

# Théorème de localisation en $\mathbb{A}^1$ -homotopie

04/10/2019

## 1 Introduction

<sup>1</sup>Le but de ce document est de fournir une preuve du théorème de localisation en  $\mathbb{A}^1$ -homotopie. Pour cela, on adopte le point de vue  $(\infty, 1)$ -catégorique, comme dans [Bra]. Le théorème vient fournir un analogue à la suite exacte de localisation en cohomologie étale. La preuve exposée dans [Bra] est une adaptation au point de vue  $\infty$ -catégorique de la preuve exposée dans [MV99] et dans [Ayo07].

## 2 Préliminaires

Dans ce document, le terme  $\infty$ -catégorie désignera toujours une quasi-catégorie au sens de [Lur09]. On se fixe un univers de Grothendieck  $\mathcal{U}$ , et on désigne par  $\mathcal{S}$  la catégorie des espaces  $\mathcal{U}$ -petits, c'est, de manière équivalente :

- Le nerf de la catégorie homotopie des complexes de Kan  $\mathcal{U}$ -petits.
- La complétion par colimites  $\mathcal{U}$ -petites du point.
- La  $\infty$ -catégorie des fibrations à gauches avec fibres  $\mathcal{U}$ -petites spécifiées (voir [Cis19] 5.2.3).
- La  $\infty$ -catégorie des  $\infty$ -groupoïdes  $\mathcal{U}$ -petits.

On fixe  $S$  un schéma noëtherien de dimension de Krull finie. On note  $\mathrm{Sm}_S$  la catégorie ordinaire des schémas lisses de type fini sur  $S$ .

Lorsque cela ne portera pas à confusion, on confondra une catégorie ordinaire avec son nerf. Par exemple, la  $\infty$ -catégorie  $\mathrm{N}(\mathrm{Sm}_S)$  sera simplement dénotée  $\mathrm{Sm}_S$ . On note  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  la  $\infty$ -catégorie des préfaisceaux sur  $\mathrm{Sm}_S$ , c'est-à-dire  $\mathrm{Map}(\mathrm{Sm}_S, \mathcal{S})$ .

La catégorie  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  possède deux sous-catégories pleines qui nous intéressent :

- La sous-catégorie pleine des préfaisceaux qui sont des faisceaux pour la topologie de Nisnevich sur  $\mathrm{Sm}_S$ . Nous noterons  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S)$  cette sous-catégorie.
- La sous-catégorie pleine des préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux. C'est-à-dire tels que la flèche canonique  $\mathcal{F}(- \times_S \mathbb{A}_S^1) \rightarrow \mathcal{F}$  soit une équivalence. Il revient au même de demander que  $\mathcal{F}(X \times_S \mathbb{A}_S^1) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  soit une équivalence faible d'homotopie pour tout  $X$ . On note  $\mathrm{Pre}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$  la sous-catégorie pleine des préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux.

On résume les résultats principaux concernant ces objets dans les proposition suivantes.

---

1. Je remercie Frédéric Déglise de m'avoir suggéré ce sujet, et pour m'avoir grandement aidé lors de la rédaction de cette note. Je remercie de même Thomas Brazelton et Marc Hoyois pour leurs explications de plusieurs points.

**Proposition 2.1** *Les sous-catégories  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S)$  et  $\mathrm{Pre}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$  sont des localisations reflectives et accessibles de  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$ . Ce sont des  $\infty$ -catégories présentables.  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S)$  est un  $\infty$ -topos.*

On note  $L_{\mathrm{Nis}}$  (resp.  $L_{\mathbb{A}^1}$ ) l'adjoint à gauche à l'inclusion  $\mathrm{incl}_{\mathrm{Nis}} : \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  (resp.  $\mathrm{incl}_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{Pre}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$ ). On appelle *équivalence locale* un morphisme  $f$  dans  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  tel que  $L_{\mathrm{Nis}}(f)$  soit un isomorphisme dans  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S)$ . On dispose de la caractérisation suivante :

**Proposition 2.2** *Un morphisme  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  dans  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  est une équivalence locale si et seulement si pour tout point Nisnevich  $p$  de  $\mathrm{Sm}_S$ , le morphisme  $f_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  induit sur les tiges est une équivalence faible d'homotopie.*

Le foncteur  $L_{\mathbb{A}^1}$  peut être calculé explicitement :

**Proposition 2.3** *La règle  $n \mapsto \Delta^n = \mathrm{Spec}_S \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] / (\sum_{i=1}^n t_i - 1)$  définit un objet cosimplicial dans  $\mathrm{Sm}_S$ . On définit un objet simplicial  $c$  dans la catégorie des endofoncteurs de  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  par  $c([n]) = (F \mapsto (X \mapsto F(X \times \Delta^n)))$ . Alors  $\varinjlim_{[n] \in \Delta^{\mathrm{op}}} c([n])$  est à valeur dans la sous-catégorie des*

*foncteurs à valeurs dans  $\mathrm{Pre}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$ , et est équivalent à  $L_{\mathbb{A}^1}$ .*

Finalement, on définit l'objet principal de notre étude :

**Définition 1** *La  $\infty$ -catégorie homotopique instable de  $S$  est la  $\infty$ -catégorie  $\mathcal{H}(S)$  définie par le carré cartésien suivant dans  $\infty - \mathrm{Cat}$  :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(S) & \hookrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathrm{Pre}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S) & \hookrightarrow & \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S) \end{array}$$

*c'est-à-dire que  $\mathcal{H}(S)$  est la sous  $\infty$ -catégorie pleine de  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  dont les objets sont ceux de  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_S) \cap \mathrm{Pre}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$ .*

Cette catégorie peut être définie de plusieurs manières, on aurait aussi pu la définir comme la  $\infty$ -catégorie sous-jacente aux catégories de modèles construites dans [MV99] ou dans [AE16], ou bien comme localisations successives de  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$ , d'abord par les morphismes Nisnevich locaux, puis par les morphismes  $\mathbb{A}^1$ -locaux, comme dans [Rob12]. Toute ces  $\infty$ -catégories sont équivalentes : voir [Rio] 3.54, [Rob12] section 5.1 et [Bra18] section 4.3.

Le point essentiel est le suivant :

**Theorem 2.4** *La  $\infty$ -catégorie  $\mathcal{H}(S)$  est une localisation reflective et accessible de  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$ . C'est une  $\infty$ -catégorie présentable. Le foncteur de localisation  $L_{\mathrm{mot}}$  adjoint à gauche de  $\mathrm{incl}_{\mathrm{mot}} : \mathcal{H}(S) \rightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  associé est équivalent à  $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (L_{\mathrm{Nis}} \circ L_{\mathbb{A}^1})^n$  où les inclusions dans  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  sont omises.*

On appelle *équivalence motivique* un morphisme de préfaisceau  $f$  tel que  $L_{\mathrm{mot}}(f)$  soit une équivalence dans  $\mathcal{H}(S)$ . Une fois les fonctorialités basiques établies, nous verrons une caractérisation utile de ces équivalences motiviques. Nous concluons cette section par deux lemmes techniques sur certains types de colimites dans le monde  $\infty$ -catégorique. On rappelle qu'un ensemble simplicial  $A$  est dit *faiblement contractile* s'il a le type d'homotopie faible du point. De manière équivalente,  $A \rightarrow \Delta^0$  est une équivalence d'homotopie faible, ou encore ([Cis19], 3.8.11),  $\pi_0(A)$  est réduit à un point, et il existe un point  $x_0 \in A$  tel que  $\pi_n(A, x_0)$  soit le groupe trivial pour tout  $n$ . Le premier lemme est essentiellement [Lur09] 5.3.18 :

**Lemme 2.5** *Le nerf d'une catégorie filtrante est faiblement contractile.*

**Preuve** Soit  $A$  une catégorie filtrante. On confondra  $A$  et  $N(A)$ . Montrons déjà que  $\pi_0(A)$  est réduit à un point. On peut librement remplacer  $A$  par  $\text{Ex}^\infty(A)$  et supposer que  $A$  est un complexe de Kan, car cela ne change pas le type d'homotopie faible. Étant donnés deux points  $x, y$  de  $A$ , puisque  $A$  est filtrante, il existe  $z$  dans  $A$  et deux flèches  $x \rightarrow z, y \rightarrow z$ . Le zigzag  $x \rightarrow z \leftarrow y$  relie  $x$  à  $y$ . Donc  $\pi_0(A)$  est réduit à un point.

Soit  $x$  un point de  $A$  et soit  $u : \partial\Delta_n \rightarrow A$  un morphisme d'ensemble simplicial qui envoie  $n$  sur  $x$ . Il suffit de montrer que l'image de  $\pi_n(\partial\Delta_n, n) \rightarrow \pi_n(A, x)$  est triviale. Mais, cette image s'identifie à celle d'une inclusion  $B \subset A$  pour un sous-ensemble simplicial fini  $B \subset A$  (l'image de  $u$  par exemple). Par hypothèse sur  $A$ ,  $B \subset A$  se factorise à travers  $CB \subset A$  où  $CB$  est un cocône de  $B$ , et un tel cocône est contractile, donc  $\pi_n(\partial\Delta_n, 0) \rightarrow \pi_n(A, x)$  se factorise à travers  $\pi_n(\partial\Delta_n, 0) \rightarrow \pi_n(B, x) \rightarrow \pi_n(CB, x) \rightarrow \pi_n(A, x)$ , et est donc d'image triviale.  $\square$

Le deuxième lemme donne un calcul de colimite indexée par une catégorie faiblement contractile.

**Lemme 2.6** *Soit  $I$  une catégorie faiblement contractile,  $p : I \rightarrow \mathcal{S}$  le diagramme qui prend la valeur constante égale à l'objet final de  $\mathcal{S}$ . Alors la colimite de  $p$  est équivalente au point.*

**Preuve** Par [Lur09], 4.4.4.9, cette colimite (qui correspond à  $I \otimes *$ ), est caractérisée par  $\text{Hom}_{\text{ho}(\mathcal{S})}(I \times *, z) \simeq \text{Hom}_{\text{ho}(\mathcal{S})}(I, \text{Map}_{\mathcal{S}}(*, z))$ .  $I$  étant faiblement contractile, on a donc  $\text{Hom}_{\text{ho}(\mathcal{S})}(I, \text{Map}_{\mathcal{S}}(*, z)) \simeq \pi_0(\pi_0(z))$ , c'est-à-dire,  $\text{Hom}_{\text{ho}(\mathcal{S})}(I \times *, z) \simeq \pi_0(z)$  pour tout  $z \in \mathcal{S}$ . Par le lemme de Yoneda, cela signifie que  $I \otimes * \simeq *$ .  $\square$

### 3 Fonctorialité

Dans cette section, nous serons régulièrement amenés à "descendre" une adjonction le long d'une localisation. Il est donc utile de rappeler le résultat suivant :

**Proposition 3.1** *Soit  $f : A \rightarrow B$  un foncteur entre  $\infty$ -catégories, et  $g : B \rightarrow A$  un adjoint à gauche de  $f$ . Supposons par ailleurs que  $A'$  et  $B'$  sont deux sous-catégories pleines de  $A$  et  $B$  respectivement, telles que les inclusions  $i : A' \rightarrow A$  et  $j : B' \rightarrow B$  aient des adjoints à gauche  $L_A$  et  $L_B$  respectivement. Si  $f(A') \subset B'$ , alors le foncteur  $\tilde{f} : A' \rightarrow B'$  a un adjoint à gauche donné par  $L_A \circ g \circ j$ .*

**Preuve** Soient  $x \in B'$  et  $y \in A'$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Map}_{A'}(L_A(g(j(x))), y) &\simeq \text{Map}_A(g(j(x)), i(y)) \\ &\simeq \text{Map}_B(j(x), f(i(y))) \\ &\simeq \text{Map}_{B'}(x, \tilde{f}(y)). \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue car on considère des sous-catégories pleines.  $\square$

#### 3.1 Fonctorialité au niveau des préfaisceaux

Soit  $f : T \rightarrow S$  un morphisme entre schémas noethériens de dimension de Krull finie. Le morphisme  $f$  permet de définir un foncteur  $\text{Sm}_S \rightarrow \text{Sm}_T$ , défini par  $X \mapsto X \times_S T$ . On peut considérer

le foncteur composé  $\mathrm{Sm}_S \rightarrow \mathrm{Sm}_T \rightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_T)$  où la deuxième flèche est le plongement de Yoneda. La catégorie d'arrivée étant cocomplète, par [Cis19] 6.3.4, on dispose d'une adjonction  $f_{\mathrm{pre}}^* \dashv f_{*,\mathrm{pre}}$  où  $f_{*,\mathrm{pre}} : \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_T) \rightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  est défini par  $f_{*,\mathrm{pre}}(\mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(X \times_S T)$ , par ailleurs,  $f_{\mathrm{pre}}^*$  coïncide avec  $\mathrm{Sm}_S \rightarrow \mathrm{Sm}_T \rightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_T)$  sur les représentables de  $\mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$ .

Si  $f : T \rightarrow S$  est un morphisme lisse entre schémas noethériens de dimension de Krull finie, on dispose d'un foncteur  $\mathrm{Sm}_T \rightarrow \mathrm{Sm}_S$ , défini par  $(X \rightarrow T) \mapsto (X \rightarrow T \rightarrow S)$ . Par exactement le même argument que précédemment, on a une adjonction  $f_{\#, \mathrm{pre}} \dashv f_{\mathrm{pre}}^\#$ , le foncteur  $f_{\mathrm{pre}}^\# : \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S) \rightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_T)$  est défini par  $f_{\mathrm{pre}}^\#(\mathcal{F})(X \rightarrow T) = \mathcal{F}(X \rightarrow T \rightarrow S)$  et  $f_{\#, \mathrm{pre}}$  coïncide avec  $\mathrm{Sm}_T \rightarrow \mathrm{Sm}_S \rightarrow \mathrm{Pre}(\mathrm{Sm}_S)$  sur les représentables.

Afin d'alléger les notations, pour  $f : T \rightarrow S$  lisse, pour tout schéma  $X$  lisse sur  $T$ , on note  $X/T$  l'élément de  $\mathrm{Sm}_T$  correspondant,  $X/S$  le  $S$ -schéma  $X \rightarrow T \rightarrow S$ , et pour  $f : T \rightarrow S$  quelconque, et  $X$  schéma lisse sur  $S$ , on note  $X_T = X \times_S T$ .

**Proposition 3.2** *Si  $f : T \rightarrow S$  est lisse, alors  $f_{\mathrm{pre}}^\#$  et  $f_{\mathrm{pre}}^*$  sont équivalents.*

**Preuve** Le foncteur  $f_{\mathrm{pre}}^\#$  commute aux colimites, en effet, les colimites de faisceaux sont calculées points par points, on a donc

$$\begin{aligned} \left( \varinjlim_{\mathcal{I}} f_{\mathrm{pre}}^\#(\mathcal{F}) \right) (X/T) &\simeq \varinjlim_{\mathcal{I}} (f_{\mathrm{pre}}^\#(\mathcal{F})(X/T)) \\ &\simeq \varinjlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}(X/S) \\ &\simeq \left( \varinjlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F} \right) (X/S) \\ &\simeq f_{\mathrm{pre}}^\#(\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F})(X/T). \end{aligned}$$

Le foncteur  $f_{\mathrm{pre}}^*$  commute aux colimites car c'est un adjoint à gauche. Les foncteurs commutant aux colimites sont entièrement déterminés par leur restriction aux représentables ([Cis19] 6.3.13), il suffit donc de montrer que  $f_{\mathrm{pre}}^\#$  et  $f_{\mathrm{pre}}^*$  coïncident sur les représentables. C'est alors un fait général de théorie des  $\infty$ -catégories ([Cis19] 6.6.9) : étant donnée une  $\infty$ -catégorie  $\mathcal{C}$  avec des produits fibrés,  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$ , et  $u : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ , alors le foncteur  $\mathcal{C}/B \rightarrow \mathcal{C}/A$  qui envoie  $X \rightarrow B$  sur  $X \times_B A$  est adjoint à gauche du foncteur  $X/A \rightarrow X/B$ . Donc, en appliquant à  $\mathrm{Sch}$  et en restreignant à  $\mathrm{Sm}_S$  et  $\mathrm{Sm}_T$  respectivement, sur les représentables,  $f_{\mathrm{pre}}^*$  et  $f_{\mathrm{pre}}^\#$  sont équivalents car ils sont adjoints à gauche d'un même foncteur.  $\square$

Lorsque  $f$  sera lisse, on ne distinguera donc plus  $f_{\mathrm{pre}}^\#$  de  $f_{\mathrm{pre}}^*$ .

Les foncteurs définis ci-dessus se comportent bien vis-à-vis de la composition. C'est-à-dire qu'on a des équivalences (lorsque  $g$  et  $f$  sont tels que les foncteurs en jeu sont définis) :

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{*, \mathrm{pre}} &\simeq g_{*, \mathrm{pre}} \circ f_{*, \mathrm{pre}} \\ (g \circ f)_{\mathrm{pre}}^* &\simeq f_{\mathrm{pre}}^* \circ g_{\mathrm{pre}}^* \\ (g \circ f)_{\#, \mathrm{pre}} &\simeq g_{\#, \mathrm{pre}} \circ f_{\#, \mathrm{pre}} \end{aligned}$$

Ces équivalences, si elles concernent un adjoint à droite, se montrent en calculant explicitement par les formules, et si elles concernent des adjoints à gauches, se montrent en se ramenant au cas des représentables, et en utilisant encore une fois les formules explicites.

On peut calculer  $f_{\text{pre}}^*$  si  $f : \tilde{X} \rightarrow S$  où  $\tilde{X}$  est essentiellement lisse sur  $S$ , c'est-à-dire une limite projective filtrante de schémas lisses sur  $S$  dont les morphismes de transition sont affines (par exemple, si  $\tilde{X}$  est le spectre de l'hensélisation de l'anneau local d'un schéma lisse sur  $S$  en un point).

Soit  $\tilde{X}$  un schéma essentiellement lisse sur  $S$ , et  $(X_i, \phi_{i,j})$  un système projectif filtrant l'exhibant comme tel. Pour tout préfaisceau  $\mathcal{F}$ , sur  $S$ , on peut définir  $\mathcal{F}(X) = \varinjlim_I \mathcal{F}(X_i)$ , par [GD66] 8.13.5,

cette définition est indépendante du choix du système projectif. Par [GD66] 8.8.2 et [GD67] 17.7.8, pour tout schéma  $\tilde{Y}$  lisse sur  $\tilde{X}$ , il existe un rang  $i_0$  et un schéma  $Y_{i_0}$  tel que  $\tilde{Y} \simeq Y_{i_0} \times_{X_{i_0}} \tilde{X}$ . En notant  $Y_i = Y_{i_0} \times_{X_{i_0}} X_i$  pour  $i \geq i_0$ , on obtient un système projectif de schémas  $Y_i$ , et  $\varinjlim_{i \geq i_0} Y_i \simeq \tilde{Y}$ ,

on peut donc, de même, considérer  $\mathcal{F}(\tilde{Y})$ , nous noterons parfois  $\mathcal{F}_{\text{pro}}(\tilde{Y})$  pour mettre l'accent sur le fait qu'on considère l'extension de  $\mathcal{F}$  aux schémas essentiellement lisses.

**Proposition 3.3** *Soit  $\tilde{X}$  un schéma essentiellement lisse sur  $S$ , et  $f : \tilde{X} \rightarrow S$  le morphisme structural. Le foncteur  $f_{\text{pre}}^*$  est équivalent au foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\text{pro}}$ .*

**Preuve** Le foncteur candidat commute aux colimites : il suffit donc de montrer que les foncteurs coïncident sur les représentables de  $\text{Sm}_S$ . Soit  $Y$  lisse sur  $S$  et soit  $\tilde{Z}$  lisse sur  $\tilde{X}$ . Par la discussion précédente, on peut écrire  $\tilde{Z}$  comme une limite projective  $(Z_i)_{i \in I}$  de schémas lisses sur  $S$ , avec le même ensemble d'indices que celui exhibant  $\tilde{X}$  comme essentiellement lisse. Par définition,  $Y(\tilde{Z}) \simeq \varinjlim_{i \in I} \text{Map}_{\text{Sm}_S}(Z_i, Y)$ . On peut alors appliquer [GD66] 8.13.1, qui permet de déduire que

$$\varinjlim_{i \in I} \text{Map}_{\text{Sm}_S}(Z_i, Y) \simeq \text{Map}_{\text{Sm}_S}(\tilde{Z}, Y). \text{ Enfin,}$$

$$\begin{aligned} \text{Map}_{\text{Sm}_S}(\tilde{Z}, Y) &\simeq \text{Map}_{\text{Sm}_{\tilde{X}}}(\tilde{Z}, Y) \\ &\simeq Y_{\tilde{X}}(\tilde{Z}) \\ &\simeq f_{\text{pre}}^*(Y)(\tilde{Z}). \end{aligned}$$

□

## 3.2 Functorialité au niveau des faisceaux Nisnevich

Soit  $f : T \rightarrow S$  un morphisme entre schémas noethériens de dimension de Krull finie. Soit  $X \in \text{Sm}_S$ , et  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  un recouvrement Nisnevich de  $X$ , alors  $((U_i)_T \rightarrow X_T)_{i \in I}$  est un recouvrement Nisnevich de  $X_T$ , ainsi, le foncteur  $f_{*, \text{pre}}$  envoie les équivalences locales de  $\text{Pre}(\text{Sm}_T)$  sur des équivalences de locales de  $\text{Pre}(\text{Sm}_S)$ , donc  $f_{*, \text{pre}}$  se descend en un foncteur  $f_{*, \text{Nis}} : \text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_T) \rightarrow \text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_S)$ . Par 3.1, ce foncteur a un adjoint à gauche donné par  $L_{\text{Nis}} \circ f_{\text{pre}}^* \circ \text{incl}_{\text{Nis}}$ .

Si  $f$  est lisse, alors  $f_{\text{pre}}^\#$  préserve les faisceaux Nisnevich, en effet, si  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  est un recouvrement Nisnevich de  $X$  sur  $T$ , c'en est aussi un sur  $S$ . Donc  $f_{\text{pre}}^\#$  induit  $f_{\text{Nis}}^\# : \text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_S) \rightarrow \text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_T)$  et a un adjoint à gauche  $f_{\#, \text{Nis}} = L_{\text{Nis}} \circ f_{\#, \text{pre}} \circ \text{incl}_{\text{Nis}}$ . La proposition 3.2 permet de déduire que  $f_{\text{Nis}}^\# \simeq f_{\text{Nis}}^*$ . Les représentables sont des faisceaux Nisnevich, donc les formules  $f_{\text{pre}}^*(X/S) = X_T$  et

$f_{\#, \text{pre}}(X/T) = X/S$  restent valables pour  $f_{\text{Nis}}^*$  et  $f_{\#, \text{Nis}}$ .

Enfin, on remarque qu'au niveau des faisceaux, les foncteurs obtenus se comportent encore bien par rapport à la composition.

**Lemme 3.4** *Soit  $i : Z \rightarrow S$  une inclusion fermée, et  $\mathcal{F} \in \text{Pre}(\text{Sm}_S)$  tel que  $\mathcal{F}(\emptyset) \simeq *$ <sup>2</sup>. Alors le morphisme canonique  $L_{\text{Nis}}(i_{*, \text{pre}}(\mathcal{F})) \rightarrow i_{*, \text{Nis}}L_{\text{Nis}}(\mathcal{F})$  est une équivalence locale.*

**Preuve** Afin d'établir la proposition, on la vérifie sur chaque point Nisnevich. Soit donc  $X \in \text{Sm}_S$ , et  $x \in X$ , par définition, le point Nisnevich associé est le foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}} \mathcal{F}(V)$ , où

$\mathcal{I}(X,x)$  est la catégorie des voisinages Nisnevich de  $(X,x)$ , c'est-à-dire des triplets  $(V,v,p)$  qui s'insèrent dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow v & \downarrow p \\ \text{Spec}(\kappa(x)) & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

où  $V$  est connexe, et  $p$  étale.

On veut donc vérifier que  $L_{\text{Nis}}(i_{*, \text{pre}}(\mathcal{F}))_{(X,x)} \rightarrow i_{*, \text{Nis}}L_{\text{Nis}}(\mathcal{F})_{(X,x)}$  est une équivalence locale.

Deux cas sont à considérer : soit  $x \in X_Z$ , soit  $x \notin X_Z$ .

Commençons par le cas où  $x \notin X_Z$ ,  $X_Z$  étant fermé, et  $p$  étant étale, donc ouvert, les voisinages Nisnevich de  $(X,x)$  tels que  $p(V) \cap X_Z = \emptyset$  forment un système cofinal de  $\mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}$ . Donc

$$\begin{aligned} L_{\text{Nis}}(i_{*, \text{pre}}(\mathcal{F}))_{(X,x)} &\simeq i_{*, \text{pre}}(\mathcal{F})_{(X,x)} && \text{car } L_{\text{Nis}} \text{ préserve les tiges} \\ &\simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}} i_{*, \text{pre}}(\mathcal{F})(V) \\ &\simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}} \mathcal{F}(V_Z) \\ &\simeq \varinjlim_{\substack{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}} \\ V_Z = \emptyset}} \mathcal{F}(V_Z) && \text{Par cofinalité} \\ &\simeq \varinjlim_{\substack{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}} \\ V_Z = \emptyset}} \mathcal{F}(\emptyset) \\ &\simeq \varinjlim_{\substack{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}} \\ V_Z = \emptyset}} * && \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

La catégorie sur laquelle on prend la colimite est filtrante, par les lemmes 2.5 et 2.6, cette dernière

---

2. cette condition est vérifiée, par exemple, si  $\mathcal{F}$  est un faisceau Nisnevich.

colimite est équivalente au point. D'autre part :

$$\begin{aligned}
i_{*,\text{Nis}}\text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})_{(X,x)} &\simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}} i_{*,\text{pre}}(\text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F}))(V) \\
&\simeq \varinjlim_{\substack{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}} \\ V_Z = \emptyset}} \text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})(V_Z) && \text{par cofinalité} \\
&\simeq \varinjlim_{\substack{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}} \\ V_Z = \emptyset}} \text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})(\emptyset).
\end{aligned}$$

Or  $\text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})(\emptyset) \simeq *$  car  $\text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})$  est un faisceau. Par le même argument, cette colimite est encore équivalente au point.

Reste à traiter le cas où  $x \in X_Z$ . Par [GD67], 18.1.1, étant donné un voisinage Nisnevich  $(V, v, p)$  de  $x$  dans  $X_Z$ , il existe un ouvert  $U_0$  de  $V$ , et un schéma  $U$  étale sur  $X$  tel que  $U_0 \cong U \times_X X_Z$ . Ainsi, tout voisinage Nisnevich de  $(X_Z, x)$  se raffine en un voisinage Nisnevich de  $(X, x)$ . Puisque tout voisinage Nisnevich de  $(X, x)$  définit un voisinage Nisnevich de  $(X_Z, x)$ , ceci montre que les voisinages Nisnevich de  $(X_Z, x)$  obtenus par restriction de voisinages Nisnevich de  $(X, x)$  forment un système cofinal dans  $\mathcal{I}(X_Z, x)^{\text{op}}$ . On peut alors calculer : d'une part,

$$\begin{aligned}
\text{L}_{\text{Nis}}(i_{*,\text{pre}}(\mathcal{F}))_{(X,x)} &\simeq i_{*,\text{pre}}(\mathcal{F})_{(X,x)} \\
&\simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}} \mathcal{F}(V_Z) \\
&\simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X_Z,x)^{\text{op}}} \mathcal{F}(V) && \text{par cofinalité} \\
&\simeq \mathcal{F}_{(X_Z,x)}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
i_{*,\text{Nis}}\text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})_{(X,x)} &\simeq \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{I}(X,x)^{\text{op}}} \text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})(V_Z) \\
&\simeq \text{L}_{\text{Nis}}(\mathcal{F})_{X_Z,x} && \text{par le même argument} \\
&\simeq \mathcal{F}_{(X_Z,x)}.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.5** *Soit  $i : Z \rightarrow S$  une immersion fermée, alors  $i_{*,\text{Nis}}$  commute aux colimites indéexées par des ensembles simpliciaux faiblement contractiles.*

**Preuve** Les colimites de faisceaux sont calculées comme le faisceautisé de la colimite de préfaisceaux, c'est-à-dire comme la composée de  $\text{L}_{\text{Nis}}$  est de la colimite de préfaisceau, qui est calculée point par point. Soit  $F : A \rightarrow \text{Sh}_{\text{Sm}_S}$  un diagramme de faisceaux. On a :

$$i_{*,\text{Nis}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{Sh}} F(\alpha) \simeq i_{*,\text{Nis}} \circ \text{L}_{\text{Nis}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} F(\alpha).$$

On a

$$\begin{aligned}
(\varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} F(\alpha))(\emptyset) &\simeq \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} F(\alpha)(\emptyset) \\
&\simeq \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}*} && \text{car } F(\alpha) \in \text{Sh}_{\text{Nis}} \\
&\simeq * && \text{par le lemme 2.6.}
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le lemme 3.4, et conclure que

$$i_{*,\text{Nis}} \circ L_{\text{Nis}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{Pre}} F(\alpha) \simeq L_{\text{Nis}} \circ i_{*,\text{pre}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} F(\alpha).$$

La formule explicite de  $i_{*,\text{pre}}$  et le fait que les colimites de préfaisceaux sont calculées point par point impliquent que

$$i_{*,\text{pre}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} F(\alpha) \simeq \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} i_{*,\text{pre}}(F(\alpha)).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
L_{\text{Nis}} \circ \pi i_{*,\text{pre}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} F(\alpha) &\simeq L_{\text{Nis}} \circ \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{pre}} i_{*,\text{pre}}(F(\alpha)) \\
&\simeq \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{Sh}} i_{*,\text{pre}}(F(\alpha)) \\
&\simeq \varinjlim_{\alpha \in A}^{\text{Sh}} i_{*,\text{Nis}}(F(\alpha)),
\end{aligned}$$

la dernière équivalence venant simplement du fait que  $i_{*,\text{pre}} \circ \text{incl}_{\text{Nis}} \simeq i_{*,\text{Nis}}$ .  $\square$

On considère maintenant un carré cartésien de la forme suivante, où  $S, T, \tilde{S}$  et  $\tilde{T}$  sont des schémas noériens de dimension de Krull finie, et où les morphismes  $f$  et  $\tilde{f}$  sont lisses :

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{T} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S} \\
\tilde{g} \downarrow & \square & \downarrow g \\
T & \xrightarrow{f} & S.
\end{array}$$

Partant de la counité de l'adjonction  $g_{\text{Nis}}^* \dashv g_{*,\text{Nis}}$  et en pré-composant par  $\tilde{f}_{\text{Nis}}^*$ , on obtient une flèche entre foncteurs  $\tilde{f}_{\text{Nis}}^* \circ g_{\text{Nis}}^* \circ g_{*,\text{Nis}} \rightarrow \tilde{f}_{\text{Nis}}^*$ . Puisque

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\text{Nis}}^* \circ g_{\text{Nis}}^* &\simeq (g \circ \tilde{f})_{\text{Nis}}^* \\
&\simeq (f \circ \tilde{g})_{\text{Nis}}^* \\
&\simeq \tilde{g}_{\text{Nis}}^* \circ f_{\text{Nis}}^*,
\end{aligned}$$

on a une flèche  $\tilde{g}_{\text{Nis}}^* \circ f_{\text{Nis}}^* \circ g_{*,\text{Nis}} \rightarrow \tilde{f}_{\text{Nis}}^*$ . Par adjonction, on obtient une flèche  $f_{\text{Nis}}^* \circ g_{*,\text{Nis}} \rightarrow \tilde{g}_{*,\text{Nis}} \circ \tilde{f}_{\text{Nis}}^*$ .

**Proposition 3.6** *La flèche  $f_{\text{Nis}}^* \circ g_{*,\text{Nis}} \rightarrow \tilde{g}_{*,\text{Nis}} \circ \tilde{f}_{\text{Nis}}^*$  est une équivalence.*



**Preuve** Puisque  $f$  et  $\tilde{f}$  sont lisses, on a une formule explicite pour  $f_{\text{Nis}}^*$  et  $\tilde{f}_{\text{Nis}}^*$ . Prenons un faisceau sur  $\text{Sm}_T$   $\mathcal{F}$ . Alors  $\mathcal{F}$  est colimite de représentables :  $\mathcal{F} = \varinjlim_{X \in \mathcal{I}} X$  et cette colimite est à priori une colimite dans  $\text{Pre}(\text{Sm}_T)$ , mais puisque les représentables sont des faisceaux, et que  $\mathcal{F}$  est un faisceau, c'est une colimite dans  $\text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_T)$ . Les foncteurs  $g_{*,\text{Nis}}$  et  $\tilde{g}_{*,\text{Nis}}$  commutent aux limites de préfaisceaux : on le montre de la même manière qu'on l'a montré pour  $f_{\text{pre}}^\#$  dans la preuve de 3.2. Donc, la propriété peut être ramenée au cas des représentables. Soit  $X$  un schéma lisse sur  $\tilde{S}$ , et soit  $U$ , lisse sur  $T$ . On a, d'une part  $f_{\text{Nis}}^*(g_{*,\text{Nis}}(X))(U) \simeq (X/\tilde{S})((U/S)_{\tilde{S}})$  et d'autre part,  $\tilde{g}_{*,\text{Nis}}(\tilde{f}_{\text{Nis}}^*(X))(U) \simeq (X/\tilde{S})(U_{\tilde{T}}/\tilde{S})$ . On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & \tilde{T} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S} \\ \downarrow & & \tilde{g} \downarrow & \square & \downarrow g \\ U & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & S, \end{array}$$

Par [Cis19] 6.6.10, qui est l'analogie infini-catégorique d'un fait catégorique bien connu, le rectangle extérieur est cartésien si et seulement si le carré de gauche l'est, on en déduit  $(X/\tilde{S})((U/S)_{\tilde{T}}) \simeq (U/S)_{\tilde{S}}$ . La proposition est prouvée<sup>3 4</sup>.  $\square$

On prouve maintenant la formule de projection lisse.

**Proposition 3.7** *Considérons un morphisme  $f : T \rightarrow S$  lisse, entre schémas noethériens de type fini. Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  dans  $\text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_S)$ , et soit  $\mathcal{H} \in \text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_T)$ . On se donne un morphisme  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  et un morphisme  $\mathcal{H} \rightarrow f_{*,\text{Nis}}(\mathcal{G})$  (ou de manière équivalente, un morphisme  $f_{\text{Nis}}^*(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{G}$ ). Alors*

$$f_{\#, \text{Nis}}(f_{\text{Nis}}^*(\mathcal{F}) \times_{f_{\text{Nis}}^*(\mathcal{G})} \mathcal{H}) \simeq \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} f_{\#, \text{Nis}}(\mathcal{H}).$$

Enfin, on continue de s'intéresser au cas essentiellement lisse.

**Proposition 3.8** *Si  $\tilde{X}$  est un schéma essentiellement lisse sur  $S$ , et si  $f : \tilde{X} \rightarrow S$  est le morphisme structural, alors  $f_{\text{pre}}^*$  préserve les faisceaux Nisnevich.*

**Preuve** Par les résultats de [MV99], 3.1.16, un préfaisceau est un faisceau Nisnevich si et seulement si il envoie un carré distingué Nisnevich sur un carré cartésien. Considérons un faisceau Nisnevich  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Sm}_S$ , et un carré Nisnevich distingué :

$$\begin{array}{ccc} V_U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & \tilde{X}. \end{array}$$

Chaque terme du carré peut être écrit comme une limite projective filtrante de schémas lisses sur  $S$  dont les morphismes de transitions sont affines. Par un résultat de réindexation ([AM69], A.3.3), on peut supposer que ces systèmes sont tous des systèmes ayant pour base le même ensemble préordonné filtrant  $I$ . Le carré est donc de la forme

3. Pour plus de rigueur, il aurait fallu prouver que  $f_{\text{Nis}}^* \circ g_{*,\text{Nis}} \rightarrow \tilde{g}_{*,\text{Nis}} \circ \tilde{f}_{\text{Nis}}^*$  est bien induit par cette équivalence. Cela découle de la preuve de [Cis19] 6.6.10 où l'équivalence est obtenue en utilisant des foncteurs de changement de base. En comparant avec les constructions des foncteurs sur les préfaisceaux, on constate que ces flèches coïncident. Une rédaction précise serait néanmoins fastidieuse.

4. Remarquons que la preuve prouve aussi la proposition pour des préfaisceaux.

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim_{i \in I} (V_{iU_i}) & \longrightarrow & \varprojlim_{i \in I} V_i \\
\downarrow & \square & \downarrow \varprojlim_{i \in I} p_i \\
\varprojlim_{i \in I} U_i & \xhookrightarrow{\varprojlim_{i \in I} j_i} & \varprojlim_{i \in I} X_i.
\end{array}$$

Par [GD66] 8.10.5, pour  $i$  assez grand,  $j_i$  est une immersion ouverte, et  $p_i^{-1}(X_i \setminus U_i) \cong X_i \setminus U_i$ . Par [GD67] 17.7.8, pour  $i$  assez grand,  $p_i$  est étale. Autrement dit, le carré

$$\begin{array}{ccc}
V_{iU_i} & \longrightarrow & V_i \\
\downarrow & \square & \downarrow p_i \\
U_i & \xhookrightarrow{j_i} & X_i
\end{array}$$

est Nisnevich distingué pour  $i$  assez grand. Donc, puisque  $\mathcal{F}$  est un faisceau, le carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(X_i) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_{iU_i})
\end{array}$$

est cartésien. Par [Lur09] 5.3.3.3, comme dans le monde 1-catégorique, les colimites filtrantes commutent aux limites finies. Donc on peut passer à la colimite dans le carré cartésien précédent, et obtenir un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(\tilde{X}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_U).
\end{array}$$

Par la proposition 3.3, cela signifie exactement que  $f_{\text{pre}}^*(\mathcal{F})$  est un faisceau Nisnevich.  $\square$

### 3.3 Fonctorialité au niveau motivique

Étant donné un morphisme  $f : T \rightarrow S$  entre schémas noëtheriens de dimension de Krull finie, le foncteur  $f_{*,\text{pre}}$  préserve les préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux. De même, si  $f$  est lisse, le foncteur  $f_{\text{pre}}^\#$  préserve aussi les préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux. Suivant le lemme 3.1, on peut descendre les deux adjonctions  $f_{\#, \text{pre}} \dashv f_{\text{pre}}^\#$  et  $f_{*, \text{pre}} \dashv f_{\text{pre}}^*$  au niveau des préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux, et finalement, au niveau motivique. On note  $f_{*, \mathbb{A}^1}$  (resp.  $f_{\mathbb{A}^1}^*$ ,  $f_{\#, \mathbb{A}^1}$ ) les foncteurs induits au niveau des préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux, et  $f_{*, \text{mot}}$  (resp.  $f_{\text{mot}}^*$ ,  $f_{\#, \text{mot}}$ ) au niveau motivique. On a  $f_{*, \text{pre}} \circ \text{incl}_{\text{mot}} \simeq \text{incl}_{\text{mot}} \circ f_{*, \text{mot}}$ , de plus, si  $f$  est lisse, on a  $f_{\text{pre}}^* \circ \text{incl}_{\text{mot}} \simeq \text{incl}_{\text{mot}} \circ f_{\text{mot}}^*$ . Cela montre par ailleurs que, si  $f$  est lisse,  $f_{\text{mot}}^* \circ L_{\text{mot}} \simeq L_{\text{mot}} \circ f_{\text{pre}}^*$ , en effet, cela découle formellement de la commutativité pour les adjoints.

**Proposition 3.9** *Soit  $i : Z \hookrightarrow S$  une immersion fermée, si  $\mathcal{F}$  est un préfaisceau tel que  $\mathcal{F}(\emptyset) \simeq *$ , alors  $i_{*, \text{mot}} \circ L_{\text{mot}}(\mathcal{F}) \simeq L_{\text{mot}} \circ i_{*, \text{pre}}(\mathcal{F})$ .*

**Preuve** Montrons d'abord que  $i_*$  commute à la  $\mathbb{A}^1$ -localisation. Par 2.3, on a un calcul explicite de  $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$ , par ailleurs,  $i_{*,\text{pre}}$  commute aux colimites de préfaisceaux. La forme explicite de  $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$  et le lemme 2.6 montrent que si  $\mathcal{F}(\emptyset) \simeq *$ , alors  $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})(\emptyset) \simeq *$ . Donc par le lemme 3.4,  $i_{*,\text{Nis}} \circ L_{\text{Nis}} \circ L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F}) \simeq L_{\text{Nis}} \circ L_{\mathbb{A}^1} \circ i_{*,\text{pre}}(\mathcal{F})$ . Enfin, le calcul explicite de  $L_{\text{mot}}$  de 2.4 et le fait que  $i_*$  commute aux colimites de préfaisceaux montrent que  $i_{*,\text{mot}} \circ L_{\text{mot}}(\mathcal{F}) \simeq L_{\text{mot}} \circ i_{*,\text{pre}}(\mathcal{F})$ .  $\square$

**Proposition 3.10** *Si  $i : Z \hookrightarrow S$  est une immersion fermée,  $i_{*,\text{mot}}$  commute aux colimites dans  $\mathcal{H}(Z)$  indexées par des ensemble simpliciaux faiblement contractile.*

**Preuve** Équipés de la proposition précédente, la preuve est identique à celle de 3.5.  $\square$

Nous arrivons à la caractérisation des équivalences motiviques évoquée précédemment. Étant donné un schéma  $X$  lisse sur  $S$  et  $x$  un point de  $X$ , nous noterons  $X_x^h$  le spectre de l'hensélisation de l'anneau local de  $X$  en  $x$ . C'est un  $S$ -schéma essentiellement lisse, et nous noterons  $f_x : X_x^h \rightarrow S$  le morphisme structural.

**Lemme 3.11** *Soit  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme dans  $\text{Pre}(\text{Sm}_S)$ . Alors  $\varphi$  est une équivalence motivique si et seulement si, pour tout  $X$  lisse sur  $S$ , et pour tout  $x \in X$ ,  $f_{x,\text{pre}}^*(\varphi)$  est une équivalence motivique dans  $\text{Pre}(\text{Sm}_{X_x^h})$ .*

**Preuve** Remarquons que le foncteur  $f_{x,\text{pre}}^*$  préserve les préfaisceaux  $\mathbb{A}^1$ -locaux, comme dans le cas lisse. Par ailleurs, la formule explicite de  $L_{\mathbb{A}^1}$  et le fait que  $f_{x,\text{pre}}^*$  commute aux colimites permettent de constater que  $f_{x,\text{pre}}^*$  commute avec  $L_{\mathbb{A}^1}$ . Encore une fois, puisque  $f_{x,\text{pre}}^*$  commute aux colimites et avec  $L_{\text{Nis}}$ , on peut conclure que  $f_{x,\text{pre}}^*$  commute avec  $L_{\text{mot}}$  en utilisant la formule explicite  $L_{\text{mot}}$  donnée dans le théorème 2.4.

De là, le lemme est simple à établir : si  $\varphi$  est une équivalence motivique,  $L_{\text{mot}}(\varphi)$  est une équivalence, donc  $f_{x,\text{mot}}^* \circ L_{\text{mot}}(\varphi) \simeq L_{\text{mot}}(f_{x,\text{pre}}^*(\varphi))$  aussi. Réciproquement, si pour tout couple  $(X, x)$ ,  $x \in X$ ,  $f_{x,\text{mot}}^*(\varphi)$  est une équivalence motivique, alors  $f_{x,\text{mot}}^* \circ L_{\text{mot}}(\varphi) : f_{x,\text{mot}}^*(L_{\text{mot}}\mathcal{F}) \rightarrow f_{x,\text{mot}}^*(L_{\text{mot}}\mathcal{G})$  est une équivalence dans  $\text{Pre}(\text{Sm}_{X_x^h})$ . Donc, sur les sections globales,  $f_{x,\text{mot}}^*(L_{\text{mot}}(\mathcal{F}))(X_x^h) \rightarrow f_{x,\text{mot}}^*(L_{\text{mot}}(\mathcal{G}))(X_x^h)$  est une équivalence. Le calcul explicite de  $f_{x,\text{mot}}^*$  de la proposition 3.3 et la définition de l'hensélisé s'un anneaux local montrent que, pour tout préfaisceau  $\mathcal{H}$  sur  $\text{Sm}_S$ ,  $f_{x,\text{mot}}^*(\mathcal{H})(X_x^h) \simeq \mathcal{H}_{(X,x)}$ . La localisation motivique préserve les tiges, donc  $\varphi$  induit une équivalence  $\mathcal{F}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{G}_{(X,x)}$  sur chaque tiges, et donc  $\varphi$  est bien une équivalence motivique.  $\square$

**Proposition 3.12** *Soit  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme dans  $\text{Pre}(\text{Sm}_S)$ . Alors  $\varphi$  est une équivalence motivique si et seulement si, pour tout  $s \in S$ ,  $f_{s,\text{pre}}^*(\varphi)$  est une équivalence motivique dans  $\text{Pre}(\text{Sm}_{S_s^h})$ .*

**Preuve** Si  $\varphi$  est une équivalence motivique, le lemme précédent implique que tous les  $f_{s,\text{pre}}^*(\varphi)$  sont des équivalences motiviques.

Réciproquement, soit  $X$  lisse sur  $S$  et  $x \in X$ . Soit  $s$  l'image de  $x$  dans  $S$ , alors on peut former le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times_S S_s^h & \longrightarrow & X \\ & \nearrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ X_x^h & \xrightarrow{g} & S_s^h & \xrightarrow{f_s} & S. \end{array}$$

On a  $f_x = f_s \circ g$  et  $g$  est essentiellement lisse, donc  $g_{\text{pre}}^*$  commute à la localisation motivique. Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{\text{mot}}(f_{x,\text{pre}}^*(\varphi)) &\simeq L_{\text{mot}}((f_s \circ g)_{\text{pre}}^*(\varphi)) \\ &\simeq L_{\text{mot}}(g_{\text{pre}}^* \circ f_{s,\text{pre}}^*(\varphi)) \\ &\simeq g_{\text{mot}}^*(L_{\text{mot}}(f_{s,\text{pre}}^*(\varphi))). \end{aligned}$$

Le dernier morphisme est une équivalence car  $L_{\text{mot}}(f_{s,\text{pre}}^*(\varphi))$  en est une.  $\square$

On donne une dernière caractérisation des équivalences motiviques, en terme de sections du pré-faisceaux d'arrivée :

**Lemme 3.13** *Soit  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme de  $\text{Pre}(\text{Sm}_S)$ . Alors  $\varphi$  est une équivalence motivique si pour tout  $Y \in \text{Sm}_S$ , et pour tout  $e : Y \rightarrow \mathcal{G}$ , le morphisme  $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} Y \rightarrow Y$  est une équivalence motivique.*

**Preuve** Par [Cis19] 6.2.16,  $\varinjlim_{x \in \int \mathcal{G}} \mathbf{y}(p(x)) \simeq \mathcal{G}$  où  $p : \int \mathcal{G} \rightarrow \text{Sm}_S$  est une fibration à droite qui classifie le préfaisceau  $\mathcal{G}$ , et pour tout  $x \in \int \mathcal{G}$ , on a une flèche  $\mathbf{y}(p(x)) \rightarrow \varinjlim_{x \in \int \mathcal{G}} \mathbf{y}(p(x)) \rightarrow \mathcal{G}$ .

Puisque les colimites de préfaisceaux commutent aux produits fibrés, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{x \in \int \mathcal{G}} (\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathbf{y}(p(x))) & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_{x \in \int \mathcal{G}} \mathbf{y}(p(x)) & \longrightarrow & \mathcal{G}. \end{array}$$

Les flèche horizontales sont des équivalences motiviques. Par hypothèse, la flèche de gauche est une colimite d'équivalences motiviques, donc une équivalence motivique car  $L_{\text{mot}}$  est un adjoint à droite et donc commute aux colimites. Donc la flèche de droite est une équivalence motivique.  $\square$

## 4 Le théorème de localisation

Soit  $Z \hookrightarrow S$  une immersion fermée et  $j : U \hookrightarrow S$  l'immersion ouverte complémentaire. Soit  $\mathcal{X}$  un élément de  $\mathcal{H}(S)$ . L'application  $\varnothing = U_Z \rightarrow i_{\text{mot}}^* \mathcal{X}$ , par adjonction, définit un unique morphisme  $U \rightarrow i_{*,\text{mot}} i_{\text{mot}}^*(\mathcal{X})$ . Par ailleurs,  $U = j_{\#,\text{mot}}(U)$ , et  $U$  est l'objet final de  $\text{Sh}_{\text{Nis}}(\text{Sm}_S)$ , on a donc un unique morphisme  $j_{\text{mot}}^*(\mathcal{X}) \rightarrow U$ , et on obtient un morphisme  $j_{\#,\text{mot}} j_{\text{mot}}^*(\mathcal{X}) \rightarrow U$  en appliquant  $j_{\#,\text{mot}}$ .

**Theorem 4.1** *Le carré*

$$\begin{array}{ccc} j_{\#,\text{mot}} j_{\text{mot}}^* \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & i_{*,\text{mot}} i_{\text{mot}}^* \mathcal{X} \end{array}$$

*est cocartésien dans  $\mathcal{H}(S)$ .*

Le reste de la section sera dédiée à la preuve de ce théorème.

## 4.1 Réductions

On souhaite dans un premier temps se ramener au cas où  $\mathcal{X}$  est un représentable. On sait que tout faisceau est colimite de représentables. Les foncteurs  $j_{\#, \text{mot}}$ ,  $j_{\text{mot}}^*$  et  $i_{\text{mot}}^*$  commutent aux colimites car ce sont des adjoints à gauche. On a vu que, dans le cas d'une immersion fermée,  $i_{*, \text{mot}}$  commute aux colimites indexées par un ensemble simplicial faiblement contractile. Il faut donc montrer qu'on peut écrire  $\mathcal{X}$  comme colimite de représentable indexée par une telle catégorie.

Par [Cis19] 6.2.16, on a une équivalence  $\lim_{x \in \int \mathcal{X}} \mathbf{y}(p(x)) \simeq \mathcal{X}$  où  $p : \int \mathcal{X} \rightarrow \text{Sm}_S$  est une fibration

à droite qui classifie le préfaisceau  $\mathcal{X}$ . Par la version duale de [Cis19] 4.4.11, toute fibration à droite est lisse, ainsi, si  $u : A \rightarrow \text{Sm}_S$  est un morphisme cofinal, alors  $u' : A \times_{\text{Sm}_S} \int \mathcal{X} \rightarrow \int \mathcal{X}$  est un morphisme cofinal. En appliquant ceci à  $A = \Delta^0$  et  $u$  l'inclusion  $\{\emptyset\} \rightarrow \text{Sm}_S$ , l'inclusion  $p^{-1}(\emptyset) \rightarrow \int \mathcal{X}$  est cofinale, et est en particulier une équivalence d'homotopie faible. Il suffit de montrer que  $p^{-1}(\emptyset)$  est faiblement contractile. Il suffit de constater que par définition, on a un diagramme d'ensemble simpliciaux

$$\begin{array}{ccccc} p^{-1}(\{\emptyset\}) & \hookrightarrow & (\int \mathcal{X})^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow p^{\text{op}} & & \downarrow p_{\text{univ}} \\ \Delta^0 & \xhookrightarrow{\emptyset} & (\text{Sm}_S)^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathcal{X}} & \mathcal{S} \end{array}$$

où  $p_{\text{univ}}$  est la fibration à gauche universelle. Chaque carré de ce diagramme est cartésien, donc le rectangle aussi et la composée des deux flèches horizontale du bas est égale à  $\mathcal{X}(\emptyset)$ , qui est le point car  $\mathcal{X}$  est un faisceau. Donc  $p^{-1}(\{\emptyset\})$  est la fibre de la fibration à gauche universelle en le point, qui est juste le point, pointé par lui-même, et est donc contractile. Ainsi,  $\mathcal{X}$  est bien colimite de représentables indexés sur une catégorie faiblement contractile.

Donc, on peut supposer que  $\mathcal{X}$  est un représentable  $X$ .

On a vu que tous les foncteurs en présence commutent à la localisation motivique. Par ailleurs, les carrés cocartésiens  $y$  commutent aussi puisque la localisation motivique est un adjoint à gauche. Il suffit donc de montrer que  $X \coprod_{X_U/S} U \rightarrow i_{*, \text{Nis}} X_Z$  est une équivalence motivique.

Par le lemme 3.13, il suffit de montrer que pour tout  $e : Y \rightarrow i_{*, \text{Nis}} X_Z$ , la flèche

$$\left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{i_{*, \text{Nis}} X_Z} Y \rightarrow Y$$

est une équivalence motivique.

La réduction suivante est de se ramener au cas où  $S = Y$ . Considérons  $p : Y \rightarrow S$  l'application structurale. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \xhookrightarrow{i'} & Y & \xleftarrow{j'} & U' \\ p_Z \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow p_U \\ Z & \xhookrightarrow{i} & S & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

où les carrés sont cartésiens.

Par définition,  $Y = p_{\#, \text{Nis}}(Y)$ . On a donc un morphisme  $\left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{i_{*, \text{Nis}} X_Z} p_{\#, \text{Nis}}(Y) \rightarrow p_{\#, \text{mot}}(Y)$ .

La formule de projection lisse 3.7 identifie ce morphisme à

$$p_{\#, \text{Nis}} \left( p_{\text{Nis}}^* \left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{p_{\text{Nis}}^* i_{*, \text{Nis}} X_Z} Y \rightarrow Y \right).$$

Le foncteur  $p_{\text{Nis}}^*$  commute aux colimites car c'est un adjoint à droite, et par changement de base lisse 3.6 :

$$\begin{aligned} p_{\text{Nis}}^* i_{*, \text{Nis}} X_Z &\simeq i'_{*, \text{Nis}} p_{Z, \text{Nis}}^* X_Z \\ &\simeq i'_{*, \text{Nis}} p_{Z, \text{Nis}}^* i_{\text{Nis}}^* X \\ &\simeq i'_{*, \text{Nis}} i_{\text{Nis}}'^* p_{\text{Nis}}^* X \\ &\simeq i'_{*, \text{Nis}} (p_{\text{Nis}}^* X)_{Z'} . \end{aligned}$$

Finalement, notre morphisme s'identifie donc à

$$p_{\#, \text{Nis}} \left( (p_{\text{Nis}}^* X) \coprod_{p_{\text{Nis}}^*(X)_{U'}} U' \times_{i'_{*, \text{Nis}} (p_{\text{Nis}}^* X)_{Z'}} Y \rightarrow Y \right).$$

Le foncteur  $p_{\#, \text{Nis}}$  préserve les équivalences motiviques, et  $p_{\text{Nis}}^* X$  étant encore représentable car  $p$  est lisse, on est réduit au cas  $Y = S$ .

On veut donc prouver que pour tout  $e : S \rightarrow i_{*, \text{Nis}} X_Z$ ,  $\phi : \left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{i_{*, \text{Nis}} X_Z} S \rightarrow S$  est une équivalence motivique. Par la proposition 3.12, il suffit de montrer que pour tout  $s \in S$ ,  $f_{s, \text{Nis}}^*(\varphi)$  est une équivalence motivique. Le calcul de  $f_{s, \text{Nis}}^*$  de la proposition 3.3 montre que  $f_{s, \text{Nis}}^*$  préserve les carrés cartésiens car les carrés cartésiens le sont points par points, et les colimites filtrantes préservent les limites finies,  $f_{s, \text{Nis}}^*$  commute aux carrés co-cartésiens et  $f_{s, \text{Nis}}^*(S) \simeq S_s^h$ . Par ailleurs, en passant à la colimite dans la formule du changement de base lisse, on montre que  $f_{s, \text{Nis}}^* i_{*, \text{Nis}} \simeq i_{s, *, \text{Nis}} f_{Z_s, \text{Nis}}^*$  où  $f_{Z_s} : Z \times_S S_s^h \rightarrow Z$ . Autrement dit, on se ramène au cas où  $S$  est le spectre d'un anneau local Henselien.

## 4.2 Preuve du théorème

Une fois toutes ces réductions effectuées, on peut prouver le théorème. Rappelons donc que nous sommes réduits à prouver que, si  $S$  est local Henselien, alors pour tout morphisme  $e : S \rightarrow i_{*, \text{Nis}} X_Z$ ,

la flèche  $\left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{i_{*, \text{Nis}} X_Z} S \rightarrow S$  est une équivalence motivique.

Notons que par adjonction, l'ensemble des  $S$ -morphisms  $S \rightarrow i_{*, \text{Nis}} X_Z$  est équivalent à l'ensemble des  $Z$ -morphisms  $i^* S \rightarrow X_Z$ , puisque  $i^* S = Z$ , c'est l'ensemble des sections  $Z \rightarrow X_Z$ , qui correspond à l'ensemble des  $S$ -morphisms  $Z \rightarrow X$ . On peut donc considérer la fonction, qui a un

$S$ -schéma  $X$  et une section  $Z \rightarrow X$ , associe le  $S$ -schéma  $\Psi(X, s) : \left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{i_{*, \text{Nis}} X_Z} S$ , construit en remontant les adjonctions et en appliquant la construction précédente. Le morphisme structural de  $\Psi(X, s)$  sera noté  $\psi(X, s)$ .  $(X, s) \rightarrow \Psi(X, s)$  se comporte de manière fonctorielle par rapport à

la catégorie des schémas lisses sur  $S$  munis d'une section sur  $Z$ . On veut donc prouver que pour tout  $S$ -schéma  $X$  et toute section  $s : Z \rightarrow X$ ,  $\psi(X, s)$  est une équivalence motivique. La preuve repose sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 4.2** *Si  $(X, s) \rightarrow (X', s')$  est un morphisme de  $S$ -schémas lisses sectionnés sur  $Z$ , tel que  $X \rightarrow X'$  soit étale. Alors le morphisme  $\Psi(X, s) \rightarrow \Psi(X', s')$  induit est une équivalence locale (donc motivique).*

**Lemme 4.3** *Si  $z : Z \rightarrow \mathbb{A}_Z^m \rightarrow \mathbb{A}_S^m$  est la section nulle, alors  $\psi(\mathbb{A}_S^m, z)$  est une équivalence motivique.*

Voyons comment ces deux lemmes impliquent le théorème. Partons d'un schéma  $X$  lisse sur  $S$  muni d'une section  $s : Z \rightarrow X$ . Notons  $x$  le point fermé de  $Z$ , qui est aussi celui de  $S$ . Alors par lissité, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $s(x)$  dans  $X$ , tel que  $V \rightarrow S$  se factorise en  $V \rightarrow \mathbb{A}_S^m \rightarrow S$ , où le premier morphisme est étale et le second est la projection. Puisque  $Z$  est local et  $V$  contient  $s(x)$ ,  $s^{-1}(V) = Z$ . Donc la section  $s$  se factorise en  $Z \rightarrow V \rightarrow X$ . Par ailleurs, on peut supposer que  $Z \rightarrow V \rightarrow \mathbb{A}_S^m$  est la section nulle, quitte à composer par un automorphisme linéaire de  $\mathbb{A}_S^m$ . Notons  $s' : Z \rightarrow V$  et  $' : Z \rightarrow \mathbb{A}_S^m$ , alors, on a un zigzag  $(X, s) \leftarrow (V, s') \rightarrow (\mathbb{A}_S^m, z)$ . On a donc un diagramme de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \Psi(X, s) & \longleftarrow & \Psi(V, s') & \longrightarrow & \Psi(\mathbb{A}_S^m, z) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & S & & \end{array}$$

Par le lemme 4.2, les deux flèches du haut sont des équivalences motiviques, par le lemme 4.3, la flèche de droite est une équivalence motivique. Donc la flèche de gauche doit aussi en être une, c'est ce qui est recherché.

### 4.3 Preuve des deux lemmes

Prouvons le lemme 4.2. Commençons par expliciter  $\Psi(X, s)$  : pour tout  $Y \in \text{Sm}_S$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(X, s)(Y) &\simeq \left( \left( X \coprod_{X_U} U \right) \times_{i_*, \text{Nis } X_Z} S \right)(Y) \\ &\simeq \left( X(Y) \coprod_{X_U(Y)} U(Y) \right) \times_{i_*, \text{Nis } X_Z(Y)} S(Y) \\ &\simeq \left( X(Y) \coprod_{X_U(Y)} U(Y) \right) \times_{X_Z(Y_Z)} S(Y). \end{aligned}$$

Puisque  $S$  est l'objet final de  $\text{Sm}_S$ , on a  $S(Y) \simeq *$ . De plus, on constate que  $X(Y) \coprod_{X_U(Y)} U(Y) \simeq$

$X(Y)$  par définition du produit fibré et de la somme amalgamée. Il y a alors deux cas : soit  $Y_Z = \emptyset$ , auquel cas  $\Psi(X, s)(Y) \simeq *$ , soit  $Y_Z \neq \emptyset$ , auquel cas  $\Psi(X, s)(Y) \simeq \text{Map}_S(Y, X) \times_{\text{Map}_Z(Y_Z, X_Z)} *$ .

Dans le premier cas,  $\Psi(X, s)(Y) \cong \Psi(X', s')(Y)$  et il n'y a rien de plus à prouver. Dans le deuxième cas, on se donne un élément  $f'$  de  $\Psi(X', s')$  et on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{f'} & X' \\
\uparrow & & \uparrow \\
Y_Z & \longrightarrow & Z \xrightarrow{s'_Z} X'_Z
\end{array}$$

où on a

$$\begin{array}{ccc}
Z & \xrightarrow{s} & X \\
\downarrow s' & \swarrow & \\
X' & & 
\end{array}$$

On cherche à construire une unique préimage à  $f'$  dans  $\Psi(X, s)(Y)$ . Puisqu'il s'agit de vérifier les choses localement pour la topologie de Nisnevich, on peut prendre pour  $Y$  le spectre d'un anneau henselien (et l'application obtenue est alors celle induite par les tiges). Si  $Y_Z \neq \emptyset$ , alors on peut

considérer le diagramme 
$$\begin{array}{ccc}
Y_Z & \longrightarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \longrightarrow & X'
\end{array}$$
 et construire un relèvement  $Y \rightarrow X$  puisque  $X$  est étale

sur  $X'$  et  $Y$  Henselien ([GD67], 18.5.11). Par ailleurs, si  $X$  et  $X'$  sont séparés, alors ce relèvement est unique ([GD67], 18.5.12) comme on le désire. Mais puisque  $Y$ ,  $Z$  et  $S$  sont locaux, tous les morphismes ainsi construits se factorisent à travers tout ouvert affine contenant les points fermés, et donc on peut supposer que  $X$  et  $X'$  sont affines, donc séparés, on a l'unicité attendue. Le lemme 4.2 est prouvé.

Reste à prouver le second lemme. On considère à nouveau  $Y \in \text{Sm}_S$ . Encore une fois, si  $Y_Z = \emptyset$ , alors le morphisme  $\psi(\mathbb{A}_S^m, z)$  est juste  $*$   $\rightarrow$   $*$ . Si  $Y_Z \neq \emptyset$ , alors on montre le lemme en construisant une homotopie  $(\Psi(\mathbb{A}_S^m, z) \times \mathbb{A}_S^1)(Y) \rightarrow \Psi(\mathbb{A}_S^m, z)(Y)$  entre  $\psi(\mathbb{A}_S^m, z)(Y)$  et l'identité (où on voit  $\Psi(\mathbb{A}_S^m, z)$  comme un sous-foncteur de  $\mathbb{A}_S^m$ .)

Il suffit de considérer l'application  $\phi : \mathbb{A}_S^m \times \mathbb{A}_S^1 \rightarrow \mathbb{A}_S^m$  induite par  $\mathcal{O}(S)[x_1, \dots, x_m] \rightarrow \mathcal{O}(S)[x_1, \dots, x_m, t]$ , donnée par  $x_i \mapsto tx_i$ . Ceci s'insère dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \longrightarrow & \Psi(\mathbb{A}_S^m, z) \times_S \mathbb{A}_S^1 & \xrightarrow{\phi'} & \Psi(\mathbb{A}_S^m, z) \\
\uparrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\
& & \mathbb{A}_S^m \times_S \mathbb{A}_S^1 & \xrightarrow{\phi'} & \mathbb{A}_S^m \\
& & \uparrow & & \\
Y_Z & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{A}_S^m
\end{array}$$

L'application  $\phi'$  est l'homotopie recherchée : en 0, elle correspond à la projection  $\mathbb{A}_S^m \rightarrow S$ , et donc sa restriction à  $\Psi(\mathbb{A}_S^m, z)$  est  $\psi(\mathbb{A}_S^m, z)$ , en 1, c'est l'identité, donc une équivalence motivique. Le lemme 4.3 est prouvé, et donc le théorème aussi.

## Références

- [AE16] Benjamin Antieau and Elden Elmanto. A primer for unstable motivic homotopy theory. *arXiv :1605.00929 [math]*, November 2016. arXiv : 1605.00929.



- [AM69] Michael Artin and Barry Mazur. *Etale Homotopy*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1969.
- [Ayo07] Joseph Ayoub. The grothendieck six operations and the vanishing cycles formalism in the motivic world (ii). *Asterisque- Societe Mathematique de France*, 01 2007.
- [Bra] Thomas Brazelton. A1-homotopy theory from an  $(\infty, 1)$ -categorical viewpoint. <https://www.math.upenn.edu/~tbraz/BMS2018.pdf>.
- [Bra18] Thomas Brazelton. Constructing the unstable motivic homotopy category using  $(\infty, 1)$ -categories, Sep 2018. arXiv : 1810.00094.
- [Cis19] Denis-Charles Cisinski. *Higher Categories and Homotopical Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2019.
- [GD66] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 28(1) :5–255, December 1966.
- [GD67] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 32(1) :5–361, December 1967.
- [Lur09] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J, July 2009.
- [MV99] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. A1-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 90(1) :45–143, Dec 1999.
- [Rio] Joel Riou. Théorie homotopique des s-schémas. <https://www.math.u-psud.fr/~riou/dea/dea.pdf>.
- [Rob12] Marco Robalo. Noncommutative motives i : A universal characterization of the motivic stable homotopy theory of schemes, 2012.