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^r}, i)$. La dualité de Poincaré montre que $W(X_0, i)$ équivaut à $W(X_0, 2d - i)$. Par la première réduction, on peut supposer que $X_0$ a une section hyperplane $Y_0$ lisse, et on peut appliquer le théorème de Lefschetz "faible" 40, qui permet de montrer qu'il suffit de procéder par récurrence et de montrer le cas $i = d$, ce que le théorème de Deligne fait.

# 5 Conclusion : vers les motifs

La preuve des conjectures de Weil aura été un long cheminement, s'étendant sur des dizaines d'années, et a motivé un nombre considérable d'avancées en mathématiques. Si les noms de Grothendieck et Deligne sont revenus plus d'une fois dans ce rapport, de nombreux autres mathématiciens participèrent à cette preuve : par exemple, on pourrait dire que tous ceux ayant participé à l'un des exposés dans l'un des tomes de "Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie" méritent une part du crédit. La preuve de Deligne clos donc une belle aventure mathématique.

Toutefois, la preuve ouvre d'autre questions. l'un des points les plus remarquable, est que, tout du long, on a choisi un nombre premier $\ell$, différent de la caractéristique $p$, mais que les résultats obtenus, biens qu'*a priori* dans $\mathbb{Q}_\ell$, sont souvent entiers ou rationnels, indépendants de $\ell$ ! Grothendieck a tenté d'expliquer l'indépendance de $\ell$ par l'existence d'une autre théorie, celle des "motifs", qui précèderait celle de la cohomologie $\ell$-adique. Selon Grothendieck, toute cohomologie de Weil serait alors une "réalisation" d'un motif. L'existence des motifs et leurs propriétés étaient en fait la première approche de Grothendieck pour montrer l'hypothèse de Riemann sur les corps finis, il a formulé une liste de "conjectures standards", qui permettraient de déduire formellement l'hypothèse de Riemann. L'existence des motifs "purs" selon Grothendieck est toujours conjecturale, et les conjectures standards sont encore des conjectures, bien que certains cas particuliers en sont maintenant connus. Plusieurs avancées ont été faites dans la théorie des motifs, notamment grâce à Voevosdky, qui réussit à construire la catégorie dérivée des motifs. La construction des motifs, et les différentes conjectures autours des objets actuellement construits (comme la conjecture de conservativité), reste un sujet de recherche actif en géométrie algébrique, qui fait le lien entre la géométrie algébrique abstraite, la théorie de l'intersection et, dans une certaine mesure, la topologie algébrique.

# Références


[BS15] Barghav Bhatt et Peter Scholze. "The pro-étale topology for schemes". Text in English or French ; abstracts in English et French. In : *De la géométrie algébrique aux formes automorphes : une collection d'articles en l'honneur du soixantième anniversaire de Gérard Laumon*. Astérisque 369. OCLC : 912905424. 2015, p. 99-201. ISBN : 978-2-85629-805-3 978-2-85629-806-0.

[Del74] Pierre Deligne. "La conjecture de Weil. I". fr. In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 43.1 (déc. 1974), p. 273-307. ISSN : 0073-8301, 1618-1913. DOI : 10.1007/BF02684373. URL : http://link.springer.com/10.1007/BF02684373 (visité le 23/08/2019).

[EGAIII-1] Alexander Grothendieck. "Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie". fr. In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 11 (1961), p. 5-167. URL : http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0.

[EGAIV-1] Alexander Grothendieck. "Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie". fr. In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 20 (1964), p. 5-259. URL : http://www.numdam.org/item/PMIHES_1964__20__5_0.

[EGAIV-4] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie”. fr. In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 32 (1967), p. 5-361. URL : `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1967__32__5_0`.

[FK88] Eberhard FREITAG et Reinhardt KIEHL. *Etale Cohomology and the Weil Conjecture*. en. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1988. ISBN : 978-3-662-02543-7. URL : `http://www.springer.com/fr/book/9783662025437` (visité le 02/09/2019).

[Fu11] Lei FU. *Etale cohomology theory*. en. Nankai tracts in mathematics v. 13. OCLC : ocn587124404. Hackensack, N.J : World Scientific, 2011. ISBN : 978-981-4307-72-7.

[Gro57a] Alexander GROTHENDIECK. “Sur quelques points d'algèbre homologique, I”. FR. In : *Tohoku Mathematical Journal* 9.2 (1957), p. 119-221. ISSN : 0040-8735, 2186-585X. DOI : `10.2748/tmj/1178244839`. URL : `https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1178244839` (visité le 26/08/2019).

[Gro57b] Alexander GROTHENDIECK. “Sur quelques points d'algèbre homologique, II”. FR. In : *Tohoku Mathematical Journal* 9.3 (1957), p. 119-221. ISSN : 0040-8735, 2186-585X. DOI : `10.2748/tmj/1178244774`. URL : `https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1178244774` (visité le 26/08/2019).

[Kle68] Steven Lawrence KLEIMAN. “Algebraic Cycles and the Weil Conjectures”. English. In : *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. T. 3. Advanced Studies in Pure Mathematics. OCLC : 490103432. Amsterdam ; Paris : North-Holland ; Masson et Cie, 1968, p. 359-386. ISBN : 978-2-225-59940-8.

[KS10] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA. *Sheaves on manifolds : with a short history "Les debuts de la theorie des faisceaux" by Christian Houzel*. en. OCLC : 974570670. 2010. ISBN : 978-3-642-08082-1.

[Ser77] Jean-Pierre SERRE. *Linear Representations of Finite Groups*. en. 1re éd. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1977. ISBN : 978-0-387-90190-9. DOI : `10.1007/978-1-4684-9458-7`. URL : `https://www.springer.com/gp/book/9780387901909` (visité le 03/07/2019).

[Ser79] Jean-Pierre SERRE. *Local Fields*. en. 1re éd. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1979. ISBN : 978-0-387-90424-5. DOI : `DOI:10.1007/978-1-4757-5673-9`. URL : `https://www.springer.com/gp/book/9780387904245` (visité le 03/07/2019).

[SGA1] *Revetements Etales et Groupe Fondamental : Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois Marie 1960/61 (SGA 1)*. fr. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1971. ISBN : 978-3-540-36910-3. URL : `http://www.springer.com/gp/book/9783540369103` (visité le 25/08/2019).

[SGA4-1] *Theorie des Topos et Cohomologie Etale des Schemas. Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4) : Tome 1*. fr. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1972. ISBN : 978-3-540-37549-4. URL : `http://www.springer.com/fr/book/9783540375494` (visité le 25/08/2019).

[SGA4-3] *Theorie des Topos et Cohomologie Etale des Schemas. Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4) : Tome 3*. fr. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1973. ISBN : 978-3-540-38124-2. URL : `http://www.springer.com/fr/book/9783540381242` (visité le 25/08/2019).

[SGA7-1] *Groupes de Monodromie en Geometrie Algebrique : Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie 1967-1969. (SGA 7 I)*. fr. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1972. ISBN : 978-3-540-37984-3. URL : `http://www.springer.com/gp/book/9783540379843` (visité le 02/09/2019).

[Ver96] Jean Louis VERDIER. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. French. Astérisque 239. OCLC : 37235004. Paris ; Providence R.I. : Société mathématique de France ; American Mathematical Society [distributor, 1996. DOI : `10.24033/ast.364`.

[Wei49] André WEIL. “Numbers of solutions of equations in finite fields”. EN. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 55.5 (mai 1949), p. 497-508. ISSN : 0002-9904, 1936-881X. URL : `https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183513798` (visité le 23/08/2019).

[Wei95] Charles A. WEIBEL. *An Introduction to Homological Algebra*. en. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, oct. 1995. ISBN : 978-0-521-55987-4.