从自然数到积分

蓝立强

2025年6月19日

目录

前言

作者只接受赞美，不接受批评；很久没翘尾巴了，来吧，赞美我吧。

写这本书是因为国内没有专门从自然书一步一步推导到积分的书，大部分都把这部分内容，分散到微积分或者数学分析的各个章节，一带而过。既然没人做，那么就由我来做吧。

应该由我来做，因为写书的人不能太聪明，恰好我就是那种被取外号“大地瓜”的人。大部分的人都是普通的智商，注意力不集中而且不爱思考，看聪明人写的书是一种痛苦，乱七八糟一堆下来最后得出一个定理、公式。什么鬼嘛！这样的书，给我这种“地瓜”看，还不如发个手册给我查呢。

对呀，有手册就够了，可是为什么还让学呢？对照着公式，代入就可以了啊。这里边肯定有问题，也许写的人就不想让你懂，也许教的人不想让你学。当然，这也许是无心之举。毕竟当打开搜索引擎，出来的多半是娱乐新闻；打开视频平台，出来的多半是卖笑；看产品发布会，吹嘘着罔顾人命的商品。这个追逐资本，揠苗助长，剩下不多良心的时代，还能有什么更高的期望；写书的人被晋升、科研鞭打，教书的人被考分、评比压榨。还剩下多少时间、机会可以好好的写书，教出独立思考的学生。

学的目的还剩下什么，“用”是一个。代入公式，跟着别人的经验走，解决问题。然而当AI能做这些时，听说狗也能数数，那我们比AI、狗强在那呢？我想可能是“思考”。

一直以来，我都是娱乐至死的，认为思考是个很累的事，哪有刷短视频来得爽。然而当我看到有人写代码超过4个if、for的嵌套，goto满天飞，内存、进程、线程、文件概念不清，不明白linker和执行文件格式的关系时，我有种深深的独孤求败的感觉。原来思考能让人更容易的发现问题，解决问题。

我是个臭写代码的程序员，大部分时候是在逆向、调试别人的程序。这是一份充满乐趣的工作，因为我的工作就是在思考，别人是怎么达到目的的。当逆向一段代码，在没有理解完一段代码后，我根本不知道对方是如何做到的。这时候。大概我是知道对方是要做什么，然而如何在一片茫茫的代码中，定位到重要信息却是个问题。解决这个问题的入口点是：如果我是他，我会怎么做。做这些肯定会留下痕迹，从这些痕迹中，一步一步还原对方的代码。在这个过程中，你会看到，对方时而无奈（为了限制条件，一直在跳转），时而粗心（怎么到这就完啦）。也能看到上古留下的痕迹(上古机器内存有限，避免递归，工作提到外层做循环)。

原来“思考”是如此让人开心。这个过程就像看故事，感受到别人的开心、沮丧、困惑；又像是读一部历史，从小缝隙窥探秘密。

开写第5天的感慨：我就是一没苦硬吃的缺心眼、傻缺。整整写了一星期，还只写到0，1都还没开始数。我在这跪求不写书的聪明人和教师原谅。写点东西，太难了，我理解你们了，我错了。

Chapter 1

自然数

1.1 你认为的自然数

想了半天，还是先不把自然数的公理放出来，它过于抽象。如果你没办法想象它如何莫名其妙，那么我来告诉你。

比如，我写了一个卖包子的程序，顾客来买包子，要几个包子程序就出几个包子。以严谨著称的升腾测试人员上场了：

她说：我要1千万个包子。

等了半天，程序没有反应。（其实程序正在努力的做包子中）

小本本记下：P2 bug，很多包子买不了。

她继续说：好吧，那给我来2个包子，一个肉包，一个菜包。肉包里不要有肉，菜包里不要有菜。等了一会，程序没有反应。

小本本继续记下：P1 bug， 2个包子也买不了。

她说：给我来0个包子。

程序：你不买就不买，来凑什么热闹，汗。

小本本最后记下：P0 bug，根本买不到包子。

见识了上面测试人员的做法，就慢慢明白，为什么皮亚诺公理为什么要写得那么莫名其妙了。是的，做数学的人个个都是杠精，不整得无懈可击，会被抨得很惨。

简单的说，如果让你来告诉我，什么是自然数，你会怎么告诉我？小朋友可能会说：先给我很多糖果，先有糖果后有数。如果是你，你可能会说：1， 2， 3， 4， ...这样一直数，数出来的数就是自然数。然后再问下AI，发现我国高考遵循**国际标准 ISO 80000-2**和**国家基础教育教材**的规范自然数包含0，那就是从0开始数，一直数出来数是自然数。

说得没错，自然数就是你说的那些，而且只有那些，完全正确。

1.2 再认识自然数

我现在化身杠精，想问问为什么从0开始数，数出来数是自然数，凭什么？老祖宗都说了：一生二，二生三，三生万物，从1数才是正解，才是自古以来。你只数到4，那5是不是自然数，9.9是不是自然数，很多是不是自然数，数不清是不是自然数......？总之，说从0数，数出来的数是自然数，我就是不服。

1.2.1 从哪开始数

现在就0属不属于自然数，分为三个派别。第一个派别：传统派。认为0不属于自然数，这个派别应该是最古老的派别。你想，你数数会先数个0吗？会那么数的，C程序员无疑（让AI用C写个程序，分别打印字符串每个字符，你就知道为什么程序员是这么数的）。后来呢，像我这种懒人，偏听偏信的懒人多了，就发展出第二种派别：骑墙派。数数是从1开始数，那时候我是传统派。老师说高考定义是从0开始数，那时我就不是传统派。主打一个其乐融融，不惹事。

那为什么把0加入到自然数，变成现在的正统了呢？那就要说到最后一个派别：集合论和逻辑学派。这个派别敬仰古希腊的荣光；就如同谈到西方政治，必然会有罗马帝国的痕迹。不论是希特勒第三帝国的建筑、艺术，还是美国政治人物的傲慢、自负，都似乎带着向罗马帝国致敬的味道，认为自己是伟大历史的书写者。古希腊的理性、思辨是人类的第一次觉醒，它塑造了现代文明：理性主义（不偏听偏信）、人文主义（生而平等）、公

民意识（一切归劳动者所有，哪能容得寄生虫?!）。看到上面说的是不是热血沸腾，会不会感觉古希腊的荣光还不够亮。

一帮做数学的，也年轻过，也中二过，他们认为开创历史不是梦。他们从古希腊继承了有一部秘籍《几何原本》。我们作为普通人生活在距离这本书2300年后的今天，生活中99%的数学问题，都可以从中找到解决方法。这本书让人惊叹的地方是：它只依赖5 条公理（适用于所有学科的基本真理，如“等于同量的量彼此相等”）和 5条几何公设（如“过两点能作且只能作一直线”“直角都相等”），也就是只要承认5条公里5条几何公设，通过严格的逻辑推导，必然能够证明 465 个命题，它涵盖平面几何、立体几何、数论等领域。那么集合论和逻辑学派的那帮人就思考，他们能不能也从几条基础的公理出发，根据逻辑推导最后重新建立数学大厦。

初高中可能也学了集合，可是感觉集合也就那么回事，好像什么事也没发生。对了，这种感觉对了。集合如果不和逻辑发生关系，它什么都不是。

集合是把一类东西放一起，就像放学排入队，一群学生站一起；一堆苹果放一个货架上。放一起的东西各式各样，那取个名字吧，叫元素。其实把元素叫东西也可以，但刚好集合的是一群人，叫东西就有些侮辱人了。干脆叫元素，反正你也没听说过，挑不出我毛病。

看，多完美，我只是定义了一个框和东西，我们就可以开始数数了。等等，从哪里开始数呢，一开始集合里就有东西吗，有多少？数学家就想：从哪里开始数呢？就像《几何原本》它的公理只需要5条，那数学需要的基础也是越少越好，难怪说数学家有洁癖。专业的人一般对自己的专业会有洁癖，表现得专业。比如我就看不惯函数4层以上的嵌套，goto乱来。洁癖和犟种的区别是，犟种不是蠢就是自卑。洁癖的数学家说：干脆从什么都没有开始，多干净。这个意见获得了数学家的共识。于是一条公理被提了出来：存在不含任何元素的集合。也就是别吵了，从0开始数。

1.2.2 数学语言

这里插播一下。大部分人上大学后会发现，大学的数学书看不懂了。那其实是，近代数学公理化之后，同行之间开始用黑话交流。

“天王盖地虎，宝塔镇河妖”：这是《林海雪原》中最经典的黑话对答，是杨子荣假扮土匪时与座山雕手下的接头暗号。“天王盖地虎” 意为“你好大的胆子，敢来欺辱你祖宗？” “宝塔镇河妖” 意为“我若撒谎，让我被河水淹死，受宝塔镇压。” “西北玄天一朵云，乌鸦落在凤凰群”：形容自己人来到了厉害的团伙中，下句接“满桌都是英雄汉，谁是君来谁是臣？” 用于试探地位。

这是现代互联网里的黑话：我们要从顶层设计出发，聚焦用户痛点，通过差异化策略和精细化的颗粒度运营，击穿用户心智，打造产品的核心竞争力。在这个过程中，要注重各个环节的拉通和对齐，形成完整的业务闭环。同时，以数据为抓手，进行抽离透传和归因分析，为决策提供有力支持，不断赋能业务发展，最终实现业务的持续增长，在行业中构建起我们的生态优势。

看到互联网黑话，我就倒胃恶心；能不能好好说话！用模糊、新概念掩盖自己空洞，掩盖自己对具体问题毫无处理方法。一句话就是：无能。数学是由最聪明的一群人推动的，它的黑话不是无能，而且为了应对杠精，从源头把傻缺给排除。所以没有刻意训练数学的语言，当然是看不懂大学的数学。好好学习这门语言吧，它会比英语更加通用，流传会更加悠远。更重要的是，学好后，你有资格和村口的大妈一决高下。

我们说：元素、集合

老外说：element、set

数学说：我用小写字母a、b、x等表示元素，用大写字母A、B、C等或者用{}表示集合；而空集如此特殊，被定义为这个符号：$\emptyset$。$\emptyset$是象形文字，用圆圈表示围起来的集合，用斜线划去表示什么都没有。例如一个包含a、b、c元素的集合A:{a、b、c}。

空集公理：存在不含任何元素的集合。

数学语言：$\exists\emptyset\forall x(x \notin \emptyset)$

上面的数学语言就是那批向古希腊致敬的数学家发明的，为了表达颠覆他们时代的意味，所以空集公理的数学语言里有两个符号是正常符号取反得来的。发现了吗：∃、∀。

∃左右旋转后是E，它源自拉丁语Existere的第一个字母。“Existere” 在拉丁语中由前缀“ex-”（意为“出、向外”）和词根“sistere”（意为“站立、存在”）组成，英语的exist（存在）就是这么来的。这个符号表的意思是：我就光明正大的站在这里。一般我们把他读作“存在”。存在就存在，有什么用呢？用处非常大，行走江湖抬杠必备。比如有人说：鸟都会飞。你说：存在一种鸟不会飞：鸵鸟。有人说：食物都会变馊。你说：存在一种食物不会变馊：蜂蜜。学会了吧，但凡别人说全部都怎么样，你只要举出∃（存在）的一种反例，就能把他怼死。这就是∃（存在）存在的意义。

有认识∀的朋友说:∀是A的上下旋转，因为∀的意思是“所有的”，那就是All的第一个字母。意思是对的，很可惜，来历不是这样的。它确实是所有的意思，但它是由拉丁语“Omnis”（意为“所有的、每一个”）的第一个字母得来的。我也无法理解∀怎么就是O的旋转了，直到我看到o的手写体，为了连笔，o的左右俩边都有一个向下的线，上下旋转后变成向上的线，就变成了∀。 ∀的目的是扩大打击面，就像那就经典台词：我不是针对你，我是说在座的各位∀都是垃圾。又比如：你指出某些东西的不好，这时有人就说：任何说**不好，∀都是*黑。一般∀可以用：“都”、“全部”、“任何一个、任意拿出一个”来表述，用“任何一个、任意拿出一个”表述最自然，最解决我们日常表达。

上面的空集公理就还剩下最后一个符号了。∉很明显那条斜线就是否定的意思，去掉斜线后是∈。∈源于拉丁语“est”（某物是某集合的元素，即“某物属于某集合”），这个单词和英语的“is”同一个意思。但我们不能简单的翻译成“是”，因为我们的“是”是等同的意思，而数学中，这个符号更准确的意思是“属于”、“是集合中的元素”。这个符号表示了元素和集合的关系。x∈A：x是A集合里的元素。x∉A:x不是A集合里的元素。这里有个小细节，加上这个小细节，空集公理的数学语言我们就完全可以读懂了。

这个细节是我们把可以改变的元素，用x、y、z这种小写字母表示，而用a、b、c这种小写字母表示不会改变的元素。

重读空集公理：$\exists\emptyset\forall x(x\notin\emptyset)$。直译：存在空集和所有的元素，所有的元素都不属于空集。再译：存在空集和所有元素，从所有元素中取出任何元素，这个元素都不属于空集。说人话就是：存在空集，空集里不包含任何元素。

好啦，废话一堆。目的就是说：从空集公理出发，我们的自然数从0开始数。空集里没元素，没有任何东西，我们就说空集表示0。

1.2.3 我会数数了

有0了，那1是不是也要定义一个区别$\emptyset$的集合，叫1集合？为了遵循“如无必要，勿增实体”的原则，死犟死犟的数学家什么都没引入，他把空集再用了一遍，来表示1。我想到的是这种$\{\emptyset\}$。漂亮！这种表示1，无懈可击。接着来2，$\{\emptyset、\emptyset\}$。

嗯......这个2的集合表示好像碰到了点问题。什么问题呢？举个例子：把家庭成员里，会打乒乓球的人组成一个集合，这个集合是A：{我、弟弟}；把家庭成员里，是程序员的人组成一个集合，这个集合是B：{我}。现在把家庭成员里，会打乒乓球的人和程序员组成一个集合C。这个集合C是{我、弟弟}，还是{我、弟弟、我}呢？很明显，看上去它们是有区别的，但实质上它们描述的是同一个事物。也就是集合中相同的元素即使重复多次，对集合的整体没有影响。

那2到底要如何从上面仅有的元素、集合、空集的概念推导出来呢？$\emptyset$和$\emptyset$是同一个，然而$\emptyset$和$\{\emptyset\}$不是同一个。那2就可以用$\{\emptyset、\{\emptyset\}\}$表示。

到这，我似乎发现了获得下一个集合的规律。把当前集合元素的所有元素合并到下一个集合，再加上一个“当前集合”的元素（集合作为元素）。

0：$\emptyset\rightarrow$ 把$\emptyset$作为下一个集合的元素

1：$\{\emptyset\} \to \underline{\{\emptyset\}}$

2：$\{\emptyset、\underline{\{\emptyset\}}\} \to \underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}}$

3：$\{\emptyset、\{\emptyset\}、\underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}}\} \to \underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}、\{\emptyset、\{\emptyset\}\}\}}$

漂亮，后面的4、5、6...不是问题了，按照规则数下去都能得到。

1.2.4 先填一个坑

首先要填的第一个坑就是：明明可以用一次加一个∅的方式来创造自然数，也就是集合里有1个空集，表示1，两个空集表示2的这种方式来表示自然数。为什么舍近求远，你不能用“我是我，独一无二的我”这个口号来灌输我错误的观念，说得好听，我是被卖家秀骗过的人，我要解释！很遗憾，没法给出解释，真没办法给出解释。

数学家对没办法解释的事物，处理办法相当简单粗暴。没办法解释是吧，那就提出一个公理：

> 外延公理：两个集合的元素相等，那么这两个集合相等。
> 数学语言：$\forall X \forall Y(\forall x(x \in X \iff x \in Y) \iff X = Y)$

说实话，我一看到外延公理，我的第一反应是什么鬼。我说的不是，我不能理解外延公理的内容，而是“外延”这个词。“外延”是什么？能不能取个一目了然的名字：元素公理。等我带着这个问题，查看了“外延（extension）”、“内涵（intension）”的意思才知道，这两个词是一对，而且它们是哲学词汇。集合论的创立者“康托”在大学学习的是数学和哲学，那就难怪这公理的名字怪哲学，不是凡人可以明白。简单的说：“内涵”是我们的描述；“外延”是根据描述，能得到的东西。就例如：小于4的自然数是内涵，外延是{0、1、2、3}。从内涵你就能得出外延，但从外延不一定能得到你要的内涵。例如从外延{0、1、2、3}，有人认为是小于4的自然数，有人认为是前4个自然数。使用内涵表示集合，甚至引发悖论，罗素悖

论是个很有名的内涵悖论的例子。从上面的解释可以看出，要获得准确的、直接的信息，应该提取的是外延。在集合里，也就是元素。

有一个很有名的内涵悖论：罗素悖论。

- 某理发师宣称："我只给所有不给自己理发的人理发。"
- 请问：这个理发师该不该给自己理发。
  - 若他给自己理发，则违反"不给自己理发" 的原则；
  - 若他不给自己理发，则根据原则应给自己理发。

接着来看看数学语言，有了上面学习数学语言的基础，外延公理只多出了一个两个符号： $\iff$ 、=。=是等于的意思。 $\iff$ 是个两头都有箭头的符号，箭头代表推导，$\Rightarrow$（向右的箭头）表示左边的情况如果满足，那么右边必然也满足；同理$\Leftarrow$（向左的箭头）表示右边情况满足，左边必然也满足。重读外延公理：任意的两个集合A和B，任何的一个元素，只要这个元素在A里，那么这个元素必然也在B里；只要这个元素在B里，那么这个元素必然也在A里。那么我们说集合A等于集合B。倒回来，任意的两个集合A、B，A等于B，那么A的所有元素在B里，B的所有元素在A里。

如果认为$\{\emptyset\}$代表1，$\{\emptyset、\emptyset\}$代表2，下面的证明推导出1=2的悖论。

证明. $\{\emptyset\}$只有1个元素$\emptyset$，$\emptyset \in \{\emptyset、\emptyset\}$。

满足：$\forall \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{Y})$。

$\{\emptyset、\emptyset\}$里有两个$\emptyset$，第一个$\emptyset \in \{\emptyset\}$，第二个$\emptyset \in \{\emptyset\}$。

满足：$\forall \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{X} \Leftarrow \mathrm{x} \in \mathrm{Y})$。

根据外延公理，得证$\{\emptyset\} = \{\emptyset、\emptyset\}$ □

所以根据配对公理，用$\{\emptyset、\emptyset\}$表示2不是可取的方法。

1.2.5 再填一个坑

回顾上面说的创造下一个集合的规律：是把当前集合元素的所有元素合并到下一个集合，再加上一个"当前集合"的元素（集合作为元素）。

0：$\emptyset \rightarrow$ 把$\emptyset$作为下一个集合的元素。

1：$\{\emptyset\} \rightarrow \underline{\{\emptyset\}}$

2：$\{\emptyset、\underline{\{\emptyset\}}\} \rightarrow \underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}}$

3：$\{\emptyset、\{\emptyset\}、\underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}}\} \rightarrow \underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}、\{\emptyset、\{\emptyset\}\}\}}$

首先要解决的第一个问题：两个集合必然能组成一个集合。这是我们从空集出发创造新集合做的第一个动作，我们需要把它合法化。遇事不决，出公理：

配对公理：任意的两个集合a、b能组成新的集合C={a、b}。
数学语言：$\forall a\ \forall b\ \exists C\ \forall x(x \in C \iff (x = a \vee x = b))$

读数学语言：这句数学语言出现了新的符号：∨，它读作“或”、“或者”。它的来源是拉丁语“vel”（或）的首写字母v。记不住的话，就把∨当成一个坑，或者这个或者那个都可以往里边丢。它的用法是只要∨的左右两边有一个有效就认为“∨左右两边”这个整体有效。比如别人问你：什么时候踢进世界杯?你可以回答：草坪太干或者草坪太湿或者草坪不干不湿，我都会输球。说得输球好像不是你的问题，是草坪的问题。草坪那么多或者的情况，只要满足一条，你就可以输球。用数学的语言把配对公理读出来就是：任意两个集合（两个形成配对，所以叫配对公理），存在第三个集合，第三个集合里的任何一个元素是前面两个集合之一。

配对公理只是解决了两个集合能组成第三个集合，而且前第三个集合里的元素是前两个集合。我们通常把这种“集合的元素是集合”的集合称为集合族。其实应该叫集合群，也就是一群集合组成的集合，但群在数学已经被伽罗瓦提前占位了，族群、族群，只剩下族了，所以我们把这类集合叫集合族。虽然两个集合组成第三个集合已经合法化，但我们通常更加关注的是把前两个集合的元素打散放到第三个集合，也就是合并两个集合的元素。

> 并集公理：存在一个集合，它的元素是集合族里集合的元素。
> 数学语言：$\forall X\ \exists Y\ \forall u(u \in Y \iff \exists z(z \in X \wedge u \in z))$

读数学语言：这里又出现了一个数学符号$\wedge$，它刚好和我们从配对公理学的$\vee$方向相反。$\vee$是或者的意思，相反的$\wedge$是而且的意思。比如很多男人说的“肤白貌美大长腿”，是或者的意思，只要有一个满足就是美女；很多女人说的“有车有房”才结婚，是而且的意思，必须有车而且有房，都达到了才满足条件。严以律己、宽以待人说的是对自己要用而且，对别人要用或者。现在这句古训慢慢被另一句话替代：我也是第一次做人，凭什么？先通读一遍$\forall X\ \exists Y\ \forall u(u \in Y \iff \exists z(z \in X \wedge u \in z))$，从$z \in X \wedge u \in z$可以看出来，X是一个集合族，因为X的元素是z，而z的元素是u，也就是z是一个集合，X的元素是集合z。有了这些信息，从头开始读：任何的集合族，都存在一个集合，这个集合的元素是集合族里集合的元素。

定义 1. 集合的并运算 $X \cup Y$ 定义为：

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$$

让我们根据配对公理和并集公理，构造从$0 \to 1 \to 2 \to 3$。

0：$\emptyset$

1：$\{\emptyset\} \to \underline{\{\emptyset\}}$

2：$\{\emptyset、\underline{\{\emptyset\}}\} \to \underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}}$

3：$\{\emptyset、\{\emptyset\}、\underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}}\} \to \underline{\{\emptyset、\{\emptyset\}、\{\emptyset、\{\emptyset\}\}\}}$

构造从$0 \to 1$。有两个集合$\emptyset$、$\{\emptyset\}$，根据并集公理，必然有一个集合，这个集合的元素是两个集合的元素。$\emptyset$没有元素，$\{\emptyset\}$的元素是$\emptyset$，所以构造的集合是$\{\emptyset\}$。

构造从$1 \to 2$。有两个集合$\{\emptyset\}$、$\{\{\emptyset\}\}$，根据并集公理，必然有一个集合，这个集合的元素是两个集合的元素，$\{\emptyset\}$集合的元素是$\emptyset$，$\{\{\emptyset\}$集合的元素是$\{\emptyset\}$，所以构造的集合是$\{\emptyset、\{\emptyset\}\}$。

构造从$2 \to 3$。有两个集合$\{\emptyset、\{\emptyset\}\}$、$\{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}\}$，根据并集公理，必然有一个集合，这个集合的元素是两个集合的元素，$\{\emptyset、\{\emptyset\}\}$的元素是$\emptyset$、$\{\emptyset\}$，$\{\{\emptyset、\{\emptyset\}\}\}$的元素是$\{\emptyset、\{\emptyset\}\}$，所以构造的集合是$\{\emptyset、\{\emptyset\}、\{\emptyset、\{\emptyset\}\}\}$

根据上面的方法，就可以一直的构造自然数。从现在开始，我宣布“你可以合法的数数了”。

1.2.6 填最后的坑

从上面构造自然数，我们采用了一种方法构造下一个自然数的方法：$x^+ = x \cup \{x\}$。这种方法有个名称叫：归纳。我们在生活中还经常碰到一个词：递归。递归就像内卷，当整个社会产生了内卷的氛围，这种氛围就像病毒一样蔓延到每个公司，公司再把这个病毒传递给每员工，员工又在不知不觉中传递到家庭，又从家庭传递给每一个人。递归是一种简单的方法，但它能触及到任何的角落。作为程序员可以不知道归纳，但万万不能不知道递归。程序的函数是指把一个过程组合成一个整体可以操作的对象。递归是在这个函数过程中，再次执行了这个函数。例如你要获取计算机所有的文件名称，下面的几行递归伪代码实现了这个目的。

```
遍历目录(需要遍历的目录路径) {
    打开需要遍历的目录路径
    查看当前层级的文件和目录
    如果是文件，那么收集这个文件名称
    如果是目录，那么再次执行遍历目录(这个目录路径)
遍历目录(我的电脑)
```

递归采用的是从大往小递进；归纳正好相反，它是从小往大延伸。仔细观察，生活中处处有递归和归纳，只要是一种能渗透进每个角落的传播方式，那它不是递归就是归纳，或者是两者震荡放大的结果。扶不扶摔倒的老人是归纳，买不买房是递归，内卷是从几家IT公司开始（You are shame）归纳到IT行业竞争氛围，然后通过氛围递归到整个社会。

说了这么多，现在思考一个问题：归纳是一个过程，这个过程在自然数中是不会停止的，那需要怎么看待自然数。简单的说：把自然数看出一个过程，还是一个整体。也就是自然数是不是一个集合。小白会疑惑，这重要吗？当然，这关系到$1 \div 3 = 0.33\dot{3}$ 里的$0.33\dot{3}$，你认为它是一个真实存在的确切的数，还是一个过程。为了解决这个问题，再次提出了一个公理：

> 无穷公理：存在由归纳产生的集合。
> 数学语言：$\exists \mathrm{S}\ [\emptyset \in \mathrm{S} \wedge (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{S})[\mathrm{x} \cup \{\mathrm{x}\} \in \mathrm{S}]]$

在$x^+ = x \cup \{x\}$中，我们把x^+读作x的后续。用数学语言读无穷公理：存在一个集合，空集是这个集合的元素，而且这个集合的元素的后续也是这个集合的元素。也就是从这个无穷公理开始，数学归纳法才真正合法。思考数学归纳法的步骤：命题的首项满足，命题的第n项满足而且命题的n项的后续也满足，那么我们说命题∀项满足。

Chapter 2

整数

2.0.1 构造负数