Vorlesung 1

Programmierung von Algorithmen und Datenstrukturen

Dozent:	Prof. Dr. Peter Kelb
Raumnummer:	Z4030
e-mail:	peter.kelb@gmx.de
Sprechzeiten:	nach Vereinbarung
Sourcen:	http://elearning.hs-bremerhaven.de/start.php (im geschlossenen Bereich)

Ziel der Vorlesung:

- schnelle Graphikprogrammierung in Java
- Zeichnen von Linien und Kreisen
- komplexe Baumalgorithmen
- Einführung in Graphalgorithmen

Voraussetzung:

Vorlesung: Programmierung II

Organisatorisches (Fort.)

- Vorlesung (6 CPs)
- Übungen (aufeinander aufbauend)

Übungen

- zu jeder Vorlesung gibt es Übungen (http://elearning.hs-bremerhaven.de/start.php), die in den Übungsstunden ***und*** zu Hause bearbeitet werden müssen
- in den Übungsstunden können Probleme mit den Tutoren besprochen werden

Bücher

- Algorithms, Robert Sedgewick, Addison-Wesley Longman, ISBN-13: 978-0321573513

Bücher (Fort.)

sehr umfangreich

- Datenstrukturen
- Sortieralgorithmen
- Suchalgorithmen
- Verarbeitung von Zeichenfolge (Pattern Matching, Parsing, Datenkomprimierung, Kryptologie)
- Geometrische Algorithmen
- Algorithmen mit Graphen
- Mathematische Algorithmen
- ...

Bücher (Fort.)

- sehr umfangreich ...
  - Ausblick auf: parallele Algorithmen, schnelle Fourier-Transformation, dynamische Programmierung, lineare Programmierung, erschöpfendes Durchsuchen, NP-vollständige Probleme
- recht kompliziert, aber:

Anschaffung für das ganze Informatikerleben

Schnelle Animation: Motivation

Bisher für komplexe Animation:

1. Beschaffung eines Hintergrundbildes
2. Malen in dieses Hintergrundbild mittels der draw-Methoden
3. Malen des Hintergrundbildes in den Frame

Schritt 1 und 3 sind schnell, Schritt 2 ist langsam. Die draw-Methoden sind oft umfangreicher als benötigt, und daher zu komplex. Beispiel: Setzen eines Punktes in einer spezifischen Farbe:

```
g.setColor(new Color(213,17,142));
g.drawLine(200,100,200,100);
```

Wunsch: Punkt in der gewünschten Farbe direkt setzen.

Schnelle Animation (Fort.)

Bisher wurde ein Image mittels der createImage erschaffen.

```
class Component extends Object {
    public Image createImage(int width, int height);
}
```

Es gibt aber noch eine weitere Möglichkeit:

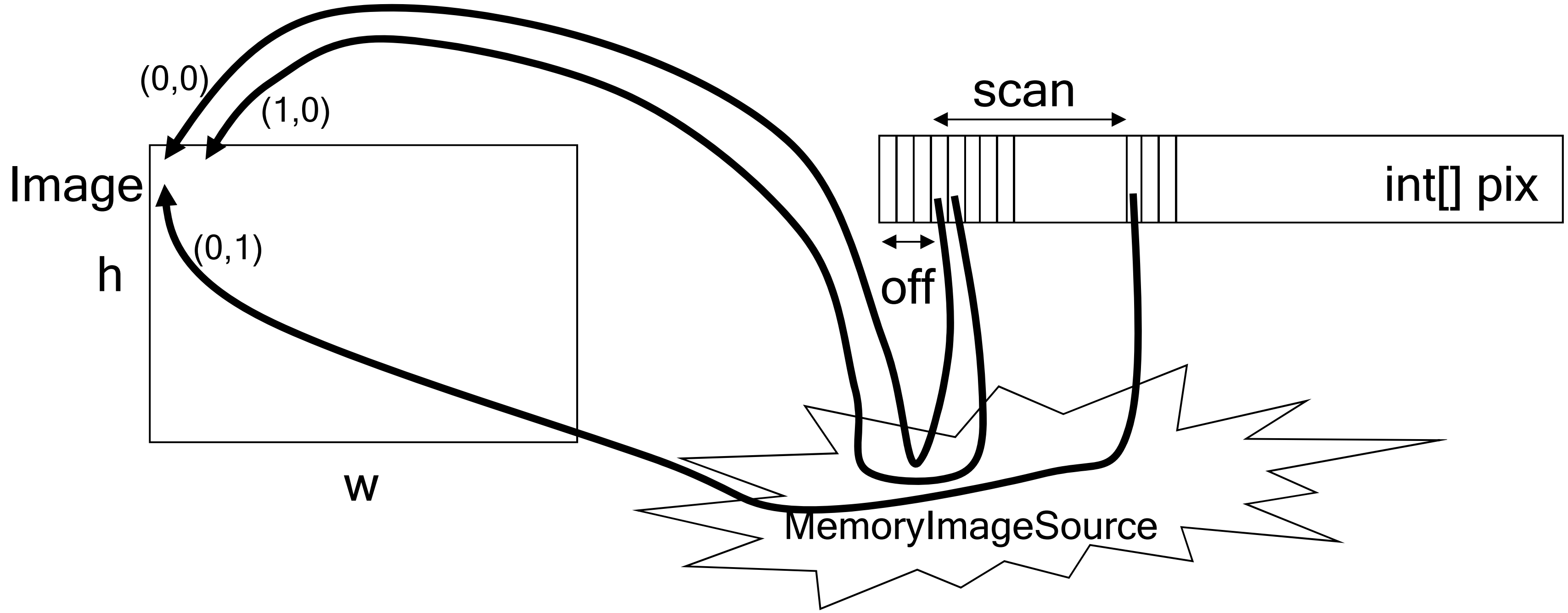
```
class Component extends Object {
    public Image createImage(ImageProducer prod);
}
```

Hier wird ein „Bilderschaffer“ übergeben, der das Bild erzeugt.

ImageProducer: MemoryImageSource

Die Klasse MemoryImageSource erzeugt Bilder auf der Basis von Integerfeldern. Dabei repräsentiert jeder Integerwert ein Pixel.

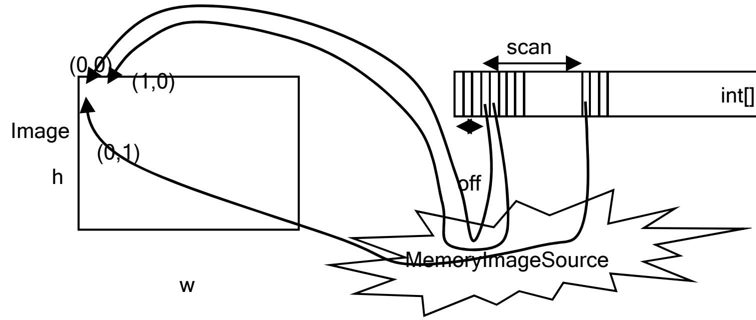
```
class MemoryImageSource extends Object implements ImageProducer {
    public MemoryImageSource(int w, int h, int[] pix, int off, int scan);
    ...
}
```



ImageProducer: MemoryImageSource

Zusammenspiel von Image und MemoryImageSource:

- wird in das Feld pix ein neuer Wert eingetragen, so wird ***nicht*** das ***zugehörige Pixel*** im Image ***verändert***
- das Bild bekommt die Werte beim ersten Mal
- wenn das Bild mittels der flush Methode der Klasse Image geleert wird, holt es sich neue Daten vom ImageProducer, d.h. vom Feld pix.



Beispiel

```
import java.util.*;
import java.awt.*;
import java.awt.image.*;

class RndColor extends Frame {
    final int W = 300;
    final int H = 200;
    Image m_Img;
    int[] m_Pix = new int[W*H];
    MemoryImageSource m_ImgSrc;

    public RndColor() {
        super("Random Color");
        setSize(300,200);
        m_ImgSrc = new MemoryImageSource(W,H,m_Pix,0,W);
        m_Img = createImage(m_ImgSrc);
        setVisible(true);
    }

    public void update(Graphics g) {}
    public void paint(Graphics g) {}

...
```

Ein ImageProducer wird erzeugt

Diese beiden Werte sind i.d.R. gleich

Ein neues Bild

update und paint ausschalten

Go!

Beispiel (Fort.)

Alte Technik

```
...
    public void rnd() {
        Random rnd = new Random();
        while (true) {
            for(int i = 0;i < W*H;++i) {
                m_Pix[i] = rnd.nextInt();
            }
            m_Img.flush();
            getGraphics().drawImage(m_Img,0,0,this);
            try {
                Thread.sleep(20);
            } catch (InterruptedException e) {}
        }
    }

    public static void main(String[] args) throws Exception {
        RndColor win = new RndColor();
        win.rnd();
    }
}
```

Alle Pixel werden zufällig gesetzt

Das Bild wird entleert

... und neu im Frame gezeichnet

Farben und Integer

Frage: Wie werden die Integer Werte als Farben interpretiert?

31			0
alpha	red	green	blue
7 … 0	7 … 0	7 … 0	7 … 0

alpha: Wert der Transparenz: 0 = durchsichtig, 255 = komplett undurchsichtig

red: Rotanteil der Farbe

green: Grünanteil der Farbe

blue: Blauanteil der Farbe

Beispiel: undurchsichtiges, volles Gelb

```
255 << 24 | 255 << 16 | 255 << 8
```

Beispiel: undurchsichtiger, mittlerer Grauton

```
255 << 24 | 127 << 16 | 127 << 8 | 127
```

Farben und Integer (Fort.)

Aufgabe: Gegeben sind 2 Farben als Integerwerte i1 und i2.
Erzeuge eine neue Farbe i (als Integerwert), die zu 40% aus i1 und 60% aus i2 besteht.

Idee: Mischen der einzelnen Farbanteile

```
int singleShuffle(int i1_part, int i2_part, int p) {
    return i1_part + (i2_part - i1_part) * p / 100;
}

int colorShuffle(int i1, int i2, int p) {
  int red     = singleShuffle((i1 >> 16) & 255,(i2 >> 16)  & 255,p);
  int green   = singleShuffle((i1 >> 8)  & 255,(i2 >> 8)   & 255,p);
  int blue    = singleShuffle((i1)       & 255,(i2)        & 255,p);
  return (255 << 24) | (red << 16) | (green << 8) | blue;
}
```

Beispiel

```
import java.awt.*;
import java.awt.event.*;
import java.awt.image.*;

class LabelScrollBar extends Panel {
    TextField m_Lab = new TextField(6);
    Scrollbar m_Bar = new Scrollbar(Scrollbar.HORIZONTAL,0,1,0,256);
    String m_Prefix;

    public LabelScrollBar(String strPrefix) {
        m_Prefix = strPrefix;
        m_Lab.setText(m_Prefix);
        m_Lab.setEnabled(false);
        setLayout(new BorderLayout());
        add(BorderLayout.EAST,m_Lab);
        add(BorderLayout.CENTER,m_Bar);
        m_Bar.addAdjustmentListener(new AdjustmentListener() {
            public void adjustmentValueChanged(AdjustmentEvent e) {
                m_Lab.setText(m_Prefix + m_Bar.getValue());
            }
        });
    }
}
...
```

LabelScrollBar ist ein Panel bestehend aus einem Scrollbar und einem Label mit dem eingestellten Wert

sobald der Scrollbar verändert wird, wird das Label neu eingestellt

Beispiel (Fort.)

```
...
class ControlledColor extends Panel implements AdjustmentListener {
    LabelScrollBar red = new LabelScrollBar("red ");
    LabelScrollBar green = new LabelScrollBar("green ");
    LabelScrollBar blue = new LabelScrollBar("blue ");
    int[] cols;
    Shade shad;
    public ControlledColor(Shade shad, int[] cols) {
        this.shad = shad;   this.cols = cols;
        setLayout(new GridLayout(3,1));
        add(red);    add(green);    add(blue);
        red.m_Bar.addAdjustmentListener(this);
        green.m_Bar.addAdjustmentListener(this);
        blue.m_Bar.addAdjustmentListener(this);
    }
    public void adjustmentValueChanged(AdjustmentEvent e) {
        cols[0] = red.m_Bar.getValue();
        cols[1] = green.m_Bar.getValue();
        cols[2] = blue.m_Bar.getValue();
        shad.reRun();
    }
}
...
```

ControlledColor baut 3 Scroll-bars zusammen und merkt sich die eingestellten Werte in cols und ruft die Berechnungsroutine von shad auf

Beispiel (Fort.)

Das Hauptfenster für den Farbverlauf

Die Ziel- und Ausgangsfarbe

Berechnet alle Farben neu und malt am Ende das Bild

```
...
class Shade extends Frame {
    final int W = 500;   final int H = 300;    Image m_Img;
    int[] m_Pix = new int[W*H];   MemoryImageSource m_ImgSrc;
    int[] col1 = new int[3]; int[] col2 = new int[3];
    public Shade() {
        super("Shade ...");
        m_ImgSrc = new MemoryImageSource(W,H,m_Pix,0,W);
        m_Img = createImage(m_ImgSrc);
        setSize(W,H); setVisible(true);
    }
    private int compColor(int x1,int x2,int p) {     return x1+(x2-x1)*p/100; }
    public void reRun() {
        for(int i = 0;i < W;++i) {
            final int P = 100*i/W;
            final int COL = 0xff000000
                        | compColor(col1[0],col2[0],P) << 16
                        | compColor(col1[1],col2[1],P) << 8
                        | compColor(col1[2],col2[2],P);
            for(int j = 0;j < H;++j) {m_Pix[i+W*j] = COL;}
        }
        m_Img.flush();
        if (getGraphics() != null) getGraphics().drawImage(m_Img,0,0,
                                                getWidth(),getHeight(),null);
    }
}
```

Go!

Beispiel (Fort.)

```
...
class ColorFade extends Frame {
    public ColorFade() {
        super("Fade it ...");
        Shade shad = new Shade();
        ControlledColor srcCol = new ControlledColor(shad,shad.col1);
        ControlledColor trgCol = new ControlledColor(shad,shad.col2);
        setLayout(new GridLayout(2,1));
        add(srcCol);
        add(trgCol);
        pack();
        setVisible(true);
    }

    public static void main(String [] args) {
        new ColorFade();
    }
}
```

Erzeugt das Fenster für den Farbübergang

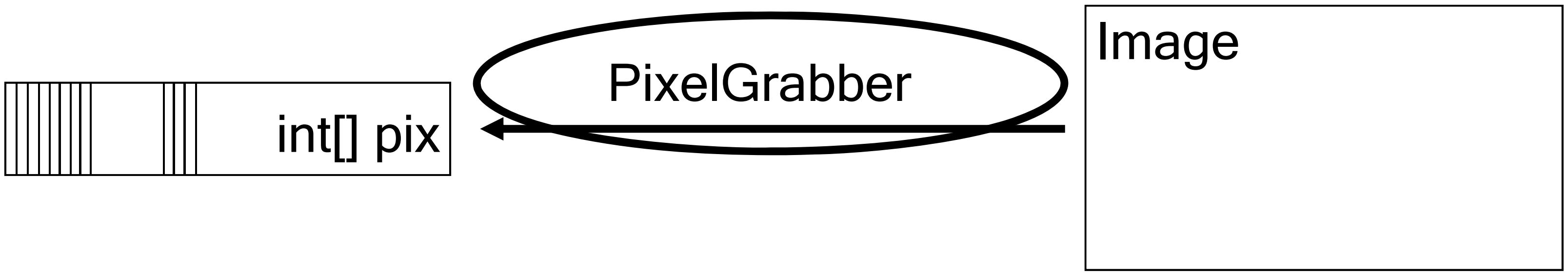
Legt für sich selber 2 Control-Panels für die Start- und Zielfarbe an

Vorlesung 2

Bilder auslesen

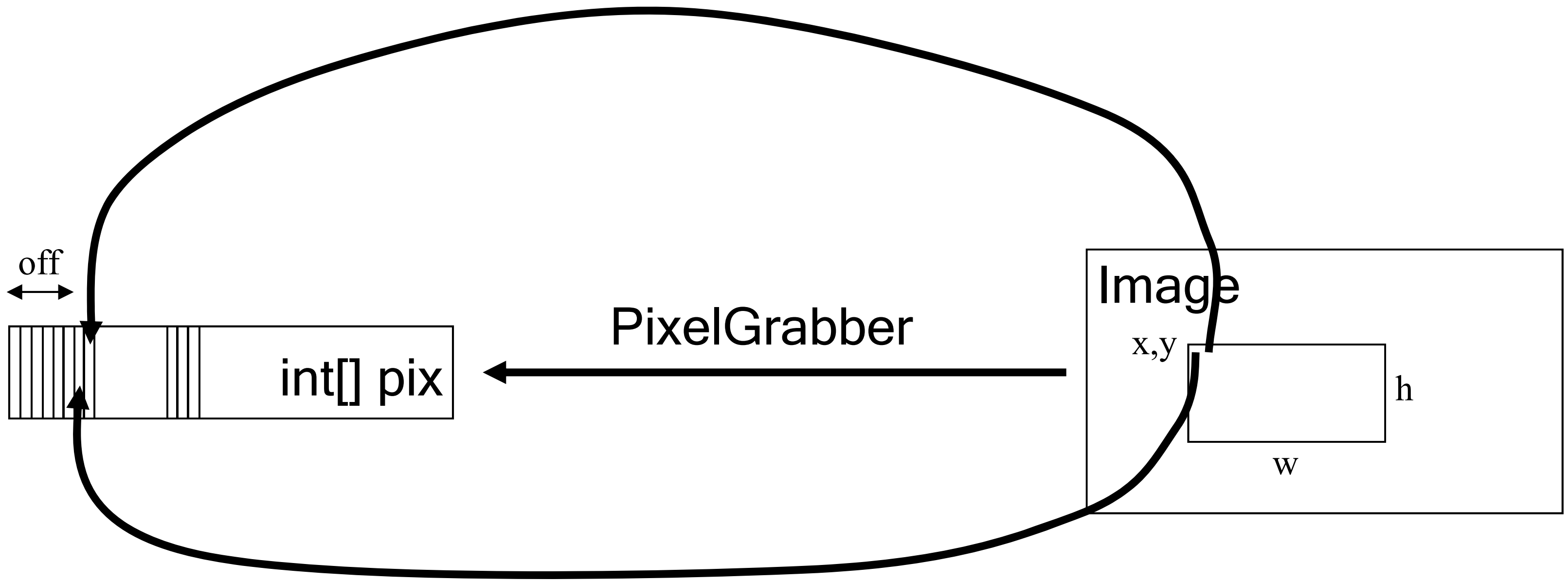
Erzeugen von Bildern aus einem Integerfeld:

Auslesen von Bildern in ein Integerfeld:



Bilder auslesen (Fort.)

```
class PixelGrabber extends Object {
    public PixelGrabber(Image img,
                        int x, int y, int w, int h,
                        int[] pix, int off, int scansize);
}
```



Bilder auslesen (Fort.)

Der PixelGrabber startet das Auslesen aber noch nicht im Konstruktor. Dies muss explizit durch die Methode grabPixel() gestartet werden.

```
class PixelGrabber extends Object {
    ...
    boolean grabPixels() throws InterruptedException;
}
```

Die Methode liefert true zurück, wenn das Auslesen der Pixel erfolgreich war, ansonsten false.

Beispiel

Objektvariablen

```
import java.awt.*;
import java.awt.image.*;
import java.awt.event.*;
class Shuffle extends Component {
    final int W = 500; final int H = 300;
    Image m_Img1,m_Img2,m_Img;
    int[] m_Img1Pix = new int[W*H];     int[] m_Img2Pix = new int[W*H];
    int[] m_Pix = new int[W*H];   MemoryImageSource m_ImgSrc;
    public Shuffle(Frame father) {
        try {
            FileDialog diag = new FileDialog(father); diag.setVisible(true);
            m_Img1 = getToolkit().getImage(diag.getDirectory()+diag.getFile()).
                                    getScaledInstance(W,H, Image.SCALE_SMOOTH);
            diag.setFile(""); diag.setVisible(true);
            m_Img2 = getToolkit().getImage(diag.getDirectory()+diag.getFile()).
                                    getScaledInstance(W,H, Image.SCALE_SMOOTH);
            MediaTracker mt = new MediaTracker(this);
            mt.addImage(m_Img1,0);mt.addImage(m_Img2,0);mt.waitForAll();
            PixelGrabber grab1 = new PixelGrabber(m_Img1,0,0,W,H,m_Img1Pix,0,W);
            PixelGrabber grab2 = new PixelGrabber(m_Img2,0,0,W,H,m_Img2Pix,0,W);
            grab1.grabPixels();grab2.grabPixels();
            m_ImgSrc = new MemoryImageSource(W,H,m_Pix,0,W);
            m_Img = createImage(m_ImgSrc);
        } catch (InterruptedException e) {}
    }
...
```

Lädt 2 Bilder ein und skaliert sie auf H×W

überträgt die Pixel in die Felder m_Img1Pix und m_Img2Pix

Beispiel (Fort.)

Die normalen Zeichen-routinen ändern

```
...
   public void paint(Graphics g) {g.drawImage(m_Img,0,0,this);}

   public Dimension getPreferredSize() {return getMinimumSize();}
   public Dimension getMinimumSize() {return new Dimension(W,H);}

   private int compColor(int x1,int x2,int p) {return x1+(x2-x1)*p/100; }
   private int compPix(int pix1,int pix2,int p) {
      final int RED = compColor((pix1 >> 16) & 0xff,(pix2 >> 16) & 0xff,p);
      final int GREEN = compColor((pix1 >> 8) & 0xff,(pix2 >> 8) & 0xff,p);
      final int BLUE = compColor(pix1 & 0xff,pix2 & 0xff,p);
      return 0xff000000 | (RED << 16) | (GREEN << 8) | BLUE;
   }

   public void shuffle(int p) {
      for(int i = 0;i < W*H;++i) {
         m_Pix[i] = compPix(m_Img1Pix[i],m_Img2Pix[i],p);
      }
      m_Img.flush();
      repaint();
   }
}
...
```

Mischt die beiden Farben pix1 und pix2 gemäß des Prozent-satzes p

Mischt die beiden Bilder gemäß des Prozent-satzes p und malt das neue, gemischte Bild

Go!

Beispiel (Fort.)


```
...
class Pic extends Frame {
    public Pic() {
        super("Hey, pictures ...");
        setLayout(new BorderLayout());
        final Shuffle SHUF = new Shuffle(this);
        final Scrollbar BAR = new Scrollbar(Scrollbar.HORIZONTAL,100,1,0,101);
        final Label LAB = new Label("100 %"); Panel pan = new Panel();
        pan.setLayout(new BorderLayout());
        add(BorderLayout .CENTER,SHUF);  add(BorderLayout.SOUTH,pan);
        pan.add(BorderLayout.CENTER,BAR);   pan.add(BorderLayout.EAST,LAB);
        BAR.addAdjustmentListener(new AdjustmentListener() {
                public void adjustmentValueChanged(AdjustmentEvent e) {
                    SHUF.shuffle(BAR.getValue()); LAB.setText(BAR.getValue() + "%");
                }
            });
        pack();
        setVisible(true);SHUF.shuffle(100);
    }
    public void update(Graphics g) {paint(g);}
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        new Pic();
    }
}
```

Auch im Hauptfenster die update-Routinen ändern

Go!

Beispiel

```
import java.awt.*;
class RunShuffle extends Frame implements Runnable {
    Shuffle s = new Shuffle(this);
    public RunShuffle() {
        super("Cool, shuffling ...");
        add(s);
        pack();
        setVisible(true);
        Thread t = new Thread(this);
        t.start();
    }
    public void run() {
        while (true) {
            for(int i = 0;i <= 100;i+=2) {   s.shuffle(i);   }
            for(int i = 100;i >= 0;i-=2) {    s.shuffle(i);   }
        }
    }
    public void update(Graphics g) {
        paint();
    }
    public static void main(String[] args) { new RunShuffle(); }
}
```

Mischt die beiden Bilder von einem zum anderen und zurück

Weitere Beispiele

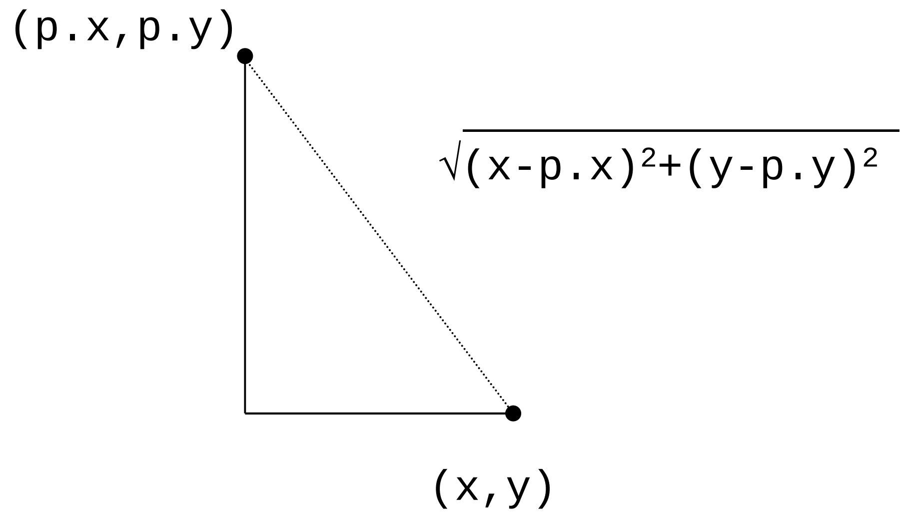
- das vorherige Beispiel hat gezeigt, wie zwei Bilder gemischt werden können
- diese Mischung dient zum Überblenden eines Bildes in ein anderes
- die Mischung ist dabei für das ***gesamte*** Bild erfolgt
- dies ist nicht unbedingt notwendig, die Überblendung kann auch nur für einen Teil erfolgen und auch für verschiedenen Bildbereiche unterschiedlich stark sein

Weitere Beispiele (Fort.)

- Ziel ist es, 2 Bilder einzuladen
- ein Bild wird angezeigt und in einem Umkreis um den Mauszeiger wird das andere Bild angezeigt
- dabei nimmt die Intensität des anderen Bildes mit dem Abstand zum Mauszeiger ab

Weitere Beispiele (Fort.)

- hierzu muss ausgehend von einem Punkt (der Mauszeiger) zunächst berechnet werden, wie weit ein anderer Punkt im Bild entfernt ist



- da der absolute Abstand nicht von Interesse ist, kann die Wurzel auch weggelassen werden

Beispiel

Lens erbt von Shuffle

```
class Lens extends Shuffle {
    public Lens(Frame father) {
        super(father);
        addMouseMotionListener(new MouseMotionAdapter() {
            public void mouseMoved(MouseEvent e) {
                lens(e.getPoint());
            }
        });
    }
    public void lens(Point p) {
        for(int x = 0;x < W;++x) {
            for(int y = 0;y < H;++y) {
                final int IDX = y * W + x;
                final int X_DIFF = p.x - x;
                final int Y_DIFF = p.y - y;
                final int VAL = (X_DIFF * X_DIFF + Y_DIFF * Y_DIFF) / 100;
                final int MAX_VAL = VAL > 100 ? 100 : VAL;
                m_Pix[IDX] = compPix(m_Img1Pix[IDX],m_Img2Pix[IDX],MAX_VAL);
            }
        }
        m_Img.flush();
        repaint();
    }
}
```

bei Mausbewegung wird die Mauskoordinate an die eigene `lens` Methode übergeben

Abstandsberechnung: ist er zu groß (>100) wird er auf 100 (Prozent) begrenzt

Go!

Beispiel (Fort.)

```
class MainFrame extends Frame {
    MainFrame() {
        add(new Lens(this));
        pack();
        setVisible(true);
    }

    public void update(Graphics g) {
        paint(g);
    }

    public static void main(String[] args) throws Exception {
        new MainFrame();
    }
}
```

Einbindung der eigenen Komponente in einem Fenster, bei dem ebenfalls das Standardverhalten verändert ist

Kantendetektion

- wird ein Bildpunkt mit seiner unmittelbaren Nachbarschaft verglichen, so kann über die Unterschiede ermittelt werden, wo Kanten im Bild lang laufen
- hierzu wird im Wesentlichen die 1. Ableitung gebildet

(x-1, y-1)	(x, y-1)	(x+1, y-1)
(x-1, y)	(x,y)	(x+1, y)
(x-1, y+1)	(x, y+1)	(x+1, y+1)

- es werden die Differenzen zwischen dem Mittelpunkt und seinen 8 Nachbarn berechnet
- diese Differenzen werden zu einem Mittelwert zusammengefaßt

Beispiel

```
class Edge extends JComponent {
    final int W = 500;   final int H = 300;
    Image m_TrgImg,m_SrcImg;
    public Edge(Frame father) {
        try {
            FileDialog diag = new FileDialog(father);
            diag.setVisible(true);
            m_SrcImg = getToolkit().getImage(diag.getDirectory() + diag.getFile()).
                        getScaledInstance(W,H,Image.SCALE_SMOOTH);
            MediaTracker mt = new MediaTracker(this);
            mt.addImage(m_SrcImg,0);
            mt.waitForAll();
            int[] srcPix = new int[W*H];
            int[] trgPix = new int[W*H];
            PixelGrabber grab = new PixelGrabber(m_SrcImg,0,0,W,H,srcPix,0,W);
            grab.grabPixels();
            MemoryImageSource imgProd = new MemoryImageSource(W,H,trgPix,0,W);
            m_TrgImg = createImage(imgProd);
            detectEdges(srcPix,trgPix);
            m_TrgImg.flush();
        } catch (InterruptedException e) {
            System.out.println(e);
        }
    }
...
```

Die Komponente, die später in das Fenster eingebunden wird

Einladen und Skalieren des Bildes

Berechnung der 1. Ableitung

Beispiel (Fort.)

```
...
    public void paintComponent(Graphics g) {
        g.drawImage(m_SrcImg,0,0,this);
        g.drawImage(m_TrgImg,0,H,this);
    }
```

zeichnet das Original und das berechnete Bild

```
    public Dimension getPreferredSize() {     return getMinimumSize();     }

    public Dimension getMinimumSize() {     return new Dimension(W,H*2); }

    private void detectEdges(int[] srcPix,int[] trgPix) {
        for(int x = 0;x < W;++x) {
            for(int y = 0;y < H;++y) {
                trgPix[y * W + x] = compColor(srcPix,x,y);
            }
        }
    }
```

für jeden Punkt wird das Verhältnis zur Umgebung berechnet

```
    private int getRed(int col) {       return (col >> 16) & 255; }
    private int getGreen(int col) {     return (col >> 8) & 255;   }
    private int getBlue(int col) {      return col & 255;          }
...
```

Beispiel (Fort.)

```
...
    private int compColor(int[] srcPix,int x,int y)  {
        int red = 0;
        int green = 0;
        int blue = 0;
        int cnt = 0;
        final int IDX = y * W + x;
        final int RED = getRed(srcPix[IDX]);
        final int GREEN = getGreen(srcPix[IDX]);
        final int BLUE = getBlue(srcPix[IDX]);
        for(int dx = -1;dx <= 1;++dx) {
            for(int dy = -1;dy <= 1;++dy) {
                if (dx != 0 || dy != 0) {
                    final int X = x+dx;   final int Y = y+dy;final int LOCAL_IDX = Y * W + X;
                    if (0 <= X && X < W && 0 <= Y && Y < H) {
                        ++cnt;
                        red += Math.abs(RED - getRed(srcPix[LOCAL_IDX]));
                        green += Math.abs(GREEN - getGreen(srcPix[LOCAL_IDX]));
                        blue += Math.abs(BLUE - getBlue(srcPix[LOCAL_IDX]));
                    }
                }
            }
        }
        return 0xff000000 | (255 - (red / cnt) << 16) | (255 - (green / cnt) << 8) | (255 - (blue / cnt));
    }
```

die Farbanteile
des Mittelpunkts

Der "Farbabstand"
nach den 3
Basisfarben unterteilt

Go!

Beispiel (Fort.)

```
...
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        JFrame f = new JFrame();
        f.getContentPane().add(new Edge(f));
        f.pack();
        f.setVisible(true);
    }
}
```

Die Einbindung: diesmal in einem JFrame

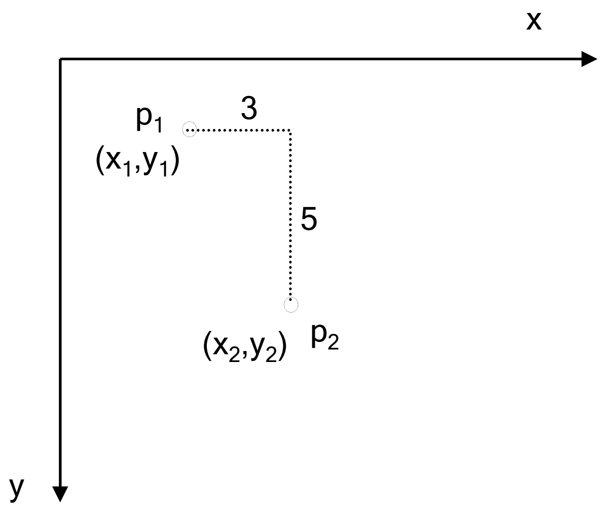
Vorlesung 3

Zweidimensionale Geometrische Transformationen

- Transformationen können dazu verwendet werden, um
  - ein Bild zu konstruieren
  - ein Bild zu verändern
- dabei wird jeder Bildpunkt als ein Vektor im zwei-dimensionalen Koordinatensystem betrachtet
- mit den Transformationen sollen Bildpunkte:
  - verschoben, rotiert, skaliert und verzerrt werden

Verschiebe-Transformation

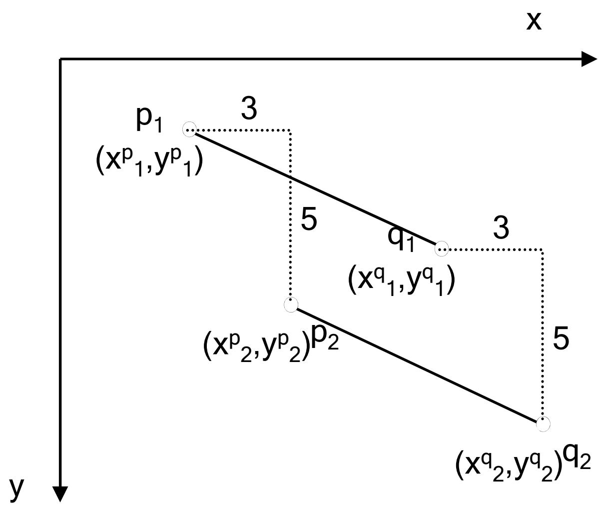
- die Verschiebe-Transformation wird auch ***Translation*** genannt
- sie ist die einfachste Transformation
- hierbei werden zu den Koordinaten eines Punktes lediglich feste Konstanten addiert



- Translation des Punktes p_1 mit den Koordinaten (x_1,y_1) um die Werte 3 und 5
- Ergebnis ist der Punkt p_2 mit den Koordinaten (x_2,y_2)
- Es gilt (in diesem Beispiel):
  - $x_2 = x_1 + 3$
  - $y_2 = y_1 + 5$

Verschiebe-Transformation (Fort.)

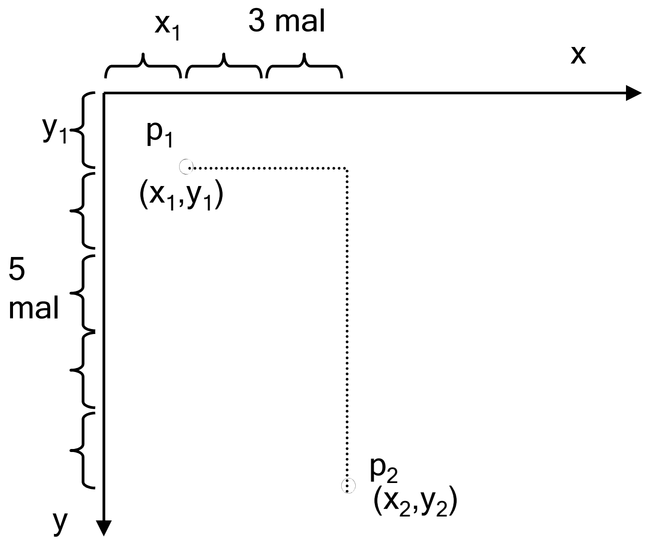
- durch die Addition verändern sich alle Punkte konstant zum Ursprung, d.h. alle entfernen sich um den gleichen Wert vom Ursprung
- das Bild selber verändert sich nicht



- Die Punkte p_1 und q_1 werden bei dieser Translation auf die Punkte p_2 und q_2 abgebildet
- Die zugehörigen Linien haben ihre ***Form nicht geändert***
- Sie haben lediglich ihre ***Lage im Raum*** (2-Dim.) ***geändert***

Skalierung

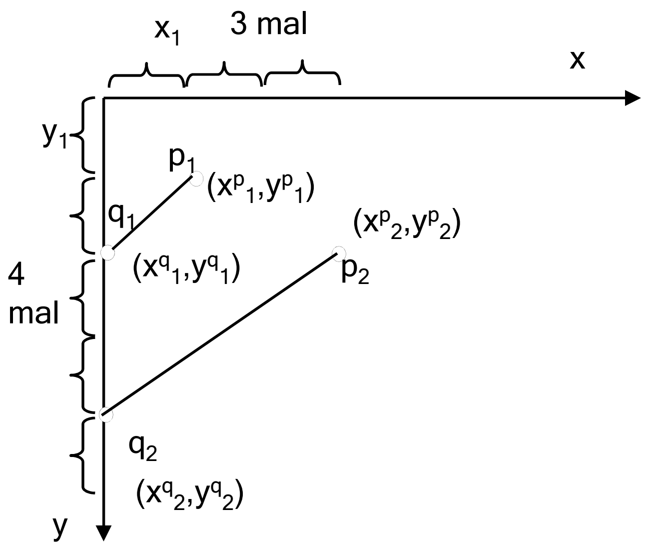
- bei der Skalierung werden die Koordinaten mit einem Wert multipliziert
- dieser Wert kann für den x-Anteil anders als für den y-Anteil sein



- Skalierung des Punktes p_1 mit den Koordinaten (x_1,y_1) um die Werte 3 und 5
- Ergebnis ist der Punkt p_2 mit den Koordinaten (x_2,y_2)
- Es gilt (in diesem Beispiel):
  - $x_2 = x_1 * 3$
  - $y_2 = y_1 * 5$

Skalierung (Fort.)

- anders als bei der Translation verändern sich die Punkte unterschiedlich in Abhängigkeit von ihrem Abstand zum Ursprung
- somit kann eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Bildes erzielt werden



- Skalierung der Punktes p_1 und q_1 um die Werte 3 und 2
- das Ergebnis ist wieder eine Linie, die aber länger ist als die ursprüngliche Linie und eine andere Steigung hat
- durch Skalierungswerte < 1 kann eine Verkleinerung durchgeführt werden

Scherung

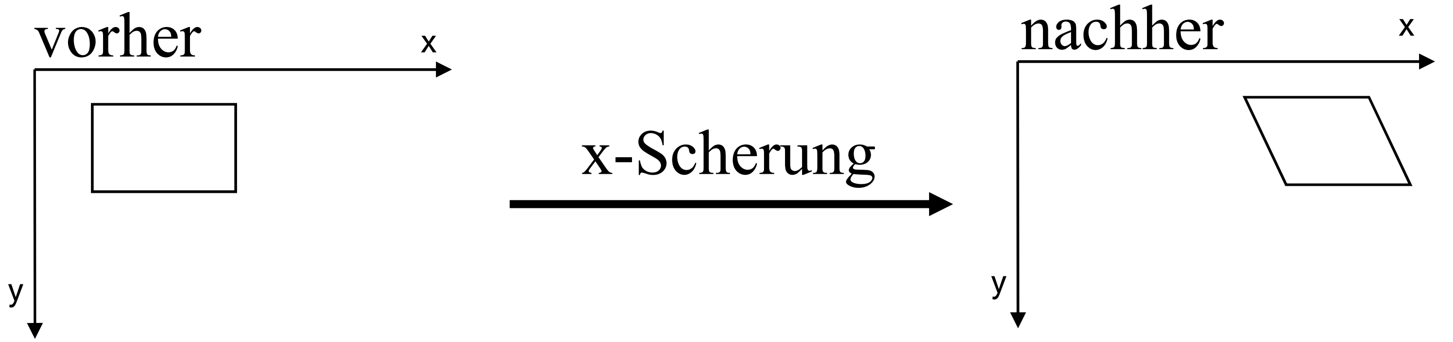
- bei der Scherung handelt es sich um eine Verzehrung einer Achse
- man unterscheidet zwischen einer x- und einer y-Scherung
- bei der y-Scherung wird der y-Wert der Koordinate verändert, während der x-Wert konstant bleibt
- bei der x-Scherung ist es umgekehrt, der y-Wert bleibt konstant, während der x-Wert sich ändert
- bei der Scherung wird zu dem jeweiligen Ursprungswert ein konstantes Vielfache des anderen Koordinatenanteil aufaddiert
- ...

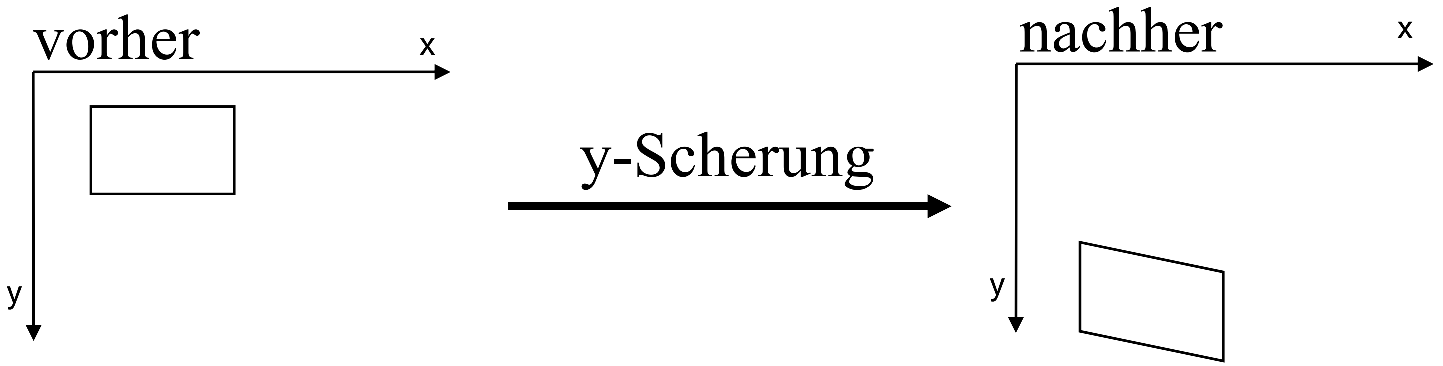
Scherung (Fort.)

- ...
- x-Scherung: der Punkt p_1 mit (x_1,y_1) wird auf den Punkt p_2 abgebildet mit (x_2,y_2):
  - $x_2 = x_1 + y_1 * Sh$
  - $y_2 = y_1$
- y-Scherung: der Punkt p_1 mit (x_1,y_1) wird auf den Punkt p_2 abgebildet mit (x_2,y_2):
  - $x_2 = x_1$
  - $y_2 = y_1 + x_1 * Sh$
- Hierbei gibt Sh den Scherungsfaktor an

Scherung (Fort.)

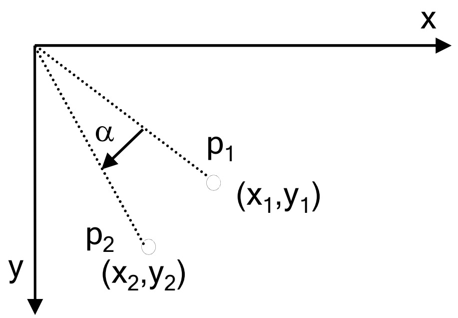
- eine Scherung bewirkt eine Verzerrung in x- bzw. y-Richtung
- Beispiel:





Rotation

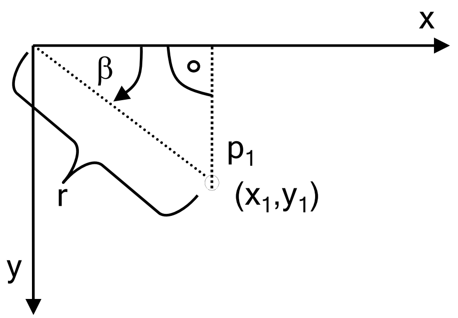
- bei der Rotation soll ein Punkt um den Ursprung um einen gegebenen Winkel rotiert werden
- Beispiel:



- der Punkt p_1 mit den Koordinaten (x_1,y_1) wird um den Winkel α um den Koordinatenursprung auf den neuen Punkt p_2 mit den Koordinaten (x_2,y_2) abgebildet

Rotation (Fort.)

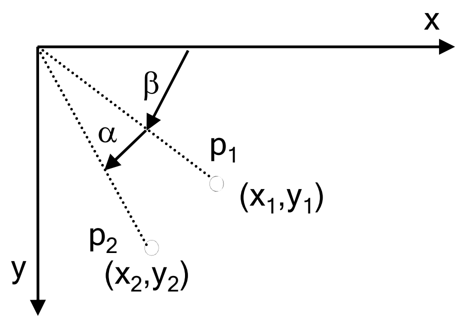
- für die Berechnung der Rotation muss man sich die Koordinaten des Punkts als eine Gleichung aus dem
  - Abstand zum Koordinatenursprung und
  - dem Winkel zwischen der Verbindung des Punktes und dem Koordinatenursprung und der y-Koordinate vorstellen



- es gilt:
  - $\sin(\beta) = y_1 / r$
  - $\cos(\beta) = x_1 / r$
- $\Rightarrow$
  - $x_1 = r \times \cos(\beta)$
  - $y_1 = r \times \sin(\beta)$

Rotation (Fort.)

- soll nun der Punkt mit den Koordinaten (x_1,y_1) um den Winkel α gedreht werden, so kann die Zielkoordinate (x_2,y_2) wiederum durch den Radius und den Trigonometrischen Funktionen dargestellt werden



- es gilt:
  - $x_2 = r \times \cos(\beta+\alpha)$
  - $y_2 = r \times \sin(\beta+\alpha)$
- hieraus folgt unmittelbar:
  - $x_2 = r\times\cos(\beta)\times\cos(\alpha)-r\times\sin(\beta)\times\sin(\alpha)$
  - $y_2 = r\times\sin(\beta)\times\cos(\alpha)+r\times\cos(\beta)\times\sin(\alpha)$

Rotation (Fort.)

mit der Definition von (x_1,y_1)

$$x_1 = r \times \cos(\beta)$$

$$y_1 = r \times \sin(\beta)$$

kann

$$x_2 = \overbrace{r\times\cos(\beta)}^{x_1}\times\cos(\alpha)-\overbrace{r\times\sin(\beta)}^{y_1}\times\sin(\alpha)$$

$$y_2 = \underbrace{r\times\sin(\beta)}_{y_1}\times\cos(\alpha)+\underbrace{r\times\cos(\beta)}_{x_1}\times\sin(\alpha)$$

wie folgt vereinfacht werden:

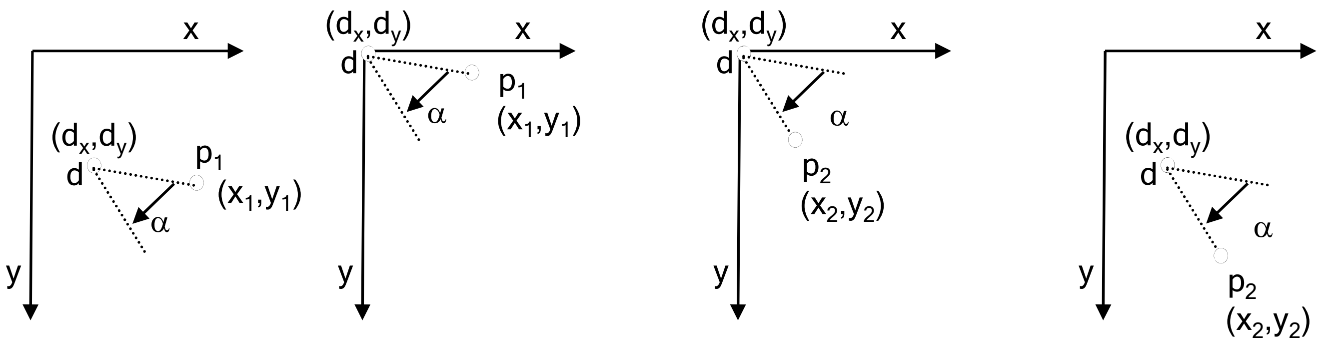
$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= x_1\times\cos(\alpha)-y_1\times\sin(\alpha) \\ y_2 &= y_1\times\cos(\alpha)+x_1\times\sin(\alpha) \end{aligned}}$$

Gleichung für die Rotation des Punktes (x_1,y_1) um den Winkel α

Rotation (Fort.)

- die Rotation wird immer um den Koordinatenursprung durchgeführt
- Problem: was muss gemacht werden, wenn der Punkt p_1 mit (x_1,y_2) nicht um $(0,0)$ sondern um (d_x,d_y) gedreht werden soll?
- Antwort:
  1. verschiebe Punkt p_1 um $(-d_x,-d_y)$ (Translation)
  2. rotiere Punkt um den Ursprung
  3. verschiebe neuen Punkt um (d_x,d_y) (Translation)

Ausgangslage: 1. 2. 3.



Matrizen

- bei der Transformation eines Bildes möchte man oft mehrer einzelne Transformationen nacheinander ausführen (Beispiel: Rotation um einen beliebigen Punkt)
- es ist erstrebenswert, einen einheitlichen Mechanismus zu finden, mit denen man alle Transformationen einheitlich beschreiben kann
- da die behandelten Transformationen lineare Abbildung im 2-dimensionalen Vektorraum sind, können die Transformationen als Matrixmultiplikationen durchgeführt werden

Matrizen: Beispiel

- für die x-Scherung gilt:
  - $x_2 = x_1 + y_1 * ShX$
  - $y_2 = y_1$
- wird der Punkt (x_1,y_2) als Spaltenvektor interpretiert, so kann die x-Scherung als folgende 2×2 Matrix verstanden werden

$$\begin{vmatrix} 1 & ShX \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + ShX \times y_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$$

- für die y-Scherung gibt entsprechend:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ ShY & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ ShY \times x_1 + y_1 \end{vmatrix}$$

Matrizen: Beispiel (Fort.)

- soll nun erst eine x-Scherung und dann eine y-Scherung durchgeführt werden, gilt folgendes:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ ShY & 1 \end{vmatrix}}_{\text{y-Scherung}} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & ShX \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{x-Scherung}} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$$

WICHTIG: man beachte die Leseweise von rechts nach links

- da für Matrizen das Assoziativgesetz gilt, können auch erst die beiden Matrizen multipliziert werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ ShY & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & ShX \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ShX \\ ShY & ShY*ShX+1 \end{vmatrix}$$

- dies hat den Vorteil, dass mehrere Punkte immer ***nur mit einer statt*** mit ***zwei*** Matrizen multipliziert werden müssen

Matrizen: Problem

- es ist leicht zu zeigen, dass die x- und y-Scherung, die Rotation und die Skalierung mit 2×2 Matrizen dargestellt werden können
- leider kann die Translation nicht mit einer 2×2 Matrix realisiert werden
- die Translation erfordert eine 3×3 Matrix
- um ein ***einheitliches Schema*** zu bekommen und ***mehrer Transformationen*** mittels ***Matrixmultiplikation*** zu einer Transformation ***zusammenfassen*** zu können, werden alle Transformation durch 3×3 Matrizen realisiert
- dazu müssen die Vektoren von 2 auf 3 Komponenten erweitert werden

Transformations-Matrizen

- Translation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+d_x \\ y_1+d_y \\ 1 \end{vmatrix}$$

erweiteter Koordinatenvektor

- Rotation:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \times \cos(\alpha) - y_1 \times \sin(\alpha) \\ x_1 \times \sin(\alpha) + y_1 \times \cos(\alpha) \\ 1 \end{vmatrix}$$

Transformations-Matrizen (Fort.)

- Skalierung:

$$\begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \times S_x \\ y_1 \times S_y \\ 1 \end{vmatrix}$$

- x-Scherung:

$$\begin{vmatrix} 1 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \times Sh_x \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

- y-Scherung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1 \times Sh_y + y_1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Letztes Problem

- bei den Operationen können „Löcher“ in dem Zielbild entstehen
- Beispiel: die beiden Punkte (x_1,x_2) und (x_1+1,x_2+1) werden durch eine Skalierung mit $S_x=3$ und $S_y=3$ auf die folgenden Koordinaten abgebildet:
  - $(3\times x_1, 3\times x_2)$
  - $(3+3\times x_1, 3+3\times x_2)$
- Frage: welche Punkte werden auf
  - $(1+3\times x_1, 1+3\times x_2)$ und
  - $(2+3\times x_1, 2+3\times x_2)$ abgebildet?

Löcher !!!

Letztes Problem: Lösung

- Lösung: nicht von der Ursprungskoordinate losrechnet, sondern von Zielkoordinate fragen, welche Ursprungskoordinate auf diese abgebildet wird
- mathematisch ist das leicht geschrieben: statt

$$\begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \times S_x \\ y_1 \times S_y \\ 1 \end{vmatrix}$$

- rechnen wir:

die Zielkoordinate wird durch die Transformationsmatrix geteilt

$$\begin{vmatrix} x_u \\ y_u \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} x_z \\ y_z \\ 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

????? durch Matrix teilen ????

Letztes Problem: Lösung (Fort.)

- teilen bedeutet: mit dem multiplikativen Inversen multiplizieren, d.h. zu einer Matrix m wird die Matrix m^{-1} gesucht, so dass gilt:

$$m \times m^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- im Normalfall existieren diese multiplikativen Inversen von Matrizen nicht, jedoch in diesem Fall sind sie sehr einfach:
- Translation: nicht H und V sondern -H und -V
- Rotation: nicht α sondern - α
- Skalierung: nicht S_x und S_y sondern $1/S_x$ und $1/S_y$
- usw.

Go!

Anwendung

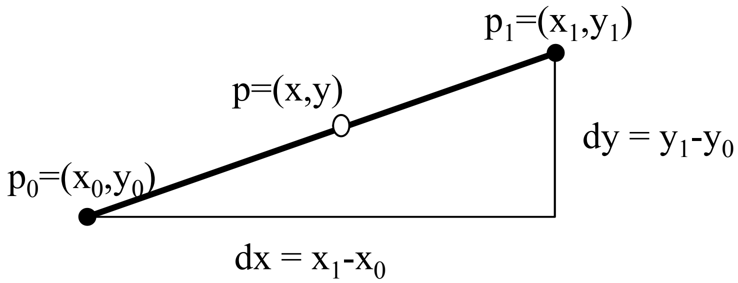
- mit den inversen Matrizen kann jetzt eine Applikation erstellt werden
- soll ein Startbild S durch eine Transformationsmatrix m in ein Zielbild Z transformiert werden, wird folgendes gemacht:
    1. für alle Bildpunkte p_z in Z berechne $m^{-1} \times p_z$
    2. das Ergebnis beschreibt eine Koordinate p_s in S
    3. übertrage den Bildwert von p_s aus S in Z an den Punkt p_z

Vorlesung 4

Zeichnen einer Linie

(oder: wie funktioniert eigentlich Graphics.drawLine)

Aufgabe: Linie zeichnen von $p_0=(x_0,y_0)$ zu $p_1=(x_1,y_1)$
Fragestellung: welche Pixel liegen auf der Linie?

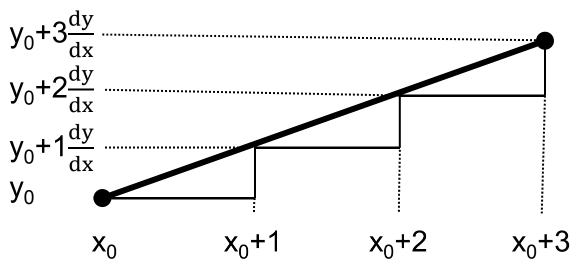


<u>Voraussetzungen</u>:

1. $dx \geq dy$ (d.h. flache Steigung $\leq 45°$)
2. Gerade verläuft von links-unten nach rechts-oben

Gradengleichung:

$$y = \frac{dy}{dx}(x-x_0)+y_0$$



Erste Implementierung

```
float D = dy / dx, y = y0;
int x = x0;
for(int i = 0;i <= dx;++i) {
    setPixel(x,(int)y);
    ++x;
    y = y + D;
}
```

teure Fließ-
kommaarithmetik

Typcast

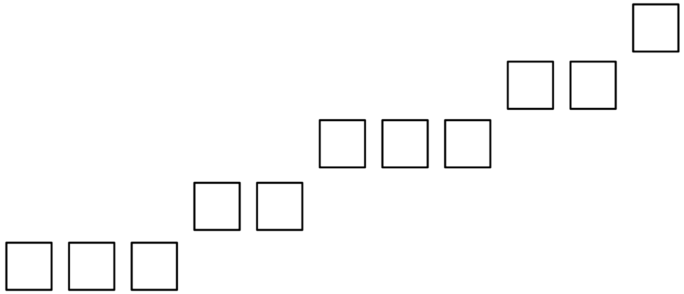
Beispiel: p_0=(0,0) p_1=(10,4)

⇒ dx=10 dy=4 D=0.4

x	y	(int)y
0	0.0	0
1	0.4	0
2	0.8	0
3	1.2	1
4	1.6	1
5	2.0	2
6	2.4	2
7	2.8	2
8	3.2	3
9	3.6	3
10	4.0	4

Erste Implementierung: (Forts.)

Beispiel: $p_0=(0,0)$ $p_1=(10,4)$ ⇒ dx=10 dy=4
D=0.4



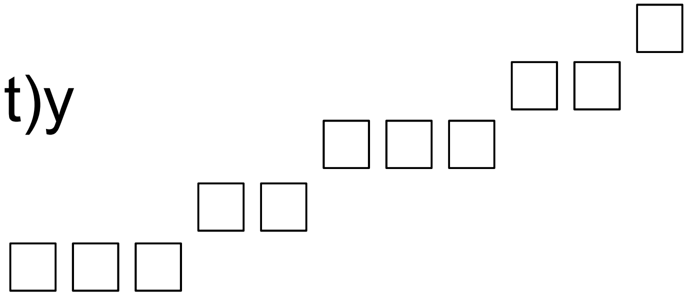
x	y	(int)y
0	0.0	0
1	0.4	0
2	0.8	0
3	1.2	1
4	1.6	1
5	2.0	2
6	2.4	2
7	2.8	2
8	3.2	3
9	3.6	3
10	4.0	4

Problem:
- (int)y rundet y nicht, sondern scheidet die Nachkommastellen einfach ab
- besser wäre ein Runden

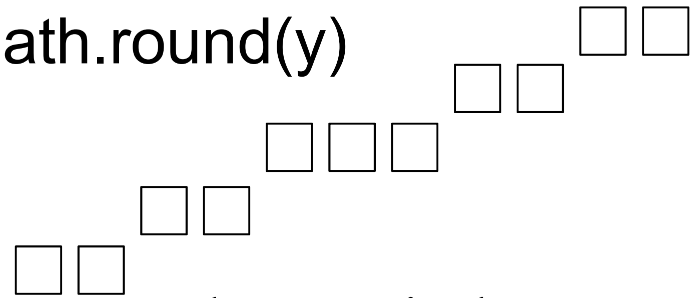
Erste Implementierung: (Forts.)

Beispiel: $p_0=(0,0)$ $p_1=(10,4) \Rightarrow dx=10$ $dy=4$
$D=0.4$

(int)y



Math.round(y)



harmonischerer Verlauf

x	y	(int)y	round(y)
0	0.0	0	0
1	0.4	0	0
2	0.8	0	1
3	1.2	1	1
4	1.6	1	2
5	2.0	2	2
6	2.4	2	2
7	2.8	2	3
8	3.2	3	3
9	3.6	3	4
10	4.0	4	4

Optimierung

Statt immer $D = \frac{dy}{dx}$ zu y hinzu zu addieren und y zu runden (bzw. casten)

- wähle y vom Typ int
- lege Hilfsvariable d vom Typ float an
- addiere Steigung D immer zu d

Interessant sind immer die Übergänge vor dem Komma:

$0.8 \rightarrow 1.2$ $1.6 \rightarrow 2.0$ $2.8 \rightarrow 3.2$ usw.

Idee:

- immer nur die Nachkommastellen merken
- bei einem Übergang über 1.0
  - Vorkommastellen abschneiden
  - y um 1 erhöhen

$0.8 \rightarrow 0.2$ $0.6 \rightarrow 0.0$ $0.8 \rightarrow 0.2$ usw.

Implementierung der Optimierung

```
float D = dy / dx, d = 0.0;
int x = x0, y = y0;
for(int i = 0;i <= dx;++i) {
    setPixel(x,y);
    ++x;
    d += D;
    if (d >= 1.0) {
        ++y;
        d -= 1.0;
    }
}
```

teure Fließ-
kommaarithmetik

x	y	d
0	0	0.0
1	0	0.4
2	0	0.8
3	1	(1.2) → 0.2
4	1	0.6
5	2	(1.0) → 0.0
6	2	0.4
7	2	0.8
8	3	(1.2) → 0.2
9	3	0.6
10	4	(1.0) → 0.0

Diskussion der Optimierung

Problem: immer noch wird teure Fließkommaarithmetik verwendet (dy/dx d>=1.0 d+=D d-=1.0)

Sei i der erste Index, bei dem $d \geq 1.0$ gilt.
Dann gilt:

$$d_i = D+D+\ldots+D = i \times D = i \times \frac{dy}{dx}$$

- $d_i >= 1.0 \Leftrightarrow \quad i \times \frac{dy}{dx} >= 1.0 \Leftrightarrow \quad \underline{i \times dy >= dx}$
- $d_i -= 1.0 \Leftrightarrow \quad i \times \frac{dy}{dx} -= 1.0 \Leftrightarrow \quad \underline{i \times dy -= dx}$

d.h. statt zu d immer $\frac{dy}{dx}$ zu addieren, nur dy (vom Typ int !!!) addieren und mit dy (vom Typ int !!!) vergleichen

Implementierung der nächsten Optimierung

```
int d = 0;
int x = x0, y = y0;
for(int i = 0;i <= dx;++i) {
    setPixel(x,y);
    ++x;
    d += dy;
    if (d >= dx) {
        ++y;
        d -= dx;
    }
}
```

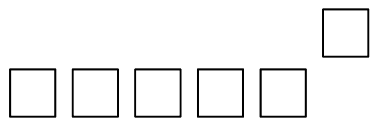
günstige Ganz-
zahlarithmetik

x	y	d
0	0	0
1	0	4
2	0	8
3	1	(12) → 2
4	1	6
5	2	(10) → 0
6	2	4
7	2	8
8	3	(12) → 2
9	3	6
10	4	(10) → 0

Weitere Probleme

- Die Treppenstufen sind nach wie vor zu weit nach p_1 verschoben
- identisch zu dem Casting (int) vs. Math.round Problem
- Beispiel: $p_0=(0,0)$ $p_1=(5,1)$ ⇒ dx=5 dy=1

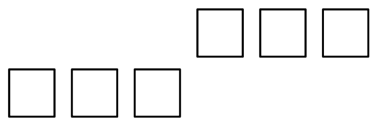
x	y	d
0	0	0
1	0	1
2	0	2
3	0	3
4	0	4
5	1	(5) → 0



Weitere Probleme (Forts.)

- wünschenswert wäre die Treppenstufe zur Hälfte der Geraden
- Lösung: d nicht mit 0 sondern mit dx/2 initialisieren

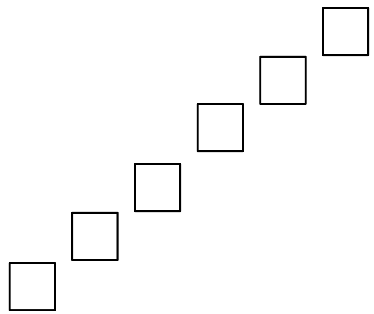
x	y	d
0	0	(5/2=) 2
1	0	3
2	0	4
3	0	(5) → 0
4	0	1
5	1	2



Weitere Probleme (Forts.)

- funktioniert nur für flache Steigungen ($\leq 45°$)
- Bespiel für steile Steigung:

$$p_0=(0,0)\ p_1=(5,10) \Rightarrow dx=5\ dy=10$$



x	**y**	**d**
0	0	(5/2=) 2
1	1	(2+10=12) → 7
2	2	(7+10=17) → 12
3	3	(12+10=22) → 17
4	4	(17+10=27) → 22
5	5	(22+10=32) → 27

alle Werte hätte kleiner als dx (=5) sein müssen

Implementierung auch für steile Steigungen

Lösung: - statt über dx über dy iterieren
- dx und dy vertauschen

```
int shortD = dx>dy ? dy : dx;
int longD = dx>dy ? dx : dy;
int d = longD / 2;
int x = x0, y = y0;
for(int i = 0;i <= longD;++i) {
    setPixel(x,y);
    if (longD == dx) ++x; else ++y;
    d += shortD;
    if (d >= longD) {
        if (longD == dx) ++y; else ++x;
        d -= longD;
    }
}
```

shortD ist die kürzere Distanz

longD ist die längere Distanz

erhöhe immer x, wenn dx≥dy, ansonsten y

hier ist es genau umgekehrt

Problem der erweiterten Implementierung

- die beiden Fallunterscheidungen (if-Anweisungen) werden in jedem Iterationsschritt (for-Schleife) durchgeführt
- dies ist nicht effizient
- Lösung: für x und y werden jeweils zwei Inkrementvariablen angelegt, die mit 0 und 1 belegt werden und immer auf x und y addiert werden
- die Vorbelegung dieser Inkrementvariablen hängt von der Bedigung dx≤dy ab
- dies wird vor der Schleife einmal entschieden und dann nicht wieder abgefragt

Implementierung auch für steile Steigungen (Optimierung)

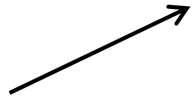
```
int shortD,longD,incXshort,incXlong,incYshort,incYlong;
if (dx>dy) {
    shortD = dy; longD = dx;
    incXlong = 1; incXshort = 0; incYlong = 0; incYshort = 1;
} else {
    shortD = dx; longD = dy;
    incXlong = 0; incXshort = 1; incYlong = 1; incYshort = 0;
}
int d = longD / 2;
int x = x0, y = y0;
for(int i = 0;i <= longD;++i) {
    setPixel(x,y);
    x += incXlong; y += incYlong;
    d += shortD;
    if (d >= longD) {
        x += incXshort; y += incYshort;
        d -= longD;
    }
}
```

Fallunter-
scheidungen
nur einmal

in der Schleife keine
Fallunterscheidungen
bzgl. dx≥dy

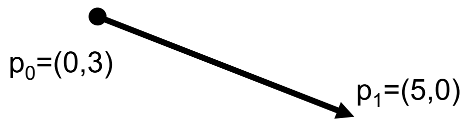
Problem aller bisherigen Implementierung

- die Beschränkung, dass die Geraden flach sein müssen ($\leq 45°$) ist behoben
- jedoch funktioniert der Algorithmus nur für Geraden, die von links-unten nach rechts oben verlaufen



- Beispiel für fallende Gerade:

$$p_0=(0,3)\ p_1=(5,\ 0) \Rightarrow dx=5\ dy=-3$$



x	**y**	**d**
0	3	(5/2=) 2
1	3	(2+-3=-1) → -1
2	3	(-1+-3=-4) → -4
3	3	(-4+-3=-7) → -7
4	3	(-7+-3=-10) → -10
5	3	(-10+-3=-13) → -13

Lösung für fallende Geraden

- dx und dy immer positiv wählen, d.h.
  dx = Math.abs(x_1-x_0) bzw. dy = Math.abs(y_1-y_0)
- die einzelnen Inkrementvariablen für x und y nicht auf 1 sondern auf -1 setzen, wenn die x_1-x_0 bzw. y_1-y_0 negativ ist
- Beispiel für fallende Gerade:
  p_0=(0,3) p_1=(5, 0) ⇒ dx=abs(5)=5 dy=abs(-3)=3

x	y	d
0	3	(5/2=) 2
1	2	(2+3=5) → 0
2	2	(0+3=3) → 3
3	1	(3+3=6) → 1
4	1	(1+3=4) → 4
5	0	(4+3=7) → 2

Go!

Lösung für fallende Geraden (Forts.)

```
public static void drawLine(int x0,int y0,int x1,int y1) {
    final int dx = Math.abs(x0-x1);
    final int dy = Math.abs(y0-y1);
    final int sgnDx = x0 < x1 ? 1 : -1;
    final int sgnDy = y0 < y1 ? 1 : -1;
    int shortD,longD,incXshort,incXlong,incYshort,incYlong;
    if (dx > dy) {
        shortD = dy; longD = dx; incXlong = sgnDx; incXshort = 0; incYlong = 0; incYshort = sgnDy;
    } else {
        shortD = dx; longD = dy; incXlong = 0; incXshort = sgnDx; incYlong = sgnDy; incYshort = 0;
    }
    int d = longD / 2,  x = x0,  y=y0;
    for(int i = 0;i <= longD;++i) {
        setPixel(x,y,x,y);
        x += incXlong;
        y += incYlong;
        d += shortD;
        if (d >= longD) {
           d -= longD;
           x += incXshort;
           y += incYshort;
        }
    };
}
```

Algorithmus basiert auf Jack Bresenham (1962 IBM)

Go!

Diskussion

- der von J. Bresenham 1962 entwickelte Algorithmus hat eine große Bedeutung über das Linienzeichnen hinaus
- kann immer verwendet werden, wenn zwischen diskreten Ein- und Ausgabewerten eine lineare Beziehung besteht
- sehr effizient, besonders, wenn keine Hardwareunterstützung für Fließkommaarithmetik besteht (Minicomputer ala Aduino usw., Graphikprozessoren, …)
- bei der Implementierung muss darauf geachtet werden, möglichst wenig Verzweigungen in der Schleife durchzuführen (Gefahr des Leerlaufens der Pipeline)

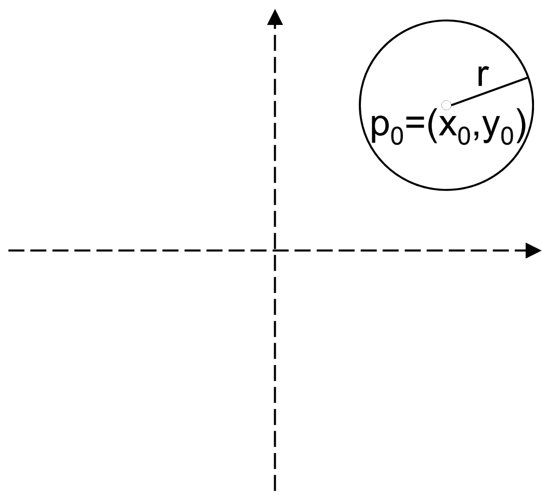
Vorlesung 5

Zeichnen eines Kreises

(oder: wie funktioniert eigentlich Graphics.drawOval in einem Quadrat)

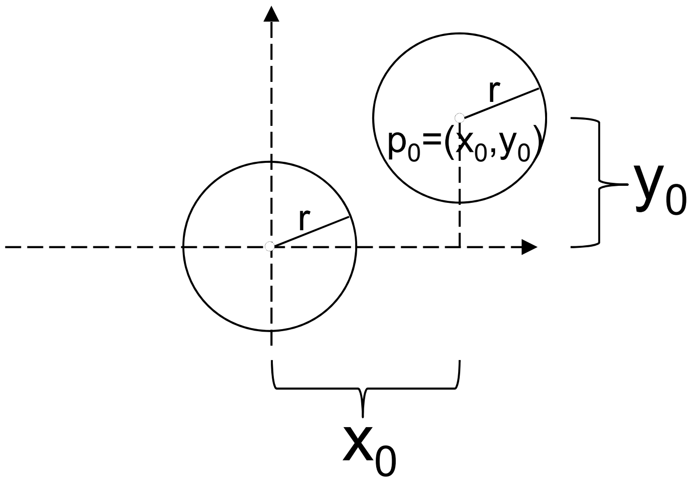
Aufgabe: Kreis zeichnen von mit dem Radius r um den Punkt $p_0=(x_0,y_0)$

Fragestellung: welche Pixel liegen auf dem Kreis?



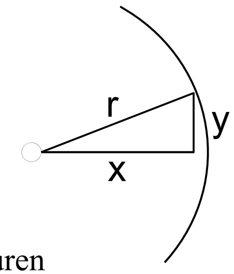
Vereinfachung des Problems

Statt einen Kreis mit Radius r um einen beliebigen Punkt $p_0=(x_0,y_0)$ zu zeichnen, wird der Kreis um den Ursprung gezeichnet und dann jedes Pixel um x_0,y_0 verschoben



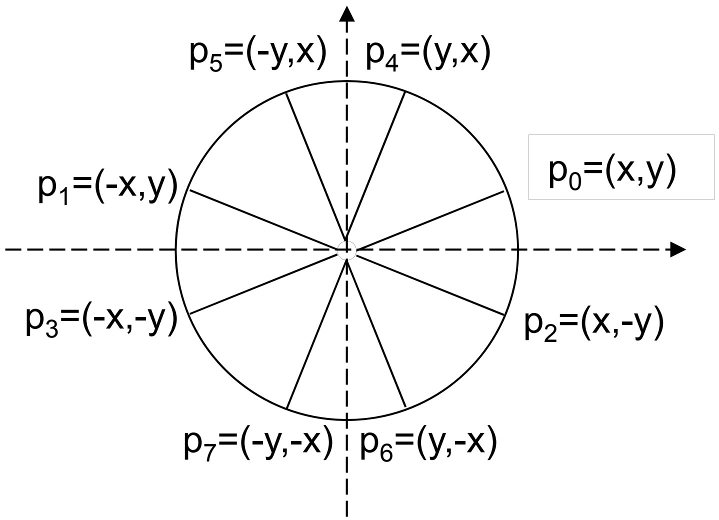
Für einen Punkt $p=(x,y)$ auf dem Kreis um den Ursprung gilt die Kreisgleichung:

$$x^2+y^2 = r^2$$



Weitere Vereinfachung des Problems

- Statt einen kompletten Kreis zu zeichnen wird nur ein Achtelkreis (Oktant) zeichnen.
- Der Rest des Kreises ergibt sich aus der Symmetrie des Kreises.



Erste Implementierung

Mittelpunkt des Kreises

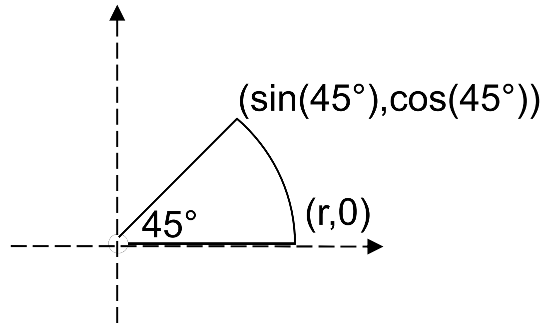
```
public static void setPixel(Graphics g,int x0,int y0,   int x,int y) {
        g.drawLine(x0 + x,y0 + y,x0 + x,y0 + y);  // p_0
        g.drawLine(x0 - x,y0 + y,x0 - x,y0 + y);  // p_1
        g.drawLine(x0 + x,y0 - y,x0 + x,y0 - y);  // p_2
        g.drawLine(x0 - x,y0 - y,x0 - x,y0 - y);  // p_3
        g.drawLine(x0 + y,y0 + x,x0 + y,y0 + x);  // p_4
        g.drawLine(x0 - y,y0 + x,x0 - y,y0 + x);  // p_5
        g.drawLine(x0 + y,y0 - x,x0 + y,y0 - x);  // p_6
        g.drawLine(x0 - y,y0 - x,x0 - y,y0 - x);  // p_7
}
```

Punkt des Achtelkreises um den Ursprung

Erste Implementierung (Forts.)

- es wird der erste Oktant von (r,0) bis (sin(45°),cos(45°)) (entgegengesetzt vom Uhrzeigersinn) gezeichnet
- analog zum Linienalgorithmus wird hier der y-Wert in jedem Schritt um 1 erhöht (y wird immer größer)
- über den Satz des Pythagoras wird der x-Wert ermittelt (x wird immer kleiner)

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2=r^2-y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\sqrt{r^2-y^2}$$



- da sin(45°)=cos(45°) ist, kann der Algorithmus beendet werden, wenn x kleiner als y wird

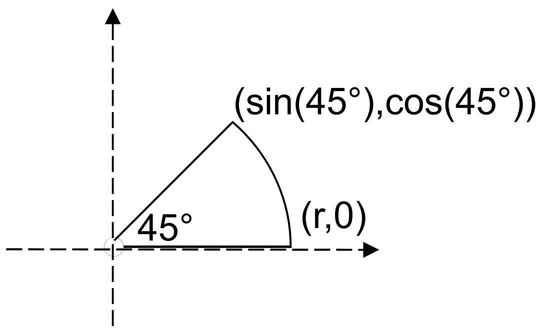
Go!

Erste Implementierung (Forts.)

```
public static void drawCircleClassic(Graphics g,int x0, int y0, int r) {
	int y = 0;
	double x = r;
	final int r_2 = r*r;
	while(y<=x) {
		setPixel(g,x0,y0,(int)Math.rint(x),y);
		++y;
		x=Math.sqrt(r_2-y*y);
	}
}
```

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

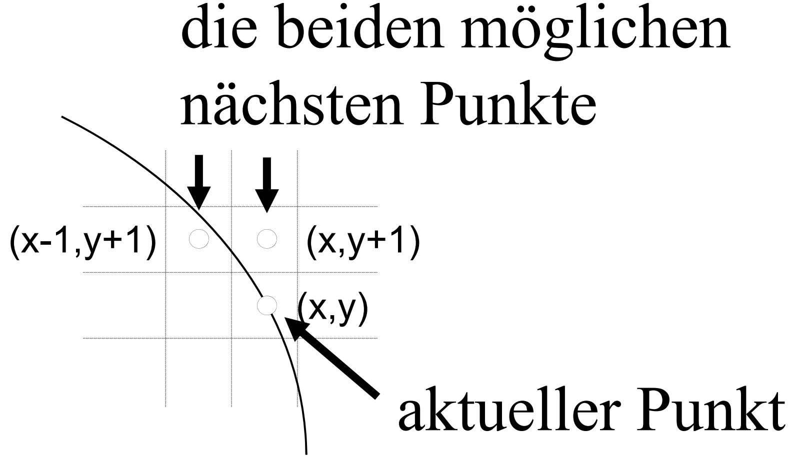
Analog zu der Linienberechnung muss gerundet und nicht abgeschnitten werden



Erste Optimierung

- Das Berechnen der Wurzel ist eine sehr teure Operation, die es zu vermeiden gilt
- auch braucht das Runden (Math.rint) Rechenzeit (sehr wenig)
- Idee analog zu Zeichnen von Linien:

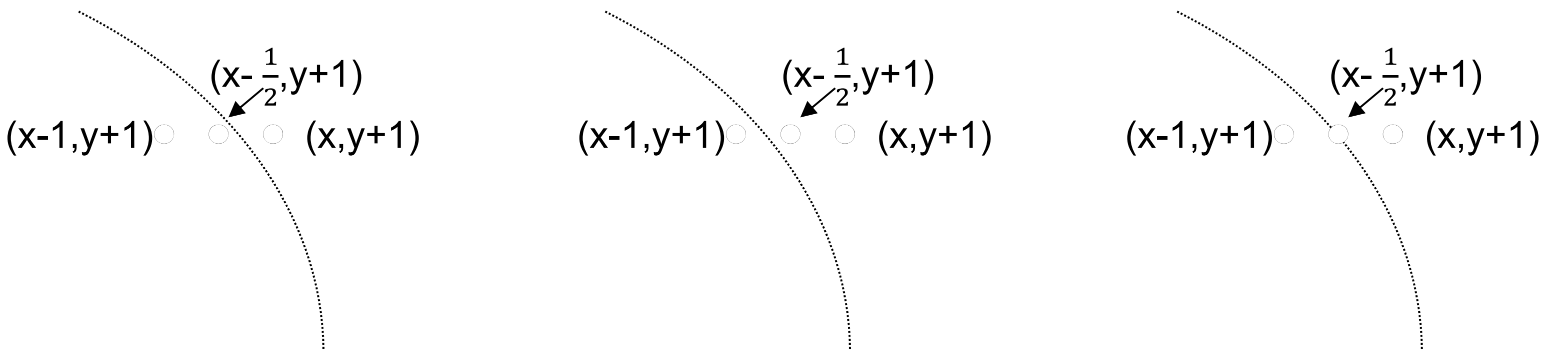
der x-Wert wird im nächsten Schritt aus dem vorherigen Schritt übernommen oder um 1 verringert, je nachdem, welcher besser passt



Erste Optimierung: welcher Punkt?

- Um zu entscheiden, welcher Punkt näher an dem Kreis liegt, wird der Punkt dazwischen betrachtet: $p_z=(x-\frac{1}{2},y+1)$
- Hier gibt es drei Fälle zu betrachten:
  1. p_z liegt im Kreis ⇒ $(x,y+1)$ ist dichter am Kreis
  2. p_z liegt außerhalb des Kreises ⇒ $(x-1,y+1)$ ist dichter am Kreis
  3. p_z liegt auf dem Kreis ⇒ egal

Fall 1: p_z im Kreis | Fall 2: p_z außerhalb des Kreises | Fall 3: p_z auf Kreis



Im oder außerhalb des Kreises?

- Um zu entscheiden, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises liegt, betrachtet man die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

- Hieraus ergibt sich die Funktion $F^r(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$, die anzeigt, ob ein Punkt p=(x,y) innerhalb, außerhalb oder auf dem Kreis liegt:

$F^r(x,y) = 0 \Rightarrow$ p=(x,y) liegt auf dem Kreis
$F^r(x,y) < 0 \Rightarrow$ p=(x,y) liegt im Kreis
$F^r(x,y) > 0 \Rightarrow$ p=(x,y) liegt außerhalb des Kreises

- Hieraus ergibt sich dann der Algorithmus:

Go!

Laufzeit!

Erste Implementierung: (Forts.)

```
public static double F(double x,double y,double r) {
    return x*x+y*y-r*r;
}

public static void drawCircle0(Graphics g,int x0, int y0, int) {
    int y = 0;
    int x = r;
    while(y<=x) {
        setPixel(g,x0,y0,x,y);
        ++y;
        if (F(x-0.5,y,r) > 0)
            --x;
    }
}
```

ist y+1 wegen ++y vorher

liegt $p_z=(x-\frac{1}{2},y+1)$ außerhalb des Kreises?

… dann ist der nächste Punkt $p=(x-1,y+1)$

Optimierung

- in jedem Schritt wird der Fehler $F^r(x, y)$ erneut berechnet
- dies ist günstiger als die Wurzelberechnung, kann aber noch optimiert werden
- analog zu dem Bresenham Algorithmus zum Linienzeichnen wird der Fehler F^r_{i+1} für den nächsten Iterationsschritt aus dem aktuellen Fehler F^r_i berechnet
- der aktuelle Fehler $F^r_i = Fr(x - \frac{1}{2}, y)$ lautet nach Auflösen der Formel:

$$F^r_i = F^r\left(x - \frac{1}{2}, y\right) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - r^2 =$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - r^2$$

Optimierung (Forts.)

- im nächsten Iterationsschritt wird:
  1. y in jedem Fall im 1 erhöht (++y)
  2. entweder bleibt x unverändert oder x wird um 1 erniedrigt
- daraus ergeben sich zwei mögliche Fehlerterme für den nächsten Schritt

Optimierung (Forts.)

1. Fall: x bleibt unverändert, y wird um 1 erhöht, der Fehlerterm lautet:

$$
\begin{aligned}
F_{i+1}^r &= F^r\left(x - \frac{1}{2}, y + 1\right) \\
&= (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 - r^2 \\
&= x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - r^2 \\
&= \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - r^2\right) + 2y + 1 \\
&= F_i^r + 2y + 1
\end{aligned}
$$

Optimierung (Forts.)

2. Fall: x wird um 1 verringert, y wird um 1 erhöht, der Fehlerterm lautet:

einzige Änderung gegenüber Fall 1

$$F_{i+1}^r = F^r\left(x - \boxed{\frac{3}{2}}, y + 1\right)$$

$$= (x - \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 - r^2$$

$$= x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 2y + 1 - r^2$$

$$= \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - r^2\right) - 2x + 2 + 2y + 1$$

$$= F_i^r - 2x + 2y + 3$$

Optimierung (Forts.)

- es fehlt noch der erste Fehlerterm, wenn x = r und y = 0 ist

$$
\begin{aligned}
F_0^r &= F^r\left(r - \frac{1}{2}, 0\right) \\
&= (r - \frac{1}{2})^2 + (0)^2 - r^2 \\
&= r^2 - r + \frac{1}{4} - r^2 \\
&= -r + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Go!

Laufzeit!

Implementierung der Optimierung

```
public static void drawCircle1(Graphics g,int x0, int y0, int r) {
        int y = 0;
        int x = r;
        double F = 0.25 - r;
        while(y<=x) {
                setPixel(g,x0,y0,x,y);
                ++y;
                if (F > 0) {
                        F += 2*y-2*x+3;
                        --x;
                } else {
                        F += 2*y+1;
                }
        }
}
```

$$F_{i+1}^r = F_i^r - 2x + 2y + 3$$

$$F_{i+1}^r = F_i^r + 2y + 1$$

Diskussion der Optimierung

Problem: immer noch wird teure Fließkommaarithmetik verwendet für den Fehlerterm F

- F wird mit 0.25-r initialisiert (r ist int und r ≥1)
- F wird mit 0 verglichen (if (F>0))
- zu F wird hinzuaddiert

2*y-2*x+3 bzw. 2*y+1

- alles sind int-Werte
- somit wird F immer ein Wert sein von xxx.75 oder xxx.25
- für den Vergleich mit 0 ist dies unerheblich und kann weggelassen werden
- ⇒ F als int deklarieren und mit –r initialisieren

Go!

Laufzeit!

Implementierung der nächsten Optimierung

```
public static void drawCircle2(Graphics g,int x0, int y0, int r) {
        int y = 0;
        int x = r;
        int F = -r;          einzige Änderung
        while(y<=x) {
                setPixel(g,x0,y0,x,y);
                ++y;
                if (F > 0) {
                                F += 2*y-2*x+3;
                                --x;
                } else {
                                F += 2*y+1;
                }
        }
}
```

Diskussion der Optimierung

- eine weitere Optimierung ist noch möglich
- statt die beiden Terme 2*y-2*x+3 und 2*y+1 immer wieder erneut auszurechnen, werden zwei Variablen eingeführt, die stattdessen verwendet werden
- int dy für 2*y+1
- dy wird mit 1 initialisiert
- in jedem Schritt wird dy um 2 erhöht (dx += 2)

y	**2*y+1**
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
…	…

Diskussion der Optimierung (Forts.)

- eine weitere Optimierung ist noch möglich
- statt die beiden Terme 2*y-2*x+3 und 2*y+1 immer wieder erneut auszurechnen, werden zwei Variablen eingeführt, die stattdessen verwendet werden

- int dyx für 2*y-2*x+3
- dyx wird mit -2*r+3 initialisiert
- in <u>jedem Schritt</u> wird dyx um 2 erhöht (dyx +=2)
- wird x um 1 erniedrigt, wird dyx <u>zusätzlich</u> um 2 erhöht (dyx +=2)

x	y	2*y-2*x+3
r	0	-2*r +3
r	1	-2*r +5
r	2	-2*r +7
r	3	-2*r +9
r-1	4	-2*r +2 + 11
r-1	5	-2*r +2 + 13
r-1	6	-2*r +2 + 15
r-2	7	-2*r +4 + 17
r-2	7	-2*r +4 + 19
…	…	…

Go!

Laufzeit!

Implementierung der letzten Optimierung

```
public static void drawCircle3(Graphics g,int x0, int y0, int r) {
    int y = 0;
    int x = r;
    int F = -r;
    int dy = 1;
    int dyx = -2*r+3;
    while(y<=x) {
        setPixel(g,x0,y0,x,y);
        ++y;
        dy += 2;
        dyx += 2;
        if (F > 0) {
            F += dyx;
            --x;
            dyx += 2;
        } else {
            F += dy;
        }
    }
}
```

zwei Fehlerterme

beide Fehlerterme werden immer um 2 erhöht

wird x erniedrigt, so muss der komplexere Fehlerterm zusätzlich um 2 erhöht werden

Vorlesung 6

Approximation: 1-dimensional

- Die binäre Suche (siehe Prog II) kann auch zur Approximation dienen
- Aufgabe:
  - gegeben eine Menge M von Zahlen
  - gegeben eine Zahl x
  - finde $y \in M$ mit $\forall z \in M$: $|x-y| \leq |x-z| \vee y = z$
- Beispiel:

  M = {1, 4, 17, 23, -34, -2003, 1024, 6, 7}

  x = 9

  dann ist y = 7 die Zahl, die zu allen anderen Zahlen den kleinsten Abstand hat

Approximation: 1-dimensional (Forts.)

- Lösung für dieses Problem:
  - alle Zahlen aus M werden zunächst in einem Vektor v sortiert
  - mit der binären Suche sucht man die Zahl x
  - ist x in der Menge vorhanden $\rightarrow$ fertig
  - ist x nicht in der Menge vorhanden, dann
    1. hört die Suche bei einem Index i auf, an dem x gestanden hätte, wenn es in M vorhanden gewesen wäre
    2. wenn x < v[i] ist, dann vergleiche x mit v[i] und v[i-1]
    3. wenn x > v[i] ist, dann vergleiche x mit v[i] und v[i+1]

Approximation: 1-dimensional (Beispiel)

M = {1, 4, 17, 23, -34, -2003, 1024, 6, 7}

x = 9

v =

0	1	2	3	4	5	6	7	8
-2003	-34	1	4	6	7	17	23	1024

- Ergebnis der binären Suche: i = 5
- da v[5] = 7 < x = 9 ist, wird x zusätzlich mit v[6] verglichen
- Ergebnis des Vergleichs: v[5] = 7 hat den kleinsten Abstand zu 9 von allen Zahlen aus M

Approximation: 2-dimensional

- Frage:

  kann dieses Verfahren auch auf eine mehrdimensionale Approximation angewendet werden

- Beispiel:

  gegeben ist eine Menge von Punkten M in einem Koordinatensystem; gesucht ist der Punkt aus M, der von einem gegebenen Punkt x den kleinsten Abstand hat

- Antwort:

  leider nein, da die Elemente nicht mehr linear angeordnet werden können, d.h. für Zahlen gilt:

$$x \not< y \wedge x \not> y \Rightarrow x = y$$

  dies gilt **<u>nicht</u>** für Punkte

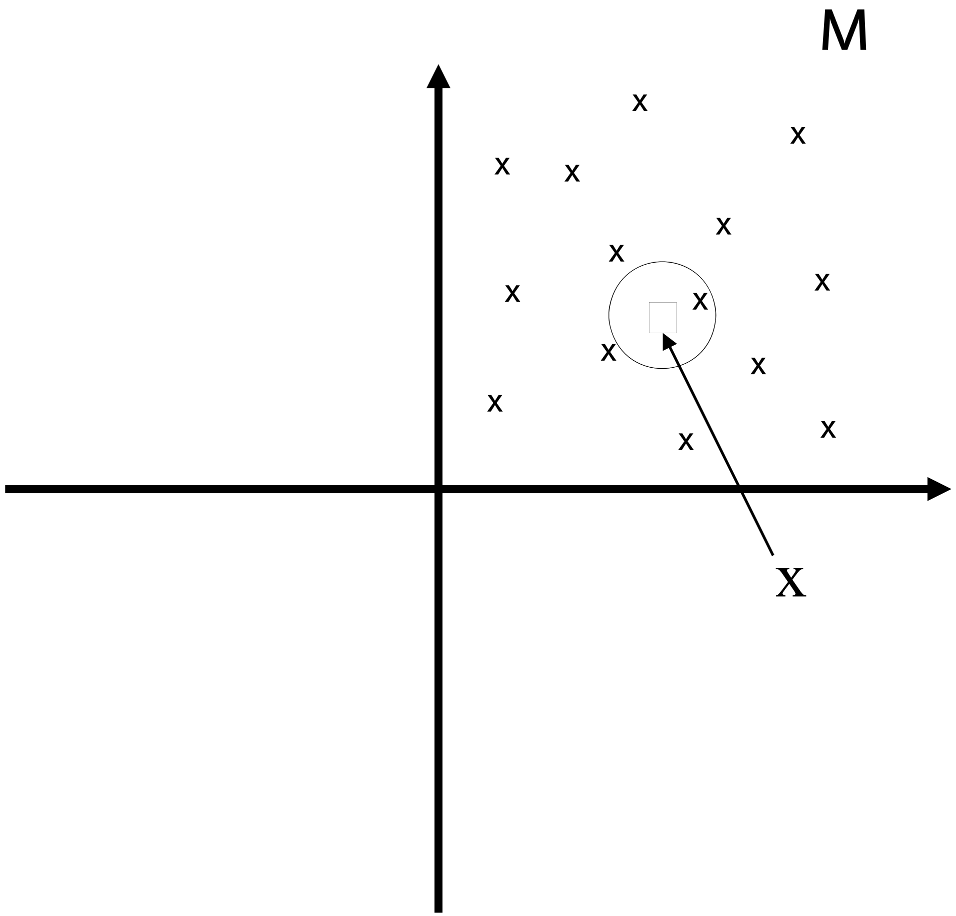
$$(1,2) \not< (2,1) \wedge (1,2) \not> (2,1) \not\Rightarrow (1,2) = (2,1)$$

Approximation: 2-dimensional (Forts.)

- Brute Force Ansatz:
  - Berechne die Distanz von x zu allen Elementen aus M
  - selektiere das Element mit dem kleinsten Abstand
  - Komplexität: $O(n)$
  - Zum Vergleich binärer Suche: $O(\log n)$

Approximation: 2-dimensional (Forts.)

- Visualisierung des Problems:

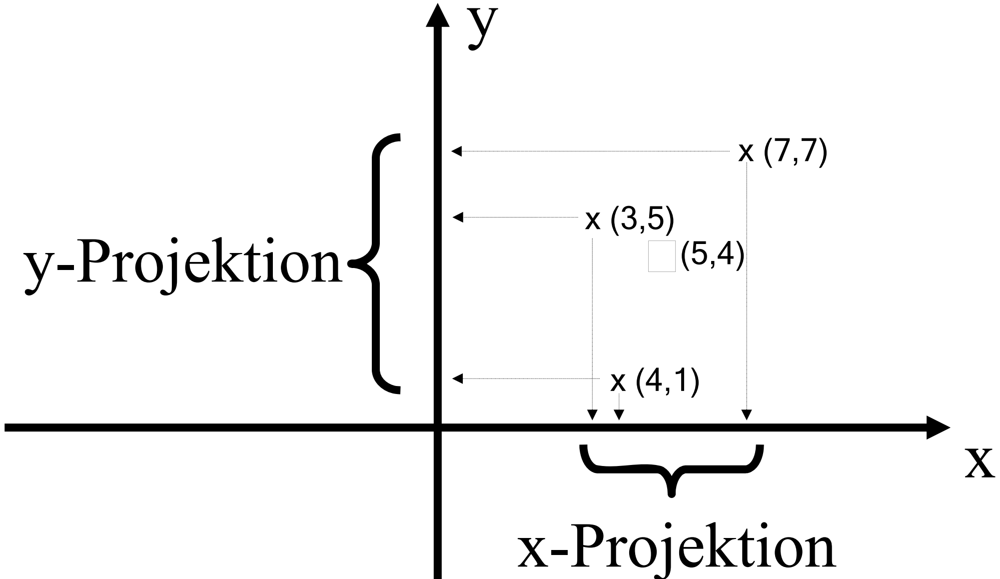


- Idee: um x konzentrische Kreise ziehen
- prüfen, ob ein Punkt aus M in diesem Kreis liegt
- wenn nicht, wird der Kreis vergrößert

Approximation: 2-dimensional (Forts.)

- Probleme:
  - Wie sollen konzentrische Kreise gezogen werden?
  - Wie wird effizient geprüft, ob ein Punkt im Kreis liegt?
- Idee:
  - sortiere die Punkte einmal nach der x-Koordinate
  - sortiere die Punkte einmal nach der y-Koordinate
  - suche mittels der binären Suche in beiden Vektoren
  - starte von den gefundenen Punkten die Suche und verkleinere sukzessiv den Radius des Kreises

Approximation: 2-dimensional: Beispiel



$M = \{(4,1)\ ,\ (7,7),\ (3,5)\}$

$x = (5,4)$

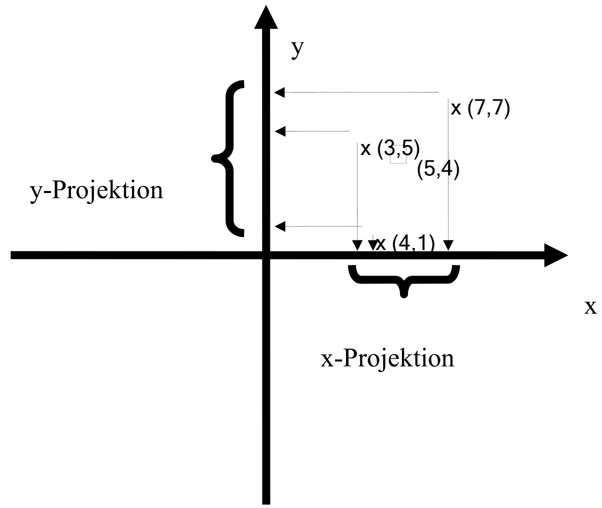
$v_x =$

(3,5)	(4,1)	(7,7)
0	1	2

$v_y =$

(4,1)	(3,5)	(7,7)
0	1	2

Approximation: 2-dimensional: Beispiel (Forts.)



- Suchen von (5,4)

Binärsuche bzgl. 5 (x-Wert) endet hier

v_x =

(3,5)	(4,1)	(7,7)
0	1	2

v_y =

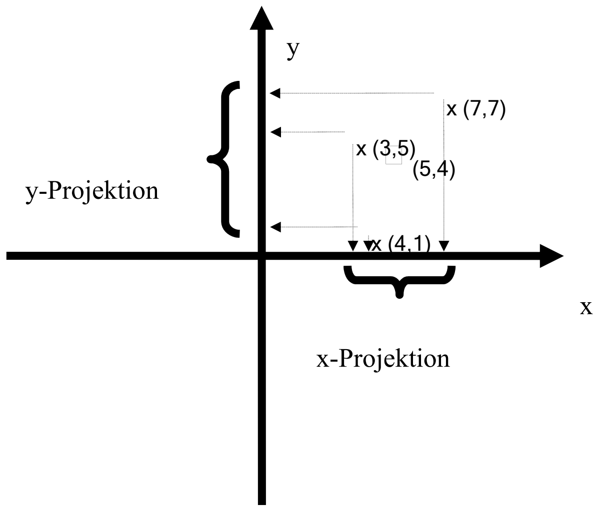
(4,1)	(3,5)	(7,7)
0	1	2

Binärsuche bzgl. 4 (y-Wert) endet hier

es sind 4 Vergleiche notwendig:

- 2 bzgl. der x-Projektion (5,4) mit (4,1) und (7,7)
- 2 bzgl. der y-Projektion (5,4) mit (4,1) und (3,5)

Approximation: 2-dimensional: Beispiel (Forts.)



bei den 4 Vergleichen werden die Abstände der Punkte zueinander berechnet (Satz des Pythagoras):

- | (5,4) - (4,1) | = √(1+9) ≈ 3,16
- | (5,4) - (7,7) | = √(4+9) ≈ 3,60
- | (5,4) - (3,5) | = √(4+1) ≈ 2,23

die erste Vergleichsrunde hat ergeben, dass maximal in einem Abstand von 2,23 gesucht werden muss

⇒ es müssen maximal bzgl. der **x-Projektion** die Werte zwischen 5-2,23 = 2,77 und 5+2,23 = 7,23 betrachtet werden

⇒ es müssen maximal bzgl. der **y-Projektion** die Werte zwischen 4-2,23 = 1,77 und 4+2,23 = 6,23 betrachtet werden

Approximation: 2-dimensional (Forts.)

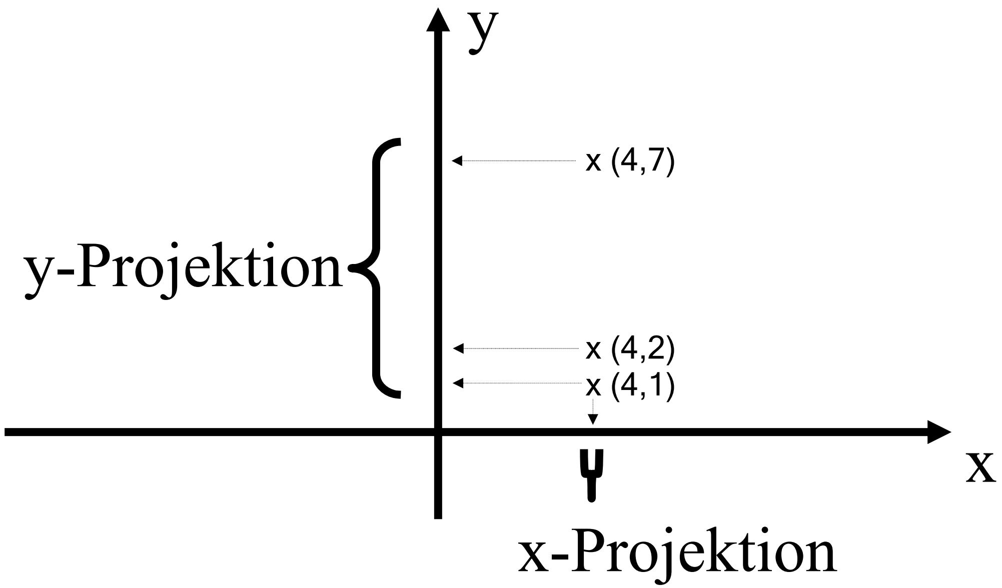
- bei den weiter zu untersuchenden Punkten werden die neuen Abstände mit dem alten Abstand verglichen
- ist der neue Abstand kleiner, so wird der Suchraum weiter eingeschränkt
- i.d.R. sollte das Verfahren schnell beendet werden

- offene Fragen:
  - Wie kann das Verfahren für mehr als 2 Dimensionen erweitert werden?
  - Wie sollen die Daten in verschiedenen Projektionen bei gleichen Werten sortiert (Bsp. (4,3), (4, 50), (4,16) bzgl. der x-Projektion)?
  - Was sind ungünstige Daten?

Approximation: mehr-dimensional

- das Verfahren kann kanonisch auf mehr als 2 Dimensionen erweitert werden
- neben der x- und y-Projektion müsste dann eine z-Projektion durchgeführt werden, wenn es sich um 3 Dimensionen handelt
- das Suchen würde dann nicht 4 sondern 6 Elemente ergeben, von denen dann die Abstände zu berechnen wären
- die Abstände würden wieder mittels des Satz des Pythagoras ermittelt werden
- in jedem Iterationsschritt würden 6 neue Elemente untersucht werden

Approximation: Verfeinerung der Projektion

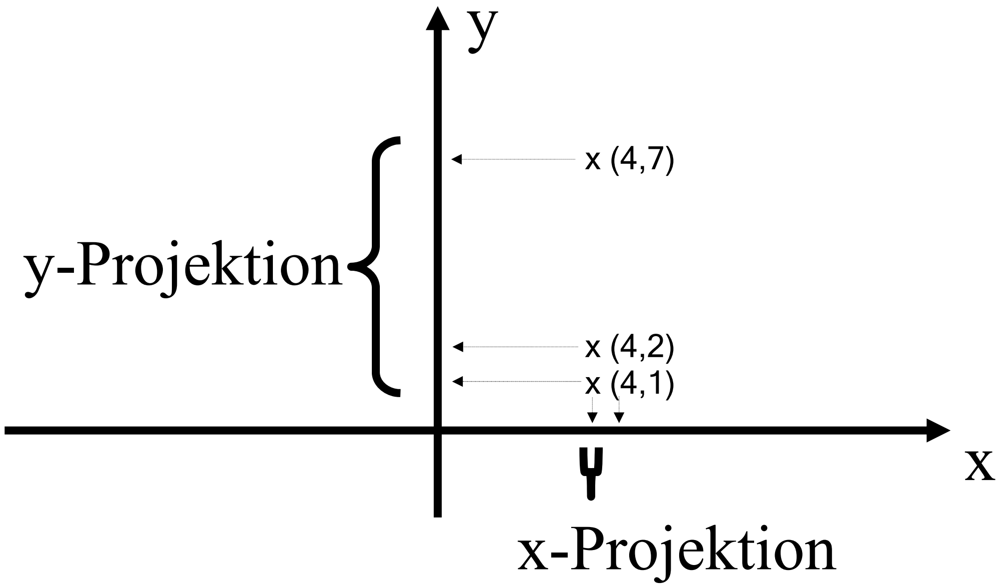


Problem:

- die y-Projektion verteilt die Punkte gut
- die x-Projektion bildet alle Punkte auf den selben Punkt ab

- dies führt dazu, dass ein binäres Suchen bzgl. der x-Projektion keinen Sinn mehr macht
- Optimierung: Elemente mit gleicher x-Projektion werden dann bzgl. ihres y-Wertes sortiert (bei gleichem y-Wert, bzgl. des z-Wertes usw.)

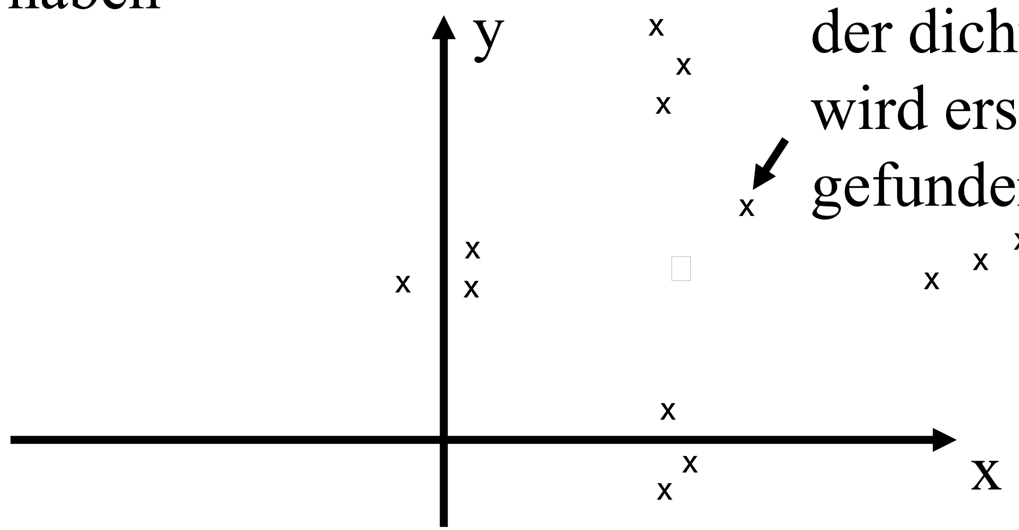
Approximation: Verfeinerung der Projektion (Forts.)



- x-Projektion ergibt dann **<u>eindeutig</u>** die Reihenfolge:
  (4,1) (4,2) (4,7)
- ein Suchen von (4,3) bzgl. der x-Projektion endet dann zwischen den Elementen (4,2) und (4,7)
- analog wird mit den anderen Projektionen verfahren

Approximation: ungünstige Daten

- Das Verfahren funktioniert gut,
  - wenn die Nähe der Punkte zueinander auch durch die Nähe der einzelnen Koordinatenanteile ausgedrückt wird
- Das Verfahren funktioniert schlecht,
  - wenn viele Punkte fast identische x-Werte (bzw. y-Werte) aber sehr weit auseinanderliegende y-Werte (bzw. x-Werte) haben



der dichteste Punkt wird erst sehr spät gefunden

Anwendung der Approximation: Farbsubstitution

- Für die Übung 2 (Substitution von seltenen Farben in einem Bild durch häufig vorkommende Farbe) wird benötigt:
  - Sortierung der Farben (wichtig für das Zählen, welche Farben wie oft vorkommen)
  - Approximation der Farben (3-dimensionale Approximation)
- Frage: sind die Farbdaten geeignet?
- Hierzu soll die Farbverteilung (welche Farben kommen vor?) beispielhaft untersucht werden

Go!

Anwendung der Approximation: Farbsubstitution (Forts)

- Hierzu werden alle vorkommenden Farben nach ihrem Rot-, Grün- und Blauanteil in eine Datei geschrieben
- Diese Datei kann mittels des Programms `gnuplot` dargestellt werden
- Beispiel:

```
82 103 120
80 97 117
81 92 120
82 96 125
75 92 120
81 99 123
82 93 115
87 89 110
83 90 109
80 88 101
85 96 102
85 95 104
87 99 115
82 95 114
80 93 112
79 92 108
92 97 103
...
```

Go!

Anwendung der Approximation: Farbsubstitution (Forts)

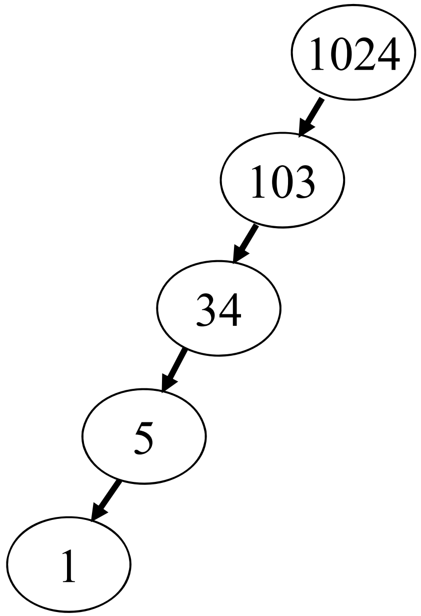
- Die Daten zeigen, dass das Verfahren geeignet ist, um die die Farben effizient zu approximieren.
- Somit kann dieses Verfahren für die Farbsubstitution eingesetzt werden.

Vorlesung 7

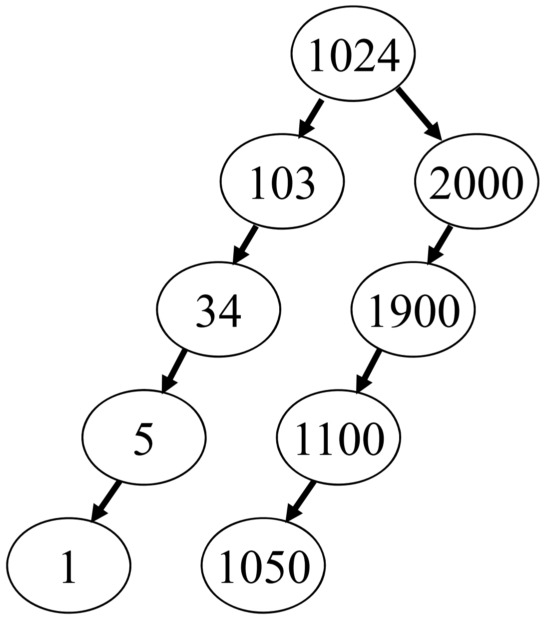
Nachteil von binären Bäumen

Die Entartung von binären Bäumen zu Listen kommt doch recht häufig vor.

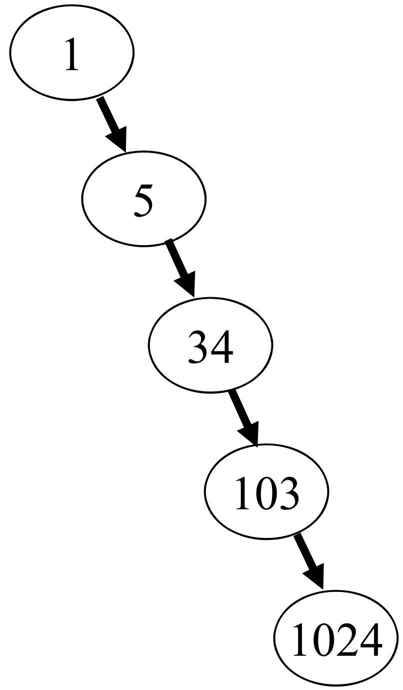
1024 103 34 5 1



1024 103 2000 34 1900 5 1100 1 1050



1 5 34 103 1024



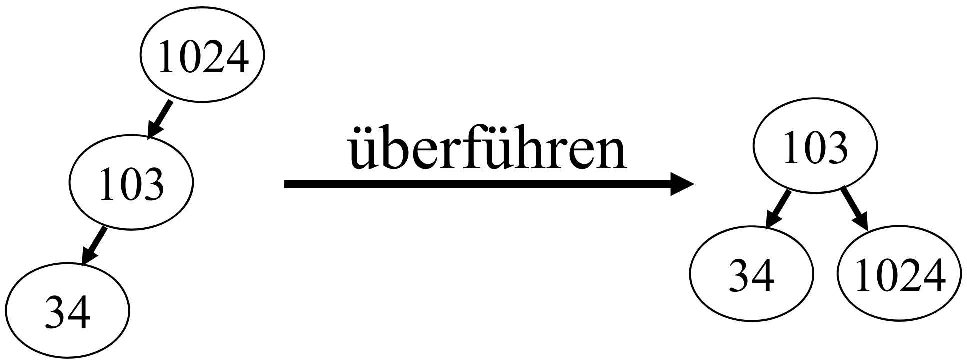
Verbesserung von binären Bäumen

Problem der entarteten Bäume:

- ihre Tiefe ist nicht mehr logarithmisch sondern linear, da
- die Knoten (fast) immer nur einen und nicht zwei Nachfolger haben

Idee:

- Bäume ausbalanzieren

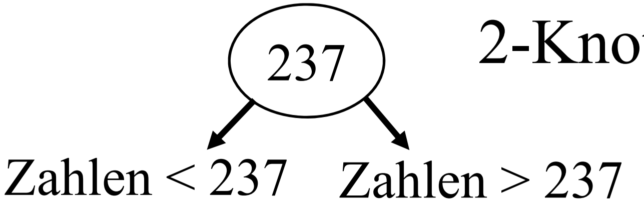


Top-Down 2-3-4-Bäume

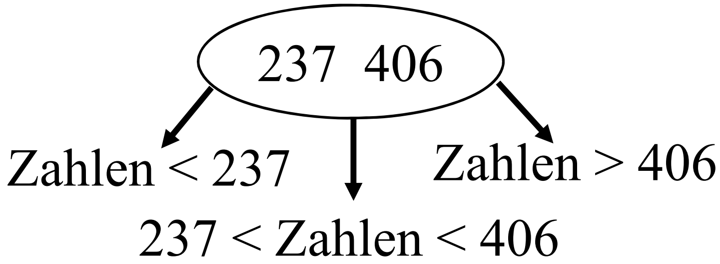
Idee:

- statt Knoten mit 2 Nachfolgern auch welche mit 3 und 4 Nachfolgern erlauben
- dazu haben die Knoten 1, 2 bzw. 3 Schlüssel

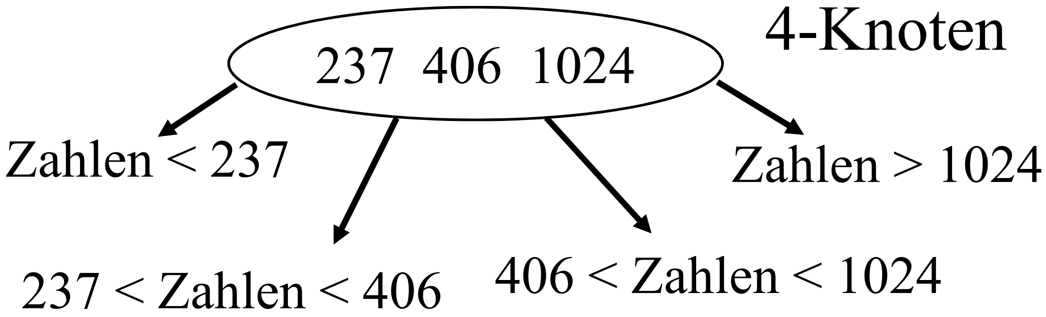
2-Knoten



3-Knoten



4-Knoten

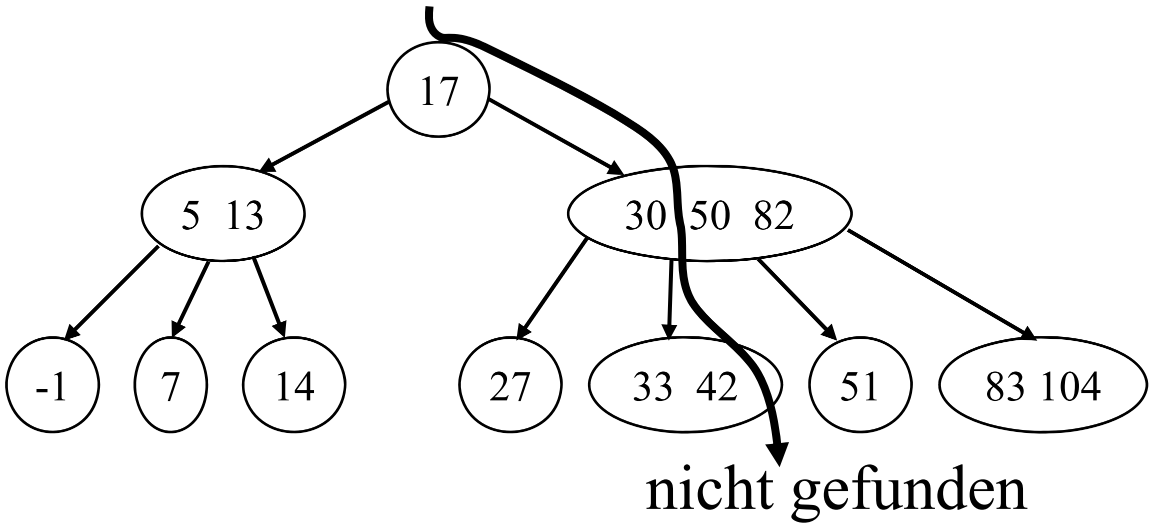


Top-Down 2-3-4-Bäume: Suchen

Idee:

- analog zu den Binärbäumen
- an jedem Knoten wird überprüft, ob der gesuchte Schlüssel der oder die (2 oder 3) abgespeicherten Schlüssel sind
- wenn nicht, wird in den entsprechenden Ast abgestiegen
- unten an einem Blatt kann dann entschieden werden, ob das Gesuchte vorhanden ist

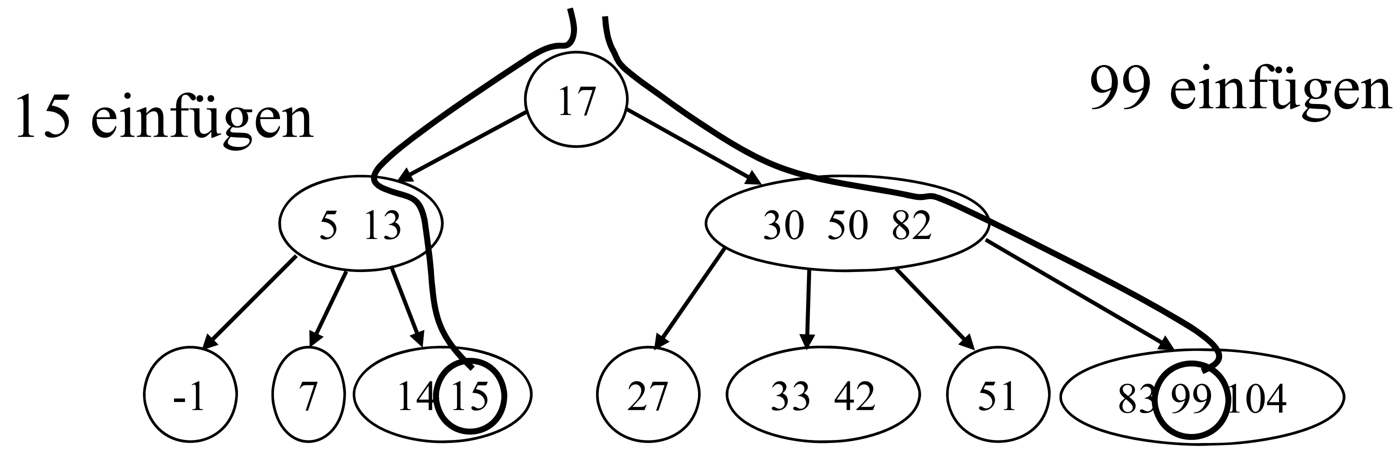
suchen nach 47



Top-Down 2-3-4-Bäume: Einfügen

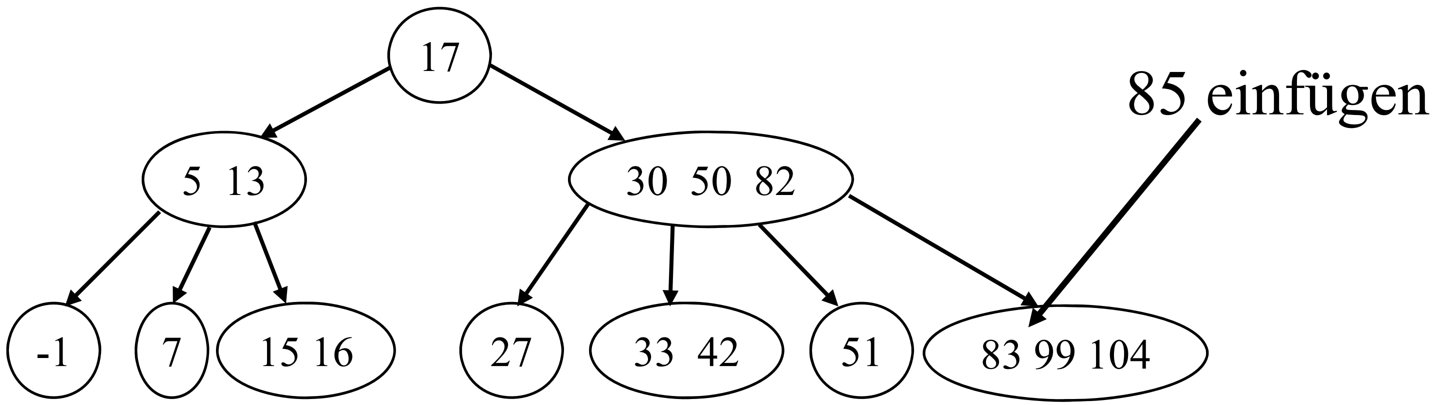
Idee:

- analog zu den Binärbäumen
- es wird bis zu einem Blatt abgestiegen
- wenn es sich um ein 2-Knoten oder 3-Knoten Blatt handelt, kann direkt der neue Schlüssel eingefügt werden
- aus dem 2-Knoten Blatt wird ein 3-Knoten Blatt
- aus dem 3-Knoten Blatt wird ein 4-Knoten Blatt

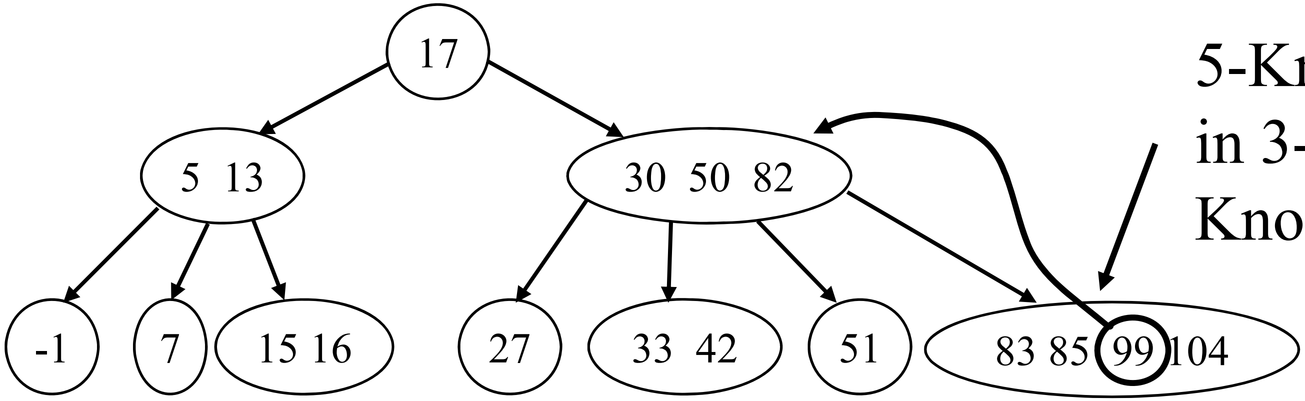


Top-Down 2-3-4-Bäume: Einfügen (Fort.)

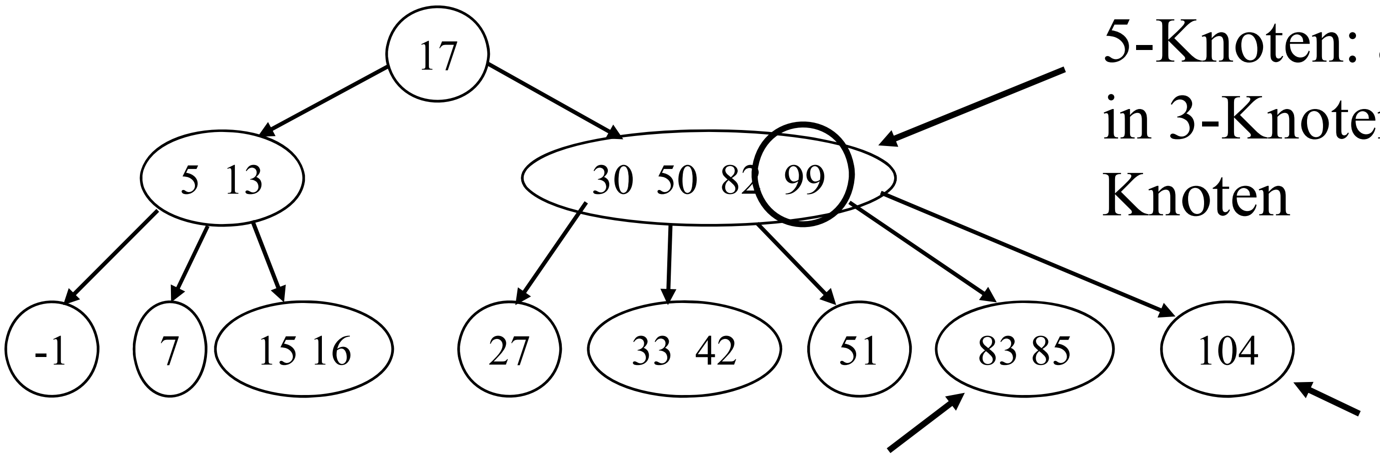
- muss in einem 4-Knoten Blatt eingefügt werden (es müsste ein 5-Knoten entstehen), so wird er in ein 3-Knoten und ein 2-Knoten aufgeteilt
- dadurch bekommt der Vater einen Knoten mehr
- dadurch muss der Vater (und rekursiv dessen Vater usw.) u.U. ebenfalls neu aufgeteilt werden



Top-Down 2-3-4-Bäume: Einfügen (Fort.)



5-Knoten: aufteilen in 3-Knoten und 2-Knoten

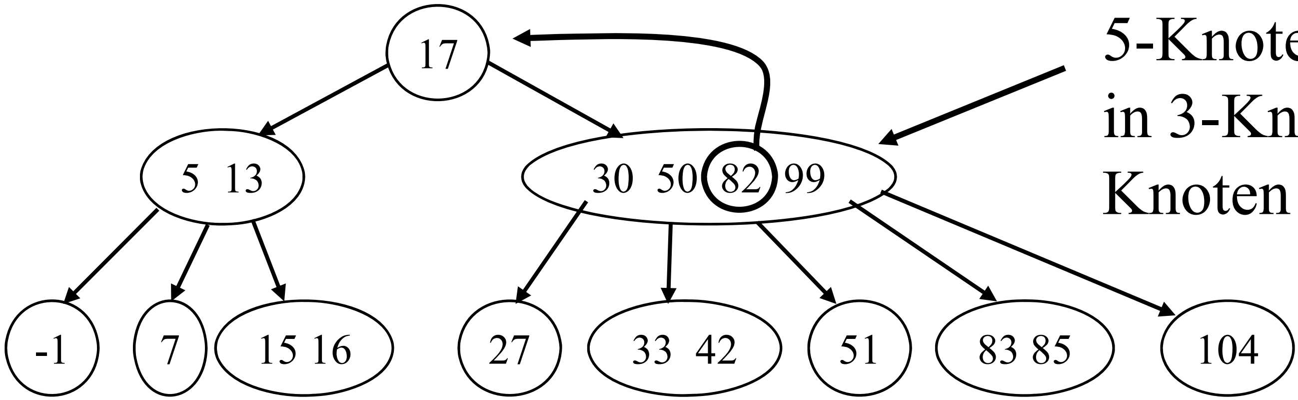


5-Knoten: aufteilen in 3-Knoten und 2-Knoten

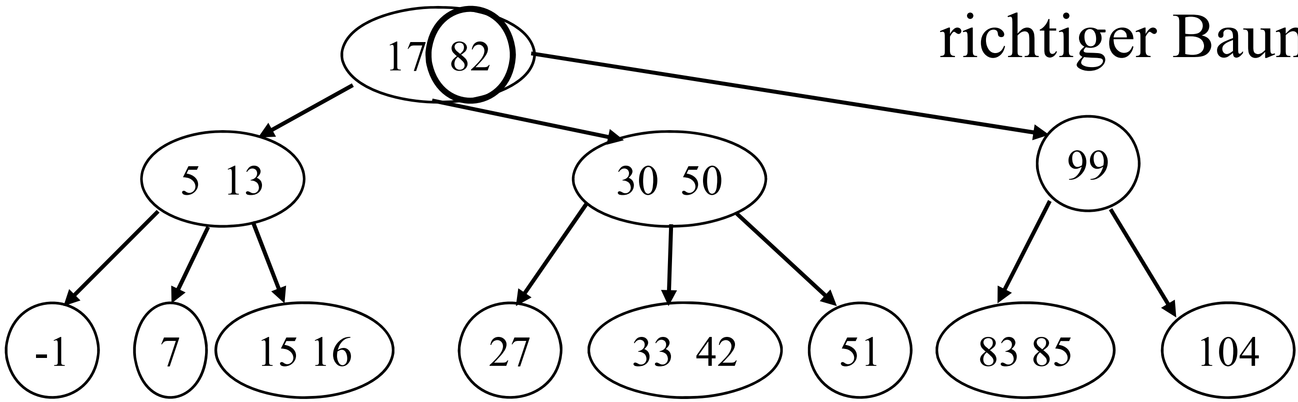
3-Knoten

2-Knoten

Top-Down 2-3-4-Bäume: Einfügen (Fort.)



5-Knoten: aufteilen in 3-Knoten und 2-Knoten

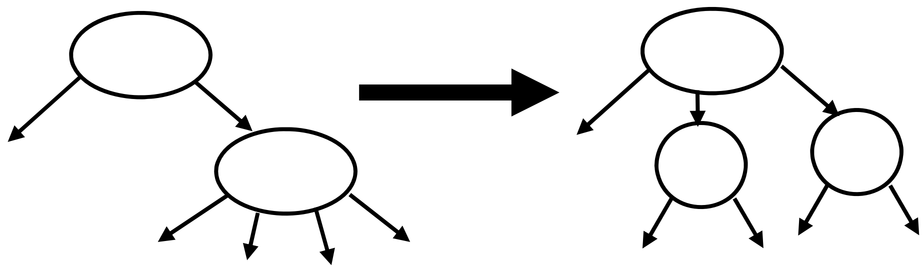


richtiger Baum

Top-Down 2-3-4-Bäume: Einfügen (Fort.)

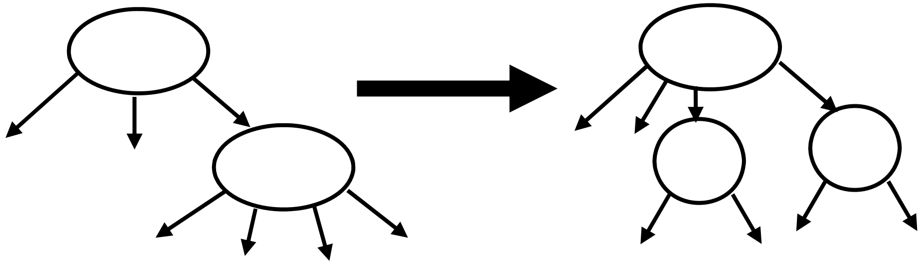
Optimierung:

- nicht erst beim Einfügen nach oben laufen und alle 4-Knoten aufspalten, sondern
- beim Abstieg alle 4-Knoten aufspalten, somit
- hat kein Knoten ein 4-Knoten Vorgänger und
- kann sofort aufgespaltet werden
- dazu folgende Regeln beim Abstieg:



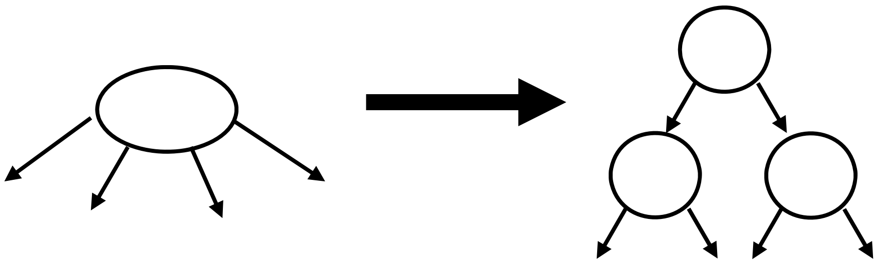
als einem 2-Knoten mit 4-Knoten Nachfolger wird ein 3-Knoten mit 2 2-Knoten Nachfolgern

Top-Down 2-3-4-Bäume: Einfügen (Fort.)



als einem 3-Knoten mit 4-Knoten Nachfolger wird ein 4-Knoten mit 2 2-Knoten Nachfolgern

Spezialfall: 4-Knoten Wurzel



4-Knoten Wurzel in 3 2-Knoten aufteilen; dadurch gewinnt der Baum an Höhe

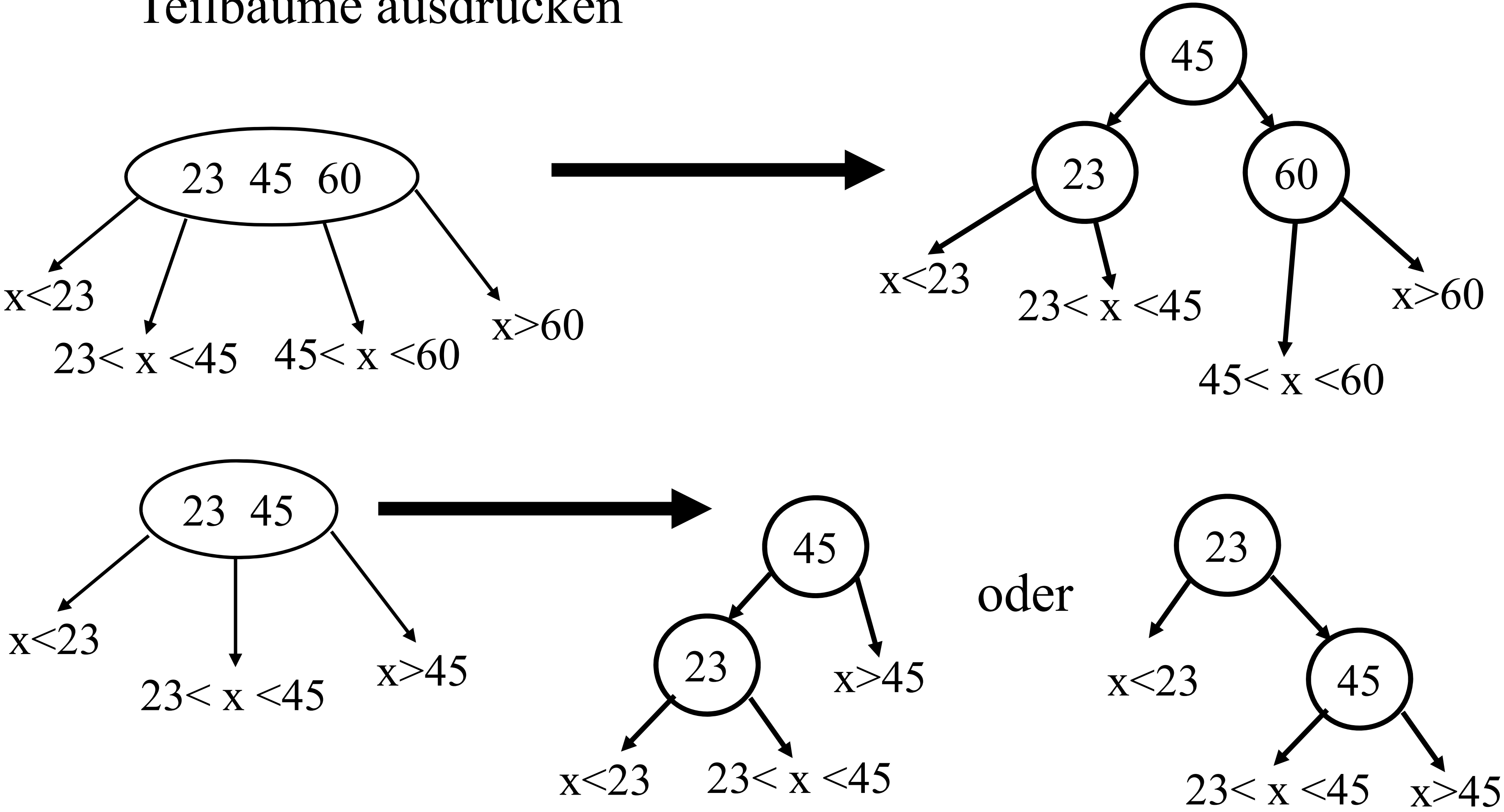
Top-Down 2-3-4-Bäume: Eigenschaften

- da der Baum nur an der Wurzel wachsen kann, ist er immer ausgeglichen
- dadurch liegt das Suchen in O(log N)
- das Einfügen liegt garantiert in O(log N)

- gemäß Sedgewick ist es nicht ganz trivial, diesen Algorithmus zu implementieren, daher ...

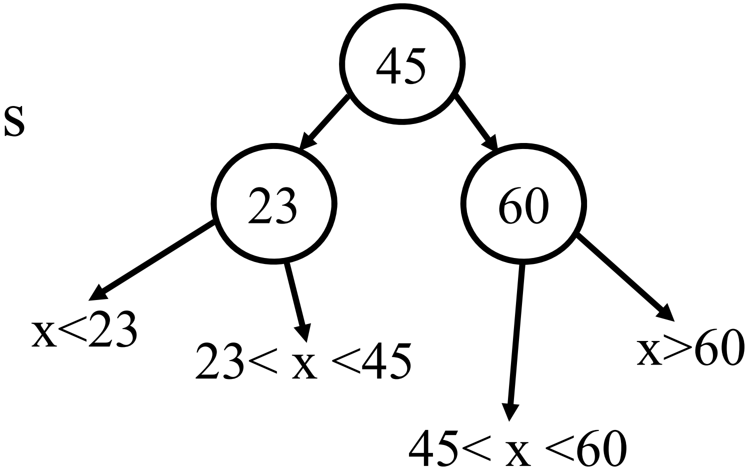
Rot-Schwarz Bäume

- 3-Knoten und 4-Knoten lassen sich auch durch binäre Teilbäume ausdrücken



Rot-Schwarz Bäume (Fort.)

- jeder 3-Knoten bzw. 4-Knoten lässt sich durch einen binären Teilbaum darstellen
- die Tiefe eines solchen Baums ist maximal 2-mal so groß wie die eines Top-down 2-3-4 Baums
- die roten Kanten dienen nur der Darstellung von 3- bzw. 4-Knoten
- die anderen Kanten dienen der Verkettung
- daher heißen diese Bäume rot-schwarz Bäume
- nach einer roten Kante folgt immer eine schwarze Kante !!!!



Rot-Schwarz Bäume: Implementierung

- jeder Knoten bekommt zusätzlich ein boolesches Flag
- ist dieses Flag true, so ist die Kante rot, die zu diesem Knoten führt
- ansonsten ist die Kante schwarz

```
public class BlackRedTree<K extends Comparable<K>,D> {
    class Node {
        public Node(K key,D data) {
            m_Key = key;
            m_Data = data;
        }
        K m_Key;
        D m_Data;
        Node m_Left = null;
        Node m_Right = null;
        boolean m_bIsRed = true;
    }
...
    private Node m_Root = null;
...
```

Flag, das die Kantenfarbe anzeigt

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- das Suchen in einem Rot-Schwarz Baum schaut sich niemals die Kantenfarbe an
- daher kann die search Methode von BinTree unverändert übernommen werden

```
public Node search(K key) {
    Node tmp = m_Root;
    while (tmp != null) {
        final int RES = key.compareTo(tmp.m_Key);
        if (RES == 0)
            return tmp;
        tmp = RES < 0  ? tmp.m_Left : tmp.m_Right;
    }
    return null;
}
```

wenn der Schlüssel gefunden ist, gibt den Datensatz zurück

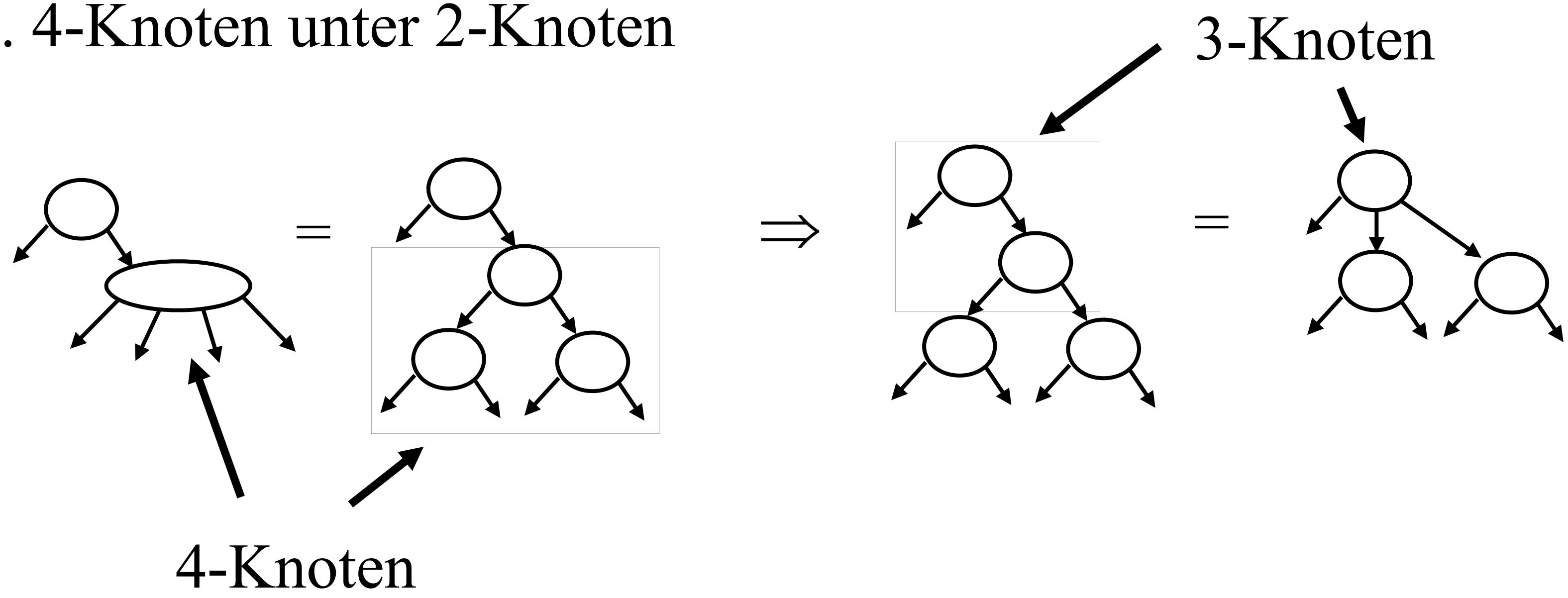
steige links bzw. rechts ab

Schlüssel ist nicht gefunden worden

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

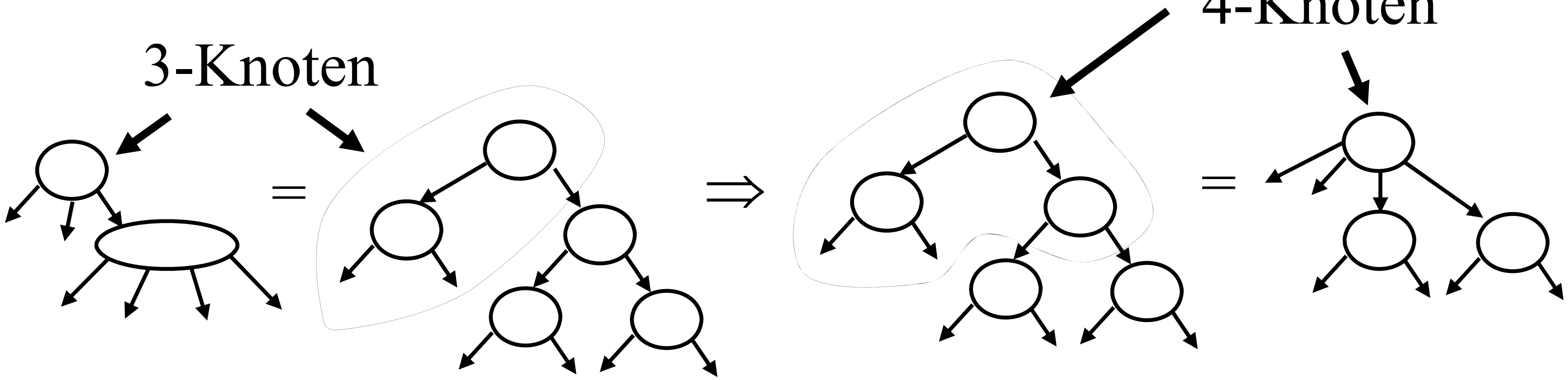
- beim Einfügen werden alle 4-Knoten aufgeteilt
- ein 4-Knoten erkennt man daran, dass beide Nachfolger-knoten das gesetzte Flag haben
- nicht sehr teuer, da es kaum 4-Knoten gibt
- es gibt 7 Fälle zu untersuchen

1. 4-Knoten unter 2-Knoten

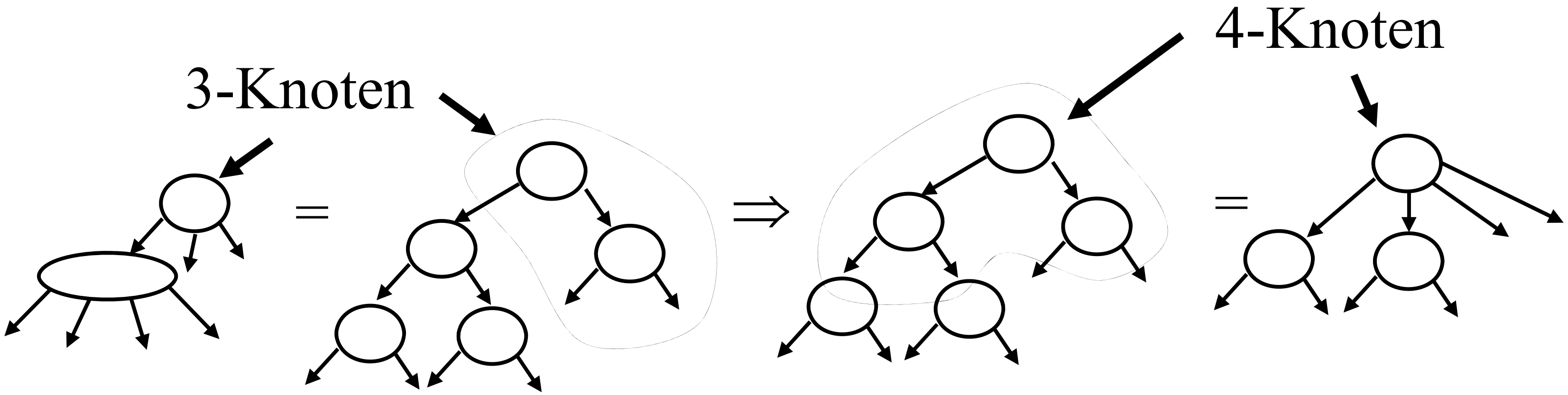


Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

2. 4-Knoten unter 3-Knoten

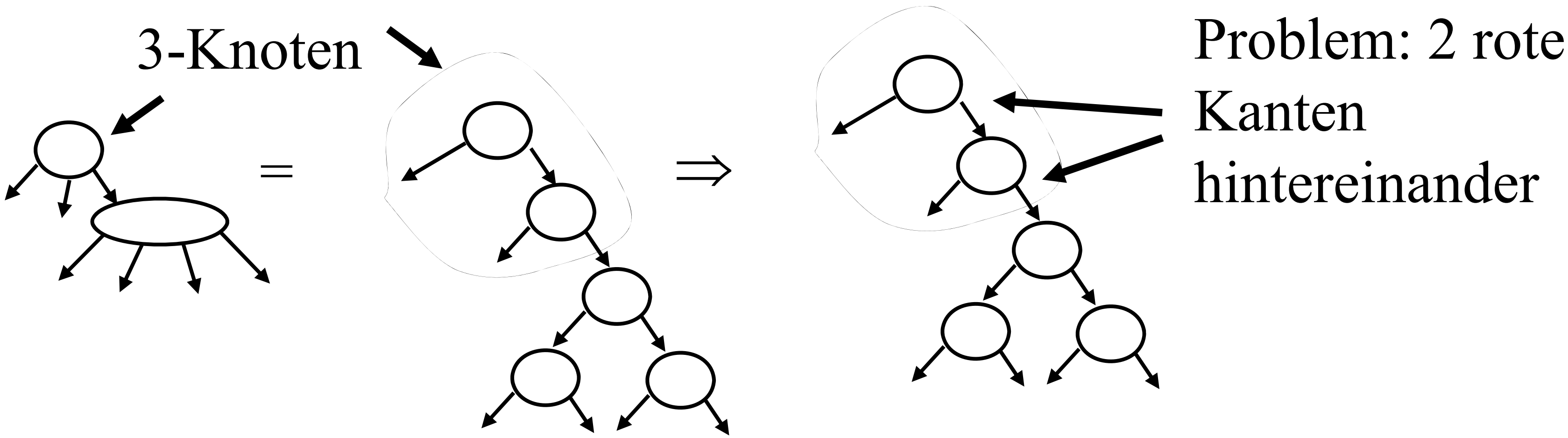


3. 4-Knoten unter 3-Knoten

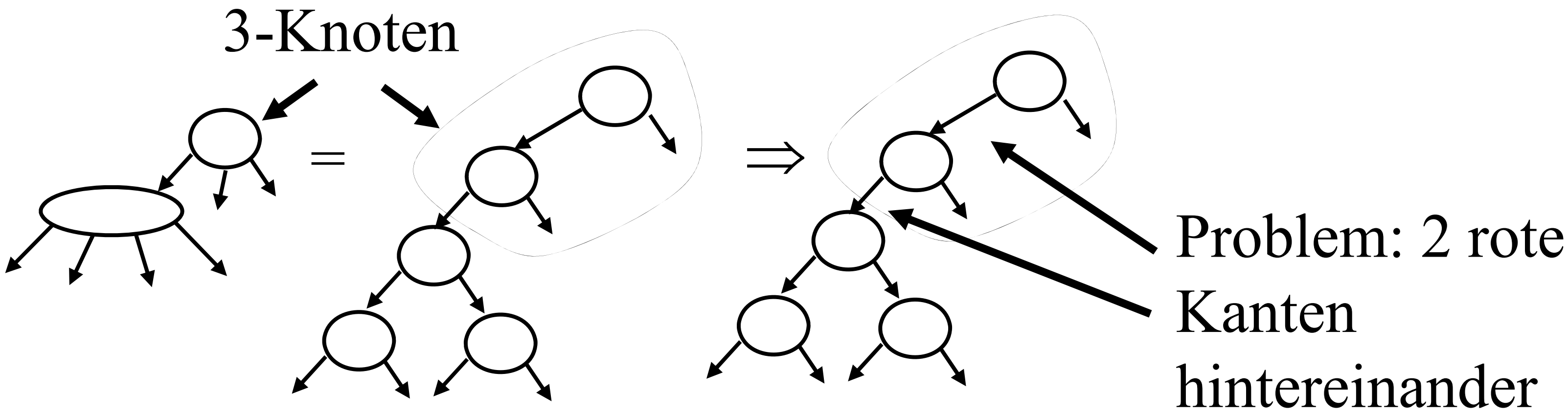


Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

4. 4-Knoten unter 3-Knoten

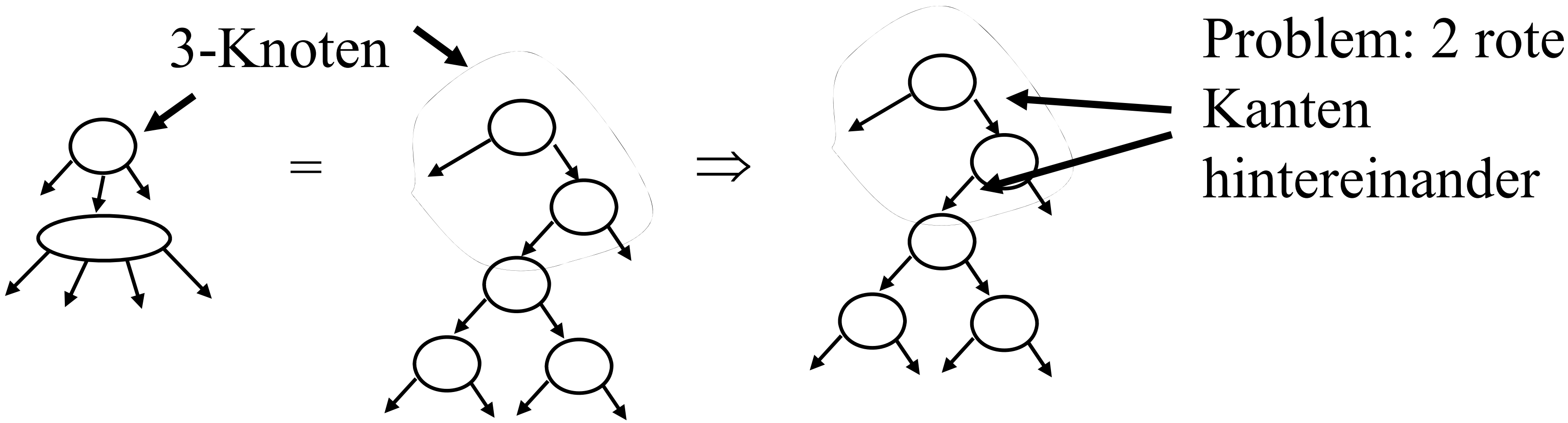


5. 4-Knoten unter 3-Knoten

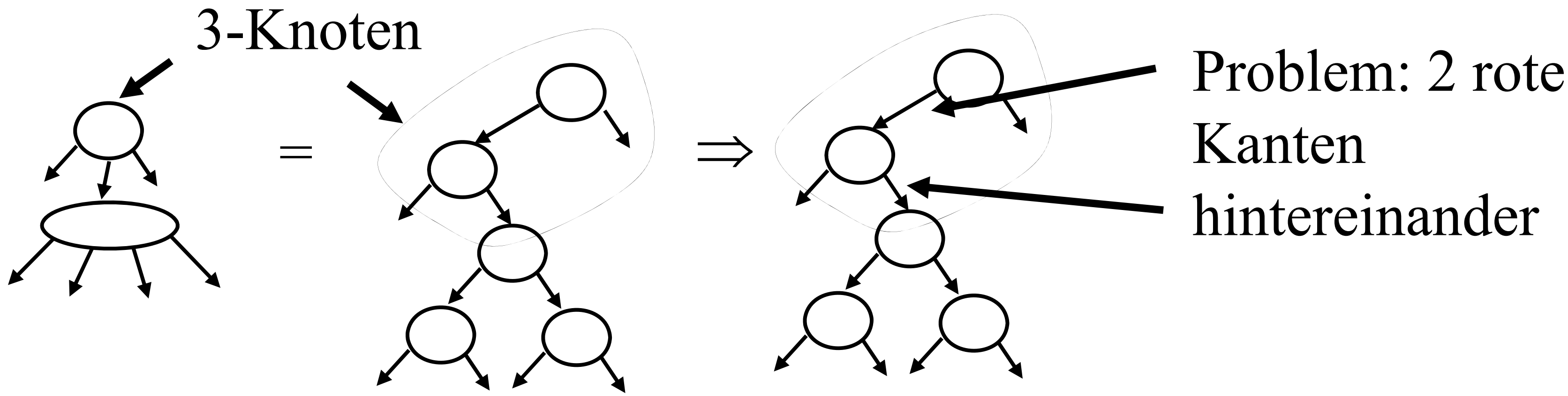


Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

6. 4-Knoten unter 3-Knoten



7. 4-Knoten unter 3-Knoten

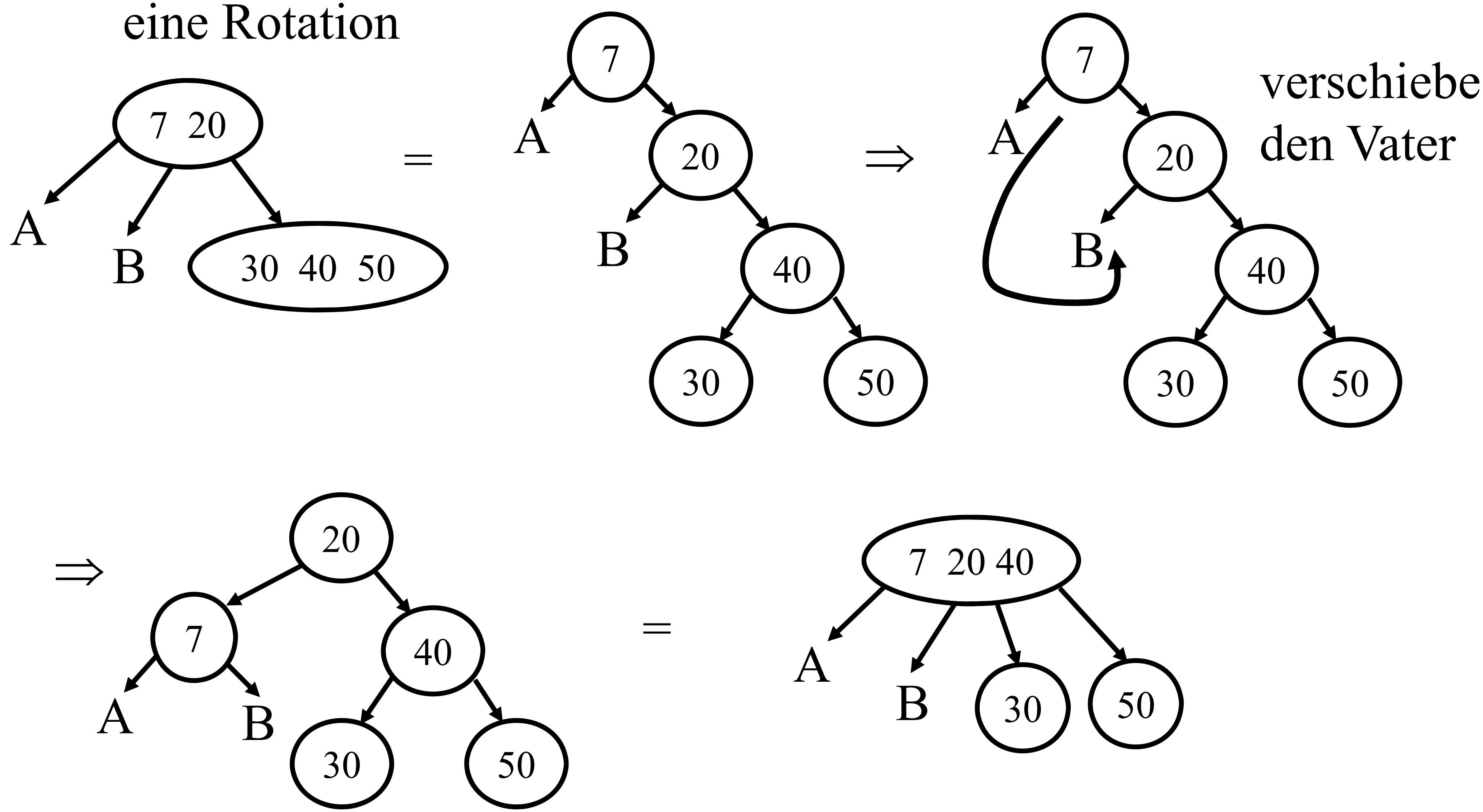


Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- Problem in Fall 4 und 5: die Ausrichtung der 3-Knoten war nicht richtig
- mit der richtigen Ausrichtung sind es dann die Fälle 2 bzw. 3
- Problem in Fall 6 und 7: hier kann eine andere Ausrichtung nichts bewirken
- andere Lösung ist gefragt

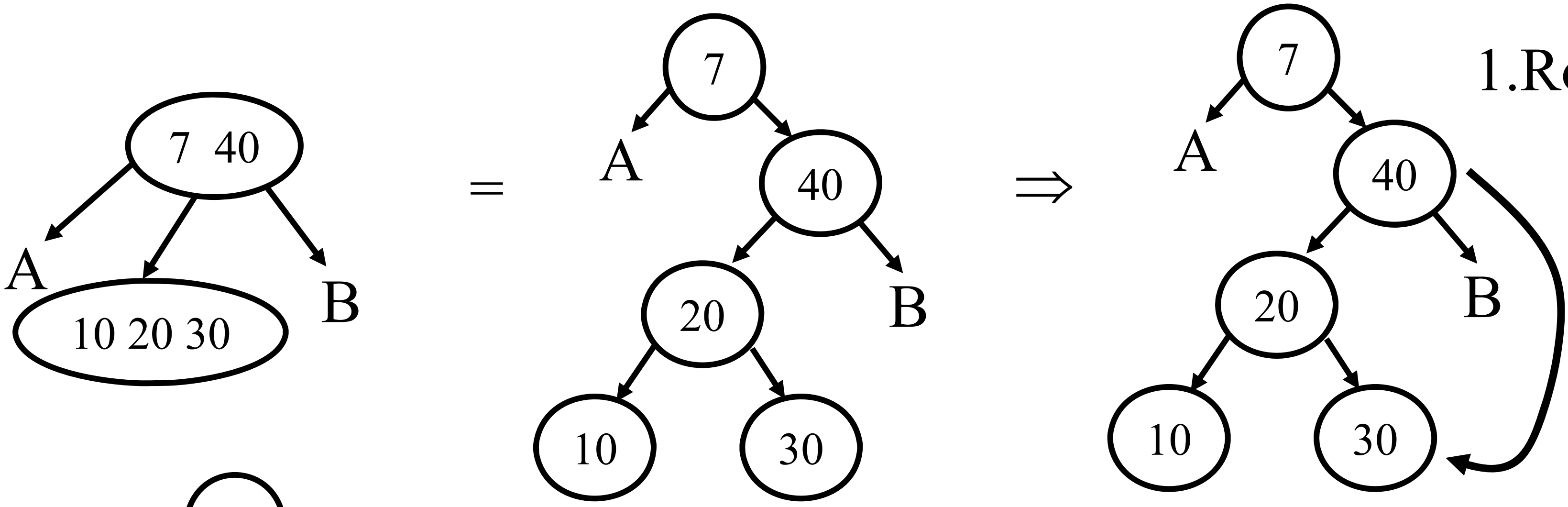
Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- Lösung für falsche Ausrichtung (Fall 4 und analog Fall 5): eine Rotation

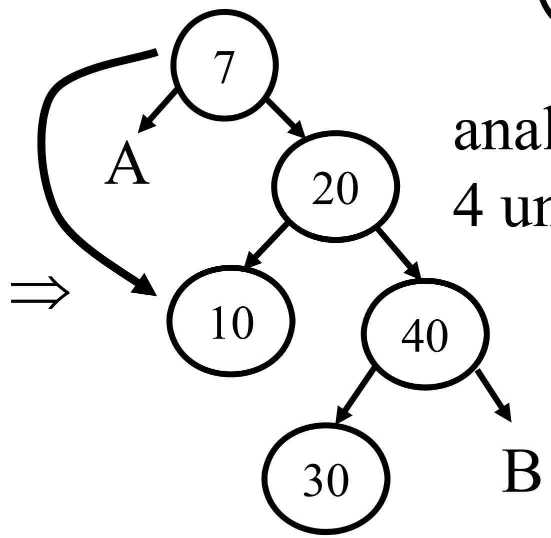


Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

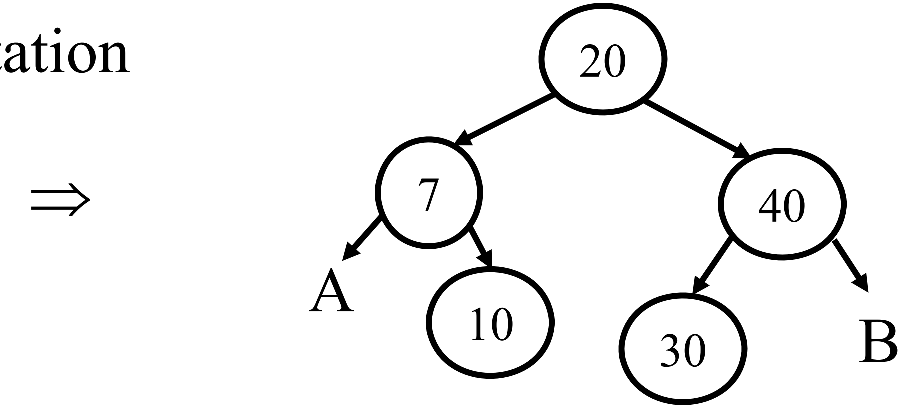
- Lösung für Fall 6 und 7: zwei Rotationen



1.Rotation



analoge Situation zu Fall 4 und 5: 2.Rotation



Vorlesung 8

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung

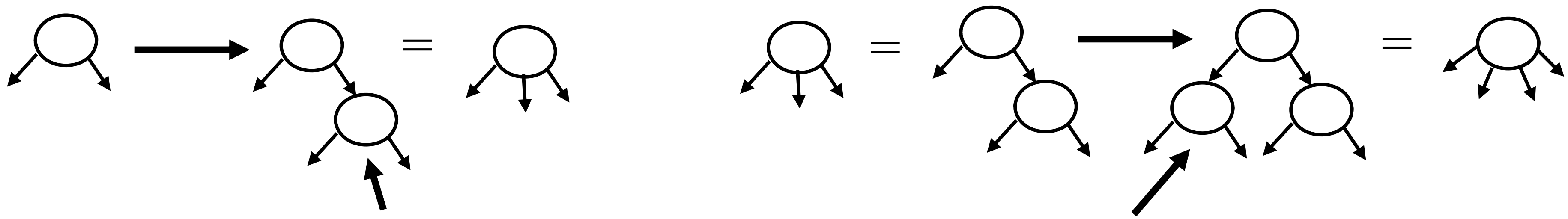
- die Knoten sind analog zu den binären Bäumen
- sie erhalten zusätzlich ein boolesches Flag, dass anzeigt, ob die ***hinführende Kante rot*** ist

```
class Node {
    public Node(K key,D data) {
        m_Key = key;
        m_Data = data;
    }

    K m_Key;
    D m_Data;
    Node m_Left = null;
    Node m_Right = null;
    boolean m_bIsRed = true;
}
```

ist die hinführende Kante rot?

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- Situation: ein neuer Knoten wird in den Baum unten an das Ende angefügt
- 2 Fälle:
  - mache aus einem 2-Knoten einen 3-Knoten
  - mache aus einem 3-Knoten einen 4-Knoten

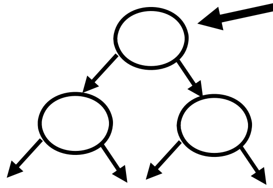


neuer Knoten: hinführende Kante ist rot

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- ein Knoten kann selber erkennen, wann er ein 4-Knoten ist
- er hat dann 2 rote Nachfolger

ein 4-Knoten

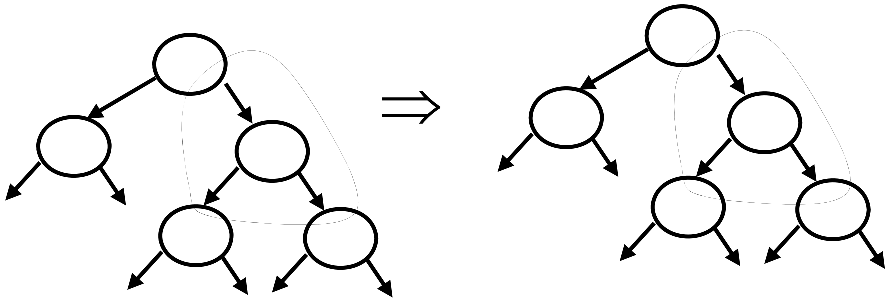


```
class Node {
...

	public boolean is4Node() {
		return m_Left != null && m_Left.m_bIsRed
		    && m_Right != null && m_Right.m_bIsRed;
	}

...
```

ein 4-Knoten hat einen roten linken und einen roten rechten Nachfolger

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- ein 4-Knoten wird konvertiert, indem die roten Kanten entfernt werden und die hinführende Kante rot eingefärbt wird




```
class Node {
...
    void convert4Node() {
        m_Left.m_bIsRed = false;
        m_Right.m_bIsRed = false;
        m_bIsRed = true;
    }
...
```

färbe die Nachfolger-kanten schwarz

die eigene Kante wird rot

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- gesucht wird in einem Rot-Schwarz Baum wie in einem Binärbaum
- die Kantenfarbe wird einfach ignoriert

```
public class RedBlackTree<K extends Comparable<K>,D> {
...

   public Node search(K key) {
        Node tmp = m_Root;
        while (tmp != null) {
             final int RES = key.compareTo(tmp.m_Key);
             if (RES == 0)
                  return tmp;
             tmp = RES < 0 ? tmp.m_Left : tmp.m_Right;
        }
        return null;
   }
...
```

Schlüssel gefunden?

iterativer Abstieg nach links bzw. rechts

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- das Einfügen wird aus der insert-Methode der Binärbäume gewonnen

NodeHandler merkt sich aktuellen und Vorgängerknoten

```
boolean insert(K key,D data) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    while (!h.isNull()) {
        final int RES = key.compareTo(h.node().m_Key);
        if (RES == 0)
            return false;
        h.down(RES < 0);
    }
    h.set(new Node(key,data));
    m_Root.m_bIsRed = false;
    return true;
}
```

Schlüssel ist bereits eingetragen

die Wurzel soll nie ein 4-Knoten sein

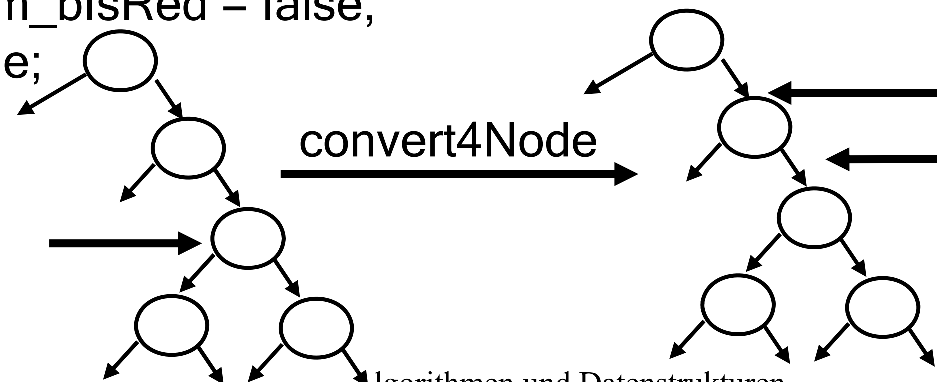
Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- beim Abstieg sollen alle 4-Knoten aufgeteilt werden

```
boolean insert(K key,D data) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    while (!h.isNull()) {
        if (h.node().is4Node()) {
            h.node().convert4Node();
        }
        final int RES = key.compareTo(h.node().m_Key);
        if (RES == 0)
            return false;
        h.down(RES < 0);
    }
    h.set(new Node(key,data));
    m_Root.m_bIsRed = false;
    return true;
}
```

Ist es ein 4-Knoten? Wenn ja, verschiebe die Kantenfarbe

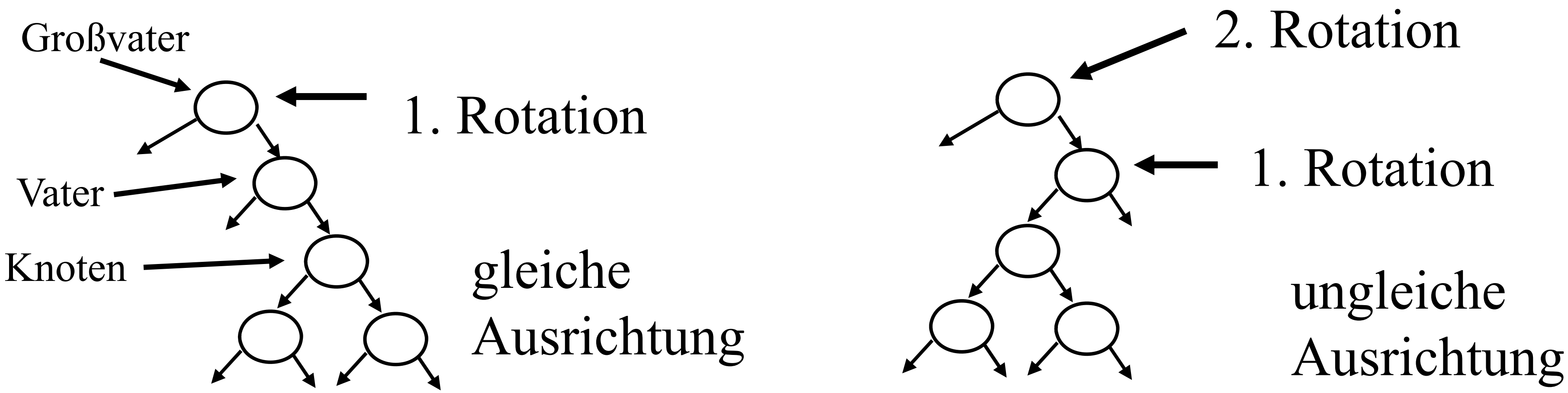
4-Knoten



dabei entstehen Probleme: 2 rote Kanten nacheinander!

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- Aufgaben bei 2 roten Kanten hintereinander:
- Situation erkennen, d.h. führt zum Vater eine rote Kante
- erkennen, ob beide Kanten gleiche Ausrichtung haben
- bei gleicher Ausrichtung: eine Rotation
- bei ungleicher Ausrichtung: zwei Rotationen



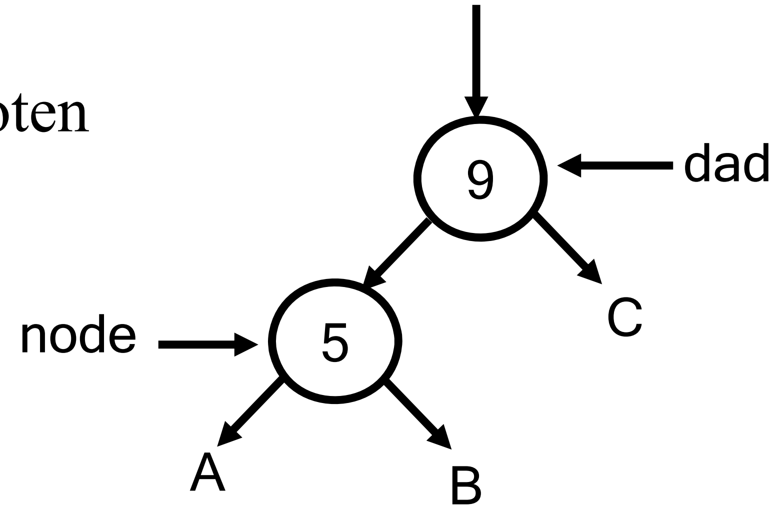
Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- Rotation: Vater und Sohn vertauschen ihre Plätze
- 2 Situationen: Links- und Rechtsdrehung

- für eine Drehung benötigt man die beiden Knoten ***und*** die Stelle, an der der Vater gespeichert ist
- danach haben der Vater und der Sohn die Farben getauscht

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- **unvollständige** Rotation zweier Knoten



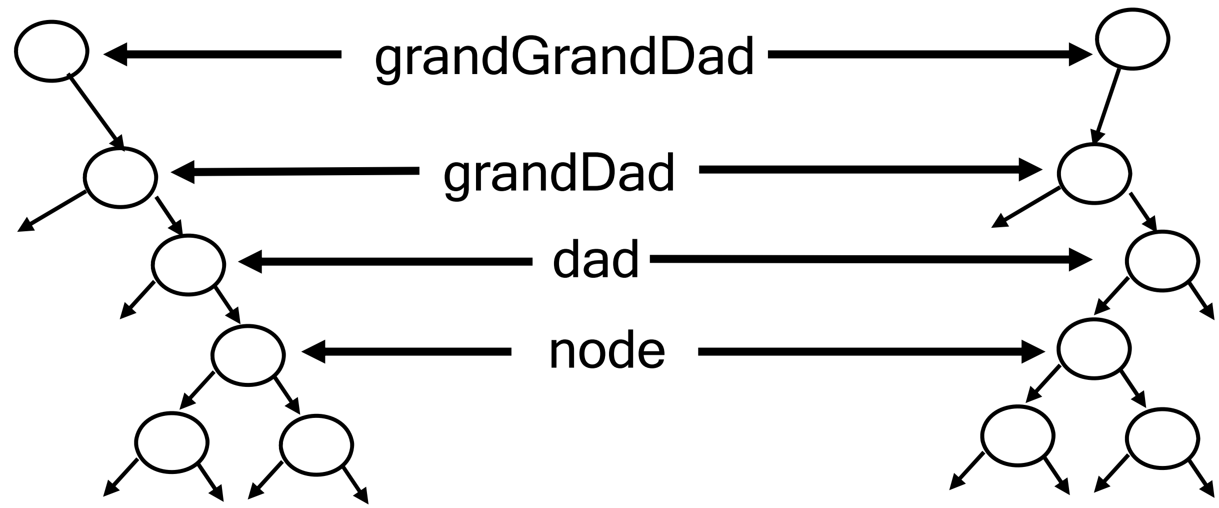

```
void rotate(Node dad,Node node) {
    boolean nodeColour = node.m_bIsRed;
    node.m_bIsRed = dad.m_bIsRed;
    dad.m_bIsRed = nodeColour;
    if (dad.m_Left == node) {
        // clockwise rotation
        dad.m_Left = node.m_Right;
        node.m_Right = dad;
    } else {
        // counter-clockwise rotation
        dad.m_Right = node.m_Left;
        node.m_Left = dad;
    }
    // ???? wer merkt sich den neuen Vater????
}
```

Vater und Sohn vertauschen die Farben

hier fehlt etwas: der Großvater müsste sich den Sohn merken
⇒NodeHandler für dad müsste übergeben werden

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- Situation nach dem Konvertieren eines 4-Knoten



- neben dem eigentlichen Knoten (node) muss der Vaterverweis (dad) und der Großvaterverweis (grandDad) und der Urgroßvater (grandGrandDad) gemerkt werden, da
- die oberste Rotation den Urgroßvater betrifft (merkt sich einen neuen Großvater)

Rot-Schwarz Bäume: Der NodeHandler

- NodeHandler muss sich auch die weiteren Vorgänger merken

```
class NodeHandler {
      public final int NODE = 0;
      public final int DAD = 1;
      public final int G_DAD = 2;
      public final int GG_DAD = 3;

      private Object[] m_Nodes = new Object[4];

      NodeHandler(Node n) {
            m_Nodes[NODE] = n;
      }

      void down(boolean left) {
            for(int i = m_Nodes.length-1;i >0;--i)
                        m_Nodes[i] = m_Nodes[i-1];
            m_Nodes[NODE] = left ? node(DAD).m_Left : node(DAD).m_Right;
      }
```

Konstanten für die Indizes

Array für 4 Knoten: node, dad, grandDad, grandGrandDad

es fängt immer mit node an

beim Abstieg werden alle um eine Position verschoben

Rot-Schwarz Bäume: Der NodeHandler (Fort.)

```
boolean isNull() {
      return m_Nodes[NODE] == null;
}
```

existiert noch der unterste Knoten?

```
Node node(int kind) {
      return (Node)m_Nodes[kind];
}
```

Zugriff auf einen beliebigen Knoten mittels Index

```
void set(Node n,int kind) {
      if (node(kind+1) == null)
                m_Root = n;
      else if (node(kind) != null ?
                node(kind+1).m_Left == node(kind) :
                n.m_Key.compareTo(node(kind+1).m_Key) < 0)
                node(kind+1).m_Left = n;
      else
                node(kind+1).m_Right = n;
      m_Nodes[kind] = n;
}
```

setzen der Wurzel, wenn Baum leer ist

Wird für remove benötigt, da n gleich null werden kann

Setzen unter dem linken oder rechten Vater

Rot-Schwarz Bäume: Der NodeHandler (Fort.)

kind ist der Index des Vaters, um den rotiert werden soll

```
void rotate(int kind) {
	Node dad = node(kind);
	Node son = node(kind-1);
	boolean sonColour = son.m_bIsRed;
	son.m_bIsRed = dad.m_bIsRed;
	dad.m_bIsRed = sonColour;
	// rotate
	if (dad.m_Left == son) {
		// clockwise rotation
		dad.m_Left = son.m_Right;
		son.m_Right = dad;
	} else {
		// counter-clockwise rotation
		dad.m_Right = son.m_Left;
		son.m_Left = dad;
	}
	set(son,kind);
}
```

Vater und Sohn vertauschen die Farben

Vater und Sohn vertauschen die Plätze

Sohn nimmt den Platz des Vaters im NodeHandler ein

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- insert Methode mit dem neuen NodeHandler

```
boolean insert(K key,D data) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    while (!h.isNull()) {
        if (h.node(h.NODE).is4Node()) {
            h.node(h.NODE).convert4Node();
            h.split();
        }
        final int RES = key.compareTo(h.node(h.NODE).m_Key);
        if (RES == 0)
            return false;
        h.down(RES < 0);
    }
    h.set(new Node(key,data),h.NODE);
    h.split();
    m_Root.m_bIsRed = false;
    return true;
}
```

beim Zugriff auf NodeHandler muss der Index mit angegeben werden

nach der Konvertierung muss der Teilbaum u.U. rotiert werden

auch beim Einfügen kann der Baum durcheinanderkommen

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

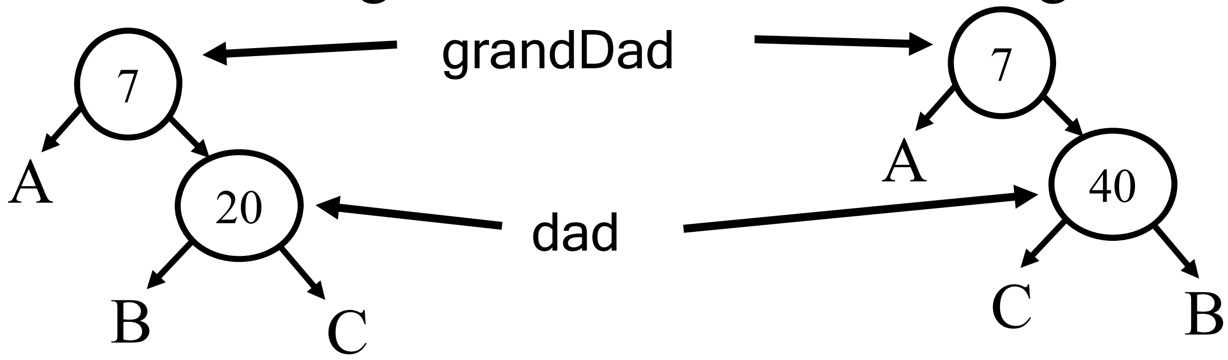
- die split Methode ist eine Methode des NodeHandlers
- sie wird nur von Knoten mit roten Kanten aufgerufen
- wenn der Vater existiert und auch rot ist, muss rotiert werden

```
private void split() {
    Node dad = node(DAD);
    if (dad != null && dad.m_bIsRed) {
        ...
    }
}
```

gibt es einen Vater
und ist der rot?

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- diese beiden Fälle müssen unterschieden werden
- ist die Ausrichtung der beiden roten Kanten gleich ?



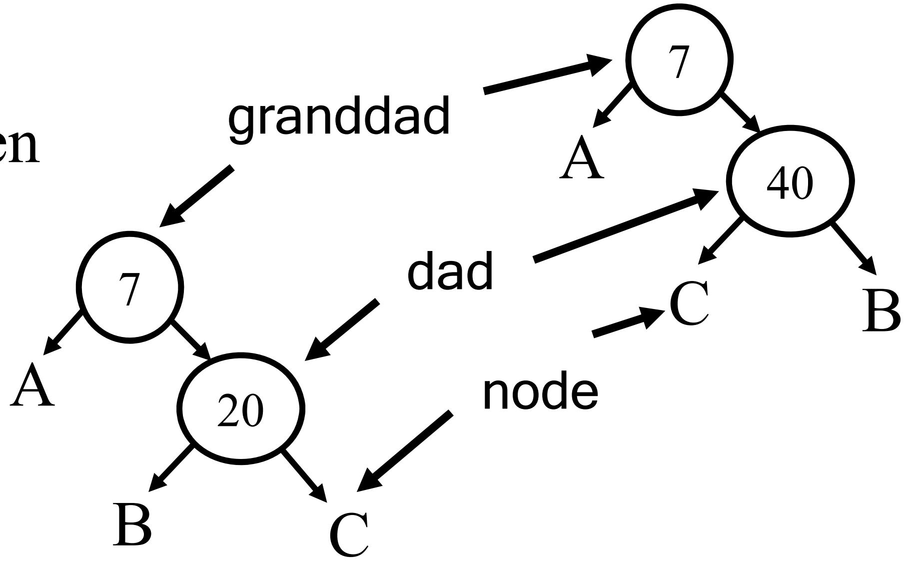
wenn es einen roten Vater gibt, muss es einen Großvater geben (weil, die Wurzel ist niemals rot)

```
private void split() {
    Node dad = node(DAD);
    if (dad != null && dad.m_bIsRed) {
        if ( node(G_DAD).m_Key.compareTo(dad.m_Key) < 0 !=
             dad.m_Key.compareTo(node(NODE).m_Key) < 0)
        ...
    }
}
```

ist das Schlüsselverhältnis Großvater ↔ Vater anders als Vater ↔ Sohn

Rot-Schwarz Bäume: Implementierung (Fort.)

- wenn die Ausrichtung unterschiedlich ist, muss zunächst der Knoten um den Vater rotiert werden
- in jedem Fall muss um den Großvater rotiert werden




```
private void split() {
    Node dad = node(DAD);
    if (dad != null && dad.m_bIsRed) {
        if (  node(G_DAD).m_Key.compareTo(dad.m_Key) < 0 !=
              dad.m_Key.compareTo(node(NODE).m_Key) < 0)
              rotate(DAD);
        rotate(G_DAD);
    }
}
```

1 oder 2 Rotationen

vordefinierte Baumimplementierungen

- in Java gibt es die Klasse TreeMap<K,D>, die auf Rot-Schwarz-Bäumen basiert

- in C++ gibt es std::map<K,D>, deren Implementierung nicht vorgeschrieben ist

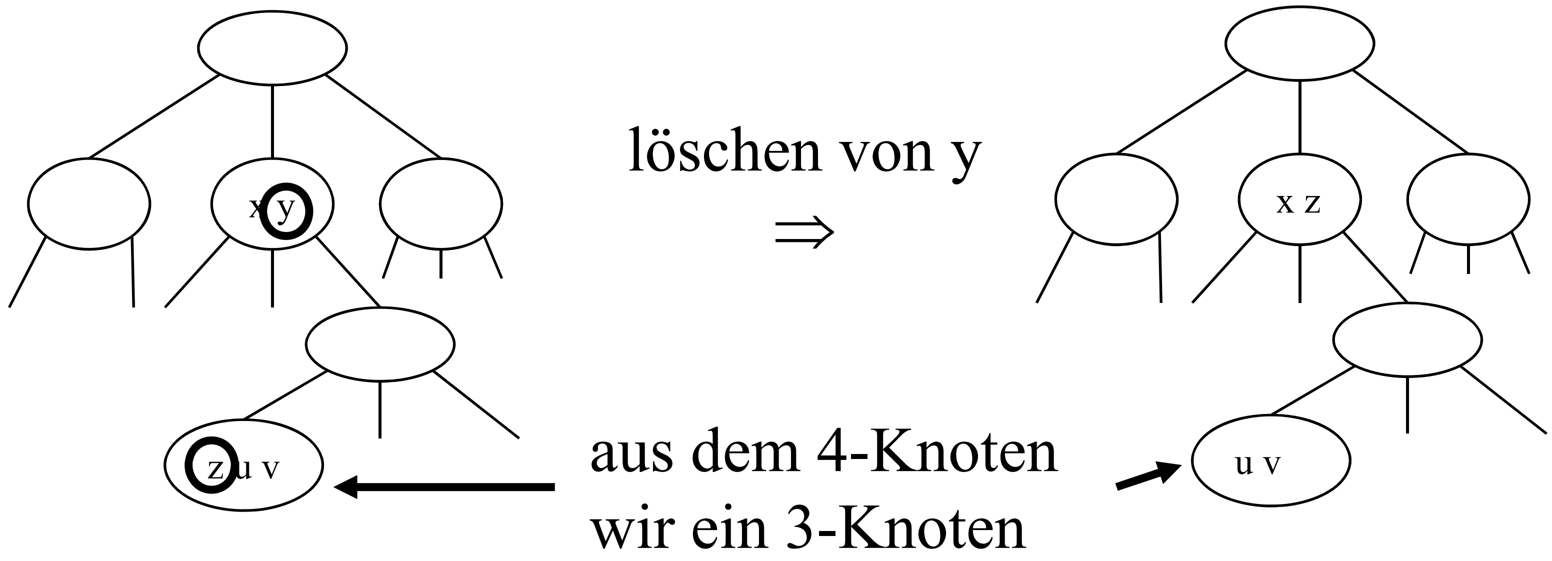
Vorlesung 9

Löschen aus Rot-Schwarz Bäume

- Analog zu dem Einfügen wird beim Löschen durch Rotationen die Baumtiefe ausgeglichen
- Löschen aus Rot-Schwarz Bäumen ist deutlich komplexer als das Einfügen, weil es
  - deutlich mehr Fälle gibt
  - u.U. dreimal rotiert werden muss (statt zweimal wie beim Einfügen)
- erste Überlegung: wie kann in einem Top-Down 2-3-4 Baum gelöscht werden
- folgende Arbeit basiert auf Arbeiten von Prof. Dr. Jonathan Shewchuk (http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/61b/)
- Paper: http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/61b/lec/27

Löschen aus Top-Down 2-3-4 Bäumen

- Analog zu Löschen aus Binärbaumen
- zu löschendes Element wird durch das nächstgrößere Element ersetzt
- dieses (das nächstgrößere Element) liegt garantiert in einem Blatt



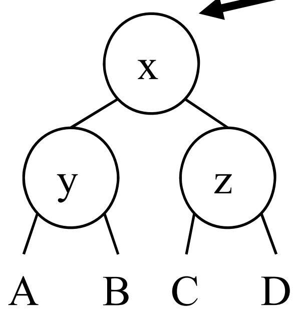
Löschen aus Top-Down 2-3-4 Bäumen (Forts.)

- funktioniert problemlos, wenn das Blatt ein 3-Knoten oder ein 4-Knoten ist
- Problem, wenn Blatt ein 2-Knoten ist
- Lösung: analog zum Einfügen
  - beim <u>Abstieg</u> werden Schlüssel nach <u>unten</u> gezogen (Knoten werden aufgebläht)
  - (beim <u>Einfügen</u> wurden Schlüssel nach <u>oben</u> geschoben)
- es gibt drei Situationen
  - 2-Wurzel mit zwei 2-Söhnen
  - aufzublähender Knoten hat (mindestens) einen 3- oder 4-Knoten Bruder
  - aufzublähender Knoten hat nur 2-Brüder

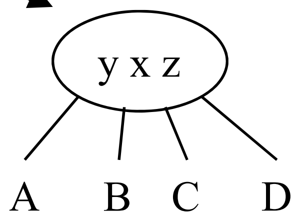
Fall 1

- 2-Wurzel mit zwei 2-Söhnen

Wurzel



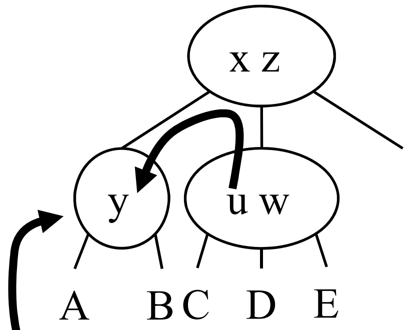
Wurzel und Söhne
werden zu neuer
⇒
Wurzel
zusammengefasst



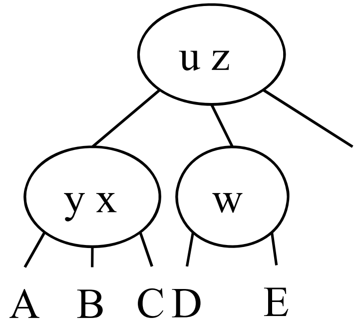
- die einzige Situation, in der die Tiefe des Baums geringer wird

Fall 2

- aufzublähender Knoten hat (mindestens) einen 3- oder 4-Knoten Bruder

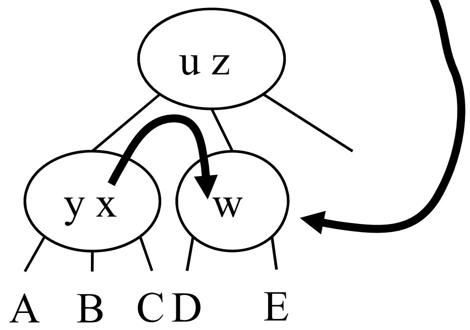


Linksrotation
⇒



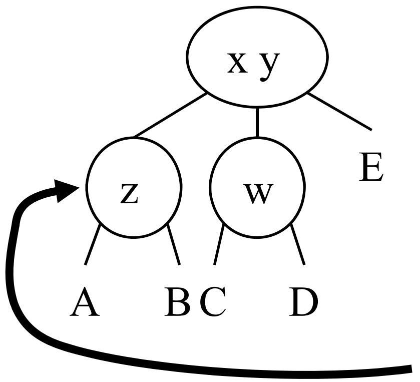
aufzublähender
2-Knoten

- gibt es natürlich auch als Rechtsrotation

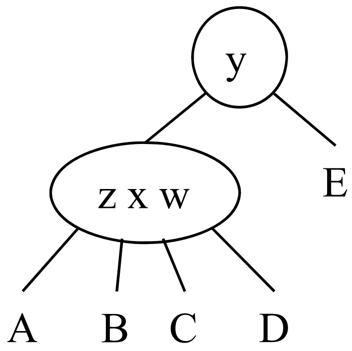


Fall 3

- aufzublähender Knoten hat nur 2-Brüder
- Folge: Vater ist 3- oder 4-Knoten, weil
  - er im vorherigen Schritt schon so groß war, oder
  - er im vorherigen Schritt aufgebläht wurde
  - (ist der Vater 2-Knoten Wurzel und beide Söhne sind 2-Knoten gilt Fall 1)



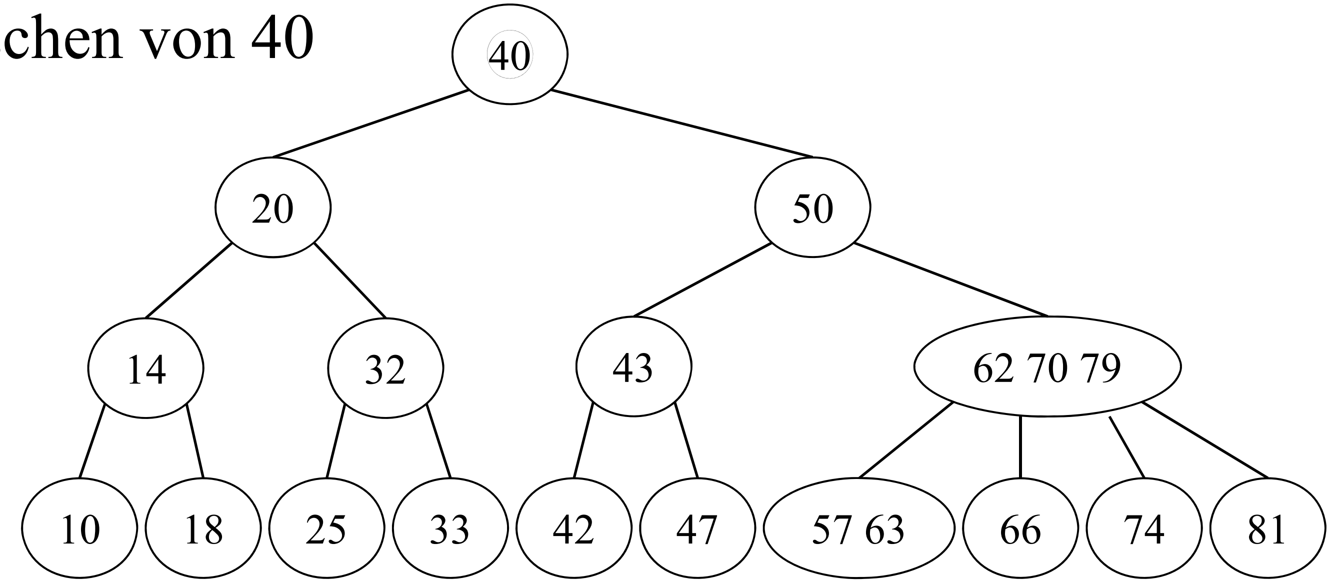
Vereinigung
$\Rightarrow$



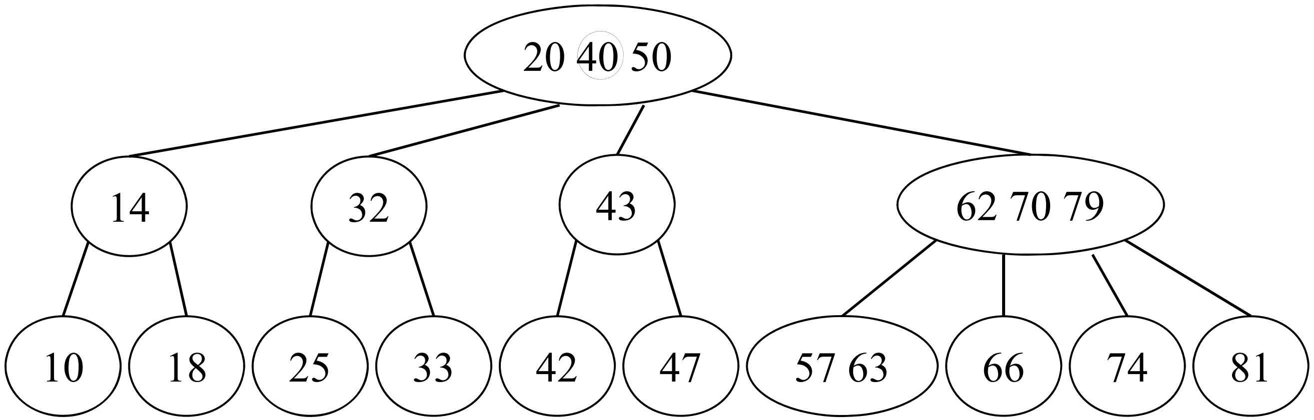
aufzublähender
2-Knoten

Beispiel

- Löschen von 40



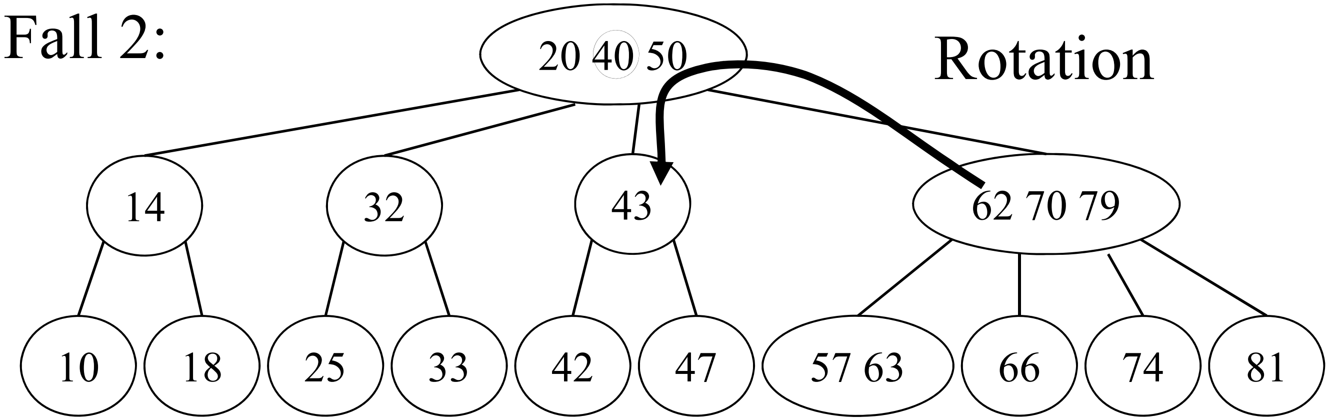
- Fall 1: Wurzel und beide Söhne zusammenfassen

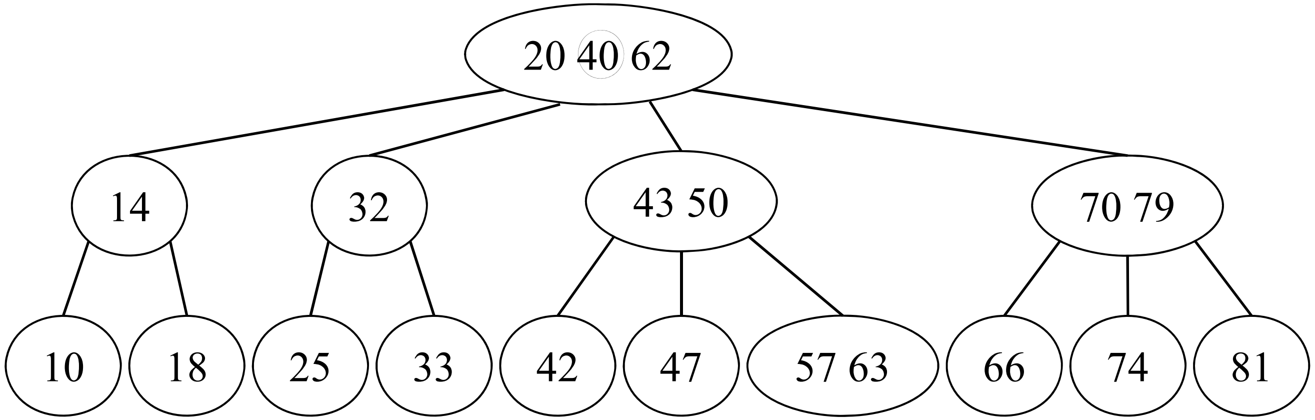


Beispiel (Forts.)

• Fall 2:

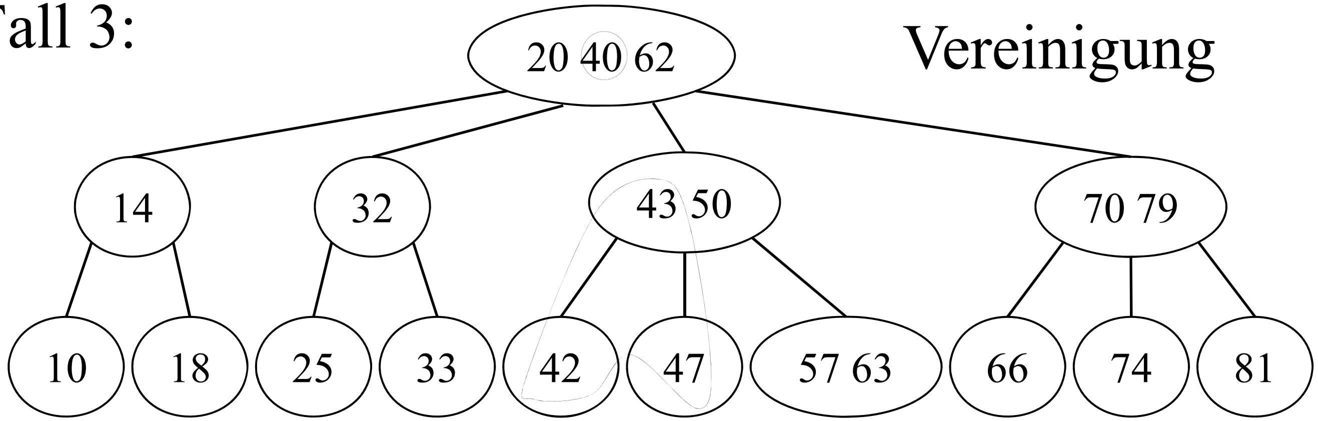
Rotation

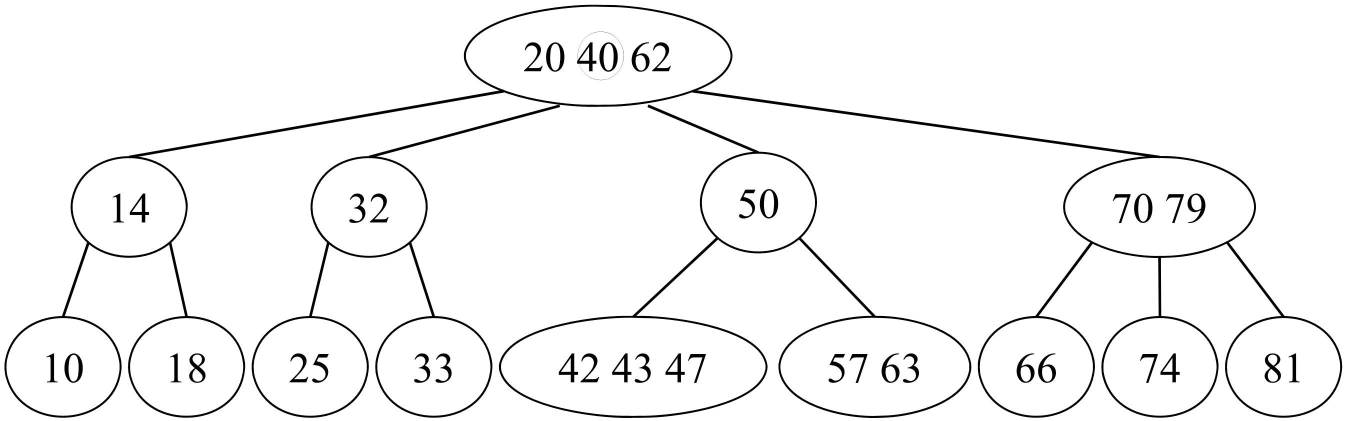




Beispiel (Forts.)

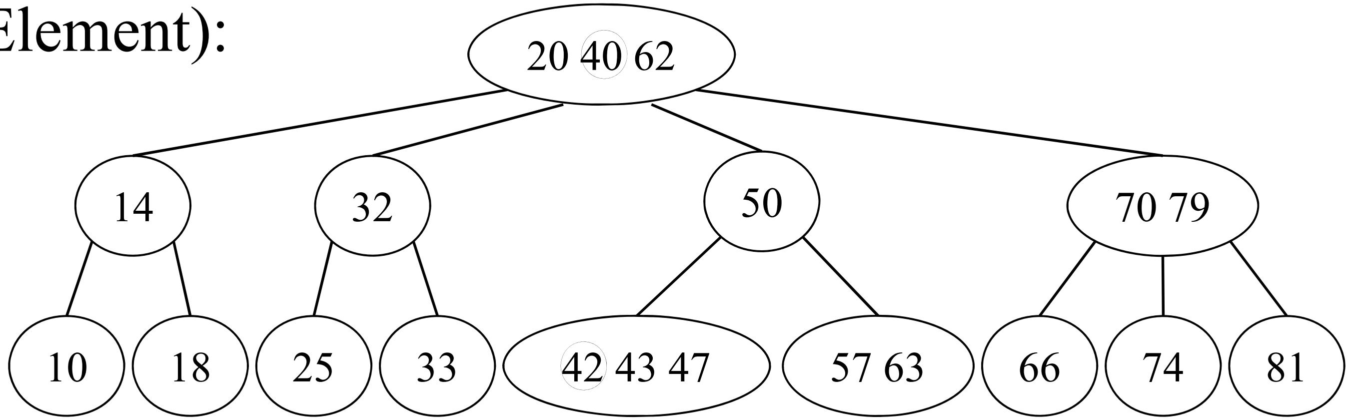
- Fall 3: Vereinigung



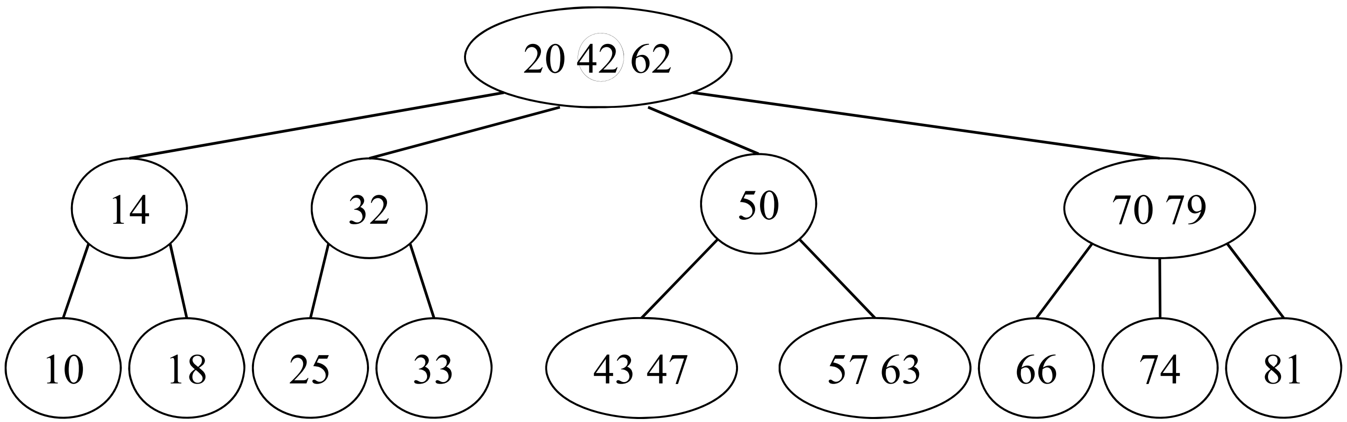


Beispiel (Forts.)

- Löschen von 40 durch Verschiebung der 42 (nächstgrößeres Element):



- Ergebnis:



Fallunterscheidung

- Fall 1: 2-Wurzel und 2-Söhne
- Fall 2: 2-Wurzel mit 2-Sohn und 3-Bruder (2x)
  4-Bruder (2x)
- Fall 3: 3-Knoten mit 2-Sohn und 2-Bruder (3x)
  3-Bruder (3x)
  4-Bruder (3x)
- Fall 4: 4-Knoten mit 2-Sohn und 2-Bruder (4x)
  3-Bruder (4x)
  4-Bruder (4x)

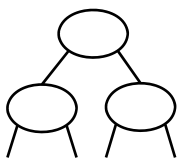
⇒ 26 (!!!) Fälle auf Ebene der Top-Down 2-3-4 Bäume

⇒ 46 (!!!) Fälle auf Ebene der Rot-Schwarz Bäume (sehr viele symmetrische Fälle)

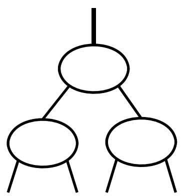
Fallunterscheidung (Forts.)

- anderer Ansatz: welche Fälle gibt es bei einem Rot-Schwarz Baum?

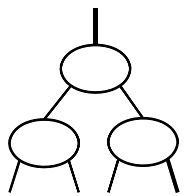
1. Wurzelfall



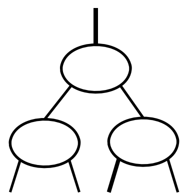
2. 2er unter 3er oder 4er mit 2er Bruder



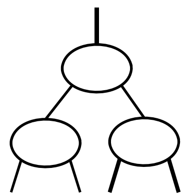
3. 2er unter 3er oder 4er oder Wurzel (!!!) mit 3er Bruder



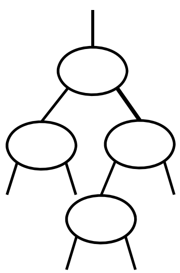
4. 2er unter 3er oder 4er oder Wurzel (!!!) mit 3er Bruder



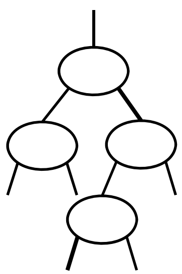
5. 2er unter 3er oder 4er oder Wurzel (!!!) mit 4er Bruder



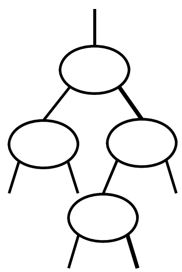
6. 2er unter 3er mit 2er Bruder



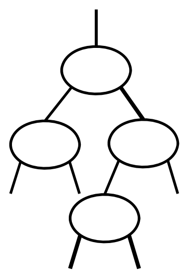
7. 2er unter 3er mit 3er Bruder



8. 2er unter 3er mit 3er Bruder

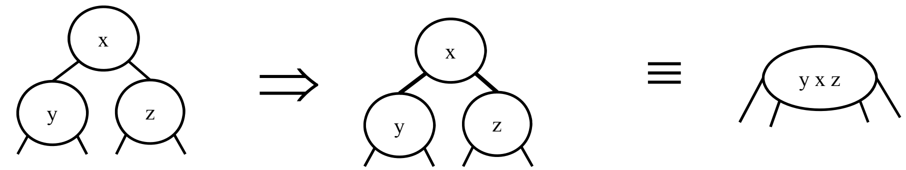


9. 2er unter 3er mit 4er Bruder

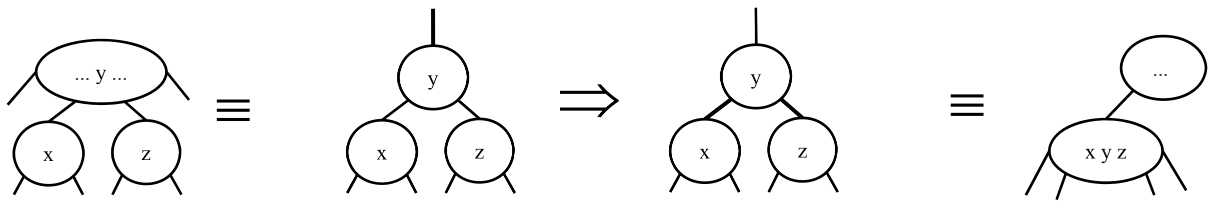


Fallunterscheidung (Forts.)

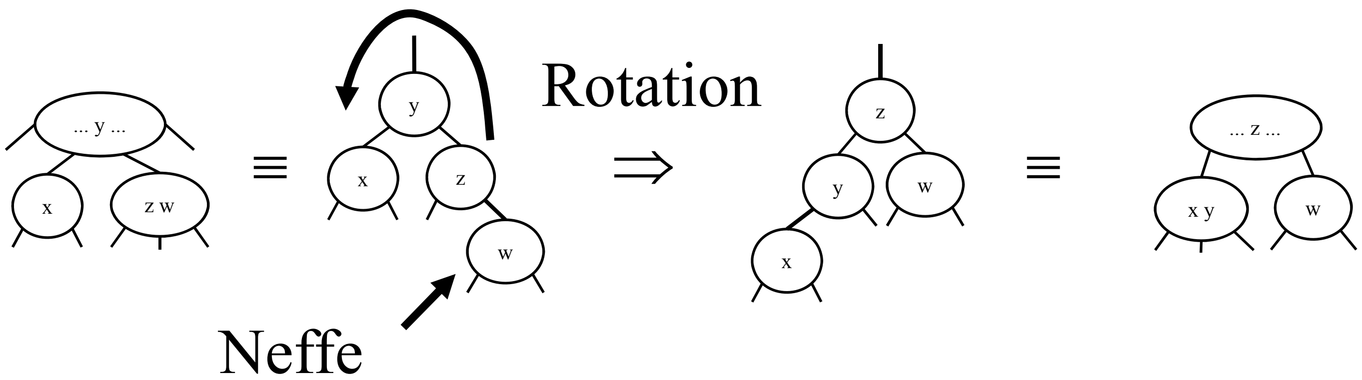
- 1. Wurzelfall



- 2. 2er unter 3er oder 4er mit 2er Bruder

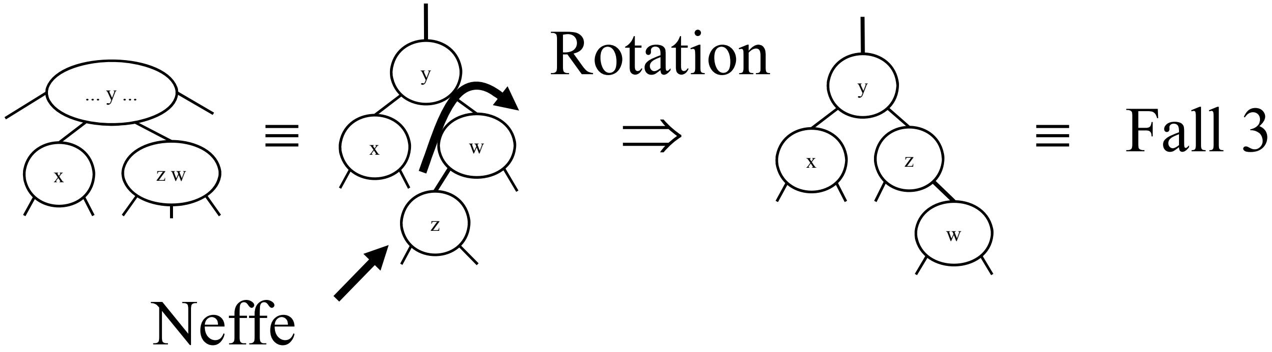


- 3. 2er unter 3er oder 4er oder Wurzel (!!!) mit 3er Bruder

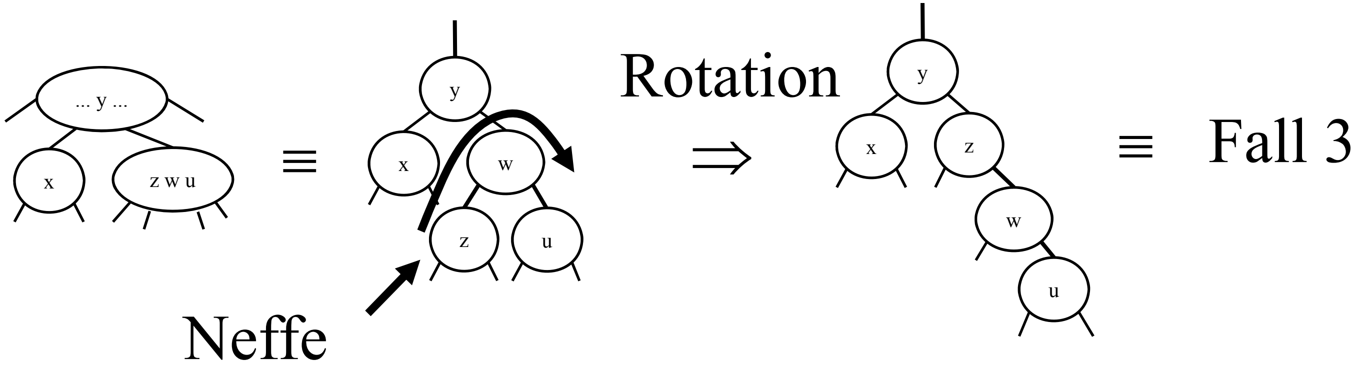


Fallunterscheidung (Forts.)

4. 2er unter 3er oder 4er oder Wurzel (!!!) mit 3er Bruder

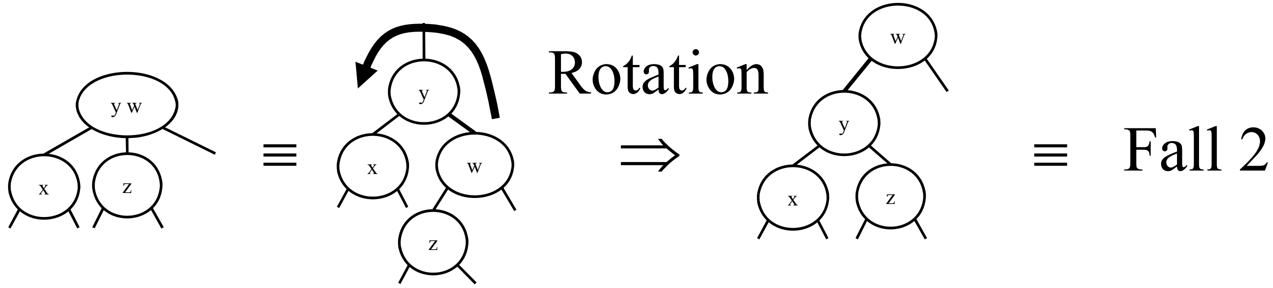


5. 2er unter 3er oder 4er oder Wurzel (!!!) mit 4er Bruder

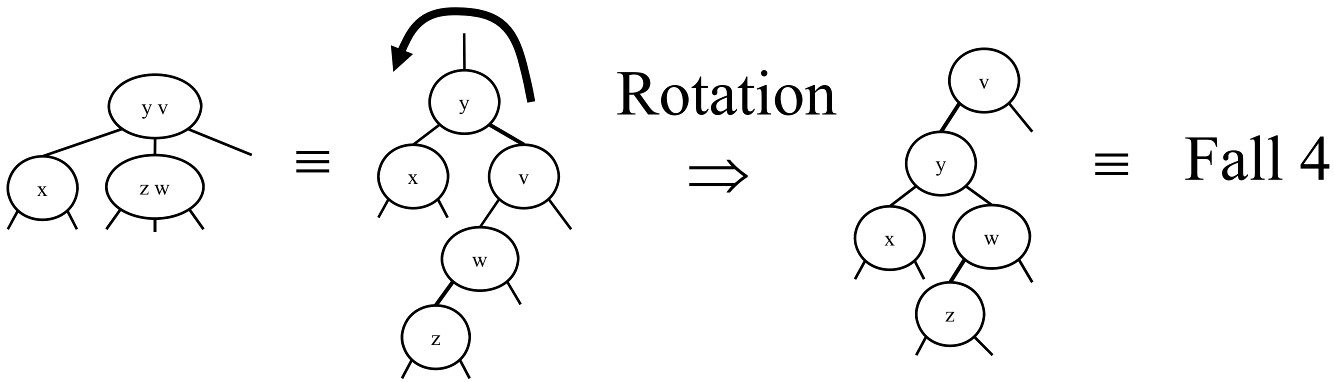


Fallunterscheidung (Forts.)

6. 2er unter 3er mit 2er Bruder

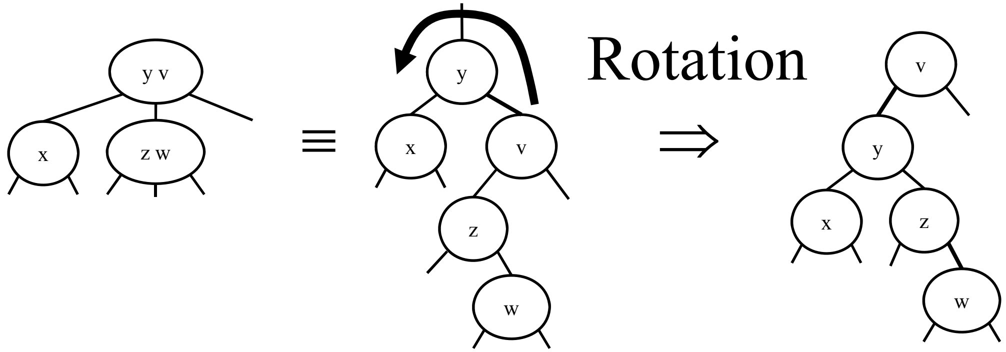


7. 2er unter 3er mit 3er Bruder



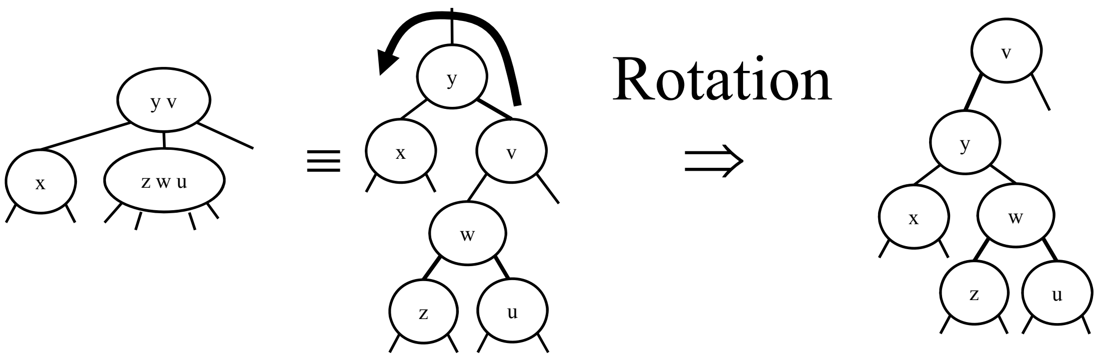
Fallunterscheidung (Forts.)

8. 2er unter 3er mit 3er Bruder



≡ Fall 3

9. 2er unter 3er mit 4er Bruder



≡ Fall 5

Implementierung des Löschens

```
boolean remove(K key) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    while (!h.isNull()) {
        h.join();
        final int RES = key.compareTo(h.node(h.NODE).m_Key);
        if (RES == 0) {
            if (h.node(h.NODE).m_Right == null) {
                h.set(h.node(h.NODE).m_Left,h.NODE,true);
            } else {
                NodeHandler h2 = new NodeHandler(h);
                h2.down(false); // go right
                h2.join();
                while (h2.node(h2.NODE).m_Left != null) {
                    h2.down(true);
                    h2.join();
                }
                h.node(h.NODE).m_Key = h2.node(h2.NODE).m_Key;
                h.node(h.NODE).m_Data = h2.node(h2.NODE).m_Data;
                h2.set(h2.node(h2.NODE).m_Right,h2.NODE,true);
            }
            if (m_Root != null)
                m_Root.m_bIsRed = false;
            return true;
        }
        h.down(RES < 0);
    }
    return false;
}
```

das Löschen ist identisch zu dem Löschen in Binärbäumen ...

... mit Ausnahme des Aufblähens (bzw. Vereinigung) der 2-Knoten

... und des Bewahrens der Kantenfarbe

Kopie des NoteHandlers

Die Wurzel ist nie rot.

Implementierung des Löschens (Forts.)

- die Node Klasse muss 2-Knoten identifizieren können

```
public boolean is2Node() {
    return !m_bIsRed
        && (m_Left == null || !m_Left.m_bIsRed)
        && (m_Right == null || !m_Right.m_bIsRed);
}
```

- beim Einfügen der Knoten muss die Kantenfarbe bewahrt werden

```
void set(Node n,int kind,boolean copyColours) {
    if (node(kind+1) == null)
        m_Root = n;
    else if   node(kind) != null ?
              node(kind+1).m_Left == node(kind) :
              n.m_Key.compareTo(node(kind+1).m_Key) < 0)
        node(kind+1).m_Left = n;
    else
        node(kind+1).m_Right = n;
    if (copyColours && node(kind) != null && n != null)
        n.m_bIsRed = node(kind).m_bIsRed;
    m_Nodes[kind] = n;
}
```

ursprüngliche Kanten-farbe auf den neuen Knoten übertragen

Implementierung des Löschens (Forts.)

- der NodeHandler bekommt die join Methode …

```
private void join() {
    if (node(NODE).is2Node()) {
        if (  node(DAD) == null &&
              node(NODE).m_Left != null &&
              node(NODE).m_Left.is2Node() &&
              node(NODE).m_Right != null &&
              node(NODE).m_Right.is2Node()) {
                  node(NODE).m_Left.m_bIsRed = true;
                  node(NODE).m_Right.m_bIsRed = true;
        } ...
    }
}
```

nur für 2-Knoten muss etwas getan werden

der Wurzelfall

Kanten werden nur umgefärbt

- … und die Kopiermethode

```
NodeHandler(NodeHandler h) {
    m_Nodes[NODE] = h.m_Nodes[NODE];
    m_Nodes[DAD] = h.m_Nodes[DAD];
    m_Nodes[G_DAD] = h.m_Nodes[G_DAD];
    m_Nodes[GG_DAD] = h.m_Nodes[GG_DAD];
}
```

Implementierung des Löschens (Forts.)

ist es nicht der Wurzelfall und gibt es einen Vorgänger?

NodeHandler des Neffens

Vater des Neffens (=mein Bruder) rot? ⇒ Fall 6 - 9

Groß- und Urgroßvater sind jetzt vertauscht ⇒ richten im NodeHandler

```
private void join() {
    if (node(NODE).is2Node()) {
...
        } else if (node(DAD) != null) {
            NodeHandler nephew = getNephew();
            if (nephew.node(DAD).m_bIsRed) {
                nephew.rotate(G_DAD);
                m_Nodes[GG_DAD] = m_Nodes[G_DAD];
                m_Nodes[G_DAD] = nephew.m_Nodes[G_DAD];
                nephew = getNephew();   neue Neffenhistory
            }
            if (nephew.node(DAD).is2Node()) {
                node(NODE).m_bIsRed = true;
                nephew.node(DAD).m_bIsRed = true;
                node(DAD).m_bIsRed = false;
            } else {
                if (!nephew.isNull() && nephew.node(NODE).m_bIsRed)
                    nephew.rotate(DAD);
                nephew.rotate(G_DAD);
            }
        }
    }
}
```

Fall 2: Bruder ist 2-Knoten ⇒ Kanten umfärben

Fall 4 - 5: rotiere Neffen um Vater (= mein Bruder)

Fall 3: rotiere Bruder um Vater

Implementierung des Löschens (Forts.)

- die NodeHandler Klasse muss die Neffenhistory erzeugen können

```
NodeHandler getNephew() {
    Node node = node(NODE);
    Node dad = node(DAD);
    Node gDad = node(G_DAD);

    Node brother = node == dad.m_Left ? dad.m_Right : dad.m_Left;
    Node nephew = node == dad.m_Left ? brother.m_Left : brother.m_Right;
    NodeHandler res = new NodeHandler(nephew);

    res.m_Nodes[DAD] = brother;
    res.m_Nodes[G_DAD] = dad;
    res.m_Nodes[GG_DAD] = gDad;
    return res;
}
```

bin ich der linke Sohn, ist mein Bruder der rechte Sohn

bin ich der linke Sohn, will ich den linken Neffen

mein Bruder ist der Vater des Neffens

mein Vater ist der Großvater des Neffens

mein Großvater ist der Urgroßvater des Neffens

Implementierung des Löschens (Forts.)

- die rotate Methode muss noch angepasst werden

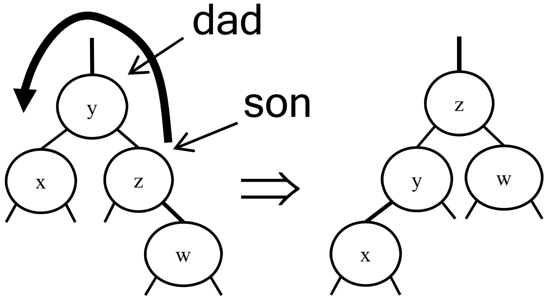
```
void rotate(int kind) {
    Node dad = node(kind);
    Node son = node(kind-1);
    boolean sonColour = son.m_bIsRed;
    if (!sonColour) {
        if (son.m_Left != null)
            son.m_Left.m_bIsRed = false;
        if (son.m_Right != null)
            son.m_Right.m_bIsRed = false;
        dad.m_bIsRed = false;
        dad.m_Left.m_bIsRed = true;
        dad.m_Right.m_bIsRed = true;
    } else {
        son.m_bIsRed = dad.m_bIsRed;
        dad.m_bIsRed = sonColour;
    }
... // rotate wie gehabt
    set(son,kind,false);
}
```

wenn der Sohn nicht rot ist (ist bei insert immer rot), ist es der Fall 3 der remove Methode

Enkel (wenn vorhanden) schwarz färben

Vater ist schwarz, beide Söhne (vor der Rotation) werden rot

beim Einfügen nicht die Farbe kopieren



Vorlesung 10

Digitales Suchen

Nachteile des Hashings:

- der gesamte Schlüssel wird immer mit den eingetragenen Schlüsseln verglichen
- die Berechnung eines Indexes aus einem Schlüssel kann u.U. relativ aufwendig sein (siehe Hashing für Strings)

Idee:

- baue Binärbaum auf, der jedoch für jedes Bit des Schlüssels eine Links-/Rechts-Verzweigung vornimmt
- nach Abarbeitung jeden Bits eines Schlüssels hat man den gesuchten Schlüssel gefunden oder er ist nicht vorhanden

Digitales Suchen: Motivation

Vorteile des digitalen Suchens:

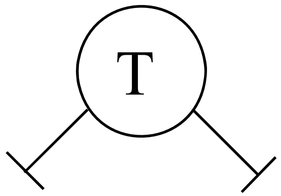
- nicht so kompliziert wie ausgeglichene Bäume (Rot-Schwarz-Bäume)
- trotzdem annehmbare Tiefen (damit Laufzeit) für ungünstige Anwendungen

Digitales Suchen: 1. Beispiel

Schlüssel sind Buchstaben:

- von jedem Buchstaben seine Binärcodierung betrachten
- hier: betrachte nur die Bits, in denen ein Unterschied besteht: Bit 0 bis 5
- Bit 6 und Bit 7 sind konstant 1 bzw. 0

T	84	01010100
e	101	01100101
s	115	01110011
t	116	01110100
i	105	01101001
n	110	01101110
g	103	01100111
		76543210

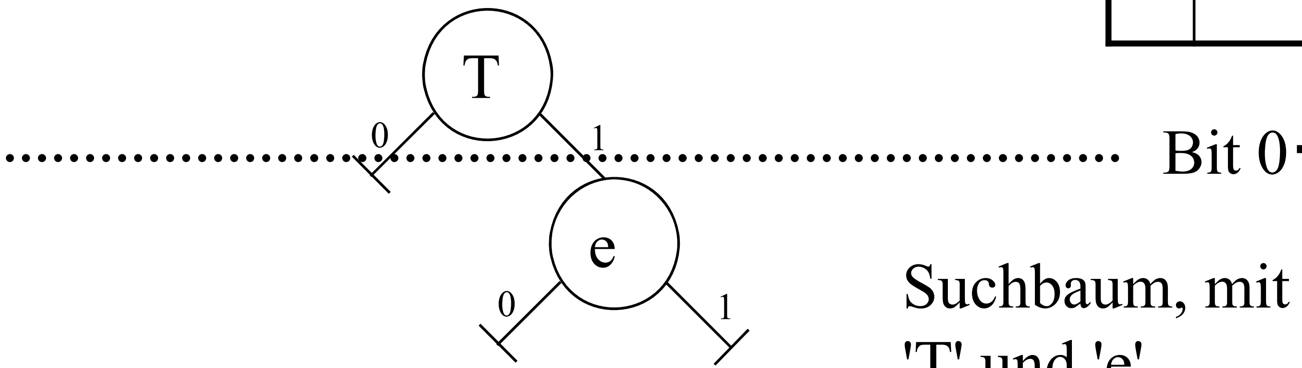


initiale Suchbaum, nur der Buchstabe 'T' ist eingetragen

Digitales Suchen: 1. Beispiel (Forts.)

- Buchstabe 'e' soll in den Baum eingetragen werden
- dazu werden solange die Bits 0 bis 5 entlanggegangen, bis ein Blatt erreicht ist
- bei 0 wird nach links gegangen
- bei 1 wird nach rechts gegangen

T	84	01010100
e	101	01100101
s	115	01110011
t	116	01110100
i	105	01101001
n	110	01101110
g	103	01100111
		76543210

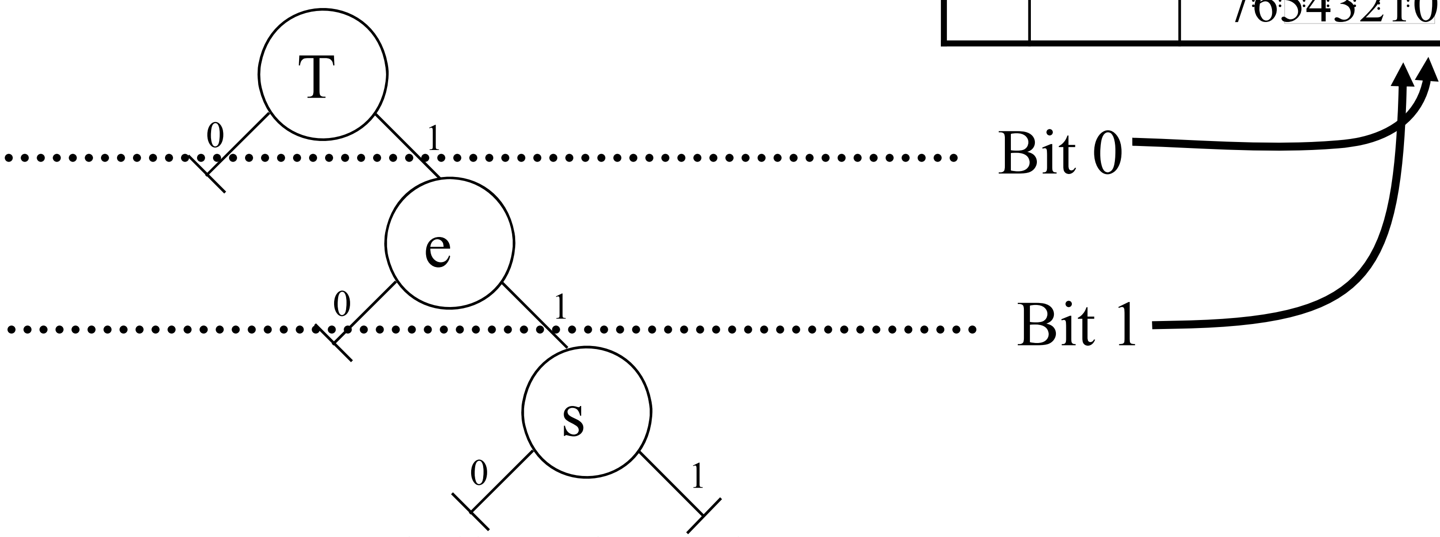


Suchbaum, mit 'T' und 'e'

Digitales Suchen: 1. Beispiel (Forts.)

- Buchstabe 's' soll in den Baum eingetragen werden
- dazu werden solange die Bits 0 bis 5 entlanggegangen, bis ein Blatt erreicht ist
- bei 0 wird nach links gegangen
- bei 1 wird nach rechts gegangen

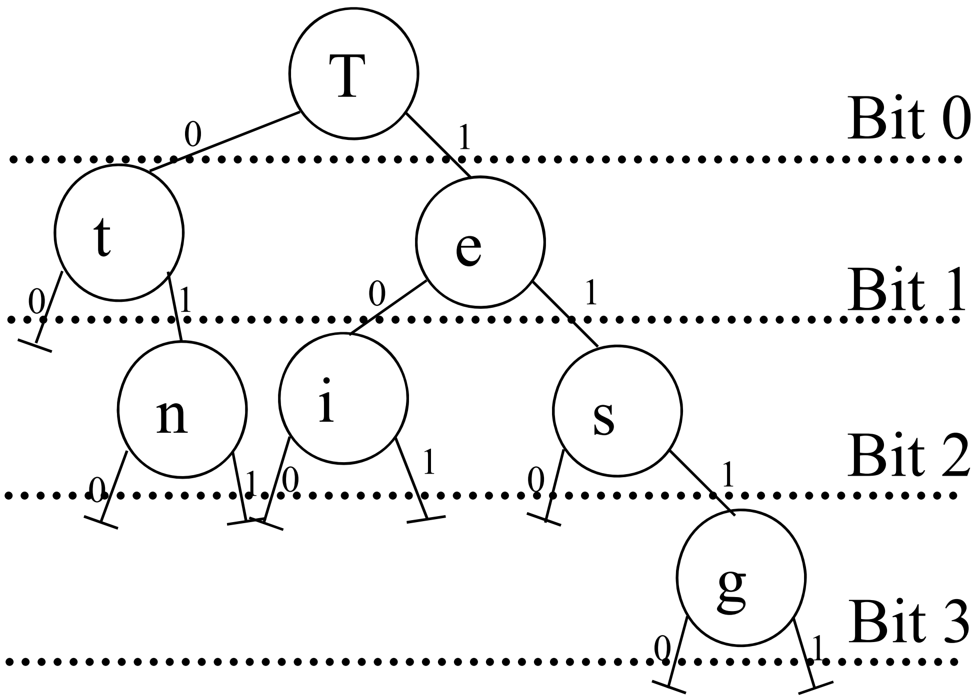
T	84	01010100
e	101	01100101
s	115	01110011
t	116	01110100
i	105	01101001
n	110	01101110
g	103	01100111
		76543210



Suchbaum, mit 'T', 'e' und 's'

Digitales Suchen: 1. Beispiel (Forts.)

- nachdem alle Buchstaben eingefügt sind, sieht der digitale Suchbaum wie folgt aus:



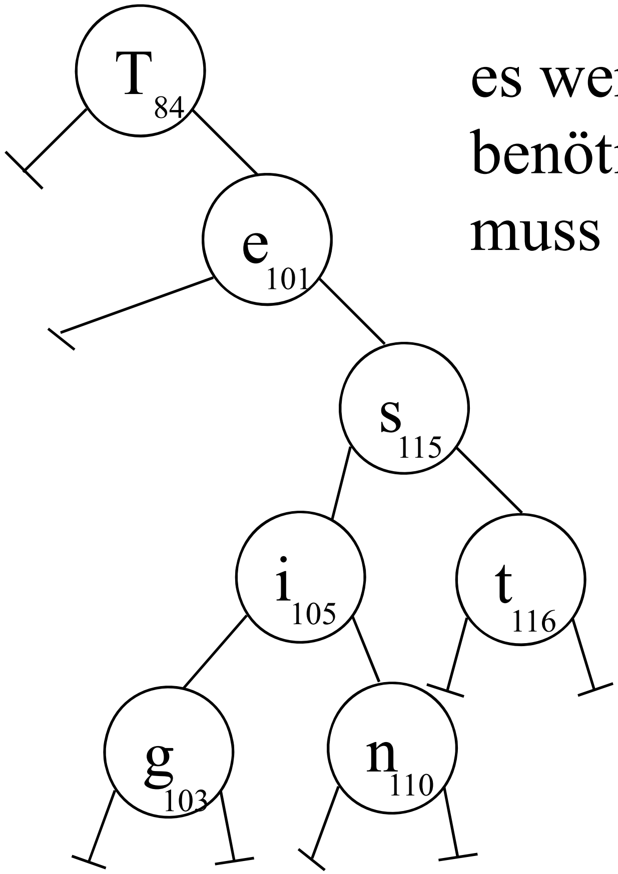
T	84	01010100
e	101	01100101
s	115	01110011
t	116	01110100
i	105	01101001
n	110	01101110
g	103	01100111
		76543210

es werden nur 4 von den maximalen 6 Bits angeschaut

Digitales Suchen: 1. Beispiel (Forts.)

T	84
e	101
s	115
t	116
i	105
n	110
g	103

- der zugehörige Binärbaum hätte folgende Form:



es werden 5 Ebenen benötigt, aber dass muss nicht sein

ohne ‚g' wären hier auch 5 Ebenen notwendig, beim digitalen Suchbaum nur 3

Digitales Suchen: Implementierung

```
class DigiTree {
    class Node {
        public Node(char key) {
            m_Key = key;
        }
        public char m_Key;
        public Node m_Left = null;
        public Node m_Right = null;
    }

    public boolean search(char c) {...}

    public void insert(char c) {...}

    private Node m_Root = null;
}
```

normalerweise sollte in einem Knoten neben dem Schlüssel auch das assoziierte Datum gespeichert werden

wie gehabt in BinTree oder RedBlackTree

Digitales Suchen: Implementierung (Forts.)

solange noch Knoten vorhanden sind ...

```
class DigiTree {
    ...
    public boolean search(char c) {
        Node tmp = m_Root;
        for(int i = 0; tmp != null; ++i) {
            if (tmp.m_Key == c)
                return true;
            tmp = (c & (1 << i)) != 0 ? tmp.m_Right : tmp.m_Left;
        }
        return false;
    }
    ...
}
```

... teste Bit 0, Bit 1, Bit2 usw. durch

Ist das i-te Bit im Schlüssel gesetzt ...

... dann nimm den rechten Nachfolger ...

... sonst den Linken !

Digitales Suchen: Implementierung (Forts.)

solange noch Knoten vorhanden sind ...

```
class DigiTree {
    ...
    public void insert(char c) {
        NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
        int i = 0;
        for(i = 0;!h.isNull();++i)
            h.down((c & (1 << i)) == 0);
        h.set(new Node(c),(c & (1 << (i-1))) == 0);
    }
    ...
}
```

... teste Bit 0, Bit 1, Bit2 usw. durch

Abstieg nach Links und Rechts

Der NodeHandler muss wissen, ob der neue Knoten links oder rechts unter den Vater eingefügt werden soll

Digitales Suchen: Diskussion

- Vorteile gegenüber dem Hashing: nachdem ***maximal*** alle Bits ***angeschaut*** worden sind, kann entschieden werden, ob der gesuchte Schlüssel vorhanden ist
- Für ***jede Bitposition*** ist ein ***Vergleich*** mit dem ***aktuellen Schlüssel*** und dem ***gesuchten Schlüssel*** notwendig
- dies kann ein erheblicher Aufwand bei langen Schlüsseln sein (Beispiel: Strings mit ca. 20 Zeichen, 6 Bits pro Zeichen: maximal 120 Stringvergleiche)
- bei langen Schlüsseln (Schlüssel mit vielen Bits) dominiert der Schlüsselvergleich den Baumdurchlauf

Digitale Such-Tries

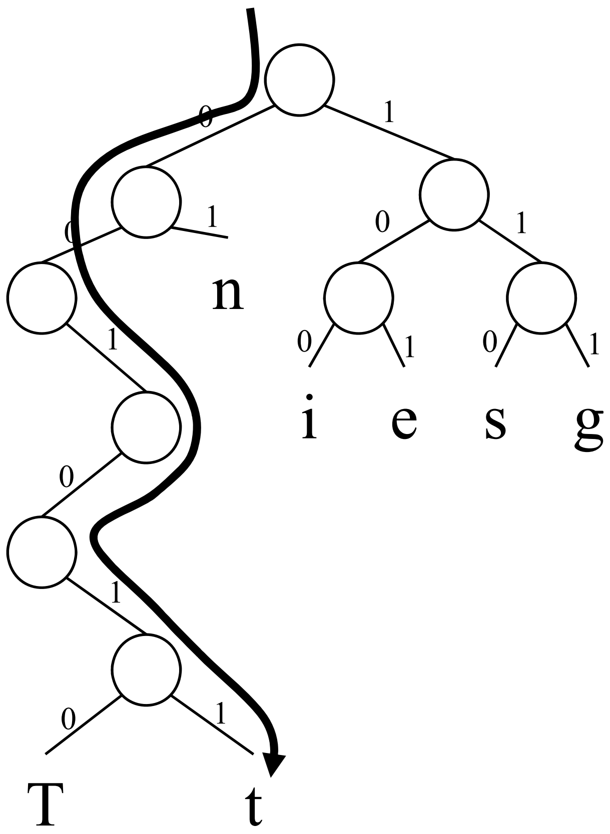
Ähnlich wie digitale Suchbäume, jedoch

- werden in den ***Knoten keine Schlüssel*** gespeichert
- ***nur*** in den ***Blättern*** werden die ***Schlüssel gespeichert***

Suchen und Einfügen erfolgen durch

- Abstieg analog zu den digitalen Suchbäumen, jedoch
- ***kein Schlüsselvergleich*** in den ***Knoten,*** sondern
- ***Schlüsselvergleich*** am Blatt, dadurch
- in dem Fall nur ***exakt ein Schlüsselvergleich***

Digitale Such-Tries: Beispiel



T	84	01010100
e	101	01100101
s	115	01110011
t	116	01110100
i	105	01101001
n	110	01101110
g	103	01100111
		76543210

Suchen von t

Digitale Such-Tries: Diskussion

Vorteil:

- nur am Ende muss maximal ein Schlüssel verglichen werden
- der Aufbau des Baums ist ***unabhängig*** von der Reihenfolge, in der die Schlüssel eingetragen werden

Nachteil:

- sehr viele innere Knoten, die nur zur Verzweigung dienen
- es gibt zwei unterschiedliche Knotentypen: aufwendig zu implementieren

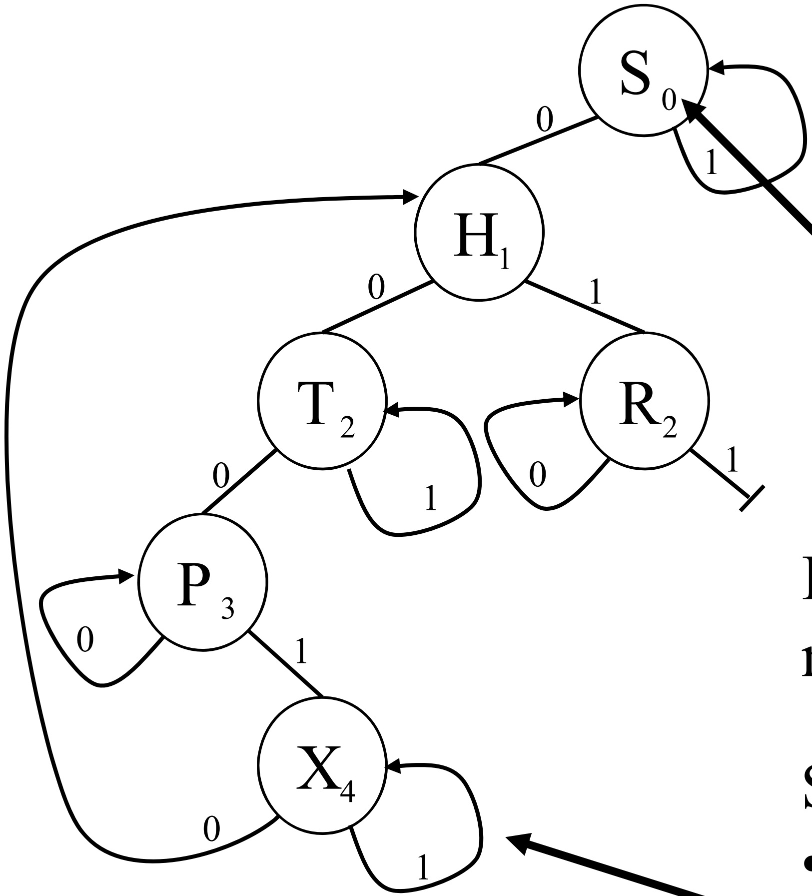
Patricia-Trees

Patricia: ***P***ractical ***A***lgorithm ***T***o ***R***etrieve ***I***nformation
Coded ***I***n ***A***lphanumeric

Idee:

- verwende normalen Digitalbaum, bei dem auch in den inneren Knoten Schlüssel abgespeichert sind
- vergleiche die Schlüssel dennoch erst am Ende
- um an den Blättern auf Schlüssel weiter oben im Baum zu verweisen zu können, führe Rückwärtskanten ein

Patricia-Trees: Beispiel



S	83	01010011
H	71	01001000
X	88	01011000
P	80	01010000
R	82	01010010
T	84	01010100
		76543210

Index gibt die Bitposition an, nach der entschieden wird

Suche:
- steige solange ab, bis wieder aufgestiegen wird
- vergleiche dann den Schlüssel

Patricia-Trees: Implementierung

```
class PatriciaTree {
    static boolean left(char key,int bitPos) {
        return (key & (1 << bitPos)) == 0;
    }
    class Node {
        public Node(char key,int bitPos,Node succ) {
            m_Key = key;
            m_BitPos = bitPos;
            boolean bIsLeft = left(key,bitPos);
            m_Left = bIsleft ? this : succ;
            m_Right = bIsLeft ? succ : this;
        }
        public Node(char key,int bitPos) {this(key,bitPos,null);}
        public char m_Key;
        public int m_BitPos;
        public Node m_Left;
        public Node m_Right;
    }
    ...
    private Node m_Root;
}
```

setzt Rück-verkettung

Standardkonstruktor ohne Nachfolger

Knoten merkt sich zusätzlich die Bitposition

Patricia-Trees: Implementierung (Fort.)

- das Suchen erfolgt im wesentlichen im NodeHandler

```
public boolean search(char c) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    h.search(c);
    return !h.isNull() && h.node(h.NODE).m_Key == c;
}
```

NodeHandler steigt ab, bis Rückwärts- oder Nullverweis gefunden wurde

ist der gefundene Knoten der gesuchte Knoten?

Patricia-Trees: Der NodeHandler

```
class NodeHandler {
    public final int NODE = 0;
    public final int DAD = 1;

    private Object[] m_Nodes = new Object[3];

    NodeHandler(Node n) {
        m_Nodes[NODE] = n;
    }

    void down(boolean left) {
        for(int i = m_Nodes.length-1;i >0;--i)
            m_Nodes[i] = m_Nodes[i-1];
        m_Nodes[NODE] = left ? node(DAD).m_Left : node(DAD).m_Right;
    }

    boolean isNull() {
        return m_Nodes[NODE] == null;
    }

    Node node(int kind) {
        return (Node)m_Nodes[kind];
    }
```

Analog zu RotSchwarz Bäumen: Knoten, Vater und Großvater (siehe später beim Löschen) müssen gemerkt werden

Abstieg

Zugriff auf die Knoten mittels der Konstanten NODE und DAD

Patricia-Trees: Der NodeHandler (Fort.)

```
void set(Node n,int kind) {
    if (node(kind+1) == null)
        m_Root = n;
    else if (  node(kind) != null ?
                node(kind+1).m_Left == node(kind) :
                left(n.m_Key,node(kind+1).m_BitPos))
        node(kind+1).m_Left = n;
    else
        node(kind+1).m_Right = n;
    m_Nodes[kind] = n;
}
```

Analog zu RotSchwarz Bäumen: setzen der Wurzel, wenn es keinen Vater gibt ...

... oder linke bzw. rechts unterhalb des Vaters

```
void search(char c,int maxPos) {
    int lastBitPos = -1;
    while (   !isNull() &&
                lastBitPos < node(NODE).m_BitPos &&
                maxPos > node(NODE).m_BitPos) {
        lastBitPos = node(NODE).m_BitPos;
        down(left(c,lastBitPos));
    }
}
```

Abstieg bis zur maximalen Position (siehe Einfügen) maxPos

```
void search(char c) {
    search(c,Integer.MAX_VALUE);
}
```

Abstieg bis zum Ende

Patricia-Trees: Einfügen

Idee:

- analog zu binären Bäumen: Absteigen und am Ende einfügen
- steige in dem Patricia Tree analog zu der Search Methode ab
- füge den neuen Knoten am Ende ein

3 Fälle sind zu unterscheiden:

- einzufügender Schlüssel existiert schon: fertig — Fall 1
- Suche endet in einem null-Verweis: neuen Knoten erzeugen — Fall 2
- Suche Ende in einem Knoten mit einem Verweis nach oben in den Baum — Fall 3

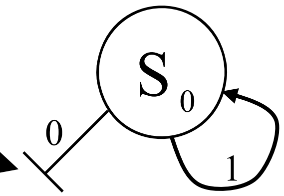
Fall 2

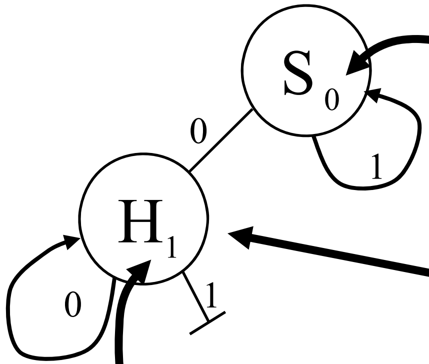
Patricia-Trees: Einfügen (Fort.)

- Suche endet in einem null-Verweis: neuen Knoten erzeugen
- H soll eingefügt werden

S	83	01010011
H	71	01001000
X	88	01011000
P	80	01010000
R	82	01010010
T	84	01010100
		76543210

Suche endet hier





erzeuge neuen Knoten mit der nächsten Bitposition

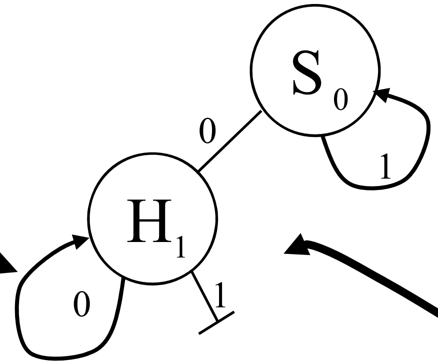
Fall 3 (leicht)

Patricia-Trees: Einfügen (Fort.)

- Suche endet in einem Knoten mit einem Verweis nach oben
- X soll eingefügt werden

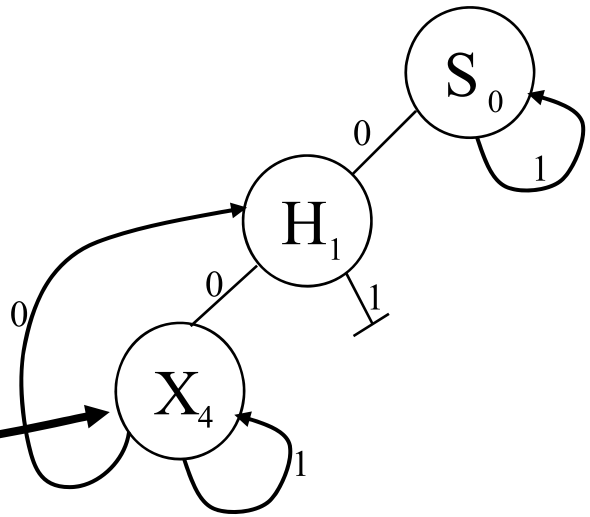
S	83	01010011
H	71	01001000
X	88	01011000
P	80	01010000
R	82	01010010
T	84	01010100
		76543210

Suche endet hier



Suche kleinste Bitposition, in der sich H und X unterscheidet: 4

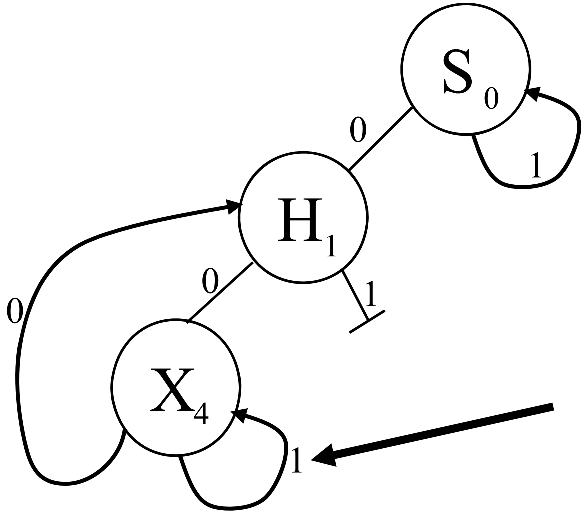
hänge neuen Knoten unterhalb von H mit Bitposition 4 auf



Patricia-Trees: Einfügen (Fort.)

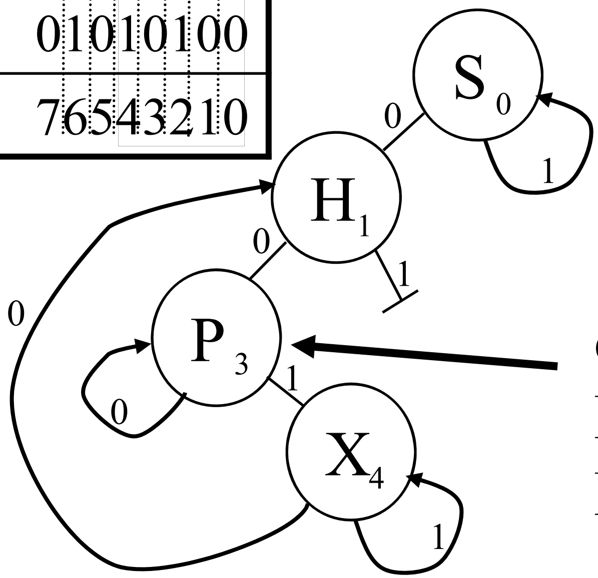
- Suche endet in einem Knoten mit einem Verweis nach oben
- P soll eingefügt werden

S	83	01010011
H	71	01001000
X	88	01011000
P	80	01010000
R	82	01010010
T	84	01010100
		76543210



Suche endet hier

Suche kleinste Bitposition, in der sich X und P unterscheidet: 3

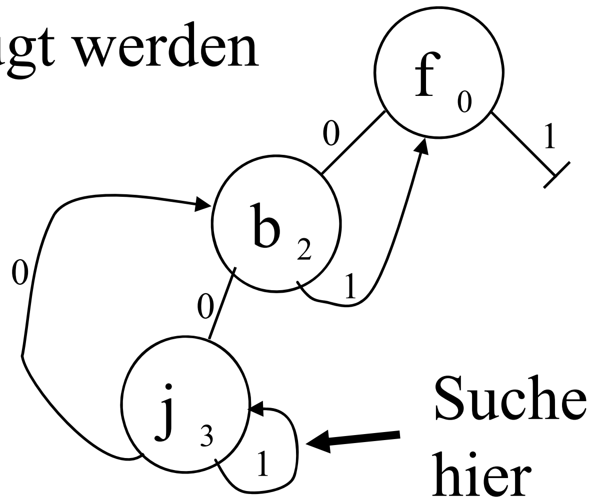


da 3<4 (von X), hänge neuen Knoten oberhalb von X mit Bitposition 3 auf

Fall 3 (noch schwieriger)

Patricia-Trees: Einfügen (Fort.)

- Suche endet in einem Knoten mit einem Verweis nach oben
- h soll eingefügt werden

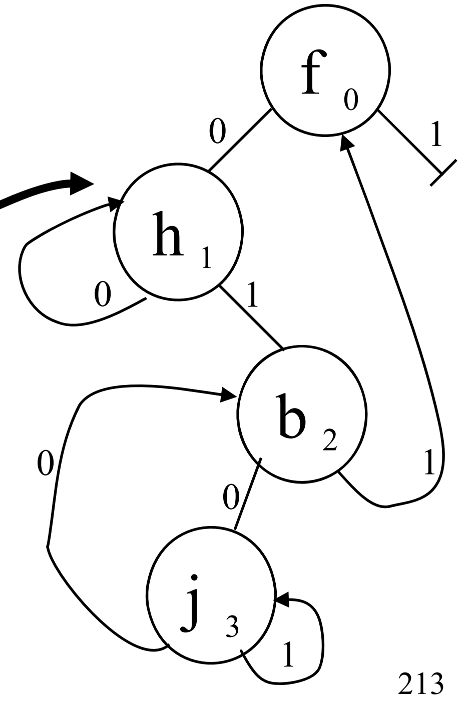


f	102	01100110
h	104	01101000
b	98	01100010
j	106	01101010

Suche endet hier

Suche kleinste Bitposition, in der sich j und h unterscheidet: 1

daher muss h zwischen f und b eingefügt werden. Dazu muss nochmals von oben der Baum durchlaufen werden



Patricia-Trees: Implementierung (Fort.)

```
public boolean insert(char c) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    h.search(c);
    int index = 0;
    if (h.isNull()) {
        if (h.node(h.DAD) != null) {
            index = h.node(h.DAD).m_BitPos + 1;
        }
    } else if (h.node(h.NODE).m_Key != c) {
        while (left(c,index) == left(h.node(h.NODE).m_Key,index))
            ++index;
    } else {
        // already inserted
        return false;
    }
    h = new NodeHandler(m_Root);
    h.search(c,index);
    h.set(new Node(c,index,h.node(h.NODE)),h.NODE);
    return true;
}
```

1. Abstieg: Suche nach Schlüssel

Fall 2

Kleinste unterschiedliche Bitposition

Fall 3

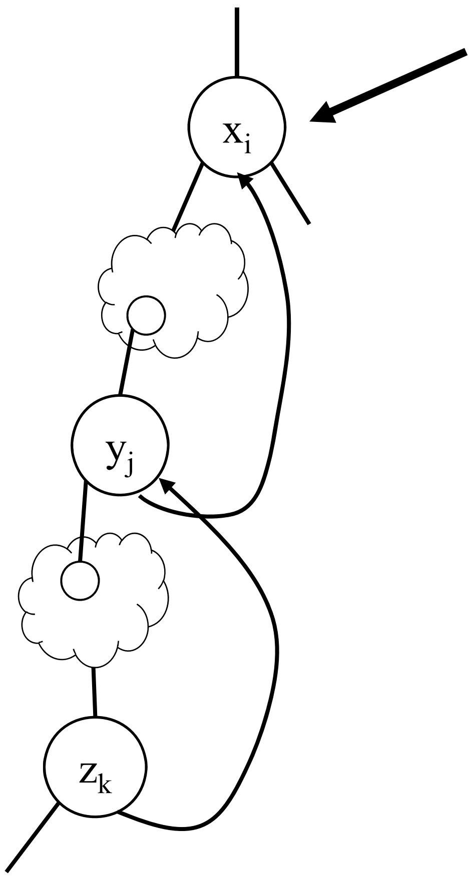
Fall 1

2. Abstieg: Suche nach Einfügeposition ...

... und einfügen

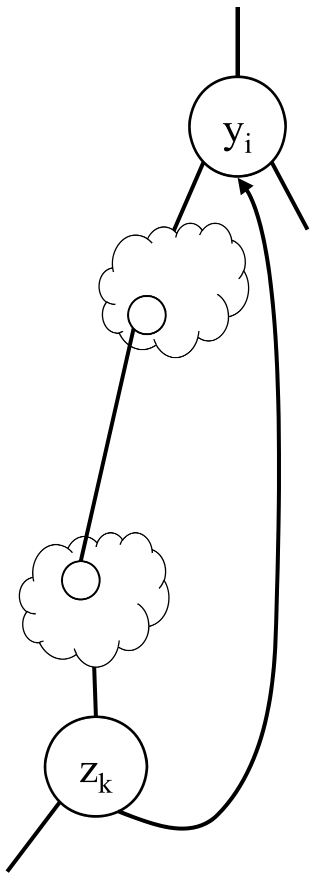
Patricia-Trees: Löschen

- das Löschen erfolgt analog zu Binärbaumen
- das zu löschende Element wird durch das Element ersetzt, das auf das zu löschende Element zeigt



x soll gelöscht werden

y wandert nach oben,
$\Rightarrow$
Index j wird nicht mehr getestet



Patricia-Trees: Implementierung (Fort.)

```
boolean remove(char c) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    h.search(c);
    if (h.isNull() || h.node(h.NODE).m_Key != c) {
        return false;
    } else {
        NodeHandler h2 = new NodeHandler(h.node(h.DAD));
        h2.search(h.node(h.DAD).m_Key);
        h.node(h.NODE).m_Key = h.node(h.DAD).m_Key;
        h2.set(h.node(h.NODE),h2.NODE);
        h.set(h.brother(h.NODE),h.DAD);
    }
    return true;
}

class NodeHandler
    ...
    Node brother(int kind) {
        Node dad = node(kind+1);
        Node node = node(kind);
        return dad.m_Left == node ? dad.m_Right : dad.m_Left;
    }
...
```

1. Abstieg: Suche nach Schlüssel

existiert nicht: fertig

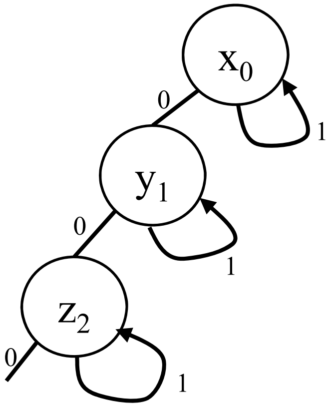
2. Abstieg: Suche nach dem Vater

kopieren des Schlüssels

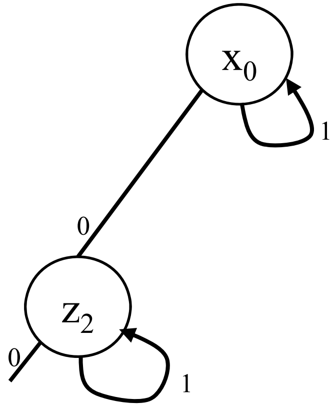
Löschen des mittleren Knotens

Umhängen des unteren Verweises

Patricia-Trees: Problem nach dem Löschen

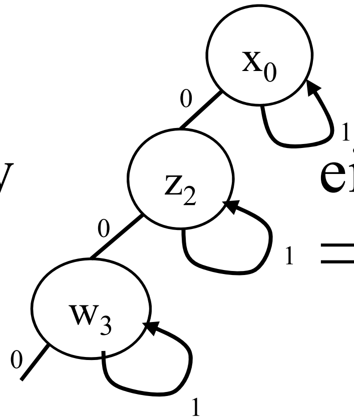


löschen von y
⇒

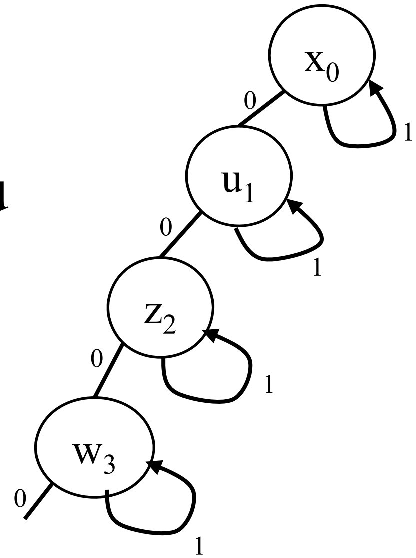


	3	2	1	0
x	_	_	_	1
y	_	_	1	0
z	_	1	0	0
w	1	0	1	0
u	1	1	1	0

einfügen von w
⇒



einfügen von u
⇒



w ist nicht mehr auffindbar

Fehler: w hätte mit Index 1 eingetragen werden müssen

Patricia-Trees: Lösung für das Löschenproblem

- statt einfach nächsten Index beim "Null" Einfügen ...

```
public boolean insert(char c) {
    NodeHandler h = new NodeHandler(m_Root);
    h.search(c);
    int index = 0;
    if (h.isNull()) {
        if (h.node(h.DAD) != null)
            index = h.node(h.DAD).m_BitPos + 1;
    } else ...
```

- ... mit Vater vergleichen

```
public boolean insert(char c) {
...
    if (h.isNull()) {
        if (h.node(h.DAD) != null) {
            while (   left(c,index) == left(h.node(h.DAD).m_Key,index) &&
                      index < h.node(h.DAD).m_BitPos)
                ++index;
            if (index == h.node(h.DAD).m_BitPos)
                ++index;
        }
    } else ...
```

kleinster Index, in dem sich Vaterschlüssel und c unterscheiden

sonst nächster

Vorlesung 11

Darstellung boolescher Funktionen

- die folgenden Seiten basieren auf:
  - Efficient implementation of a BDD package; Brace, Rudell, Bryant; Proceeding, DAC '90 Proceedings of the 27th ACM/IEEE Design Automation Conference
- Ziel ist die effiziente Darstellung und Bearbeitung von booleschen Funktionen über viele boolesche Variablen (mehrere hundert bis über tausend Variablen)
- dies wird häufig im Bereich der Hardwareentwicklung (Testen und Verifikation) verwendet

Darstellung boolescher Funktionen (Fort.)

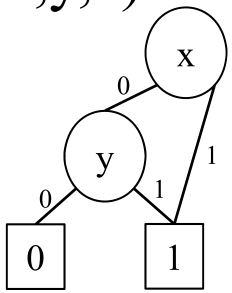
- die allgemeine Frage lautet immer:
  - ist eine boolesche Funktion f erfüllbar (SAT Problem)
  - Beispiel: $f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (\overline{z} \vee \overline{y})$
  - Frage: gibt es eine boolesche Belegung für x,y,z so dass f wahr wird?
- das SAT Problem ist ein NP-vollständiges Problem
- i.a. wird somit dieses Problem nicht effizient lösbar sein, solange
- P=NP Problem nicht gelöst ist
- (und nie lösbar sein, wenn P≠ NP sein sollte)

Boolesche Entscheidungsdiagramme

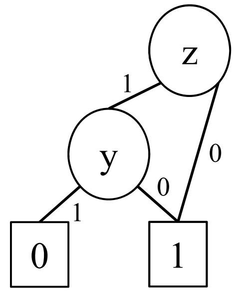
- das Problem mit der Darstellung boolescher Funktionen ist:
  1. werden sie effizient dargestellt, ist das SAT Problem schwer zu entscheiden
  2. ist das SAT Problem leicht zu entscheiden, ist die Darstellung i.d.R. exponentiell (z.B. disjunktive Normalform)
- boolesche Entscheidungsdiagramm (binary decision diagrams = BDDs) sind wie binäre Baume mit Sharing (gerichtete azyklische binäre Bäume)
- in den Knoten stehen die booleschen Variablen
- es gibt zwei Blätter: true und false

Boolesche Entscheidungsdiagramme (BDDs): Beispiel

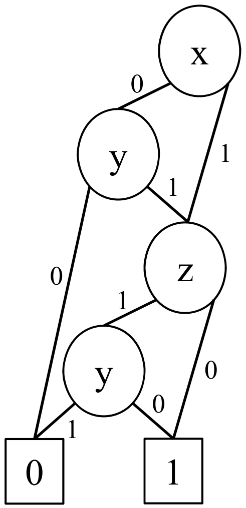
$g(x,y,z) = x \vee y$



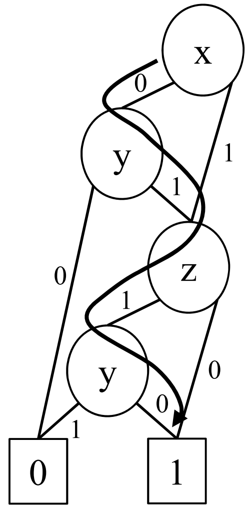
$h(x,y,z) = \bar{z} \vee \bar{y}$



$f(x,y,z) = g(x,y,z) \wedge h(x,y,z)$



- Entscheidungsdiagramm ist recht kompakte Darstellung
- die Op. $\vee$ und $\wedge$ und $\bar{\ }$ lassen sich effizient berechne (darstellen)
- Problem: Erfüllbarkeit ist nicht direkt sichtbar, da Pfade widersprüchlich sein können

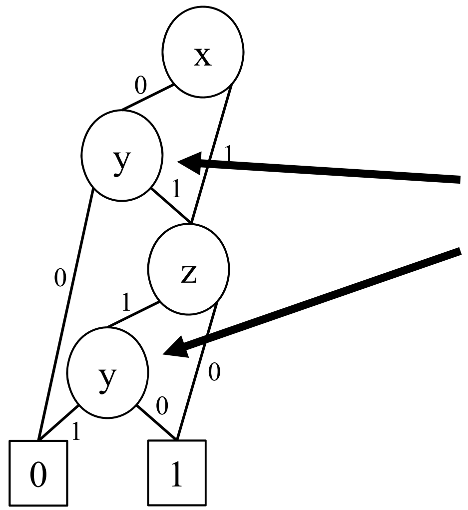


y soll wahr und falsch sein

Reduced Ordered BDDs (RoBDDs)

- Erweiterung der BDDs:

1. Variablen werden gemäß einer beliebigen aber fixen Ordnung getestet (ordered)
   - Folge:
     - keine Variable wird zweimal getestet
     - es kann keine Widersprüche geben



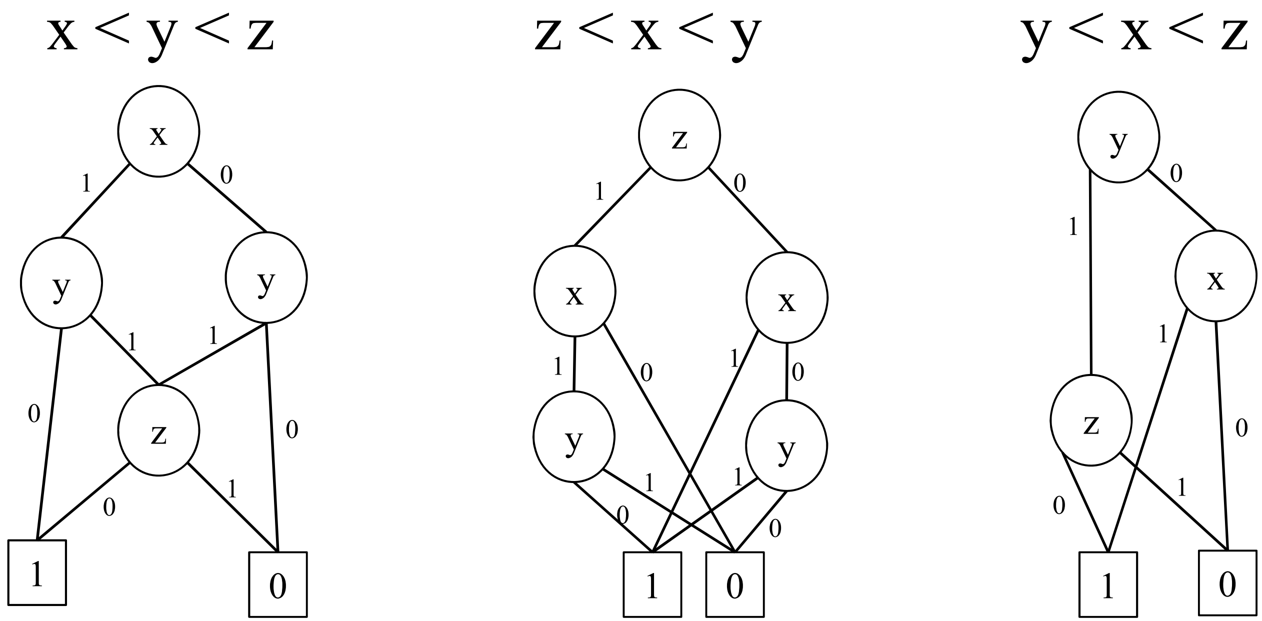
verboten in RoBDDs:
y darf nicht zweimal getestet werde

Reduced Ordered BDDs (RoBDDs) (Fort.)

2. jede Funktion wird nur einmal dargestellt, mehrfache Verwendung wird durch Sharing im Diagramm/Graphen realisiert (reduced)
   - Folge:
     - Funktionen haben eine eindeutige (=kanonische) Darstellung
     - Test auf Identität (und damit SAT) ist in konstanter Zeit machbar (!!!)
3. Folge davon:
   - die Op. $\vee$ und $\wedge$ und $\bar{\ }$ lassen sich nicht mehr trivial berechnen
   - die Darstellung muss i.A. exponentiell sein (ansonsten wäre P=NP)

Beispiele für RoBDDs

- korrekter RoBDDs für $(x \vee y) \wedge (\bar{z} \vee \bar{y})$ mit unterschiedlichen Variablenordnungen



- Wichtig: Variablenordnungen haben massiven Einfluss auf die Darstellungsgröße

Reduced Ordered BDDs (RoBDDs) (Fort.)

- Beobachtung: jede zweistellige boolesche Funktion kann durch if-then-else (ite-Operator) dargestellt werden
- Folge: es reicht, den es eine effiziente Implementierung für den ite-Operator gibt
- Seien f und g boolesche Funktionen, dann gilt:

$$f \wedge g \quad = ite(f,g,0) = f \wedge g \vee \overline{f} \wedge 0$$

$$f \vee g \quad = ite(f,1,g) = f \wedge 1 \vee \overline{f} \wedge g$$

$$\overline{f} \qquad = ite(f,0,1) = f \wedge 0 \vee \overline{f} \wedge 1$$

$$f \Rightarrow g = ite(f,g,1) = f \wedge g \vee \overline{f} \wedge 1$$

...

Co-Faktoren

- sei $f(x_1,...,x_n)$ eine boolesche Funktion über n boolesche Variablen $x_1$bis x_n
- mit $f_{x_i}(x_1,...,x_{i-1,}x_{i-1,...,}x_n) = f(x_1,...,x_{i-1,}1,x_{i-1,...,}x_n)$ wird der <u>positive</u> Co-Faktor von f bzgl. x_i gezeichnet
- mit $f_{\overline{x_i}}(x_1,...,x_{i-1,}x_{i-1,...,}x_n) = f(x_1,...,x_{i-1,}0,x_{i-1,...,}x_n)$ wird der <u>negative</u> Co-Faktor von f bzgl. x_i gezeichnet
- eine Funktion f lässt sich darstellen als

$$f = x_i \wedge f_{x_i} \vee \overline{x_i} \wedge f_{\overline{x_i}} = ite(x_i,f_{x_i},f_{\overline{x_i}})$$

Definition des ite-Operators

- sei x die kleinste Variable (gemäß der Variablenordnung) in den Funktionen f, g und h
- dann gilt:

$$\begin{aligned}
ite(f,g,h) &= f \wedge g \vee \overline{f} \wedge h \\
&= (x \wedge (f \wedge g \vee \overline{f} \wedge h)_x) \vee (\overline{x} \wedge (f \wedge g \vee \overline{f} \wedge h)_{\overline{x}}) \\
&= (x \wedge (f_x \wedge g_x \vee \overline{f}_x \wedge h_x)) \vee (\overline{x} \wedge (f_{\overline{x}} \wedge g_{\overline{x}} \vee \overline{f}_{\overline{x}} \wedge h_{\overline{x}})) \\
&= (x \wedge ite(f_x,g_x,h_x)) \vee (\overline{x} \wedge ite(f_{\overline{x}},g_{\overline{x}},h_{\overline{x}})) \\
&= ite(x, ite(f_x,g_x,h_x), ite(f_{\overline{x}},g_{\overline{x}},h_{\overline{x}}))
\end{aligned}$$

- damit ist der ite-Operator rekursiv über die Co-Faktoren definiert

Definition des ite-Operators (Forts.)

- neben der rekursiven Definition des ite-Operators fehlt noch die Rekursionsverankerung
- hier gibt es drei Fälle des Rekursionsabbruchs

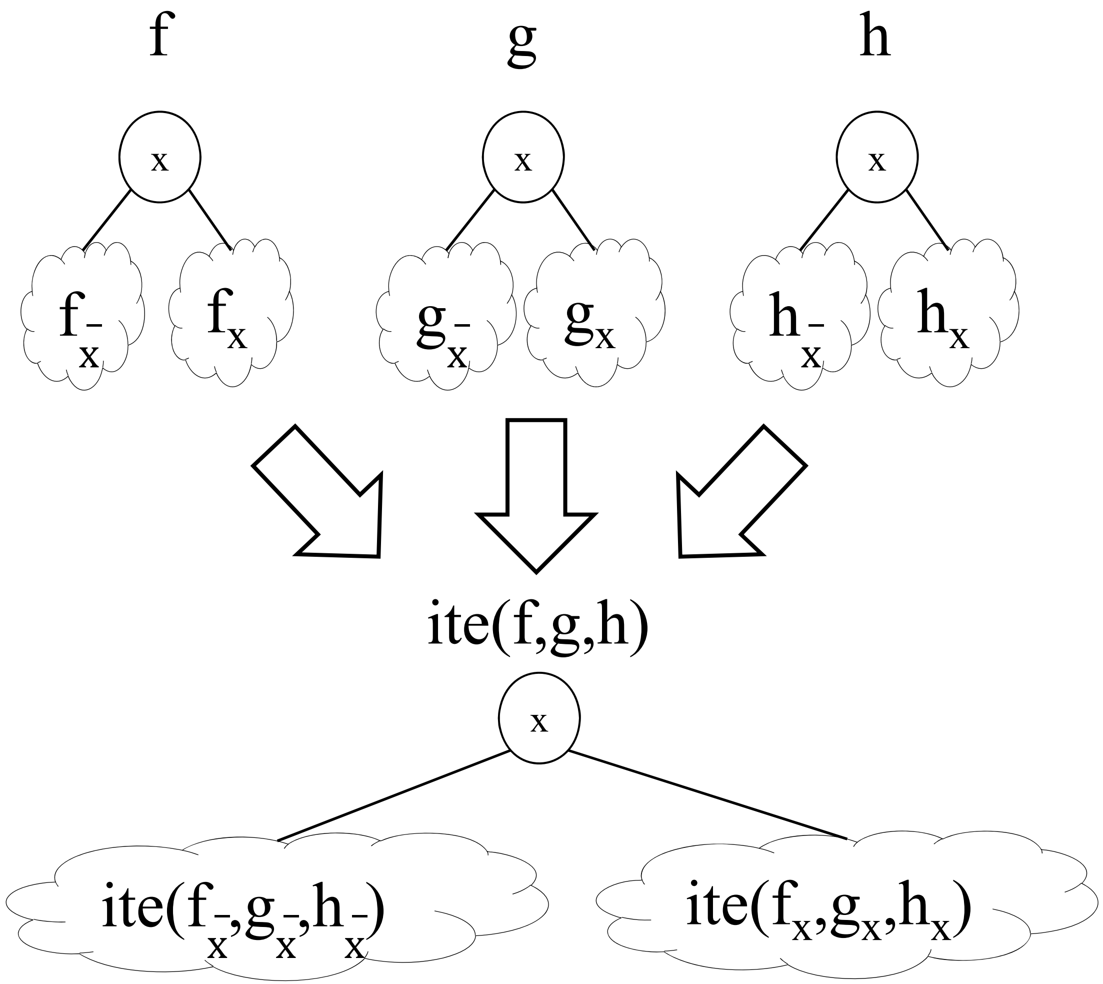
$$\mathrm{ite}(1,g,h) = g$$

$$\mathrm{ite}(0,g,h) = h$$

$$\mathrm{ite}(f,1,0) = f$$

$$\mathrm{ite}(f,g,g) = g$$

Definition des ite-Operators: Visualisierung



RoBDDs: Implementierung

- es gibt zwei Knotenarten
  1. die beiden Terminalknoten true (1) und false (0)
  2. interne Knoten mit einer Variablen und zwei Nachfolgern
- Variablen werden durch Zahlen beginnend von 0 dargestellt
- die beiden Konstanten true und false werden durch die maximale Integerzahl (true) bzw. maximale-1 Integerzahl (false) dargestellt

```
class Func {
    private static final int TRUE = 0x7fffffff;
    private static final int FALSE = TRUE-1;

    private final int m_ciVar;
    private final Func m_cThen,m_cElse;
...
```

die beiden Konstanten true und false als Klassenkonstanten

die drei Objektvariablen für die Variable und die beiden Cofaktoren

RoBDDs: Implementierung (Fort.)

```
class Func {
...
    Func(boolean b) {
        m_ciVar = b ? TRUE : FALSE;
        m_cThen = m_cElse = null;
    }

    Func(int iVar,Func t,Func e) {
        m_ciVar = iVar;
        m_cThen = t;
        m_cElse = e;
    }

    Func getThen(int iVar) {    return iVar == m_ciVar ? m_cThen : this;}
    Func getElse(int iVar) {    return iVar == m_ciVar ? m_cElse : this; }

    int getVar() {              return m_ciVar;                  }

    boolean isTrue() {          return m_ciVar == TRUE;          }
    boolean isFalse() {         return m_ciVar == FALSE;         }
    boolean isConstant() {      return isTrue() || isFalse();    }
```

Konstruktor für die beiden Konstanten

Konstruktor für eine Funktion mit der Variablen i und den beiden Cofaktoren t (then) und e (else) bzgl. i

Zugriff auf die Cofaktoren

Abfrage auf Konstanz

RoBDDs: Implementierung (Fort.)

die beiden Konstanten werden einmal zum Anfang erzeugt

```
public class ROBDD {
    private static final class Func ...;

    private final Func m_cTrue = new Func(true);
    private final Func m_cFalse = new Func(false);

    Func genTrue() {      return m_cTrue;          }
    Func genFalse() {     return m_cFalse;         }

    Func ite(Func i,Func t,Func e) {
        if (i.isTrue())
            return t;
        else if (i.isFalse())
            return e;
        else if (t.isTrue() && e.isFalse())
            return i;
        else {
            final int ciVar = Math.min(Math.min(i.getVar(),t.getVar()),e.getVar());
            final Func T = ite(i.getThen(ciVar),t.getThen(ciVar),e.getThen(ciVar));
            final Func E = ite(i.getElse(ciVar),t.getElse(ciVar),e.getElse(ciVar));
            return new Func(ciVar,T,E);
        }
    }
```

Abfrage der ersten drei Rekursionsverankerungen

Rekursionsschritt

Implementierung: Diskussion

- das Problem mit der bisherigen Implementierung
  - sie ist exponentiell, da gemeinsame Teilgraphen immer wieder neu berechnet werden
  - Graphen werden noch nicht geteilt, da berechnete Ergebnisse nicht getestet werden, ob sie bereits berechnet wurden
- Lösung: Hashmaps einführen, die alle bereits berechneten booleschen Funktionen speichern
- diese bildet Triple von `int x Func x Func` auf `Func` ab
- dazu muss diese Triple Klasse implementiert werden

RoBDDs: Implementierung (Fort.)

```
private static final class Triple {
    private final int m_ciVar;
    private final Func m_cThen;
    private final Func m_cElse;

    Triple(int iVar,Func fThen,Func fElse) {
        m_ciVar = iVar;
        m_cThen = fThen;
        m_cElse = fElse;
    }

    public boolean equals(Object obj) {
        if (obj instanceof Triple) {
            Triple arg = (Triple)obj;
            return arg.m_ciVar == m_ciVar
                && arg.m_cThen == m_cThen
                && arg.m_cElse == m_cElse;
        }
        return false;
    }

    public int hashCode() {
        return m_ciVar ^ m_cThen.hashCode() ^ m_cElse.hashCode();
    }
}
```

Konstruktor

zwei Triple sind gleich, wenn die beiden Variablen und die jeweiligen Cofaktoren gleich sind

zum Hashing die Hashfunktion

RoBDDs: Implementierung (Fort.)

```
public class ROBDD {
    private static final class Func ...;
    private static final class Triple ...;
    private final Func m_cTrue,m_cFalse;
    private Hashtable<Triple,Func> m_Unique;
```

nochmal ROBBD: Func und Triple sind Subklassen

```
    ROBDD() {
        m_cTrue = new Func(true);
        m_cFalse = new Func(false);
        m_Unique = new Hashtable<Triple,Func>();
    }
```

Initialisierungen

```
    Func genVar(int i) {
        Triple entry = new Triple(i,genTrue(),genFalse());
        Func res = m_Unique.get(entry);
        if (res == null) {
            res = new Func(i,genTrue(),genFalse());
            m_Unique.put(entry,res);
        }
        return res;
    }
...
```

Generierung der Funktion f(x) = x, wenn sie noch nicht vorhanden ist, ansonsten Wiederverwendung der bereits alten Funktion

RoBDDs: Implementierung (Fort.)

```
public class ROBDD {
...
    Func ite(Func i,Func t,Func e) {
        if (i.isTrue())
            return t;
        else if (i.isFalse())
            return e;
        else if (t.isTrue() && e.isFalse())
            return i;
        else {
            final int ciVar = Math.min(Math.min(i.getVar(),t.getVar()),e.getVar());
            final Func T = ite(i.getThen(ciVar),t.getThen(ciVar),e.getThen(ciVar));
            final Func E = ite(i.getElse(ciVar),t.getElse(ciVar),e.getElse(ciVar));
            if (T.equals(E))
                return T;
            final Triple entry = new Triple(ciVar,T,E);
            Func res = m_Unique.get(entry);
            if (res == null) {
                res = new Func(ciVar,T,E);
                m_Unique.put(entry,res);
            }
            return res;
        }
    }
```

Abfrage der ersten drei Rekursionsverankerungen

Funktionsgleichheit ist Objektidentität wegen Kanonizität

Abfrage der letzten Rekursionsverankerung

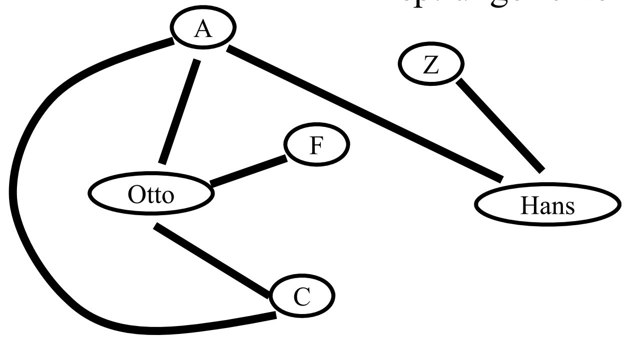
vor Funktionserzeugung wird geschaut, ob diese Funktion bereits existiert

Vorlesung 12

Graphen: Definitionen

- Ein Graph ist ein Paar, bestehend aus einer Menge von Knoten und einer binären Relation über den Knoten

Bsp: ungerichtet



  $G = (V, E)$ mit

  V ist die Menge der Knoten

  $E \subseteq V \times V$ ist die Menge der Kanten

- einen ***Weg*** ist eine Sequenz von Knoten (v1,v2,...,vn) mit:

  $(v_i,v_{i+1}) \in E \;\forall\; i \in \{1,...,n\text{-}1\}$

- ein Weg ist ein ***einfacher Weg***, wenn kein Knoten doppelt vorkommt, d.h $\forall\; v_i, v_j : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$
- ein Weg $(v_1,v_2,...,v_n)$ ist ein ***Zyklus***, wenn $(v_1,v_2,...,v_{n-1})$ ein einfacher Weg ist und $v_1 = v_n$
- …

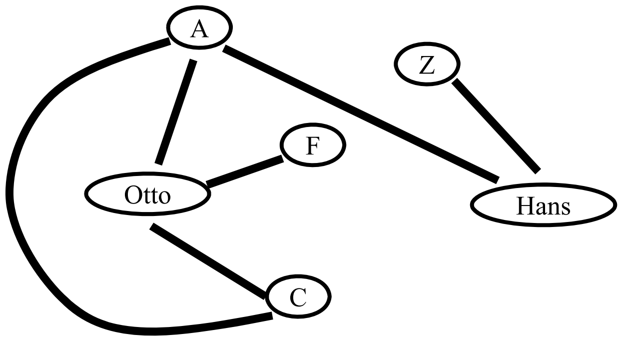
Graphen: Definitionen (Forts.)

- …
- ein Graph heißt zusammenhängend, wenn für 2 beliebige ***unterschiedliche*** Knoten v_i und v_j gilt, dass es einen Weg von v_i zu v_j gibt
- ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen heißt ***Baum***
- ein ***Spannbaum*** ist ein Teil des Graphen
  - er enthält alle Knoten
  - er enthält nur |V|-1 Kanten, so dass er einen Baum bildet
- Graphen können unterteilt werden in,
  - ***gerichtete*** (Normalfall) und ***ungerichtete*** ($(v_i,v_j) \in E \Rightarrow ((v_j,v_i) \in E)$) Graphen
  - ***gewichtete*** (Kanten mit Informationen: $E \subseteq V \times V \times \mathbb{R}$) und ***ungewichtete*** Graphen

Implementierung

- Implementierung mittels ***Adjazenzmatrizen*** oder ***Adjazenzlisten***
- Adjazenzlisten verwendet man bei ***lichten*** Graphen (Anzahl der Kanten relativ klein)
- Adjazenzmatrizen verwendet man bei ***dichten*** Graphen (Anzahl der Kanten relativ hoch)

	0	1	2	3	4	5
0		x		x	x	
1	x		x	x		
2		x				
3	x	x				
4	x					x
5					x	



- Adjazenzmatrizen (ungewichteter Graph):
  - Nummerierung der Knoten von 0 bis |V|-1
  - 2-dimensionales boolesches Feld ***m*** mit m[i,j]=true $\Leftrightarrow (v_i,v_j) \in E$
- Adjazenzmatrizen (gewichteter Graph):
  - Nummerierung der Knoten von 0 bis |V|-1
  - 2-dimensionales Float (o.ä.) Feld ***m*** mit m[i,j]=f $\Leftrightarrow (v_i,v_j,f)\in E$

Adjazenzmatrizen: Implementierung

```
public class GraphMatrix {

    public GraphMatrix(int iNrOfNodes,boolean bIsDirected) {
        IS_DIRECTED = bIsDirected;
        m_Matrix = new boolean[iNrOfNodes][iNrOfNodes];
        for(int i = 0;i < iNrOfNodes;++i)
            for(int j = 0;j < iNrOfNodes;++j)
                m_Matrix[i][j] = false;
    }

    public void addEdge(int i1,int i2) {
        m_Matrix[i1][i2] = true;
        if (!IS_DIRECTED)
            m_Matrix[i2][i1] = true;
    }
...
    private boolean[][] m_Matrix;
    private final boolean IS_DIRECTED;
...
}
```

merkt sich bei der Instanziierung, ob gerichtet oder ungerichtet

legt ein iNrOfNodes mal iNrOfNodes großes Feld an

fügt eine Kante hinzu; ist es ein ungerichteter Graph, wird eine Rückverkettung eingeführt

Tiefen- und Breitensuche

- bei einer ***Tiefensuche*** wird von ***einem Knoten ausgegangen*** und ***alle Knoten*** besucht, die von diesem Startknoten aus ***erreichbar*** sind
- dabei muss man ***Knoten erkennen***, die man bereits vorher besucht hat (***Zyklen***)
- wird ein neuer Knoten besucht, wird erst sein ***1. Nachfolger komplett*** abgearbeitet, bevor es an den 2. Nachfolger geht usw.
- daher wird ***erst in die Tiefe*** und ***dann in die Breite*** gegangen
  $\Rightarrow$ Tiefensuche
- bei der Breitensuche werden erst alle Söhne bearbeitet, bevor dann alle Enkel und danach alle Urenkel besucht werden
- es wird erst in die Breite, dann in die Tiefe gegangen

  $\Rightarrow$ Breitensuche

Tiefen- und Breitensuche (Implementierung)

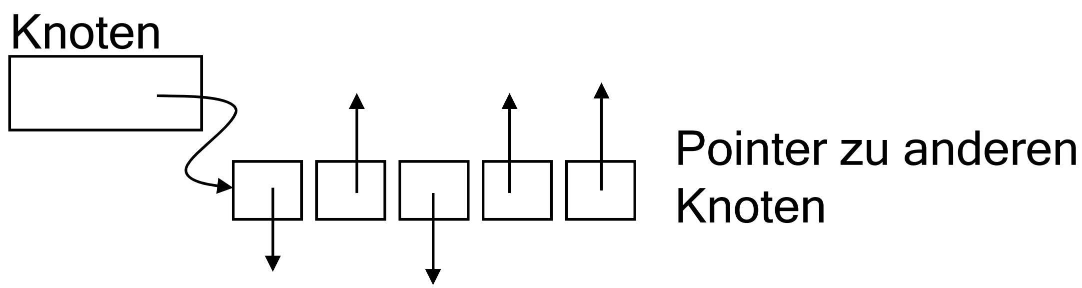
```
public void search(int iNode, boolean bDepthFirst) {
    boolean[] visited = new boolean[m_Matrix.length];
    for(int i = 0;i < m_Matrix.length;++i)
        visited[i] = false;

    DoubleList nodes2visit = new DoubleList();
    nodes2visit.push_back(iNode);
    visited[iNode] = true;

    while (!nodes2visit.isEmpty()) {
        final int CURRNODE = bDepthFirst
            ? nodes2visit.remove_back() : nodes2visit.remove_front();
        System.out.println(CURRNODE);
        for(int i = 0;i < m_Matrix.length;++i)
            if (m_Matrix[CURRNODE][i] && !visited[i]) {
                visited[i] = true;
                nodes2visit.push_back(i);
            }
    }
}
```

entscheiden, ob erst in die Tiefe gesucht wird (true) oder erst in die Breite(false)

nehme den letzten bei der Tiefensuche bzw. den ersten bei der Breitensuche

Adjazenzlisten

- bei ***dichten*** Graphen ist eine ***Adjazenzmatrix relativ gut***, da die Matrix hoch ausgelastet ist
- bei einem ***lichten*** Graphen ist eine ***Adjazenzmatrix schlecht***, da die Matrix nicht ausgelastet ist; viele Einträge sind leer
- daher wird hier viel Platz verschwendet
- für solche lichten Graphen ist die Darstellung mittels ***Adjazenzlisten*** deutlich besser
- bei Adjazenzlisten merkt sich jeder Knoten in einer Liste selber, welches seine Nachfolger sind



Adjazenzlisten: Implementierung

```
public class GraphList {
    class Node {
        public List m_Succ = new List();
    }
    public GraphList(boolean bIsBiDirected) {
        IS_BI_DIRECTED = bIsBiDirected;
    }
    public Node newNode() {...}

    public void addEdge(Node from,Node to) {...}

    private List m_Roots = new List();
    private final boolean IS_BI_DIRECTED;
}
```

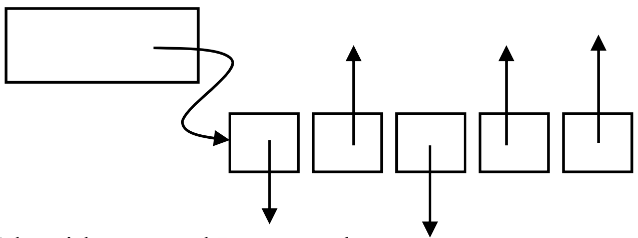
Ein Knoten ist ein Objekt, das eine Liste von Nachfolgerknoten enthält

erzeugt neuen Knoten in m_Roots

speichert to in m_Succ von from

Ein Graph ist nur eine Liste aller seiner Knoten

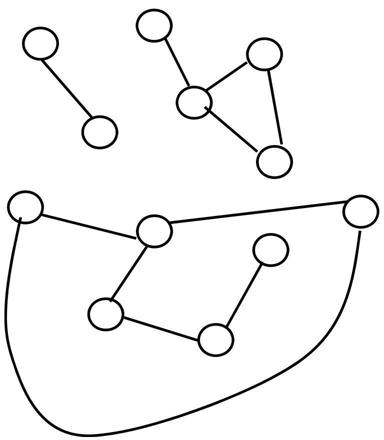
gerichtet oder ungerichtet?



Pointer zu anderen Knoten

Zusammenhang

- ***2 Knoten*** v_i und v_j sind ***zusammenhängend***, wenn es einen ***Weg*** von v_i zu v_j gibt
- eine ***Menge von Knoten*** $V_1 \subseteq V$ heißt ***Zusammenhangs-komponente*** $\Leftrightarrow \forall v_i, v_j \in V_1$: v_i, v_j sind zusammenhängend
- eine ***Zusammenhangskomponente*** $V_1 \subseteq V$ heißt ***maximal*** $\Leftrightarrow$ $\forall\, V' \subseteq V$: $V_1 \subset V' \Rightarrow V'$ ist nicht zusammenhängend



- dieser Graph besteht aus 3 maximalen Zusammenhangskomponenten
- um maximale Zusammenhangs-komponenten zu finden, kann man den normalen Tiefen- oder Breitendurchlauf verwenden

Zusammenhang: Implementierung

```
public void maxConnectedComponent() {
    boolean[] visited = new boolean[m_Matrix.length];
    for(int i = 0;i < visited.length;++i)
        visited[i] = false;

    int iComp = 0;
    for(int i = 0;i < visited.length;++i) {
        if (!visited[i]) {
            System.out.println("Komponente " + (++iComp));

            search(i,true,visited);
        }
    }
}
...
```

merkt sich alle bereits besuchten Knoten

für alle Knoten ...

... ist der Knoten noch nicht besucht worden, so fängt eine neue Komponente an

WICHTIG! Die Liste der bereits besuchten Knoten muss über einen einzelnen Durchlauf bestehen bleiben

Zusammenhang: Implementierung (Fort.)

```
...
public void search(int iNode, boolean bDepthFirst, boolean[] visited) {
    DoubleList nodes2visit = new DoubleList();
    nodes2visit.push_back(iNode);
    visited[iNode] = true;

    while (!nodes2visit.isEmpty()) {
        final int CURRNODE = bDepthFirst
            ? nodes2visit.remove_back() : nodes2visit.remove_front();
        System.out.println(CURRNODE);
        for(int i = 0;i < m_Matrix.length;++i)
            if (m_Matrix[CURRNODE][i] && !visited[i]) {
                visited[i] = true;
                nodes2visit.push_back(i);
            }
    }
}
```

enthält die bereits besuchten Knoten

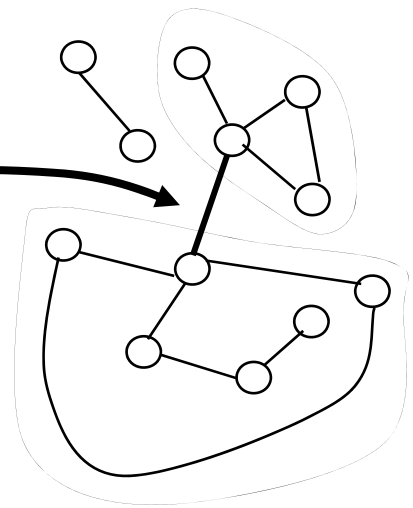
drucke die Nachfolgerknoten immer aus

normaler Tiefen- oder Breitendurchlauf

Anwendung von Zusammenhangskomponenten

- ***Zusammenhangskomponenten*** können dazu verwendet werden, um ***Mengen darzustellen***
- alle ***Knoten***, die zur ***gleichen Zusammenhangskomponente*** gehören, sind ***Elemente der gleichen Menge***
- wird eine ***Kante zwischen 2 Knoten unterschiedlicher Zusammenhangskomponenten*** (sprich Mengen) gezogen, so bilden die beiden Zusammenhangskomponenten jetzt eine Zusammenhangskomponente
- dadurch hat man die ***Mengenvereinigung*** implementiert
- ...

Vereinigung zweier Zusammenhangs-komponenten/Mengen



Anwendung von Zusammenhangskomponenten (Fort.)

- ...
- versteht man Zusammenhangskomponenten als Mengen, ist eine Standardanwendung, ob ***2 Knoten zur gleichen Menge gehören***

$A,B \in \mathfrak{R}$

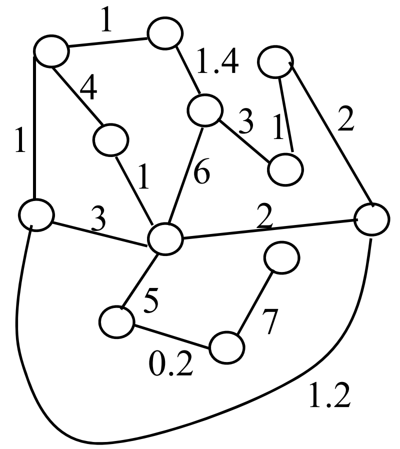
- algorithmisch gesehen ist es die Frage nach einem Weg von dem einen zum anderen Knoten
- diese beiden Fragen werden i.d.R. abwechseln gestellt, d.h. es werden immer wieder Mengen vereinigt und zwischendurch wird abgefragt, ob 2 Knoten zur gleichen Menge gehören

•$A,B \in \mathfrak{R}$?
•$\mathfrak{R} = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{I}$
•$A,B \in \mathfrak{R}$?

- hierbei dient die Graphstruktur (sprich die Kanten) nur zur Information, welche Elemente zu einer Menge gehören

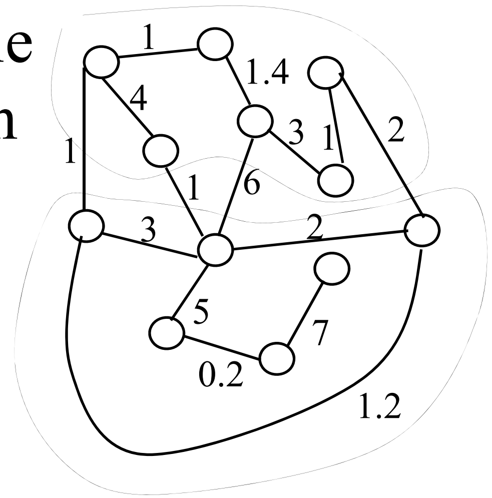
Minimaler Spannbaum

- ein minimaler Spannbaum ist eine Teilmenge der Kanten, so dass
  1. alle Knoten miteinander verbunden sind
  2. die Summe der Kantengewichte wenigstens so klein ist, wie jeder andere Spannbaum



- Eigenschaften minimaler Spannbäume

  Für ***jede*** gegebene ***Zerlegung*** eines Graphen in *2 Mengen* enthält der minimale Spannbaum die ***kürzeste der Kanten***, die Knoten aus der einen Menge mit der anderen verbindet.



Minimaler Spannbaum: Algorithmus

- basierend auf der Eigenschaft minimaler Spannbäume kann der folgende Algorithmus entwickelt werden
  1. starte bei einem beliebigen Knoten
  2. nehme den Knoten hinzu, der diesem am nächsten liegt
  3. nehme den Knoten, der einem der beiden am nächsten liegt
  4. usw. bis alle Knoten besucht worden sind
- falls bei der Auswahl einmal mehrer Kanten mit geringsten Gewichten gibt, wähle eine zufällig aus

Minimaler Spannbaum: Implementierung

- der Algorithmus ist im ***wesentlichen*** der des ***Tiefen- bzw. Breitendurchlaufs***
- jedoch darf ***nicht der erste oder letzte Knoten***, der noch zu behandelnden Knoten genommen werden, sondern der, der ***den geringsten Abstand*** zu den bereits aufgenommen hat
- folglich benötigt die minimale Spannbaumberechnung eine Prioritätensuche in der Liste
- die Prioritäten sind die Abstände der noch zu untersuchenden Knoten von den bereits untersuchten
- ...

Minimaler Spannbaum: Implementierung (Fort.)

- ...
- folglich benötigt man eine ***Datenstruktur***, in die man ein ***Element mit einem Schlüssel einfügen*** kann und
- die einem ***schnell das Element mit dem kleinsten Schlüssel zurückgeben*** (und entfernen) kann
- den Schlüssel zu einem ***bereits eingefügten Element*** eventuell auf einen ***kleineren Schlüssel ändern*** kann
- Lösung: Heap oder Prioritätenliste
- hier:
  - Implementierung für Adjazenzmatrix
  - die Abstände sind float Werte

Prioritätenliste

```
public class PrioList {

    public PrioList(int iNrOfElem) {
        m_iNrOfEntries = 0;
        m_Keys = new Float[iNrOfElem];
    }

    public void insert(int iNode, float key) {...}

    public int remove(float[] key) {...}

    public boolean isEmpty() {...}

    int         m_iNrOfEntries;
    Float[]     m_Keys;
}
```

aktuelle Einträge

Schlüssel

0	1	2	3	4	5	6	7
1.5		1.0	2.0			3.31	

Prioritätenliste (Fort.)

gibt es für iNode noch keinen Eintrag ...

... oder hat der alte Eintrag eine höhere Priorität?

```
public void insert(int iNode, float key) {
    if (m_Keys[iNode]==null || key < m_Keys[iNode]) {
        if (m_Keys[iNode] == null)
            ++m_iNrOfEntries;
        m_Keys[iNode] = key;
    }
}
```

Schlüssel eintragen

```
public boolean isEmpty() {
    return m_iNrOfEntries == 0;
}
```

sind überhaupt Schlüssel eingetragen

Prioritätenliste (Fort.)

Ausgabe, nicht Eingabe

```
public int remove(float[] key) {
      for(int i = 0;i < m_Keys.length;++i) {
            if (m_Keys[i] != null) {
                  int iMin = i;
                  for(int i2 = i+1;i2 < m_Keys.length;++i2) {
                        if (m_Keys[i2] != null && m_Keys[i2] < m_Keys[iMin])
                              iMin = i2;
                  }
                  --m_iNrOfEntries;
                  key[0] = m_Keys[iMin];
                  m_Keys[iMin] = null;
                  return iMin;
            }
      }
      return m_Keys.length;
}
```

sucht den 1. Eintrag

sucht den minimalen Schlüssel in den restlichen Einträgen

Fehlerfall: remove auf leere Liste

Minimaler Spannbaum: Implementierung (Fort.)

ungerichteter,
gewichteter Graph

```
class GraphMatrix {

    public GraphMatrix(int iNrOfNodes) {
        m_Matrix = new Float[iNrOfNodes][iNrOfNodes];
    }

    public void addEdge(int i1, int i2, float fWeight) {
        m_Matrix[i1][i2] = new Float(fWeight);
        m_Matrix[i2][i1] = new Float(fWeight);
    }

    private Float[][] m_Matrix;
}
```

Gewicht der Kante

jede Kante hat eine
Rückwärtskante

Adjazenzmatrix

Minimaler Spannbaum: Implementierung (Fort.)

Prioritätenliste

```
public void minimalerSpannBaum() {
    PrioList list = new PrioList(m_Matrix.length);
    boolean[] visited = new boolean[m_Matrix.length];
    for(int i = 0; i < m_Matrix.length; ++i)
        visited[i] = false;
    list.insert(0, 0.0f);
    while (!list.isEmpty()) {
        float[] fDistance = new float[1];
        int iNextNode = list.remove(fDistance);
        visited[iNextNode] = true;
        System.out.println("node" + iNextNode + " with distance " + fDistance[0]);
        for(int i = 0; i < m_Matrix.length; ++i) {
            final Float NEW_DISTANCE = m_Matrix[iNextNode][i];
            if (NEW_DISTANCE != null && !visited[i]) {
                list.insert(i,NEW_DISTANCE);
            }
        }
    }
}
```

merkt sich besuchte Knoten

Initialisierung

dichtester Knoten

trage Knoten mit Abstand neu ein oder führe update durch

Minimaler Spannbaum: Implementierung: Diskussion

- der ***PrioList ersetzt*** die ***Liste*** in der Tiefen- bzw. Breitensuche
- damit wird ***nicht mehr das erste oder letzte Listenelement*** für den nächsten Schritt ausgewählt, sondern
- das ***Element***, das den ***geringsten Abstand*** zu einen der bereits besuchten Knoten hat

Minimaler Spannbaum: Komplexität

- die remove-Methode der Prioritätslist ist linear zu der Anzahl der Einträge (Minimumsuche in unsortierter Liste)
- maximal können alle Knoten in der Prioritätsliste eingetragen sein, also O(V)
- für alle Knoten muss diese Operation durchgeführt werden
- für jede Kante muss u.U. die Priorität verändert werden
- somit ist die Komplexität in $O(E + V^2)$

Minimaler Spannbaum: Komplexität (Fort.)

- die Prioritätsliste kann optimiert werden, indem ein Heap eingesetzt wird
- in einem Heap kann in logarithmischer Zeit ein Element
  - eingefügt
  - entfernt und
  - seine Priorität geändert werden
- daraus ergibt sich eine Komplexität von O((E + V) log V)

Die Prioritätssuche bei lichten Graphen ermöglicht die Berechnung des minimalen Spannbaums in O((E + V) log V) Schritten

Prioritätenheap: Idee

- normaler Heap, der sich zusätzlich zum Schlüssel merkt
  - zu welchem Knoten gehört der Schlüssel
  - zu jedem Knoten, ob und wenn ja, wo er sich im Heap befindet

	0	1	2	3	4	5	6	7
Schlüssel: m_Keys	1.0	3.31	1.5	4.0				
Knoten: m_Entries	4	7	0	2				
Ort im Heap: m_PlaceInHeap	2	8	3	8	0	8	8	1

Prioritätenheap: Implementierung

```
class PrioHeap {

    public PrioHeap(int iNrOfNodes) {
        m_uiNextFree = 0;
        m_Keys = new float[iNrOfNodes];
        m_Entries = new int[iNrOfNodes];
        m_PlaceInHeap = new int[iNrOfNodes];
        for(int i = 0;i < iNrOfNodes;++i) {
                m_PlaceInHeap[i] = iNrOfNodes;
        }
    }

    int      m_iNextFree;
    float[]  m_Keys;
    int[]    m_Entries;
    int[]    m_PlaceInHeap;
}
```

zunächst gibt es keine Einträge im Heap

Prioritätenheap: Implementierung (Fort.)

```
public void insert(int iNode, float key) {
    final int PLACE_IN_HEAP = m_PlaceInHeap[iNode];
    if (PLACE_IN_HEAP != m_Keys.length) {
        // update
        if (m_Keys[PLACE_IN_HEAP] > key) {
            // new, lower priority
            m_Keys[PLACE_IN_HEAP] = key;
            upHeap(PLACE_IN_HEAP);
        }
    } else {
        // new entry
        m_Keys[m_iNextFree] = key;
        m_Entries[m_iNextFree] = iNode;
        m_PlaceInHeap[iNode] = m_iNextFree;
        upHeap(m_iNextFree);
        ++m_iNextFree;
    }
}
```

der Knoten ist bereits im Heap enthalten

soll mit einem kleineren Schlüssel eingetragen werden: eventuell nach oben wandern lassen

neuer Eintrag: am Ende einfügen und nach oben wandern lassen

Prioritätenheap: Implementierung (Fort.)

Ausgabe, nicht Eingabe

```
public int remove(float[] key) {
    key[0] = m_Keys[0];
    final int NODE = m_Entries[0];
    m_PlaceInHeap[NODE] = m_Keys.length;
    m_Keys[0] = m_Keys[--m_iNextFree];
    m_Entries[0] = m_Entries[m_iNextFree];
    m_PlaceInHeap[m_Entries[0]] = 0;
    downHeap(0);
    return NODE;
}
```

das kleinste Element liegt vorne

das letzte Element an Anfang stellen und nach unten wandern lassen

```
public boolean isEmpty() {
    return m_iNextFree == 0;
}
```

gibt es überhaupt Einträge?

Prioritätenheap: Implementierung (Fort.)

```
private void upHeap(int iIndex) {
    final float VAL = m_Keys[iIndex];
    final int NODE = m_Entries[iIndex];
    int iFather = (iIndex-1) / 2;
    while (iIndex != 0 && m_Keys[iFather] > VAL) {
        m_Keys[iIndex] = m_Keys[iFather];
        m_Entries[iIndex] = m_Entries[iFather];
        m_PlaceInHeap[m_Entries[iIndex]] = iIndex;
        iIndex = iFather;
        iFather = (iIndex - 1) / 2;
    }
    m_Keys[iIndex] = VAL;
    m_Entries[iIndex] = NODE;
    m_PlaceInHeap[NODE] = iIndex;
}
```

Standard Heapoperation

merken, wo die Einträge hinwandern

Prioritätenheap: Implementierung (Fort.)

```
void downHeap(int iIndex) {
    final float KEY = m_Keys[iIndex];
    final int NODE = m_Entries[iIndex];
    while (iIndex < m_iNextFree / 2) {
        int iSon = 2 * iIndex + 1;
        if (iSon < m_iNextFree-1 && m_Keys[iSon] > m_Keys[iSon+1])
            ++iSon;
        if (KEY <= m_Keys[iSon])
            break;
        m_Keys[iIndex] = m_Keys[iSon];
        m_Entries[iIndex] = m_Entries[iSon];
        m_PlaceInHeap[m_Entries[iIndex]] = iIndex;
        iIndex = iSon;
    }
    m_Keys[iIndex] = KEY;
    m_Entries[iIndex] = NODE;
    m_PlaceInHeap[NODE] = iIndex;
}
```

Standard Heapoperation

merken, wo die Einträge hinwandern

Modifikation von minimaler Spannbaum

- der Algorithmus zur Berechnung des minimalen Spannbaums kann leicht modifiziert werden, um
  - zu einem gegebenen Knoten iNode
  - und einer gegebenen Zahl iNr
  - die iNr dichtesten Knoten von iNode

  auszugeben

Modifikation von minimaler Spannbaum : Implementierung

```
public void getNext(int iNode,int iNr) {
    PrioHeap list = new PrioHeap(m_Matrix.length);
    boolean[] visited = new boolean[m_Matrix.length];
    for(int i = 0; i < m_Matrix.length; ++i)
        visited[i] = false;
    list.insert(iNode, 0.0f);
    int iNrOfFound = 0;
    while (!list.isEmpty() && iNrOfFound <= iNr) {
        float[] fDistance = new float[1];
        int iNextNode = list.remove(fDistance);
        ++iNrOfFound;
        visited[iNextNode] = true;
        System.out.println("node " + iNextNode + " with distance " + fDistance[0]);
        for(int i = 0; i < m_Matrix.length; ++i) {
            final Float NEW_DISTANCE = m_Matrix[iNextNode][i];
            if (NEW_DISTANCE != null && !visited[i]) {
                list.insert(i,NEW_DISTANCE + fDistance[0]);
            }
        }
    }
}
```

starte bei iNode und zähle die gefundenen Knoten

es zählt der Abstand von iNode

Vorlesung 13

Datenkomprimierung

- Im Gegensatz zu den meisten Algorithmen geht es bei der Datenkomprimierung **nicht** um **Zeitersparnis**, **sondern** um **Platzersparnis**
- Der Zugang zur Datenkomprimierung besteht in der Beobachtung, dass viele Daten sehr viele Redundanzen besitzen
- Ziel: eine möglichst hohe Komprimierung der Daten, die in einer möglichst kurzen Zeit berechnet werden kann
- Beispiel: Texte

Beispiel

‚A‘

‚ ‘

- „A SIMPLE STRING TO BE ENCODED USING A MINIMAL NUMBER OF BITS“

60 Buchstaben

- 01000001 00100000 01010011 01001001 01001101 01010000 01001100 01000101 00100000 01010011 01010100 01010010 01001001 01001110 01000111 00100000 01010100 01001111 00100000 01000010 01000101 00100000 01000101 01001110 01000011 01001111 01000100 01000101 01000100 00100000 01010101 01010011 01001001 01001110 01000111 00100000 01000001 00100000 01001101 01001001 01001110 01001001 01001101 01000001 01001100 00100000 01001110 01010101 01001101 01000010 01000101 01010010 00100000 01001111 01000110 00100000 01000010 01001001 01010100 01010011

60*8 = 480 Bits

Lauflängenkodierung

- Beobachtung: es kommen viele 0 und 1 hintereinander vor
- Idee: nicht 5 mal 0 schreiben, sondern nur die 5
- Beispiel:

1 mal die ‚0‘

1 mal die ‚1‘

5 mal die ‚0‘

keine Einsparung, da 274 mal 3Bit (zur Codierung der Zahlen 1 bis 6) = 822 Bits sind

- 1 1 5 1 2 1 6 1 1 1 2 2 1 1 2 1 2 1 1 1 2 2 1 1 1 1 1 1 5 1 2 2 3 1 3 1 1 1 2 1 6 1 1 1 2 2 1 1 1
  1 1 1 3 1 1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 1 1 2 3 2 1 3 3 2 1 6 1 1 1 1 1 3 1 2 4 2 1 6 1 4 1 2 1 3 1 1 1 2 1
  6 1 3 1 1 1 1 1 2 3 2 1 4 2 1 1 2 4 1 1 3 1 3 1 3 1 1 1 1 1 3 1 4 1 6 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 1
  1 2 1 2 1 1 1 2 3 2 1 3 3 2 1 6 1 5 1 2 1 6 1 2 2 1 1 1 1 2 1 2 1 1 1 2 3 2 1 2 1 2 1 1 1 2 2 1 1
  1 1 5 1 1 1 2 2 4 1 6 1 2 3 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 4 1 2 1 3 1 1 1 1 1 1 1 2 1 3 1 6 1 2
  4 1 1 3 2 3 1 6 1 4 1 2 1 2 1 2 1 1 1 1 1 1 1 3 1 1 1 2 2

274 Zahlen

Lauflängenkodierung: Problem

- die Lauflängenkodierung funktioniert nur dann gut, wenn möglichst viele lange Ketten existieren
- dies ist im Allgemeinen nicht gegeben
- daher ist die Lauflängenkodierung nur für Spezialfälle geeignet

Variable Lauflängenkodierung

- bei der normalen Lauflängenkodierung wird jeder Buchstabe mit gleich vielen Bits (7 oder 8) kodiert
- d.h. das ‚y‘ genauso viel Platz zum speichern braucht wie das ‚e‘
- da in der natürlichen (hier: deutschen) Sprache aber das ‚e‘ viel häufiger als das ‚y‘ vorkommt, würde es Sinn machen, diese Buchstaben mit unterschiedlich vielen Bits zu codieren
- Beispiel: „Dies ist ein Test“ benötigt mit einer 8-Bit Kodierung 17*8 = 136 Bits

Variable Lauflängenkodierung: Beispiel

- würden die Buchstaben aber wie folgt codiert:

‚ ‘ ↔ 110
‚D‘ ↔ 1000
‚T‘ ↔ 1001
‚e‘ ↔ 111
‚i‘ ↔ 00
‚n‘ ↔ 1010
‚s‘ ↔ 01
‚t‘ ↔ 1011

- ergäbe sich folgende Kodierung:

$$\underbrace{1000}_{D}\underbrace{00}_{i}\underbrace{111}_{e}\underbrace{01}_{s}\underbrace{110}_{‚\ ‘}\underbrace{00}_{i}\underbrace{01}_{s}\underbrace{1011}_{t}\underbrace{110}_{‚\ ‘}\underbrace{111}_{e}0010101101001111011011$$

- hier bräuchte man nur 50 Bits
- eine Einsparung von 63%

Variable Lauflängenkodierung: Eigenschaften

- nicht jede Codierung funktioniert
- Beispiel: 01011 mit der folgenden Kodierung
- Aufgabe: der ursprüngliche Text soll wieder hergestellt werden
- Problem: mehrer Möglichkeiten existieren

‚A‘ $\leftrightarrow$ 0
‚B‘ $\leftrightarrow$ 1
‚C‘ $\leftrightarrow$ 11
‚D‘ $\leftrightarrow$ 01
‚E‘ $\leftrightarrow$ 101

$$\underbrace{0\;1}_{D}\;\underbrace{0\;1}_{D}\;\underbrace{1}_{B} \qquad\qquad \underbrace{0}_{A}\;\underbrace{1\;0\;1}_{E}\;\underbrace{1}_{B}$$

Variable Lauflängenkodierung: Eigenschaften (Fort.)

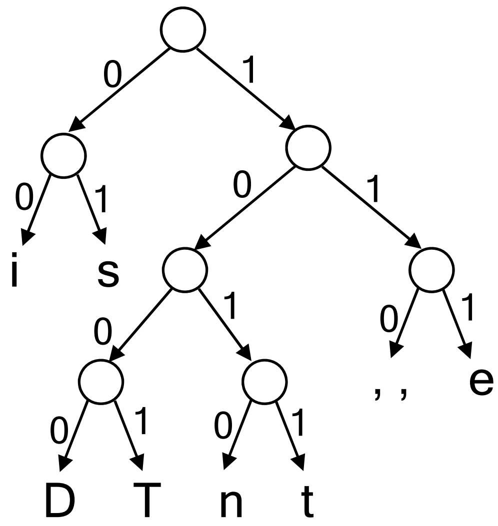
‚A' $\leftrightarrow$ 0
‚B' $\leftrightarrow$ 1
‚C' $\leftrightarrow$ 11
‚D' $\leftrightarrow$ 01
‚E' $\leftrightarrow$ 101

- das Problem mit dieser Kodierung ist, dass sie nicht ***präfixeindeutig*** ist,
- d.h. die Kodierung mancher Buchstaben sind echte Präfixe von Kodierungen anderer Buchstaben (A ist ein Präfix von D, B ist ein Präfix von C und von E)
- dies hat zur Folge, dass bei der Dekomprimierung nicht entschieden werden kann, ob die Kodierung eines Buchstabens bereits erreicht ist oder ob weitere Bits eingelesen werden müssen

Variable Lauflängenkodierung: Darstellung

‚ ‘ ↔ 110
‚D‘ ↔ 1000
‚T‘ ↔ 1001
‚e‘ ↔ 111
‚i‘ ↔ 00
‚n‘ ↔ 1010
‚s‘ ↔ 01
‚t‘ ↔ 1011

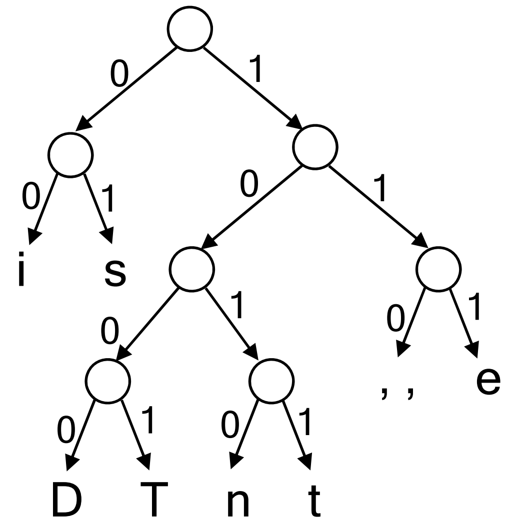
- Frage: wie kann eine solche Kodierung effizient dargestellt werden?
- Antwort: mittels eines Tries (siehe Vorlesung über Patrica Trees)



- Diese Art der Kodierung nennt man Huffman Code nach D. Huffman (1952 entwickelte er diesen Algorithmus)

Variable Lauflängenkodierung: Verwendung

- Dieser Trie kann dazu verwendet werden, die Nachricht zu dekomprimieren
- Dazu steigt man in dem Trie beginnend an der Wurzel entsprechend der 01 Folge hinab
- Wird ein Blatt mit einem Buchstaben erreicht, so wird dieser ausgegeben



Beispiel:

10000011101110000110111101110010101101001111011011

Variable Lauflängenkodierung: Aufbau des Tries

- Beim Aufbau des Tries soll darauf geachtet werden, dass die Buchstaben, die besonders häufig vorkommen, weit oben im Trie stehen, damit ihre Kodierung kurz ist
- Somit muss zunächst die Häufigkeit der Buchstaben im Text ermittelt werden

Ergebnis:

3	1	1	3	3	1	3	2
, ,	D	T	i	e	n	s	t

```
public class Huffman {
  private final int MAX = 512;
  private int[] m_Count;

  public void compress(String arg) {
     m_Count = new int[MAX];
     for(int i = 0;i < MAX;++i) {
        m_Count[i] = 0;
     }
     for(int i = 0;i < arg.length();++i) {
        ++m_Count[arg.charAt(i)];
     }
     ...
```

maximal 256 Buchstaben, also 256 Blätter, also maximal 255 innere Knoten: 255+256 = 511

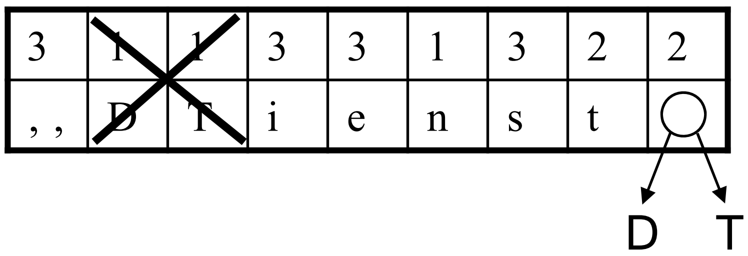
in m_Count steht an der Position i, wie oft der Buchstabe i im Text arg vorkommt

Variable Lauflängenkodierung: Aufbau des Tries (Fort.)

- Der Trie wird von unten nach oben aufgebaut
- Dazu werden jeweils zwei Elemente zu einem neuen Teil-Trie zusammengefasst

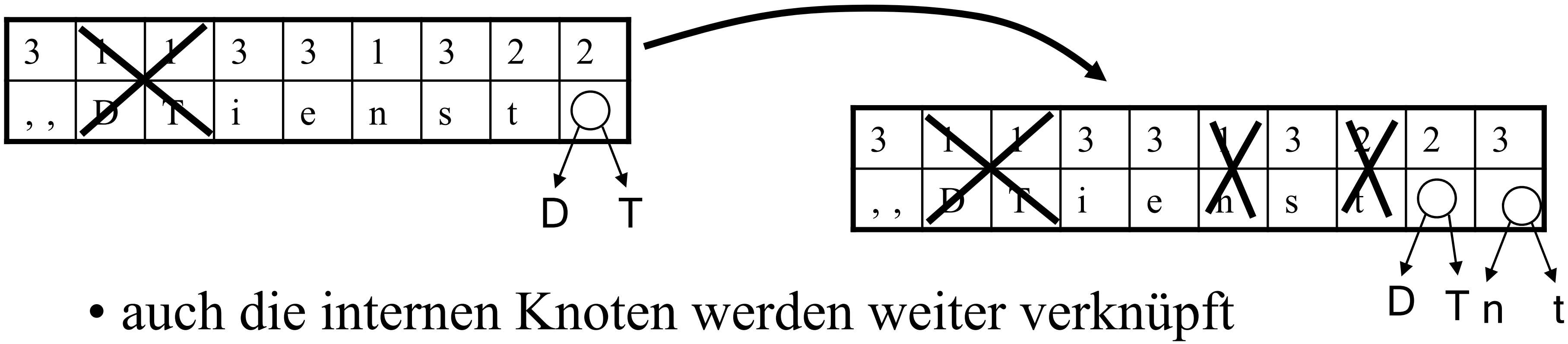
3	1	1	3	3	1	3	2
, ,	D	T	i	e	n	s	t

- Es wird bei den Blättern angefangen, die die ***geringsten*** Häufigkeiten haben
- gibt es mehrer, so wird zufällig ausgewählt
- die Häufigkeiten werden addiert und der neue Knoten wird damit annotiert

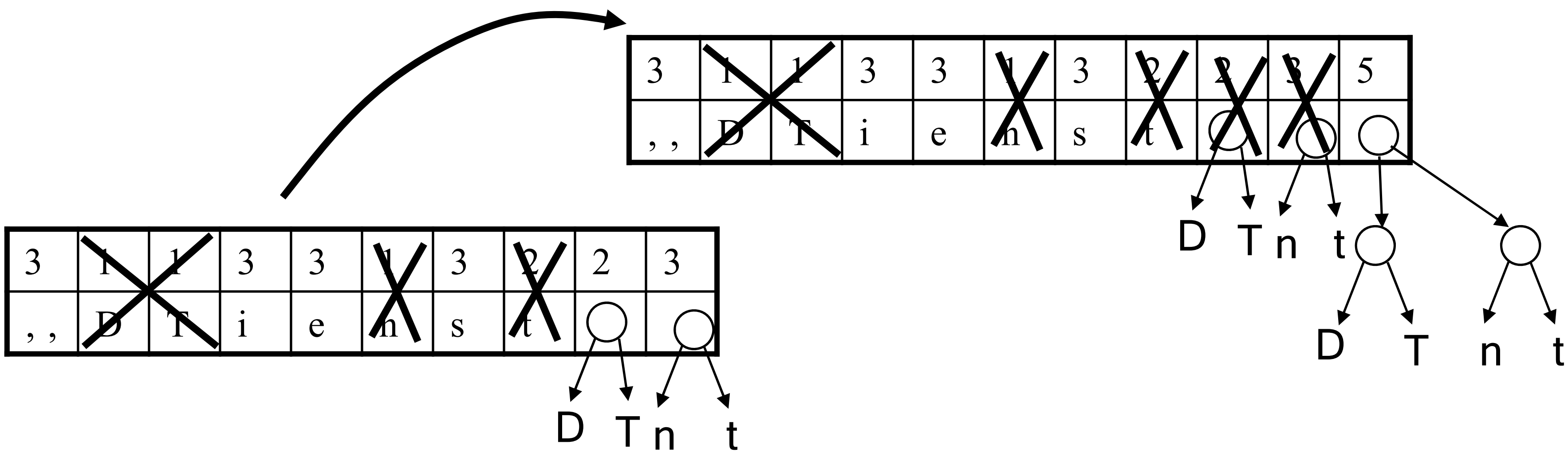


Variable Lauflängenkodierung: Aufbau des Tries (Fort.)

• Dieses Verfahren setzt sich fort



• auch die internen Knoten werden weiter verknüpft



Variable Lauflängenkodierung: Aufbau des Tries (Fort.)

- zum Aufbau dieser Teilbäume braucht man immer die beiden Knoten (Blätter als auch interne Knoten), die die kleinsten Annotierungen haben
- Frage: wie kann man diese schnell finden
- Antwort: Prioritätenheap (siehe letzte Vorlesung)

```
public class Huffman {
   private int[] m_Dad = new int[MAX];
   public void compress(String arg) {
        ...
        PrioHeap ph = new PrioHeap(MAX/2);
        for(int i = 0;i < MAX/2;++i) {
           if (m_Count[i] > 0) ph.insert(i,m_Count[i]);
        }
        for(int i = MAX/2;!ph.empty();++i) {
           int s1 = ph.remove();int s2 = ph.remove();
           m_Dad[i] = 0;
           m_Dad[s1] = i;
           m_Dad[s2] = -i;
           m_Count[i] = m_Count[s1] + m_Count[s2];
           if (!ph.empty())
              ph.insert(i,m_Count[i]);
        }
```

WICHTIG: kein PlaceInHeap weil kein update erfolgt

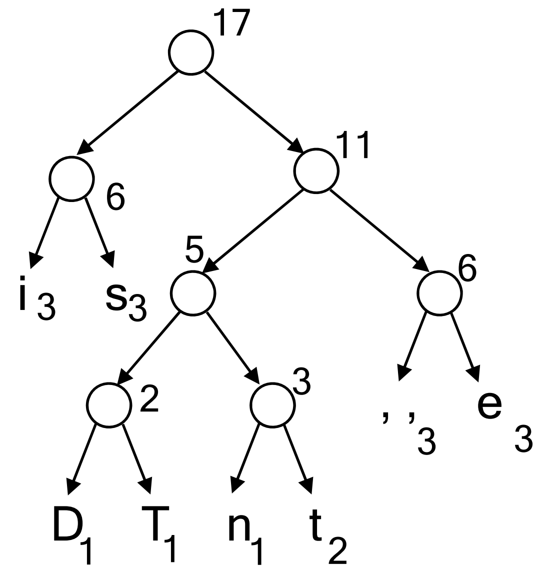
in dem Prioritätenheap stehen zunächst alle Buchstaben-häufigkeiten (=MAX/2)

trage alle Buchstaben ein, die mindestens einmal vorkommen

rechte Söhne speichern den Vater negativ ab

Variable Lauflängenkodierung: Aufbau des Tries (Fort.)

- das Ergebnis ist ein Trie, an dessen Blätter die vorkommenden Buchstaben mit ihrer Häufigkeit stehen
- Beispiel: „Dies ist ein Test“
- Beobachtung: das Gewicht der Wurzel ist die Länge des zu komprimierenden Strings

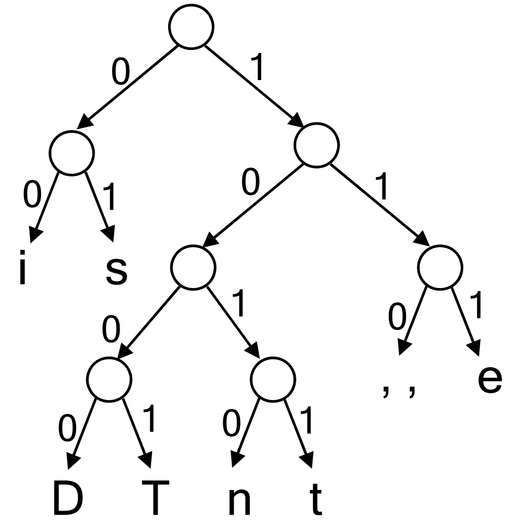


- Ergebnis:

	' '	D	T	e	i	n	s	t							
Index/Ascii	32	68	84	101	105	110	115	116	256	257	258	259	260	261	262
m_Count	3	1	1	3	3	1	3	2	2	3	5	6	6	11	17
m_Dad	260	256	-256	-260	259	257	-259	-257	258	-258	261	262	-261	-262	0

Variable Lauflängenkodierung: Kodierung der Buchstaben

- die vorkommenden Buchstaben können jetzt mit Hilfe des Tries kodiert werden
- jeder Buchstabe bekommt als Codierung die Zahl, die man erhalten würde, wenn man den Trie absteigen würde
- dabei verwendet der Buchstabe nur soviele Bits, wie tief er im Baum steht
- Beispiel: zum T kommt man über den Pfad 1 0 0 1



- 1001 bedeutet 9
- somit bekommt T die Kodierung 9 und als Länge die Tiefe 4
- Beispiel: e hat die Kodierung 111 (also 7) mit einer Länge von 3

Kodierung der Buchstaben: Implementierung

- um die Buchstaben zu Kodieren werden zwei zusätzlich Felder benötigt
- `m_Code` enthält an der Stelle `i` den Code des Buchstaben `i`
- `m_Len` enthält an der Stelle `i`, wieviele Bits von der Codierung der Buchstabe `i` verwenden muss

```
public class Huffman {
   m_Code = new int[MAX/2];
   m_Len = new int[MAX/2];
   public void compress(String arg) {
       ...
       for(int i = 0;i<MAX/2;++i) {
          int len = 0,code = 0;
          if (m_Count[i] > 0) {
             for(int t = m_Dad[i];t != 0;t = m_Dad[t],++len)
                if (t < 0) {
                   code += 1 << len;
                   t = -t;
                }
          }
          m_Code[i] = code;
          m_Len[i] = len;
       }
```

nur für die Buchstaben

kommt der Buchstabe überhaupt vor?

laufe bis zur Wurzel, berechne die Länge und den Codierwert

Kodierung der Buchstaben: Implementierung (Fort.)

- Mit der Kodierung und der Länge können die Buchstaben in einfacher Art und Weise in entsprechende Bitmuster unterschiedlicher Länge ausgegeben werden

für alle Buchstaben ...

```
public void printString(String arg) {
    for(int i = 0;i<arg.length();++i) {
        char c = arg.charAt(i);
        char code = (char)m_Code[c];
        int len = m_Len[c];
        for(int j = 0;j < len;++j) {
            System.out.print((code >> (len-j-1)) & 1);
        }
    }
}
```

... drucke soviele Bits, wie zuvor berechnet

... die Bits richten sich nach dem vorher berechneten Code

- Ergebnis:

1000001110111000011011110111001010110100111011011

Dekomprimierung

- für den Abstieg müssen zusätzlich zu m_Dad die Söhne in m_Left und m_Right Feldern gemerkt werden
- von der Wurzel muss gemäß der einkommenden 0 und 1 in dem Baum nach links bzw. rechts verzweigt werden
- wird ein Blatt erreicht, wird der Buchstabe ausgegeben
- das Verfahren beginnt mit dem nächsten Buchstaben wieder bei der Wurzel

```
public void decode(String arg) {
    for(int i = 0;i < arg.length();) {
        int node = m_Root;
        while (m_Left[node] != -1) {
            node = arg.charAt(i++) == '0' ? m_Left[node] : m_Right[node];
        }
        System.out.print((char)node);
    }
}
```

muss zunächst gemerkt werden: in diesem Beispiel die Nummer 262

Abstieg, bis kein Sohn mehr vorhanden ist

Zusammenfassung

- die Huffman Codierung bietet ein schnelles Verfahren zur guten Komprimierung von Texten
- das vorgestellte Verfahren müsste zu den generierten Text auch noch den Trie selber abspeichern
- dies kann vermieden werden, wenn man von einer Standardverteilung der Buchstaben in der zu verarbeitenden Sprache ausgeht
- dann würde man für z.B. der deutschen Sprache einen Trie aufbauen und danach kodieren
- diese Kodierung müsste sich dann nicht den Trie merken, würde jedoch für Texte der englischen Sprache eventuell nicht optimal

Vorlesung 14

Algorithmen
und
Datenstrukturen

Zusammenfassung

Graphikprogrammierung unter Java

- Images verwalten, die über ImageProducer generiert werden, die Bilder erzeugen
- MemoryImageSource ist ein ImageProducer, der ein Integerfeld mit einem Bild assoziiert
- Zusammenhang von Bildpunkten und Integerwerten:
  - 32 Bit Integerwert kodiert jeweils 8 Bit Farbwerte für Rot, Grün und Blau
- Bilder können ausgelesen werden durch einen PixelGrabber
- hierdurch können Bilder in Integerfelder konvertiert werden
- diese Integerfelder können modifiziert werden und wieder mittels eines MemoryImageSource in Bilder verwandelt werden

Graphikprogrammierung unter Java (Fort.)

- mittels der einfachen Transformation

  Translation, Skalierung, Rotation, x- und y-Scherung

  können komplexe Bildveränderungen durchgeführt werden
- jeder dieser Transformationen kann als Matrixoperation mittels einer 3×3 Matrix und einem erweiterten Punkt Spaltenvektor verstanden werden
- mehrer Transformationen hintereinander können zu einer Operation zusammengefasst werden, indem die Matrizen multipliziert werden

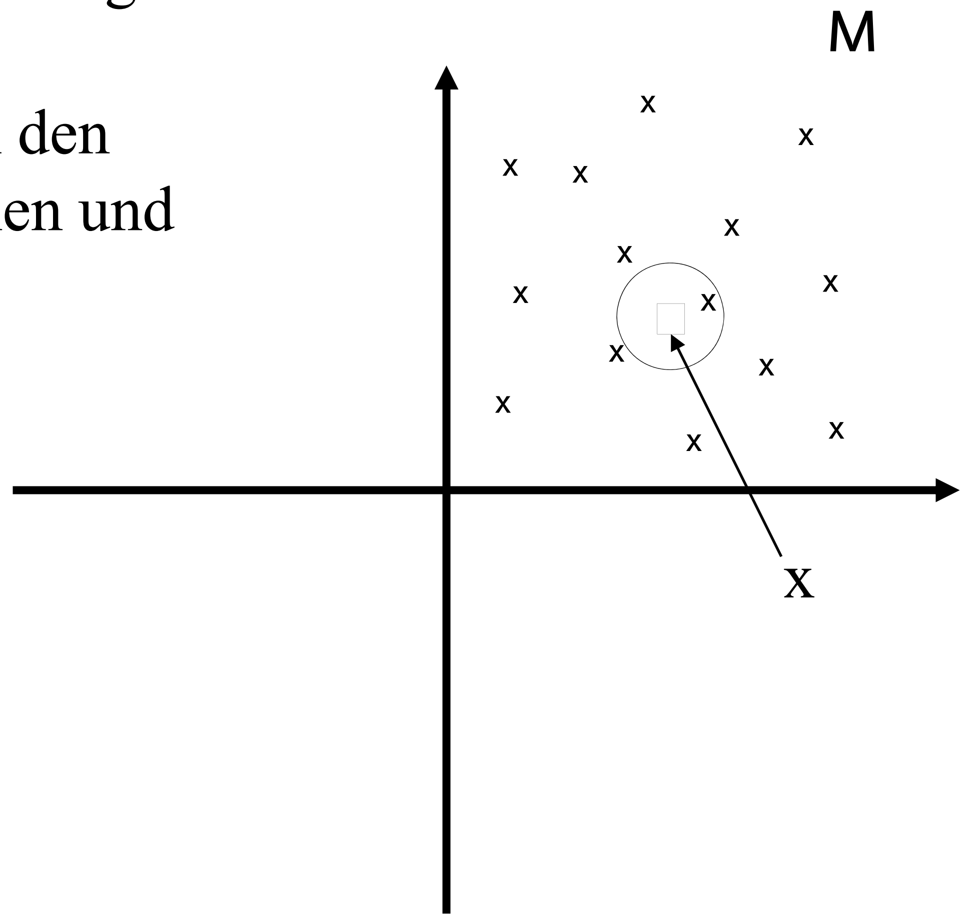
Linien und Kreise zeichnen

- angefangen mit den klassischen Berechnungen
  „Steigungsdreieck“ für Linien
  „Satz des Pythagoras“ für Kreise
- schrittweise Optimierungen durch Elimination der Fließkommaarithmetik und Wurzelberechnung durch Einführung von Fehlertermen
- Fehlerterme werden iterativ berechnet
- dadurch sehr hohe Performanz

Approximation im mehrdimensionalen Raum

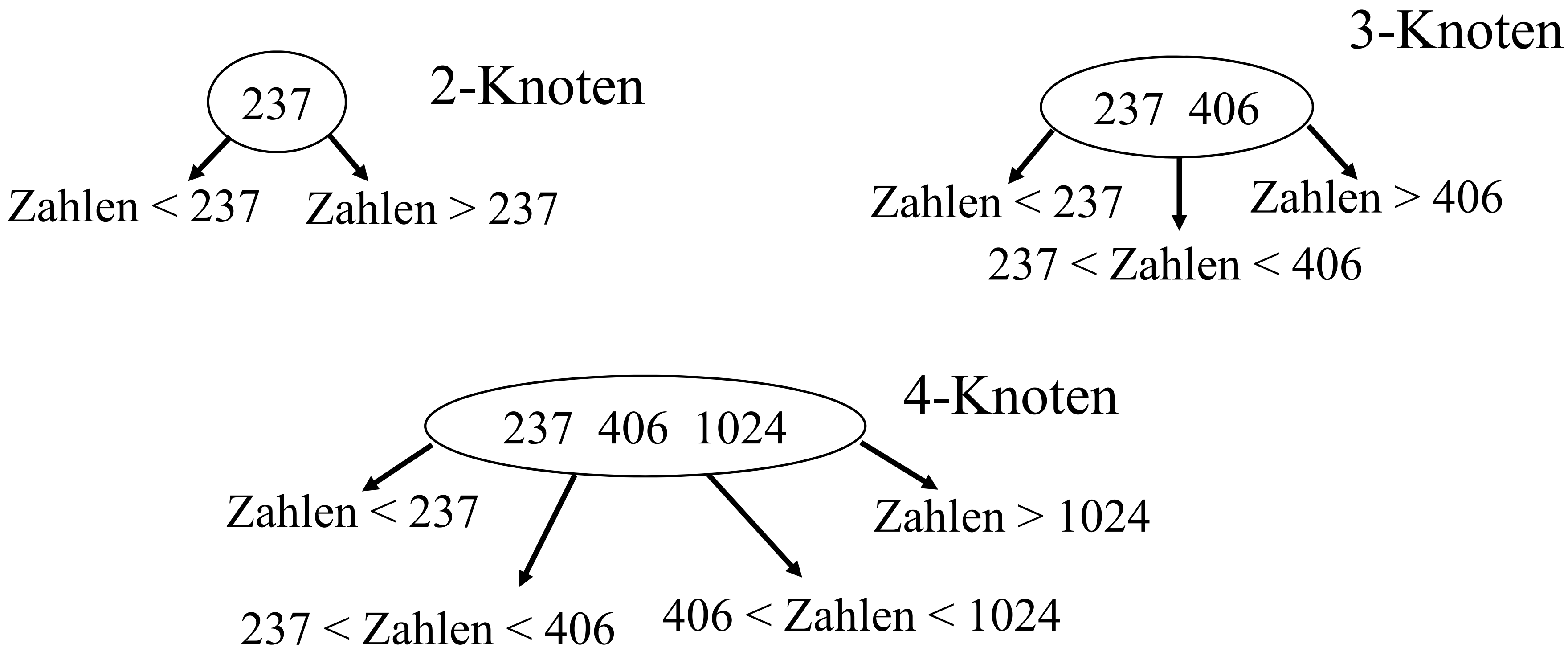
- Wie findet man zu einem Punkt in der Ebene (bzw. 3-D Raum) aus einer Menge von anderen Punkten denjenigen, der am dichtesten dranliegt?

- Idee: binäre Suche in den einzelnen Dimensionen und lokale Suche



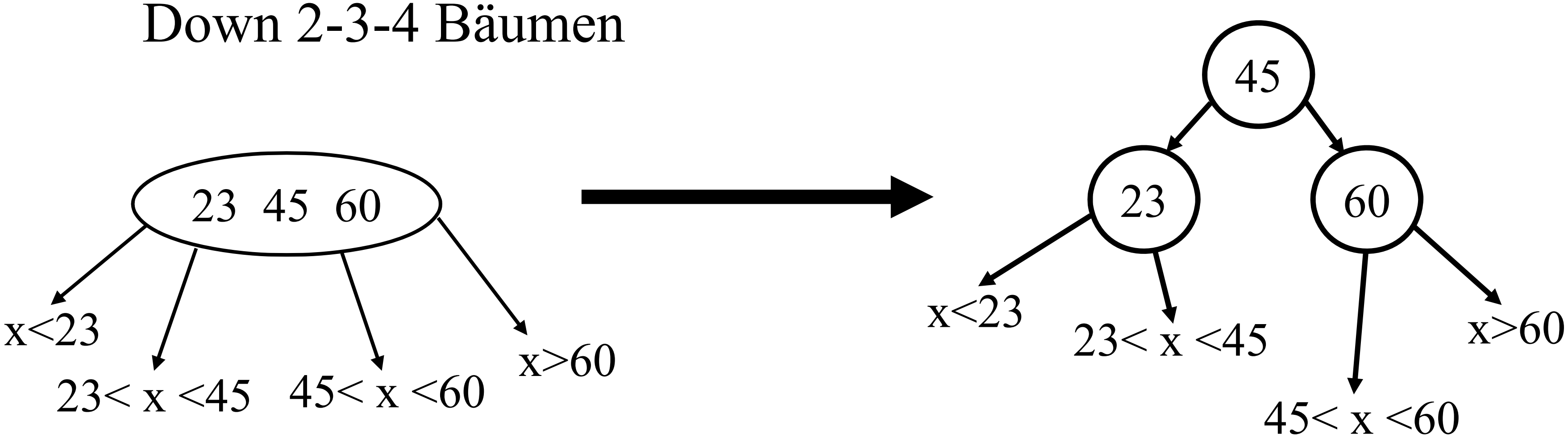
Top-Down 2-3-4 Bäume

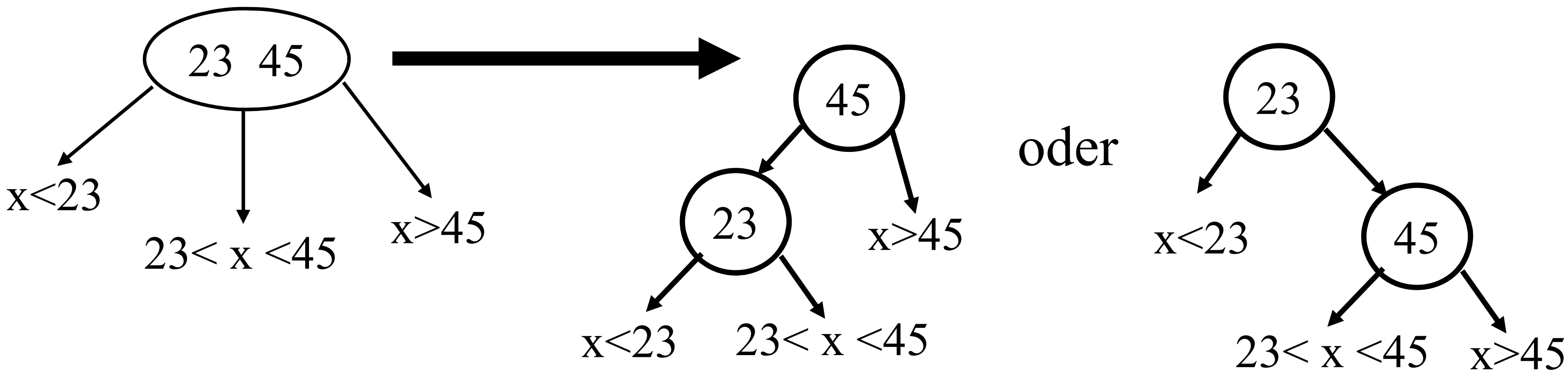
- Suchen im Top-Down 2-3-4 Bäumen
- sind immer ausgeglichen
- Laufzeitkomplexität ist immer O(log n) (Suchen & Einfügen)
- theoretische Überlegung: Vorbereitung zu Rot-Schwarz Bäumen



Rot-Schwarz Bäume

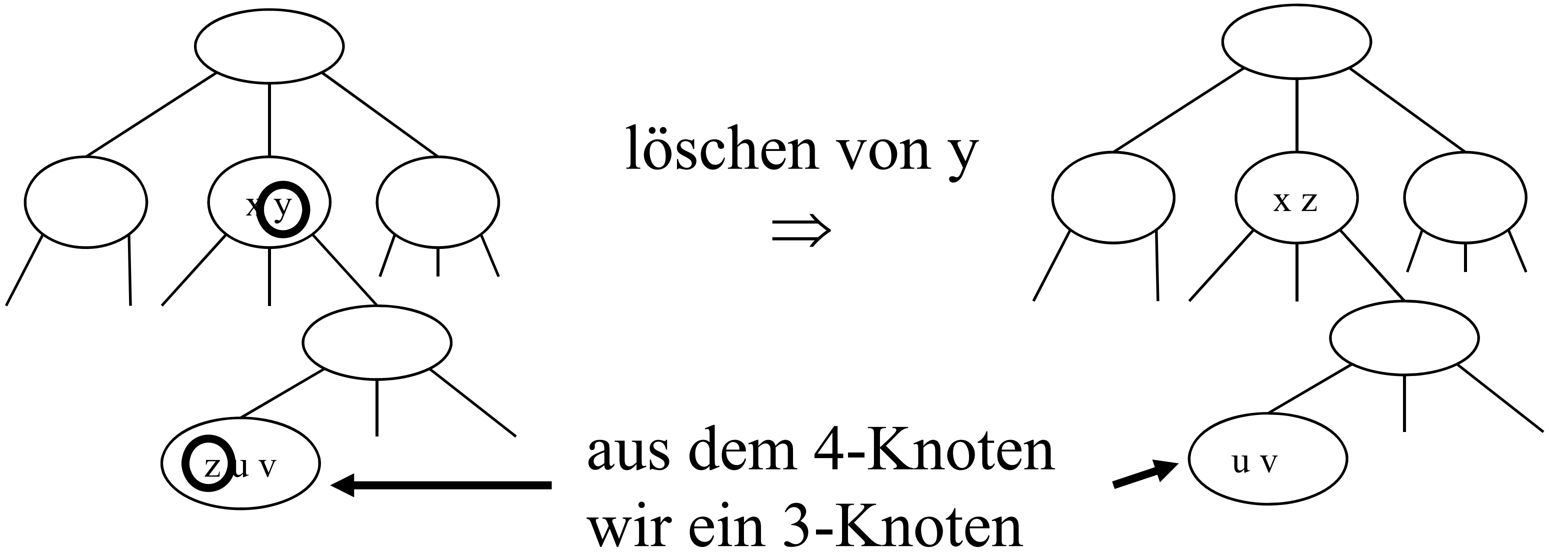
- Rot-Schwarz Bäume als binäre Implementierung von Top-Down 2-3-4 Bäumen





Top-Down 2-3-4 Bäume und Rot-Schwarz Bäume
!!!! Löschen !!!!

- Das Löschen in Top-Down 2-3-4 Bäumen und Rot-Schwarz Bäumen ist deutlich komplexer als das Einfügen



⇒ 26 (!!!) Fälle auf Ebene der Top-Down 2-3-4 Bäume

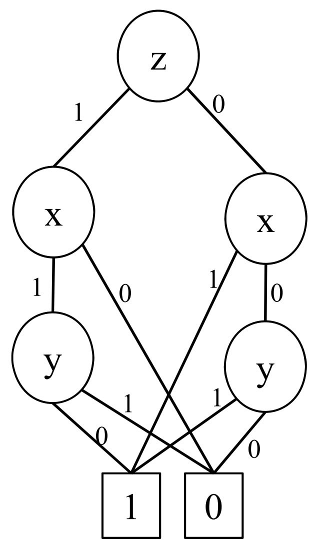
⇒ 46 (!!!) Fälle auf Ebene der Rot-Schwarz Bäume (sehr viele symmetrische Fälle)

Patrica-Trees

- Digitales Suchen
- Basisstruktur ist ein binärer Baum
- in den innern Knoten wird nicht nach dem gesamten Schlüssel sondern nach den einzelnen Bits des Schlüssels verzweigt
- Tiefe des Baums ist nicht durch die Anzahl der Schlüssel, sondern durch die Größe der Schlüssel (Anzahl der Bits) bestimmt
- einfache Implementierung
- Patrica-Trees: Optimierung von Digitalen Suchbäumen, um nur einen Schlüsselvergleich am Ende einer Suche durchzuführen
- deutlich komplexere Implementierung
- sehr effizient für endlich große Schlüssel (Strings???)

RoBDDs

- Baumstruktur zur Darstellung von sehr großen (seeeeeehr groooooßen) booleschen Funktionen
- unter Einhaltung von bestimmten Regeln (beliebige aber feste Ordnung der zu testenden Variablen, Variablen werden niemals mehrfach getestet) ist die Darstellung kanonisch
- …

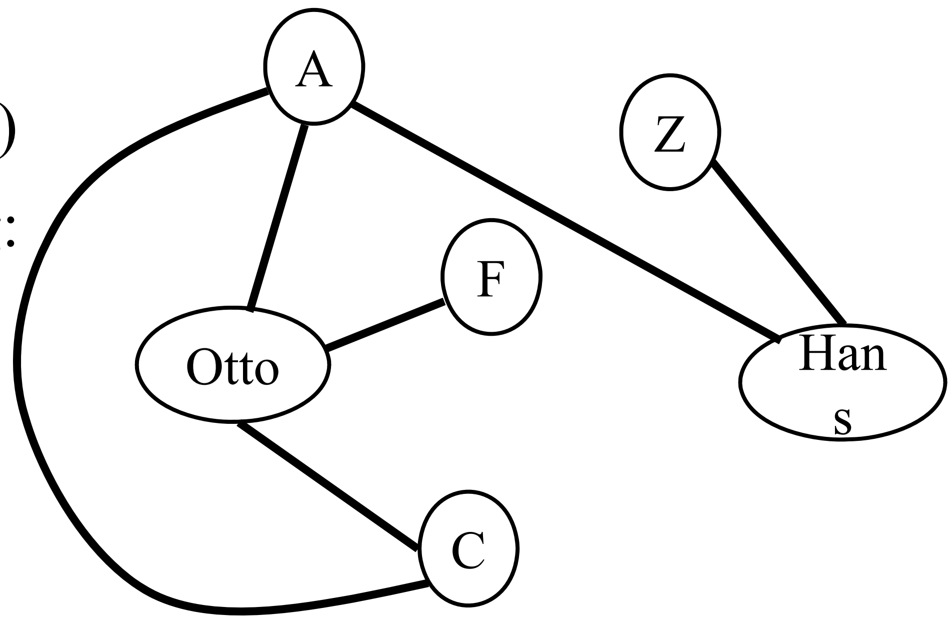


RoBDDs (Forts.)

- …
- d.h. zu jeder booleschen Funktion gibt es genau eine Darstellung (bzgl. der Variablenordnung)
- daraus folgt, dass das SAT-Problem in konstanter Zeit entschieden werden kann
- da das SAT-Problem aber NP-vollständig ist, sind die meisten RoBBD Darstellungen exponentiell groß
- funktioniert aber dennoch sehr gut für viele praktische Anwendung
- eine der wichtigsten Datenstrukturen im Schaltungsentwurf

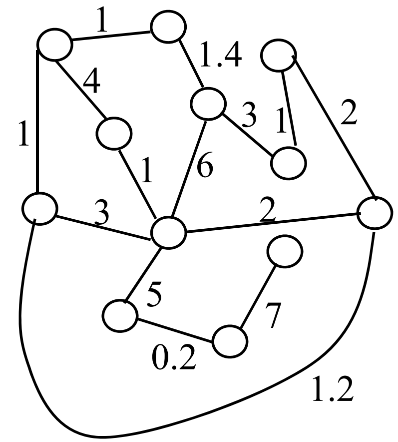
Graphen

- Einheiten (Knoten) werden miteinander assoziiert (Kanten)
- verschiedene Implementierung:
  - Adjazenzmatrix: gut für dichte Graphen
  - Adjazenzlisten: gut für lichte Graphen
- Algorithmen:
  - Tiefensuche: last-in-first-out Liste
  - Breitensuche: first-in-first-out Liste



Minimaler Spannbaum

- ein minimaler Spannbaum ist eine Teilmenge der Kanten, so dass
  1. alle Knoten miteinander verbunden sind
  2. die Summe der Kantengewichte wenigstens so klein ist, wie jeder andere Spannbaum
- Implementierung:
  - Tiefen-/Breitensuche mit
    - Prioritätenliste
    - Prioritätenheap (schön & schwer)



Modifikation von minimaler Spannbaum: Implementierung

- der Algorithmus zur Berechnung des minimalen Spannbaums kann leicht modifiziert werden, um
  - zu einem gegebenen Knoten k
  - und einer gegebenen Zahl m
  - die m dichtesten Knoten von k

  auszugeben

Datenkomprimierung

- einfaches Verfahren: Lauflängenkodierung
  - mehrfaches hintereinander Vorkommen von Daten wird ausgenutzt
  - funktioniert für Texte i.d.R. schlecht
- komplexes Verfahren: variable Lauflängenkodierung (Huffman Codierung)
  - der Text wird untersucht nach Häufigkeiten der Buchstaben
  - häufige Buchstaben erhalten eine kurze, seltene Buchstaben eine lange Kodierung
  - Kodierung muss präfixeindeutig sein
  - elementare Datenstruktur: Trie