

EKSPERTER I TEAM
MATEMATIKK INNEN ANVENDELSER

Oppvarming av hytte

Gruppe 4

Tobias Meyer Andersen
Robin Fissum
Hannah Hansen
Anne Louise Kristoffersen
Endre Sørbø Pedersen
Lavran Thorstensen

Mai, 2022

Sammendrag

Denne rapporten undersøker hvordan man kan bruke en eksplisitt differansemetode for å modellere varme i en hytte. Målet er å finne den oppvarmingsstrategien der hytten oppnår en behagelig innetemperatur ved lavest mulig strømforbruk. Resultatene fra simuleringene viser at en ovn med termostat som kjenner den ideelle temperaturen fram i tid vil minimere avviket fra idealtemperaturen bedre enn en som kun har termostat. Nattsenking ved å skru av ovnen viste seg å ikke være et akseptabelt alternativ. Det har vist seg at det ikke er tilstrekkelig å inkludere kun diffusjon i modellen, men at det i tillegg er nødvendig å modellere adveksjon for å få en realistisk modell.

Innhold

1	Innledning	1
1.1	Bakgrunn	1
1.2	Problemstilling	1
2	Nomenklatur	2
3	Teori	3
3.1	Rommets geometri	3
3.2	Utleddning av varmeligningen	4
3.3	Varmekilden	6
3.4	Randbetingelser	6
3.5	Formulering av problemstilling	6
3.6	Den endelige differansmetoden	8
3.7	Spøkelsespunkter	10
3.8	Velstilthet og stabilitet	11
4	Implementasjon	12
4.1	Fysiske konstanter	13
4.2	Utetemperatur og ideelltemperatur	14
5	Verifisering av koden	15
5.1	To motsatte vegger med konstant temperatur	15
5.2	Konstant utetemperatur og ovner skrudd av	17
5.3	Test av energitilførsel	18
5.4	Test mot tidsavhengig løsning uten varmekilde	20
5.5	Konvergensplott	21
6	Resultater	23
6.1	Overoppheting av varmekilden	23
6.2	Uniform varmekilde	24
6.3	Strategi 1: Ovner med termostat	26
6.4	Strategi 2: Ovner som ser 15 minutter fram i tid	28
6.5	Strategi 3: Skru ovnene av om natten	29
7	Diskusjon	30
7.1	Diffusjon er ikke tilstrekkelig	30
7.2	Ovnstrategier	30
8	Konklusjon	31
9	Videre arbeid	32
10	Vedlegg	33
A	Stabil-tilstandsløsning for Dirichletproblemet i et rektangulært prisme	33
B	Tidsavhengig løsning med Robin-randbetingelse	35
C	Spesifikke parametre	39
D	Bredden av diffusjonen	39

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

I 2021 ble det satt flere strømprisrekorder i Norge, med strømpriser over 8 kroner per kilowatttime [1]. Grunnen til disse høye strømprisene er at Norges energi i hovedsak er fornybar, og dermed væravhengig. I år har det vært lite vann i vannmagasinene i Sør-Norge, noe som har gjort strømmen dyrere. I tillegg har det vært en høy økning i strømprisene i Europa. Dette skyldes at flere land har gått over til fornybare energikilder, da i hovedsak vindkraft. Lite vind, samt høye CO₂-kvoter, har da medført høyere priser over hele kontinentet [2].

Altså kommer de høye strømprisene av at vi bruker fornybar energi. Dette er nok noe det vil bli mer av fremover, og derfor er det på ingen måte umulig at strømmen kan bli dyrere også de kommende årene.

I norske husholdninger blir 80% av energiforbruket dekket av elektrisitet [3], og rundt 60% av det totale energiforbruket går til oppvarming av rom [4]. Her kan det altså være potensiale for å redusere strømforbruket gjennom mer effektiv oppvarming, noe som også gir gode miljømessige gevinster [5].

1.2 Problemstilling

Ettersom strømprisene har skutt i været, har vi valgt å se på følgende problemstilling:

Hvordan bør man varme opp en hytte ved hjelp av en elektrisk ovn, slik at man bruker så lite strøm som mulig og samtidig oppnår en behagelig innnetemperatur?

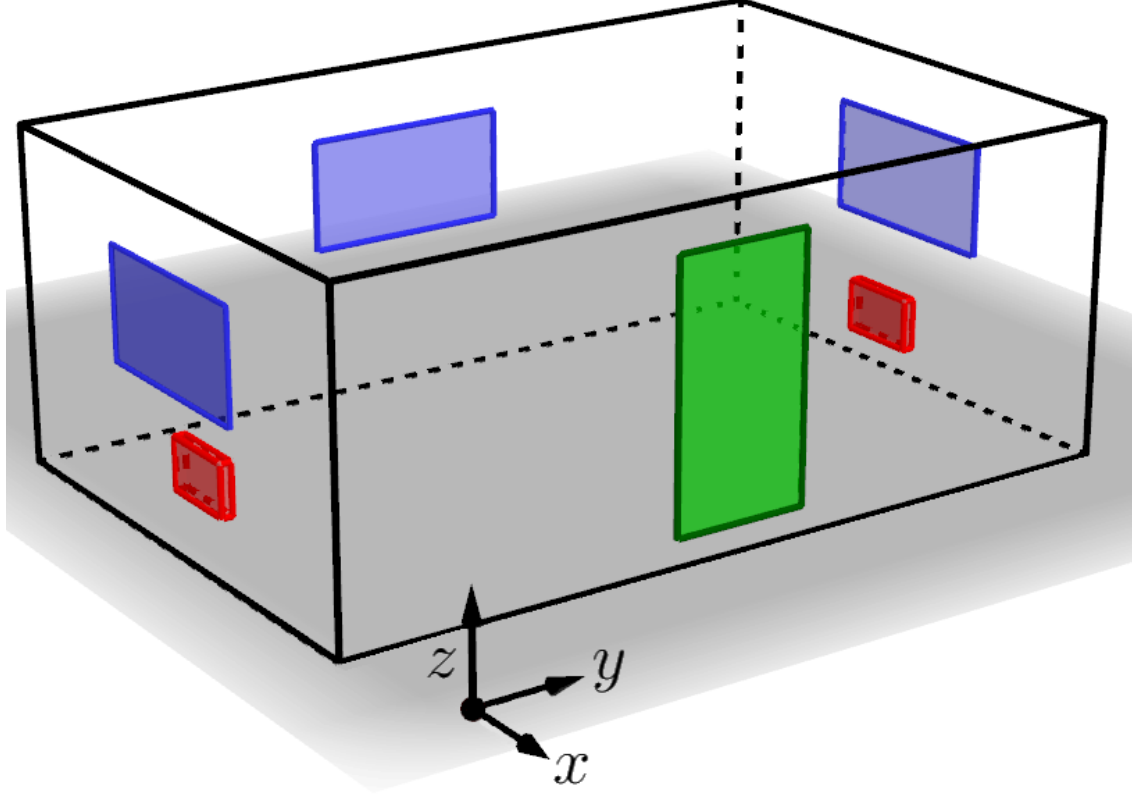
En matematisk modell er nødvendig for å undersøke hvordan varmen brer seg i tid og rom. Joseph Fourier formulerte varmeligningen allerede i 1807. Over 200 år etter er denne ligningen ikke bare utgangspunktet for analyse av varmeoverføring, men også grunnleggende i analyse av fysiske, biologiske og sosiale systemer [6]. Løsningen av varmeligningen kan tilnærmes ved bruk av numeriske metoder. I tre dimensjoner er dette nesten ugjennomførbart med penn og papir, så det er nødvendig å ta i bruk datamaskiner og algoritmer. Vi har valgt å se på dette problemet ved hjelp av den såkalte endelige differansmetoden. Problemet kan derfor plasseres under "Computational Science and Engineering" (CSE). CSE kombinerer matematikk og databeregninger for å løse problemer i konkrete anvendelser.

2 Nomenklatur

Symbol	Definisjon	Enhet
Q	Varme	J
A	Areal	m ²
$p_{i,j,k}$	Punkt (i, j, k) i gitteret	-
T	Temperatur	K
$T_{i,j,k}^m$	Temperaturen i punkt (i, j, k) i gitteret	K
\mathbf{q}	Varmefluks	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
\mathbf{q}_{diff}	Varmefluks pga. diffusjon	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
\mathbf{q}_{adv}	Varmefluks pga. adveksjon	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
α	Termisk diffusivitet	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
U	U-verdi/varmegjennomgangskoeffisient	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
K	Varmeoverføringskonstant	m ⁻¹
Δt	Tidssteg	s
h	Romlig steglengde	m
κ	Termisk konduktivitet	$\frac{\text{W}}{\text{m K}}$
c_p	Spesifikk varmekapasitet	$\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$
ρ	Massetetthet	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\vec{n}_{\mathbf{x}}$	Enhetsnormal	—
H	Punktvarmekilde	$\frac{\text{W}}{\text{m}^3}$
w	Samlet ovneffekt	W
Vol(Γ)	Totalt ovnvolum	m ³
Φ_1	Avvik fra idealtemperatur	Ubehag
Φ_2	Ovnkostnad	NOK
δ	Skaleringsfaktor	s ⁻¹ · K ⁻¹ · m ⁻³
λ	Ovnsensitivitet	—
β	Strømpris	$\frac{\text{NOK}}{\text{J}}$

3 Teori

3.1 Rommets geometri



Figur 1: Rommet markert med vinduer [blått] , ovner [rødt] og dør [grønt]. Rommets dimensjoner er $4\text{m} \times 6\text{m} \times 2.4\text{m}$.

I dette prosjektet betegner \mathcal{R} en hytte, eller et rom i en hytte, og vi modellerer derfor \mathcal{R} som et rektangulært prisme $[0, L] \times [0, W] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$. I den forbindelse definerer vi delmengdene

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{0\} \times \left[\frac{W}{2} - \frac{b_{\mathcal{V}}}{2}, \frac{W}{2} + \frac{b_{\mathcal{V}}}{2}\right] \times \left[b - \frac{h_{\mathcal{V}}}{2}, b + \frac{h_{\mathcal{V}}}{2}\right] \\ &\quad \cup \left[\frac{L}{2} - \frac{b_{\mathcal{V}}}{2}, \frac{L}{2} + \frac{b_{\mathcal{V}}}{2}\right] \times \{0, W\} \times \left[b - \frac{h_{\mathcal{V}}}{2}, b + \frac{h_{\mathcal{V}}}{2}\right] \\ \mathcal{D} &= \{L\} \times \left[\frac{W}{2} - \frac{b_{\mathcal{D}}}{2}, \frac{W}{2} + \frac{b_{\mathcal{D}}}{2}\right] \times [\varepsilon_{\mathcal{D}}, \varepsilon_{\mathcal{D}} + h_{\Gamma}] \\ \Gamma &= \left[\frac{L}{2} - \frac{\ell_{\Gamma}}{2}, \frac{L}{2} + \frac{\ell_{\Gamma}}{2}\right] \times ([c, d] \cup [e, f]) \times [\varepsilon_{\Gamma}, \varepsilon_{\Gamma} + h_{\Gamma}],\end{aligned}$$

av \mathcal{R} , altså henholdsvis 3 vinduer, en dør, og to 3-dimensjonale varmeovner, se Figur 1. Panelovnene, plassert på midten under to av vinduene i rommet, har begge dimensjonene

$$600\text{mm} \times 78\text{mm} \times 370\text{mm} = 0.01732\text{m}^3.$$

Ettersom det brukes to varmeovner, vil det totale volumet være

$$\text{Vol}(\Gamma) = 2 \cdot 0.01732\text{m}^3 = 0.03464\text{m}^3.$$

3.2 Utledning av varmeligningen

Vi skal nå se på den underliggende matematikken som danner grunnlaget for prosjektet vårt. I det følgende vil $T(\mathbf{x}, t) = T(x, y, z, t)$ betegne temperaturen i kelvin i punktet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ved tidspunktet $t \in \mathbb{R}$. Utledningen under er tilpasset fra [7, 8, 9, 10, 11, 12].

Anta at rommet \mathbb{R}^3 er fylt av et homogent og isotropt materiale \mathcal{M} . Førstnevnte betyr at materialet har de samme punktvisse egenskapene i hele rommet, slik at vi kan regne materialets massetetthet ρ og varmekapasitet c_p som konstante. Sistnevnte garanterer at materialet har de samme egenskapene i alle retninger gjennom materialet. Dermed kan vi regne materialets termiske konduktivitet κ som konstant. I realiteten vil alle disse parameterne avhenge noe av posisjonen \mathbf{x} og temperaturen T , men vi velger å se bort fra dette for enkelhets skyld.

La nå Ω være et kontrollvolum i rommet, dvs. en kompakt og enkeltsammenhengende delmengde av \mathbb{R}^3 med en kontinuerlig og stykkevis deriverbar rand $\partial\Omega$. Vi ser på Ω som et åpen system over et lite tidsintervall $[t, t + \Delta t]$. Over dette tidsintervallet har vi i følge termodynamikkens første lov at

$$\begin{array}{l} \text{Endring i indre} \\ \text{energi i } \Omega \text{ per tid} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Varme gjennom} \\ \text{randen } \partial\Omega \text{ per tid} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Varme generert} \\ \text{i } \Omega \text{ per tid} \end{array}.$$

Når Δt er liten, er raten av energiendring i Ω omtrent lik

$$\iiint_{\Omega} c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV.$$

La videre $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ betegne varmekraften (varmeflyt per areal per tidsenhet). For enhver $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ hvor $\partial\Omega$ er deriverbar, kan vi definere enhetsnormalen $\vec{n}_{\mathbf{x}}$, som står vinkelrett på $\partial\Omega$ i punktet \mathbf{x} og peker ut av Ω . Da vil varmekraften ut av Ω i retningen av enhetsnormalen være gitt ved $(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}}) \vec{n}_{\mathbf{x}}$. Dermed er raten av varmeflyt ut av Ω gjennom randen lik flateintegralet

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} dS.$$

Vi kan også anta at det i Ω befinner seg en varmekilde, slik som panelovnene nevnt i introduksjonen. Dersom $H(\mathbf{x}, t)$ betegner den momentane energitilførselen (med enhet watt/m³) i punktet \mathbf{x} ved tidspunktet t , så vil raten av varmeenergi generert i Ω over tidsintervallet $[t, t + \Delta t]$ være omtrent lik

$$\iiint_{\Omega} H(\mathbf{x}, t) dV.$$

Setter vi nå dette inn i energibevaringsligningen, så står vi igjen med

$$\iiint_{\Omega} c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV = - \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} dS + \iiint_{\Omega} H(\mathbf{x}, t) dV. \quad (1)$$

Generelt sett kan vi dekomponere varmekraften som

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{diff}} + \mathbf{q}_{\text{adv}},$$

der \mathbf{q}_{diff} er fluks som skyldes diffusjon, og \mathbf{q}_{adv} er fluks som skyldes adveksjon. Siden vi antar at \mathcal{M} er isotropt, er diffusjonsfluksen i følge Fouriers lov gitt ved¹

$$\mathbf{q}_{\text{diff}}(\mathbf{x}, t) = -\kappa \nabla T(\mathbf{x}, t),$$

hvor $\nabla T(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$ er temperaturgradienten i de romlige koordinatene. Videre kan det argumenteres for at adveksjonsfluksen er gitt ved

$$\mathbf{q}_{\text{adv}}(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) \mathbf{v},$$

der \mathbf{v} er materialets hastighetsvektor. Fra divergensteoremet har vi at

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} \, dS &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \, dV \\ &= - \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa \nabla T(\mathbf{x}, t)) \, dV + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (T(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) \, dV, \end{aligned}$$

hvor $\nabla \cdot$ betegner den romlige divergensen. Dersom vi substituerer dette tilbake i (1) og samler leddene, har vi

$$\iiint_{\Omega} c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (T \mathbf{v}) - H(\mathbf{x}, t) \, dV = 0, \quad (2)$$

hvor ∇^2 er Laplaceoperatoren. Nå er det slik at (2) holder for alle slike mengder $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, noe som kun er mulig dersom integranden er identisk lik null². Dersom vi definerer den termiske diffusiviteten som $\alpha = \frac{\kappa}{c_p \rho}$, får vi at

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \alpha \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_p \rho} \nabla \cdot (T \mathbf{v}) + \frac{1}{c_p \rho} H(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

for alle $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Ligning (3) kalles den tidsavhengige adveksjonsligningen, eller konveksjon-diffusjonsligningen. I dette prosjektet har vi for enkelhets skyld valgt å se bort fra adveksjonsleddet, og står dermed igjen med den tidsavhengige varmeligningen

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \alpha \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c_p \rho} H(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

I dette prosjektet vil materialet \mathcal{M} være luft, som oppfyller isotropiantagelsen fordi det er en gass [13]. Homogenitetantagelsen kan antas tilfredsstilt dersom temperaturendringene er moderate.

¹Dersom \mathcal{M} ikke er isotropt kan det hende at diffusjonsfluksen ikke er parallell med temperaturgradienten. I det tilfellet må κ byttes med en reell 3×3 -matrise.

²Her antar vi at integranden er kontinuerlig.

3.3 Varmekilden

Velg nå kontrollvolumet Ω slik at $\Gamma \subseteq \Omega \subset \mathcal{R}$, og la $w : [0, t_*) \rightarrow [0, +\infty)$ angi ovnenes samlede effekt ved tidspunktet t , målt i watt. Dersom vi antar at disse er de eneste varmekildene i Ω , så kan vi skrive $H(\mathbf{x}, t) = 1_\Gamma(\mathbf{x})\tilde{H}(\mathbf{x}, t)$, hvor 1_Γ er indikatorfunksjonen til Γ . Antar vi videre at varmen som ovnene utstråler fordeles likt over Γ , så kan vi bytte ut dette med $H(\mathbf{x}, t) = 1_\Gamma(\mathbf{x})\bar{H}(t)$. Per definisjon er w og H relatert ved

$$w(t) = \iiint_{\Omega} H(\mathbf{x}, t) dV = \bar{H}(t) \iiint_{\Omega} 1_\Gamma(\mathbf{x}) dV = \bar{H}(t) \text{Vol}(\Gamma),$$

der $\text{Vol}(\Gamma)$ er volumet til Γ . Dermed får vi at

$$H(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} 1_\Gamma(\mathbf{x}) w(t),$$

som gir den tilpassede varmeligningen

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \alpha \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c_p \rho \text{Vol}(\Gamma)} 1_\Gamma(\mathbf{x}) w(t). \quad (5)$$

3.4 Randbetingelser

La $T_{\text{ute}}(t)$ være temperaturen på utsiden av \mathcal{R} ved tidspunktet t (diskuteres i Seksjon 4.2). Vi antar at vi kjenner denne temperaturen på forhånd, noe som er en gyldig antagelse dersom man har lest værmeldingen.

Varmetapet gjennom veggen er proporsjonalt med temperaturforskjellen mellom innsiden og utsiden av veggen. Hvis U er veggens varmegjennomgangskoeffisient, A er et areal på veggen, og T_{inne} er temperaturen på innsiden av veggen, kan endring i varme ΔQ i løpet av et tidssteg Δt , beskrives ved

$$\Delta Q = U A (T_{\text{ute}} - T_{\text{inne}}) \Delta t. \quad (6)$$

For ulike materialer (vegg, vindu, osv.) vil U være forskjellig. Slik kan det tas hensyn til at det slippes ut ulik mengde varme gjennom forskjellige deler av veggen. Ved å se på hvor mye varme som forsvinner gjennom vegger, vindu, osv., kan vi se på hvor stor temperaturendring dette medfører i et kubisk volumelement med sidelengde h i rommet, direkte innenfor veggen;

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{\rho c_p h^3}, \quad (7)$$

hvor ρ er massetettheten og c_p er varmekapasiteten.

3.5 Formulering av problemstilling

Vi ønsker å formulere (6) som en randbetingelse på temperaturen. Spesifikt ønsker vi en Robin-randbetingelse på formen

$$\nabla T \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} = -K(\mathbf{x})(T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ute}}(t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{R}, \quad (8)$$

hvor vi for $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{R}$ har at,

$$\nabla T \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} \in \left\{ \pm \frac{\partial T}{\partial x}, \pm \frac{\partial T}{\partial y}, \pm \frac{\partial T}{\partial z} \right\}$$

er den normalderiverte av temperaturen T . $K(\mathbf{x}) > 0$ er en varmeoverføringskonstant med enhet m^{-1} , som tar ulike verdier på forskjellige steder langs randen. Vi kan uttrykke denne via varmegjennomgangskoeffisienten U nevnt i seksjon 3.4 på følgende måte: Ettersom $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\kappa \nabla T(\mathbf{x}, t)$, kan randbetingelsen (8) skrives som

$$\mathbf{q} \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} = \kappa K(\mathbf{x})(T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ute}}(t)).$$

Denne ligningen er en momentan og punktvis versjon av (6), og det er klart at vi må ha $\kappa K(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Ergo er

$$K(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})/\kappa.$$

Vi kan nå formulere problemstillingen vår som et optimal kontroll-problem, inspirert av [14]. La $T_{\text{ideell}}(t)$ være den ideelle (eller ønskede) temperaturen inne i rommet \mathcal{R} ved tidspunktet t (diskuteres i seksjon 4.2). Vi kan få et mål på hvor mye temperaturen i rommet avviker fra den ideelle temperaturen ved å se på det dimensjonsløse tallet

$$\Phi_1 = \delta \int_{\mathcal{R} \times I} |T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ideell}}(t)| d(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

der $\delta > 0$ er en passende valgt skaleringsfaktor med enhet $\text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ (dette diskuteres grundigere i seksjon 6). Videre vil kostnaden av å ha ovnene gående gjennom tidsintervallet være lik

$$\Phi_2 = \beta \int_I w(t) dt,$$

der β er strømprisen, som antas konstant. Her er $T = T(\mathbf{x}, t)$ løsningen på systemet

$$\begin{aligned} T_t &= \alpha \nabla^2 T + \frac{1}{c_p \rho \text{Vol}(\Gamma)} 1_{\Gamma}(\mathbf{x}) w(t) & \mathbf{x} \in \mathcal{R}, t \in I \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\nabla T \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} = -\frac{1}{\kappa} U(\mathbf{x})(T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ute}}(t)) \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{R}, t \in I. \quad (11)$$

I en realistisk situasjon vil man gjerne både ha en behagelig romtemperatur og en moderat strømutgift. Det er klart at desto mindre de to ikke-negative størrelsene Φ_1 og Φ_2 er, desto nærmere er man i å oppnå disse to målene. Vi spør derfor

Hvordan bør vi velge $w = w(t)$, slik at Φ_1 og Φ_2 blir så små som mulig?

I [14] angriper forfatterne dette problemet ved å minimere $\Phi_1 + \Phi_2$ direkte. Vi har valgt å holde de to størrelsene separat, slik at vi kan tolke de numeriske resultatene bedre.

For å gå mer i detalj, kan det nevnes at vi måler tiden t i sekunder, og at tidsintervallet settes lik

$$I = [0, 24 \cdot 60 \cdot 60] = [0, 86\,400].$$

Dette tilsvarer ett døgn. Vi antar at $t = 0$ klokken 00:00 og at $t = 86\,400$ klokken 24:00 ett døgn senere. For å begrense omfanget av problemet, legger vi også på betingelsen om at ovnene ikke gir en effekt høyere enn 2500 watt. Dette gir oss at

$$w(t) \in [0, 2500]$$

for alle $t \in I$. Videre antar vi at w kun kan ta heltallsverdier.

3.6 Den endelige differansmetoden

Den endelige differansmetoden, FDM³, er en numerisk metode for å løse differensialligninger ved hjelp av diskrete approksimasjoner av deriverte. Den tar utgangspunkt i at Newtonkoeffisienten

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \quad (12)$$

konvergerer mot $f'(x)$ når $\varepsilon \rightarrow 0$, forutsatt at f er deriverbar i punktet x . I det tilfellet kan man bruke (12) som en approksimasjon til $f'(x)$, forutsatt at $\varepsilon \neq 0$ er liten i absoluttverdi.

Dette vil altså si at vi kan, om vi bruker små tidssteg, løse differensialligninger fordi vi får en tilnærming av den deriverte. Gjennom ligningen kjenner vi hvordan den deriverte henger sammen med løsninger vi er ute etter. Vi kan da regne ut f.eks varmen i et rom, tidssteg for tidssteg, fram til det tidspunktet vi er interessert i. Ettersom det er en numerisk metode, må vi i det tilfellet også diskretisere selve rommet. Den enkleste måten å da løse ligningen vil være å si at hvert punkt ved hver tid avhenger av verdien på noen punkter ved forrige tidssteg.

For å kunne anvende FDM, er vi nødt til å diskretisere \mathcal{R} i punkter. Vi kan forenkle modelleringen ved å anta at vi kan bruke samme steglengde $h > 0$ i x, y og z -retningene⁴, slik at

$$N_x := \frac{L}{h} + 1, \quad N_y := \frac{W}{h} + 1 \quad \text{og} \quad N_z := \frac{H}{h} + 1$$

er heltall. Vi kan nå definere et gitter \mathcal{G} bestående av nodene

$$p_{i,j,k} = (ih, jh, kh)$$

for heltallene⁵

$$0 \leq i \leq N_x - 1, \quad 0 \leq j \leq N_y - 1, \quad 0 \leq k \leq N_z - 1.$$

På samme måte diskretiserer vi tidsintervallet $I = [0, 86\,400]$ ved $t_m = m\Delta t$, der $\Delta t = 1$ s er steglengden i tidsretningen, og m løper fra 0 til 86 400.

Nå viser vi hvordan vi kan approksimere (5) numerisk. La $T_{i,j,k}^m$ betegne vår numeriske approksimasjon for $T(p_{i,j,k}, t_m)$, der vi har satt $T(p_{i,j,k}, t_0) = T_{\text{ideell}}(0)$ for alle i, j og k . Fra definisjonen av den deriverte har vi

$$\frac{\partial T}{\partial t}(p_{i,j,k}, t_m) = \frac{T(p_{i,j,k}, t_{m+1}) - T(p_{i,j,k}, t_m)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

når Δt er liten. Dermed får vi approksimasjonen

$$\frac{\partial T}{\partial t}(p_{i,j,k}, t_m) \doteq \frac{T_{i,j,k}^{m+1} - T_{i,j,k}^m}{\Delta t}. \quad (13)$$

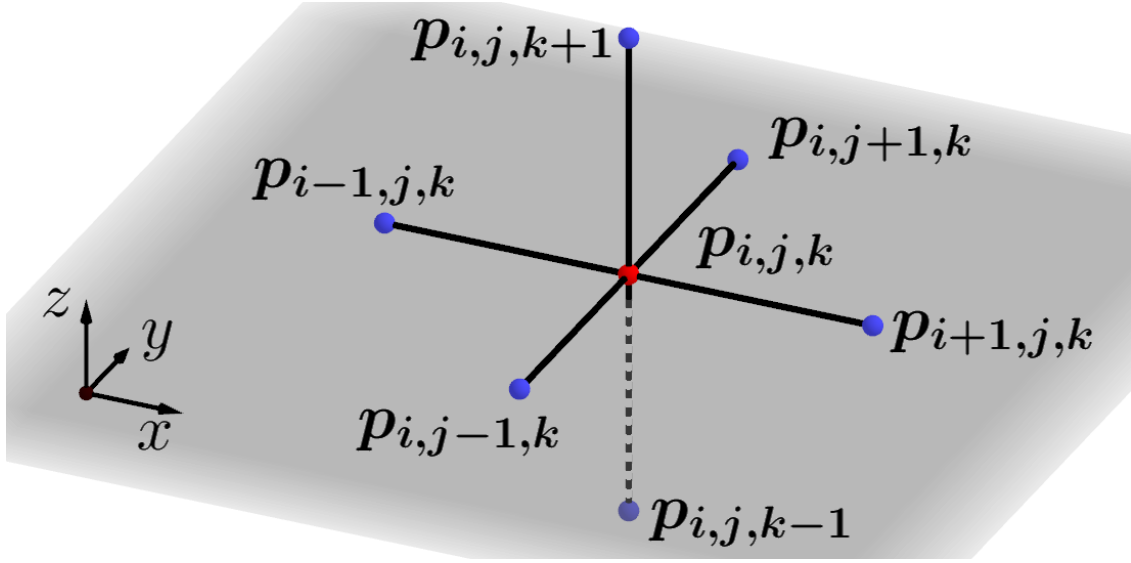
Dersom vi nå Taylorutvikler T i x -retningen i punktene $(p_{i\pm 1,j,k}, t_m)$, får vi

$$\begin{aligned} T(p_{i+1,j,k}, t_m) &= T(p_{i,j,k}, t_m) + h \frac{\partial T}{\partial x}(p_{i,j,k}, t_m) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(p_{i,j,k}, t_m) + O(h^3) \\ T(p_{i-1,j,k}, t_m) &= T(p_{i,j,k}, t_m) - h \frac{\partial T}{\partial x}(p_{i,j,k}, t_m) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(p_{i,j,k}, t_m) + O(h^3). \end{aligned}$$

³Fra engelsk: Finite Difference Method.

⁴Det er ikke en stor begrensning. Det krever bare at L/W og W/H er rasjonale tall.

⁵Her har vi valgt å la indekseringen gå fra 0 til $N_x - 1$ osv., for å samsvare med indekserings-



Figur 2: En node $p_{i,j,k}$ i gitteret \mathcal{G} , avbildet sammen med nabonodene.

Tar vi nå summen av disse ligningene og bytter om på leddene, står vi igjen med

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(p_{i,j,k}, t_m) = \frac{T(p_{i+1,j,k}, t_m) - 2T(p_{i,j,k}, t_m) + T(p_{i-1,j,k}, t_m)}{h^2} + O(h^2).$$

Dette gir oss den sentrale differanseapproximasjonen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(p_{i,j,k}, t_m) \doteq \frac{T_{i+1,j,k}^m - 2T_{i,j,k}^m + T_{i-1,j,k}^m}{h^2}. \quad (14)$$

Ved å bruke samme resonnement i y og z -retningene, får vi tilsvarende

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(p_{i,j,k}, t_m) \doteq \frac{T_{i,j+1,k}^m - 2T_{i,j,k}^m + T_{i,j-1,k}^m}{h^2}, \quad \text{og} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(p_{i,j,k}, t_m) \doteq \frac{T_{i,j,k+1}^m - 2T_{i,j,k}^m + T_{i,j,k-1}^m}{h^2} \quad (16)$$

Siden T antas å tilfredsstille (5), har vi fra ligningene (13)-(16) at

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j,k}^{m+1} - T_{i,j,k}^m}{\Delta t} &\doteq \alpha \frac{T_{i+1,j,k}^m - 2T_{i,j,k}^m + T_{i-1,j,k}^m}{h^2} + \alpha \frac{T_{i,j+1,k}^m - 2T_{i,j,k}^m + T_{i,j-1,k}^m}{h^2} \\ &+ \alpha \frac{T_{i,j,k+1}^m - 2T_{i,j,k}^m + T_{i,j,k-1}^m}{h^2} + \frac{1}{c_p \rho \text{Vol}(\Gamma)} 1_{\Gamma}(p_{i,j,k}) w(t_m). \end{aligned}$$

Løser vi nå denne for den ukjente temperaturen $T_{i,j,k}^{m+1}$, får vi det eksplisitte FTCS-differanseskjemaet⁶

$$\begin{aligned} T_{i,j,k}^{m+1} &\doteq T_{i,j,k}^m + \frac{\alpha \Delta t}{h^2} \left(T_{i+1,j,k}^m + T_{i-1,j,k}^m + T_{i,j+1,k}^m + T_{i,j-1,k}^m \right. \\ &\quad \left. + T_{i,j,k+1}^m + T_{i,j,k-1}^m - 6T_{i,j,k}^m \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{c_p \rho \text{Vol}(\Gamma)} 1_{\Gamma}(p_{i,j,k}) w(t_m). \end{aligned} \quad (17)$$

konvensjonen i programmeringsspråket Python.

⁶Engelsk fork. av Forward Time, Central Space.

3.7 Spøkelsespunkter

Differanseskjemaet (17) bryter sammen på randen $\partial\mathcal{R}$ i punktene $p_{i,j,k}$ hvor $i \in \{0, N_x - 1\}$ eller $j \in \{0, N_y - 1\}$ eller $k \in \{0, N_z - 1\}$, ettersom disse punktene ikke har nabopunkter i alle retninger som temperaturer kan leses fra. Vi kan løse dette problemet ved å se på den analytiske utvidelsen av temperaturen $T(\mathbf{x}, t)$ utenfor \mathcal{R} . For å gjøre dette utvider vi gitteret \mathcal{G} ved å innføre de ekstra punktene

$$p_{-1,j,k} = (-h, jh, kh) \quad \text{og} \quad p_{N_x,j,k} = (N_x h, jh, kh)$$

for $0 \leq j \leq N_y - 1$, $0 \leq k \leq N_z - 1$,

$$p_{i,-1,k} = (ih, -h, kh) \quad \text{og} \quad p_{i,N_y,k} = (ih, N_y h, kh)$$

for $0 \leq i \leq N_x - 1$, $0 \leq k \leq N_z - 1$, og

$$p_{i,j,-1} = (ih, jh, -h) \quad \text{og} \quad p_{i,j,N_z} = (ih, jh, N_z h)$$

for $0 \leq i \leq N_x - 1$, $0 \leq j \leq N_y - 1$. Vi betegner disse nye punktene “spøkelsespunkter”, og det utvidede gitteret \mathcal{G}' .

For å kunne bruke differanseskjemaet (17) på randpunktene, må vi spesifisere temperaturen i spøkelsespunktene $\mathcal{G}' \setminus \mathcal{G}$. Vi kan finne den riktige verdien på spøkelsespunktene fra randbetingelsen (11). For eksempel sier randbetingelsen for $\mathbf{x} = p_{N_x-1,j,k}$ at

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\kappa} U(\mathbf{x})(T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ute}}(t)).$$

Ved å approksimere den deriverte på venstresiden⁷, har vi

$$\frac{T(p_{N_x,j,k}, t_m) - T(p_{N_x-2,j,k}, t_m)}{2h} \doteq -\frac{U(p_{N_x-1,j,k})}{\kappa} (T(p_{N_x-1,j,k}, t_m) - T_{\text{ute}}(t_m))$$

slik at

$$T(p_{N_x,j,k}, t_m) \doteq T(p_{N_x-2,j,k}, t_m) - \frac{2h}{\kappa} U(p_{N_x-1,j,k})(T(p_{N_x-1,j,k}, t_m) - T_{\text{ute}}(t_m)).$$

Med dette ser vi at vi må sette temperaturen i spøkelsespunktet via

$$T_{N_x,j,k}^m := T_{N_x-2,j,k}^m - \frac{2h}{\kappa} U(p_{N_x-1,j,k})(T_{N_x-1,j,k}^m - T_{\text{ute}}(t_m)).$$

Tilsvarende resonnement gir at vi må sette temperaturen i de andre spøkelsespunktene i hvert tidssteg via

$$\begin{aligned} T_{-1,j,k}^m &:= T_{1,j,k}^m - \frac{2h}{\kappa} U(p_{0,j,k})(T_{0,j,k}^m - T_{\text{ute}}(t_m)) \\ T_{i,N_y,k}^m &:= T_{i,N_y-2,k}^m - \frac{2h}{\kappa} U(p_{i,N_y-1,k})(T_{i,N_y-1,k}^m - T_{\text{ute}}(t_m)) \\ T_{i,-1,k}^m &:= T_{i,1,k}^m - \frac{2h}{\kappa} U(p_{i,0,k})(T_{i,0,k}^m - T_{\text{ute}}(t_m)) \\ T_{i,j,N_z}^m &:= T_{i,j,N_z-2}^m - \frac{2h}{\kappa} U(p_{i,j,N_z-1})(T_{i,j,N_z-1}^m - T_{\text{ute}}(t_m)) \\ T_{i,j,-1}^m &:= T_{i,j,1}^m - \frac{2h}{\kappa} U(p_{i,j,0})(T_{i,j,0}^m - T_{\text{ute}}(t_m)). \end{aligned}$$

⁷ Her bruker vi igjen en sentral differanseapproksimasjon, siden den har feilledd h^2 .

3.8 Velstilthet og stabilitet

Det første som skal nevnes er at initialverdiproblemet (11) er velstilt. Det vil si at det har en løsning T , og denne løsningen er unik, se f.eks.[10]. Videre kan det vises at problemet med å minimere $\Phi_1 + \Phi_2$ med hensyn på ovnseffekten w er velstilt, gitt visse verdi- og glatthetsbetingelser på w (se [14]). Siden w i vårt tilfelle kun kan ta en endelig mengde diskrete verdier, gjelder dette også her.

Når det gjelder stabiliteten av differanseskjemaet, finner man ved hjelp av Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)-betingelsen at FTCS-metoden i tre dimensjoner er stabil dersom

$$\alpha\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] < \frac{1}{2},$$

hvis man bruker steglengdene Δx , Δy og Δz i henholdsvis x , y og z -retningene. I vårt tilfelle tar kriteriet formen $\frac{\alpha\Delta t}{h^2} < \frac{1}{6}$. Dette kan man også se fra (17). For et punkt som ikke ligger på varmekilden, kan skjemaet skrives

$$T_{i,j,k}^{m+1} \doteq (1 - 6\frac{\alpha\Delta t}{h^2})T_{i,j,k}^m + \frac{\alpha\Delta t}{h^2} \left(T_{i+1,j,k}^m + T_{i-1,j,k}^m + T_{i,j+1,k}^m + T_{i,j-1,k}^m + T_{i,j,k+1}^m + T_{i,j,k-1}^m \right). \quad (18)$$

Hvis man for eksempel har

$$T_{i+1,j,k}^m = T_{i-1,j,k}^m = T_{i,j+1,k}^m = T_{i,j-1,k}^m = T_{i,j,k+1}^m = T_{i,j,k-1}^m = 300\text{K},$$

men $T_{i,j,k}^m = 0\text{K}$ og $\frac{\alpha\Delta t}{h^2} > \frac{1}{6}$, så sier (18) at temperaturen $T_{i,j,k}^{m+1}$ ved neste tidssteg blir høyere enn 300K, noe som er absurd i lys av at temperatur jevnes ut over tid. Altså er det noe feil med modellen i dette tilfellet.

Til slutt skal det nevnes at differanseskjemaet (17) er energibevarende over det området i rommet som ikke ligger direkte i nærheten av varmekilden eller veggene i rommet, forutsatt at massetettheten, diffusiviteten og konduktiviteten er konstant. Det vil si, summen $\sum_{i,j,k} T_{i,j,k}^m$ over dette området er bevart, om man ser bort fra randen.

4 Implementasjon

De numeriske metodene, implementert i Python 3.9, anvender objektorientering til å lage en klasse som beskriver hytter med vinduer, ovner, og dører, formet som et rektangulært prisme. Dette gjør det enkelt å lage mange ulike rom etter hverandre for å simulere varmfordelingen. De numeriske beregningene blir til dels gjort gjennom det utbredte pythonbiblioteket numpy. Dette er først og fremst for å få beregningene til å gå raskere enn i vanlig python. Operasjoner på store lister og matriser går mye raskere i numpy ettersom numpy sort sett er skrevet i C, hvor typen til hvert element i listen er kjent. Selv om python har vilkårlig presisjon på flyttall, har altså ikke våre beregninger det, fordi programmet vårt baserer seg på 64 bit floats i C gjennom numpy.

Etter at vi spesifiserer lengden, høyden, bredden og steglengden i rommet, oppretter vi en tredimensjonal numpy-array som inneholder temperaturen som korresponderer til nodene i gitteret som parameterne bestemmer. I denne kan vi lett gjøre oppslag for å finne temperaturen i et punkt, og gjennom indeksene og steglengden beregne hvor i rommet punktet er.

Hoveddelen av simuleringen handler om beregningen av den nye temperaturen etter hvert tidssteg. Her iterer vi over hvert punkt i rommet, leser av temperaturen i de 6 nabopunktene, samt ovnenes effekt ved det nåværende tidspunktet, og regner ut en tilnærming av temperaturen i punktet ved neste tidssteg. Dersom punktet vi iterer over ligger på randen av rommet, bruker vi temperaturen i det korresponderende spøkelsespunktet istedet. Temperaturen i spøkelsespunktene beregnes før hver iterasjon over rommet, som spesifisert i Seksjon 3.7. Utetemperaturen, som brukes i beregningen av spøkelsespunktene, hentes fra en lineær interpolasjon av utetemperaturene som er målt ved hytten. U-verdiene til randen av rommet hardkodes som en egenskap til hvert eneste punkt på randen, slik at vi raskt kunne avgjøre om randpunktet ligger på veggen, vinduet, døren, osv.

Ovnkostnaden beregnes ved å multiplisere strømkostnaden med summen av ovneffektene over alle tidsstegene. Denne stegvis lineære approksimasjonen av strømkostnaden er mer enn god nok når tidssteget er ett sekund. Temperaturavviket ved et tidssteg blir beregnet ved å regne ut summen av de absolutte forskjellene mellom temperaturen i nodene og den nåværende idealtemperaturen. Disse tidssteg-temperaturavvikene summeres løpende mens koden kjører. Til slutt skaleres dette resultatet, slik at vi kan sammenligne resultatene fra beregningen.

4.1 Fysiske konstanter

Symbol	Verdi	Enhet
α_{luft}	$19 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
α_{vindu}	$0.34 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
α_{vegg}	$0.082 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
$c_{p,\text{luft}}$	1012	$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
$c_{v,\text{luft}}$	716.6	$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
ρ_{luft}	1.2041	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
U_{vegg}	0.22	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
U_{vindu}	1.0	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
$U_{\text{dør}}$	0.64	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
κ_{luft}	0.02535	$\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

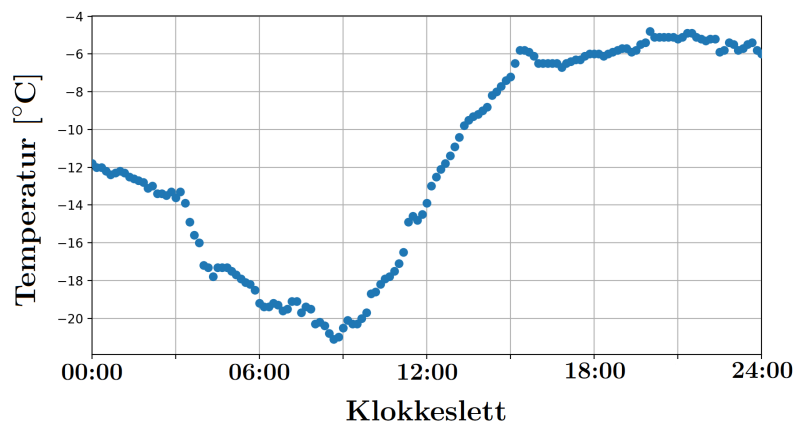
Tabell 1: Ulike fysiske konstanter hentet fra [15] og [16].

Tabell 1 viser verdiene til alle de fysiske konstantene brukt i prosjektet. Her har verdier blitt valgt slik at de passer best mulig til problemstillingen. Det vil si at alle konstanter som har med luften å gjøre antar lav luftfuktighet og romtemperatur. Vi antar samme U-verdi for vegg, tak og gulv. Det er også antatt at β , strømprisen per kilowatttime, er konstant lik 3kr.

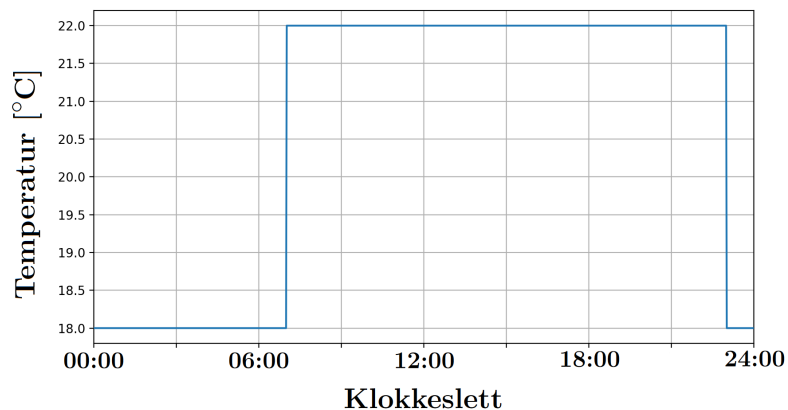
4.2 Utetemperatur og ideelltemperatur

Som utetemperatur har vi valgt å bruke temperaturdata fra Norsk Klimaservicesenter [17], se Figur 3. Denne dagen hadde den laveste minimumstemperaturen i februar for denne værstasjonen, på -21.1°C .

Som idealtemperatur har vi valgt en temperatur på 18°C fra klokken 23:00 til klokken 07:00 påfølgende dag, og 22°C om dagen, se Figur 4. Dette er i tråd med anbefalinger om sovetemperatur fra SleepFoundation.org [18], og anbefalinger om generell romtemperatur fra WHO [19]. Temperaturen har blitt forskjøvet slik at grafen starter klokken 00:00, og dermed samsvarer med tidsintervallet I i modellen.



Figur 3: Lufttemperaturen målt ved værestasjonen ved fylkesvei 30 i Rugldalen, Røros, den 3. februar 2022. Målingene ble gjort hvert tiende minutt, målt to meter over bakken.



Figur 4: Idealtemperaturen inne i hytten.

5 Verifisering av koden

For å være sikker på at koden gjør det den skal, er det nødvendig at vi tester koden mot eksakte løsninger av varmeligningen i noen enkle tilfeller.

5.1 To motsatte vegger med konstant temperatur

Hvis vi lar $T(L = 2, y, z) = 473.15$ K og $T(0, y, z) = 0$ K for $y \in [0, W], z \in [0, H]$, og samtidig antar at ingen varme slipper ut (dvs. $U = 0$), kan vi ta utgangspunkt i *Fouriers lov*, [20],

$$\dot{Q} = -\kappa \nabla T A \quad (19)$$

$$= -\kappa \frac{dT}{dx} WH, \quad (20)$$

hvor \dot{Q} er varmestrøm, κ er termisk konduktivitet og A er tverrsnittsarealet. Temperaturen vil kun avhenge av x i denne situasjonen, og vil redusere ∇T til $\frac{dT}{dx}$. Vi kan skrive om (20),

$$dT = -\frac{\dot{Q}}{\kappa WH} dx. \quad (21)$$

Vi kan integrere (21) fra $x = L$ til x' . Da får vi

$$T(x') - T(L) = \frac{\dot{Q}}{\kappa WH} (x' - L). \quad (22)$$

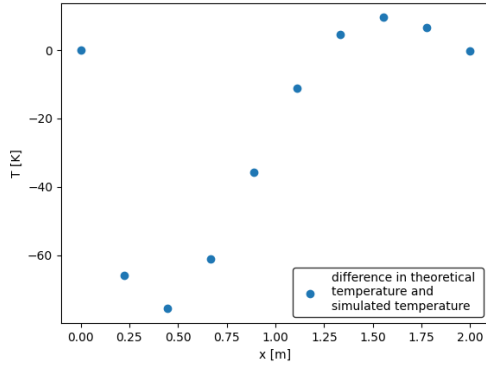
Hvis vi nå redefiner x til x' og setter inn grensebetingelsene $T(0) = 0$ K og $T(L) = 473.15$ K, får vi etter litt opprydding

$$T(x) = T(L) + (T(L) - T(0)) \frac{x - L}{L} \quad (23)$$

$$= 473.15 + 473.15 \frac{x}{x - 2}. \quad (24)$$

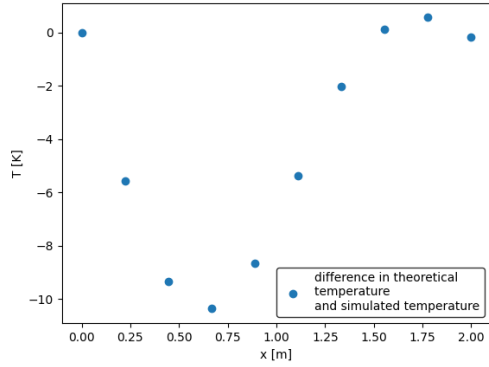
Hvis vi antar at både den termiske diffusiviteten α og konduktiviteten κ er konstant, samt at ovnene er av og starttemperatur i hele rommet på 250 K, vil vi etter henholdsvis 2, 5, 7, 9 og 12 timer få temperaturprofilene gitt i Figur 5

$T(L, y, z)=473.15$ K, $T(0, y, z)=0$ K, perfectly insulated, no ovens, 2 hours



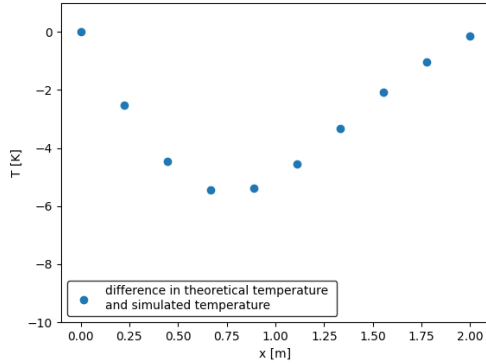
(a) Avvik etter 2 timer.

$T(L, y, z)=473.15$ K, $T(0, y, z)=0$ K, perfectly insulated, no ovens, 5 hours



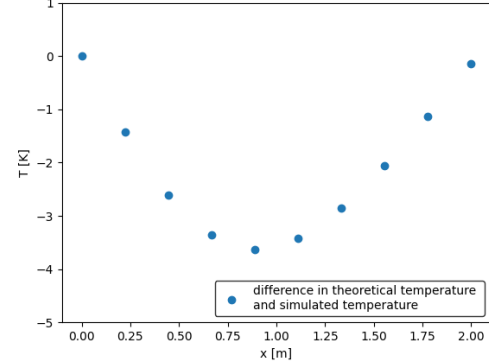
(b) Avvik etter 5 timer.

$T(L, y, z)=473.15$ K, $T(0, y, z)=0$ K, perfectly insulated, no ovens, 7 hours



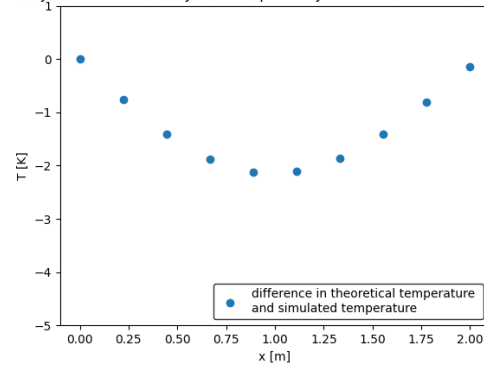
(c) Avvik etter 7 timer.

$T(L, y, z)=473.15$ K, $T(0, y, z)=0$ K, perfectly insulated, no ovens, 9 hours



(d) Avvik etter 9 timer.

$T(L, y, z)=473.15$ K, $T(0, y, z)=0$ K, perfectly insulated, no ovens, 12 hours



(e) Avvik etter 12 timer.

Figur 5: Avvik mellom teoretisk temperatur og simulasjonens temperatur etter (a) 2 timer, (b) 5 timer, (c) 7 timer, (d) 9 timer og (e) 12 timer. Merk aksesskaleringen

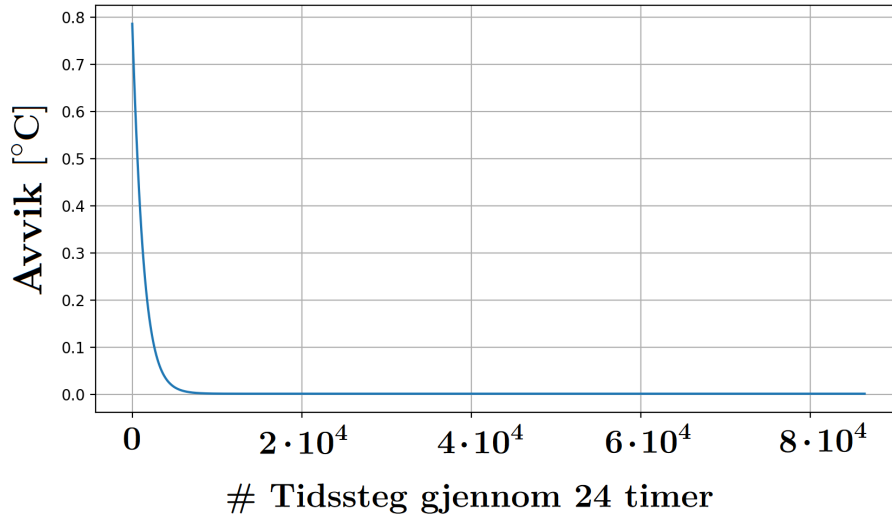
Vi kan fiksure følgende ikke-uniforme temperaturfordeling langs randen i rommet:

$$\begin{aligned} T(0, y, z) &= T(L, y, z) = 0 && (\text{vest, øst}) \\ T(x, y, 0) &= T(x, y, H) = 0 && (\text{ned, opp}) \\ T(x, 0, z) &= T(x, W, z) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) && (\text{sør, nord}). \end{aligned}$$

Dersom ovnene er skrudd av, vil temperaturen i rommet, uansett initialtemperatur, konvergere mot den tidsuavhengige løsningen T_* av $\nabla^2 T = 0$ som tilfredsstiller randbetingelsene over. Den analytiske løsningen av dette systemet er gitt ved

$$T_*(x, y, z) = \left(\frac{\sinh((W - y)\sqrt{\lambda})}{\sinh(W\sqrt{\lambda})} + \frac{\sinh(y\sqrt{\lambda})}{\sinh(W\sqrt{\lambda})} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad (25)$$

hvor $\lambda = (\frac{\pi}{L})^2 + (\frac{\pi}{H})^2$, se vedlegg A. Fra Figur 6 ser vi at den absolutte forskjellen $\max_{i,j,k} |T_{i,j,k}^m - T_*|$ går mot null.



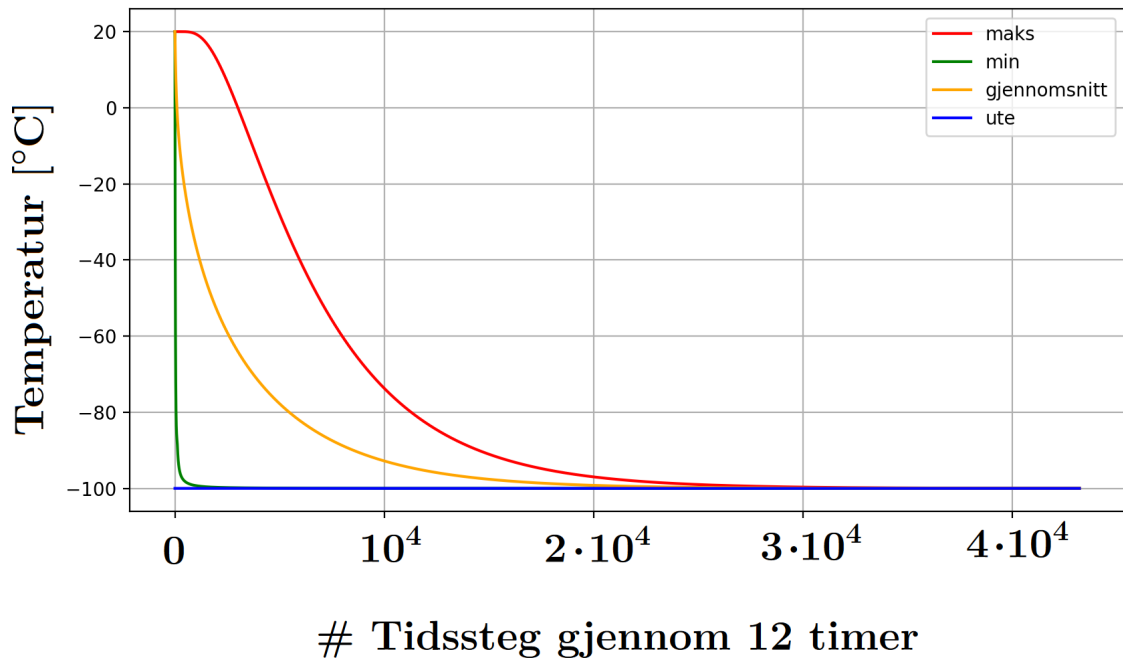
Figur 6

5.2 Konstant utetemperatur og ovner skrudd av

I denne testen er utetemperaturen T_{ute} konstant gjennom tidsintervallet, og ovnene er skrudd av. Hvis vi antar initialtemperaturen T_0 i rommet kan vi teste om følgende to tester holder:

1. Dersom $T_0 = T_{\text{ute}}$, så skal temperaturen i hver node i rommet være konstant lik denne felles verdien for hvert tidssteg.
2. Når $t \rightarrow +\infty$ så skal temperaturen i hver node i rommet nærme seg T_{ute} , uansett om T_0 er lik T_{ute} eller ikke.

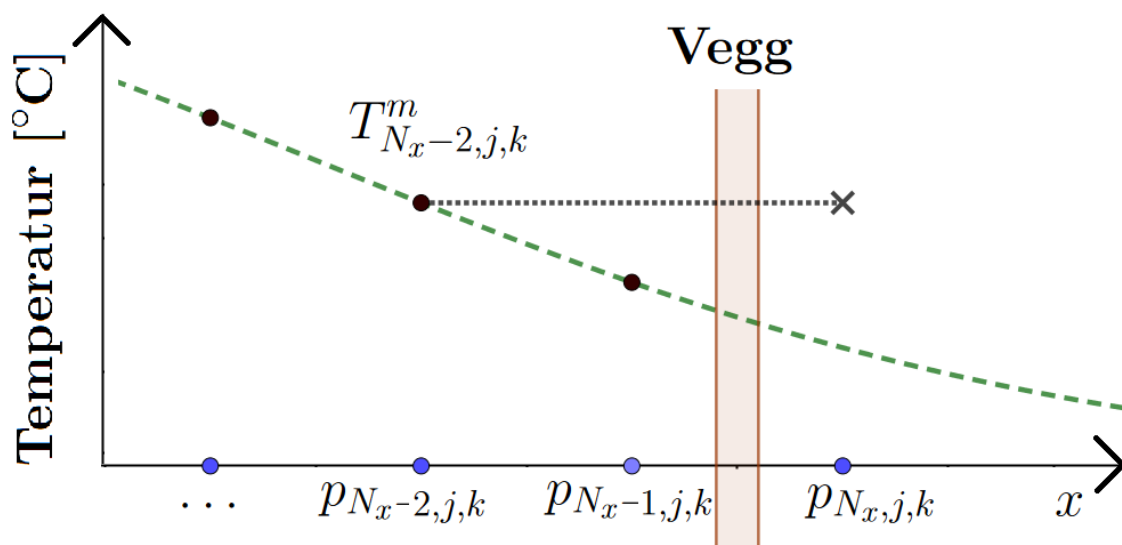
Den første testen ble bestått uten avvik hver gang denne testen ble kjørt, som forventet. Figur 7 viser hvordan temperaturen i rommet konvergerer til utetemperaturen når utetemperaturen er konstant lik -100°C , initialtemperaturen i rommet er 20°C , og ovnene er skrudd av. Dermed regner vi begge testene for bestått.



Figur 7: Hvordan rommets maksimale, minimale og gjennomsnittlige temperatur konvergerer mot utetemperaturen gjennom 12 timer.

5.3 Test av energitilførsel

For å teste at ovnene tilfører riktig mengde energi til rommet, er det enklest om man først eliminerer alt varmetap fra rommet. Dette svarer til å gjøre om veggene, vinduene, taket, gulvet og døra til perfekte varmeisulatorer. Man skulle tro at dette er så enkelt som å sette U lik null langs hele randen på rommet. Dette er imidlertid ikke tilfellet, av følgende grunn. Å sette $U=0$ langs hele randen på rommet er i følge (11) ekvivalent med å sette den normalderiverte av temperaturen lik null langs randen. Etter at varmekilden har begynt å gi ut en del varmeenergi, vil varmen være høyest i nærheten av ovnen, og synke gradvis desto lenger vekk fra ovnen man befinner seg. Som man ser i Figur 8, vil da temperaturen i spøkelsespunktene langs veggen, som beregnes ved hjelp av sentral differanseapproksimasjon, ende opp med samme temperatur som i nodene to steg innenfor veggen, altså høyere temperatur enn i nodene direkte innenfor veggen. Dette vil føre til at temperaturen i nodene rett innenfor veggen øker mer enn de skal når differanseskjemaet benyttes, og rommets energi øker av ingenting.



Figur 8: Bruk av sentralapprosimasjon fører til at energi oppstår av ingenting. Den grønne kurven viser den analytiske temperaturen, men sorte linjen indikerer hvordan spøkelsespunktet får samme temperatur som noden nest nærmest veggen. Som man kan se, vil spøkelsesnoden gi en høyere utetemperatur enn den analytiske temperaturen, noe som tilfører mer energi i systemet.

Dette problemet kan i denne spesifikke testen løses ved å la spøkelsespunktet ha nøyaktig samme temperatur som noden rett innenfor veggen. Ifølge differenseskjemaet svarer dette til null varmeutveksling gjennom veggen.

Med denne korreksjonen på plass, gjør vi som følger. Etter at initialtemperaturen T_0 i rommet er spesifisert, kjøres koden over ℓ tidsintervall Δt med en gitt ovnseffekt w . Testen er vellykket dersom den beregnede energidifferansen

$$\Delta U = \sum_{i,j,k} \rho c_p (T_{i,j,k}^\ell - T_0)$$

er omtrent lik den teoretisk tilførte energien $\Delta t \sum_{m=0}^{\ell} w(t_m)$.

Etter 1 time (36000 tidssteg), finner vi at den beregnede energidifferansen avviker fra den teoretisk tilførte energien med mindre enn 10^{-6} joule, noe som kan regnes som en bestått test. Merk at denne testen ikke er helt triviell, siden det foregår diffusjonsberegning i rommet på hvert tidssteg.

5.4 Test mot tidsavhengig løsning uten varmekilde

Vi kan teste om koden vår oppfører seg omtrent som den skal i det lange løp ved å sammenligne den mot den analytiske løsningen av den tidsavhengige varmeligningen (5) med Robin-betingelser. Det er imidlertid ganske vanskelig å beregne denne løsningen eksakt. Fra Fourieranalyse kan vi forvente at løsningen i det generelle tilfellet kan skrives som summen av 8 ledd på formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{k\ell m}(t) f_{i1} \left(\frac{2\pi kx}{L} \right) f_{i2} \left(\frac{2\pi \ell y}{W} \right) f_{i3} \left(\frac{2\pi mz}{H} \right),$$

der hver $f_{ij} \in \{\cos, \sin\}$. Vi kan slippe unna litt av dette endeløse regnestykket på følgende måte. Dersom vi godtar at temperaturen T er lik $T_{\text{ute}}(t)$ på randen $\partial\mathcal{R}$ for alle $t \geq 0$, og antar at U -verdien er den samme over hele randen, så kan det vises at en løsning av systemet

$$\begin{aligned} T_t &= \alpha \nabla^2 T \\ T(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}) \\ \nabla T \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} &= -\frac{U}{\kappa} (T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ute}}(t)), \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{R} \end{aligned}$$

på $\mathcal{R} = [0, L] \times [0, W] \times [0, H]$, er gitt ved

$$T_{**}(\mathbf{x}, t) = T_{\text{ute}}(t) + \sum_{k,\ell,m} T_{k\ell m}(t) S_{k\ell m}, \quad (26)$$

hvor

$$S_{k\ell m} = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi y}{W}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)$$

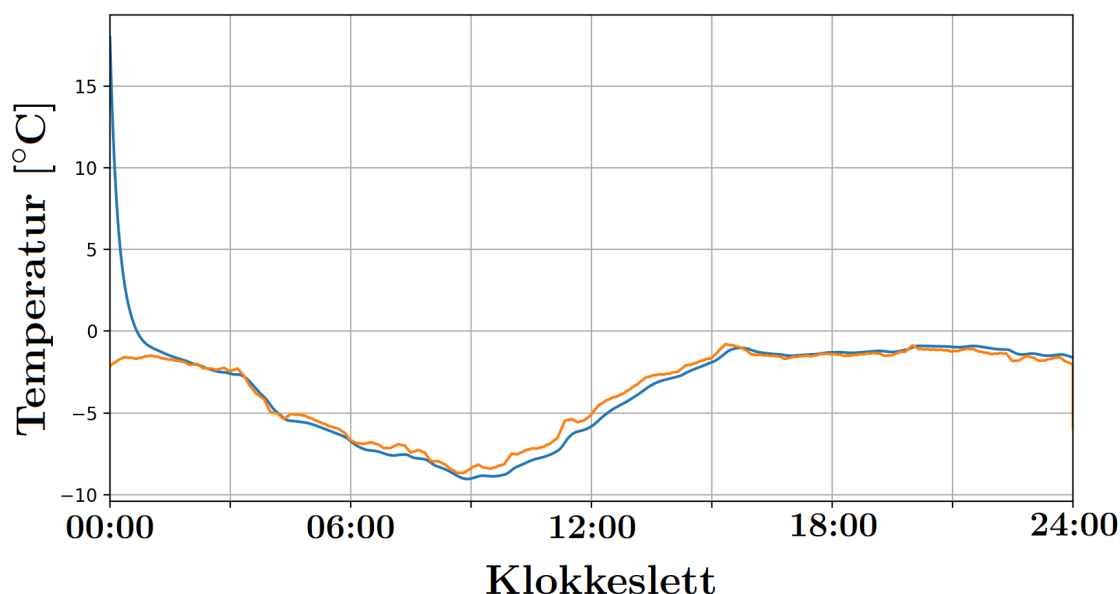
$$T_{k\ell m} = D_{k\ell m} e^{-\alpha \lambda_{k\ell m} t} - C_{k\ell m} T_{\text{ute}}(t) + \alpha C_{k\ell m} \lambda_{k\ell m} \int_0^t e^{\alpha \lambda_{k\ell m} (s-t)} T_{\text{ute}}(s) ds$$

$$\lambda_{k\ell m} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

$$C_{k\ell m} = \frac{2^3}{\pi^3 k\ell m} \cdot [1 - (-1)^k] \cdot [1 - (-1)^\ell] \cdot [1 - (-1)^m]$$

$$D_{k\ell m} = \frac{2^3}{LWH} \int_0^L \int_0^W \int_0^H S_{k\ell m} \varphi(x, y, z) d(x, y, z),$$

og summen (26) tas over $k, \ell, m \in \{1, 2, 3, \dots\}^3$. Vennligst se vedlegg B for den smertefulle utledningen.



Figur 9: Rommets gjennomsnittstemperatur [blått], mot gjennomsnittet av den beregnede løsningen T_{**} [orange].

Figur 9 viser at den numerisk beregnede gjennomsnittstemperaturen legger seg nær den analytiske temperaturen T_{**} etter rundt 2 timer. Grunnen til avviket ved starten skyldes at T_{**} er en tilnærmet løsning av varmeligningen, og avviket vi ser nær midten skyldes blant annet at summen (26) i beregningen er tatt over $1 \leq k, \ell, m \leq 25$.

5.5 Konvergensplott

For å se hvilke verdier for romlig steglengde h og tidssteg Δt som er fornuftige å bruke, er det vanlig å benytte seg av konvergensplott. Da kan man kjøre simuleringen sin med varierende steglengde og se hva som passer for sin setting. Man kan da ut fra ønsket toleranse se hvilke steglengder som vil passe.

I vår endelige differansemetode bør vi gjøre to typer konvergensplott. Det ene er å se på varierende h og fin Δt . Den andre er å ha et fint gitter, altså liten h , og variere Δt . Som vi ser i utledningen av (17), vet vi at vi kan forvente en feil $\Delta T = O(\Delta t) + O(h^2)$.

I vårt tilfelle tar simuleringen ganske lang tid (diskuteres i 9), og ettersom vi har en 3-dimensjonal modell, vil simuleringstiden vokse kubisk med romlig steglengde.

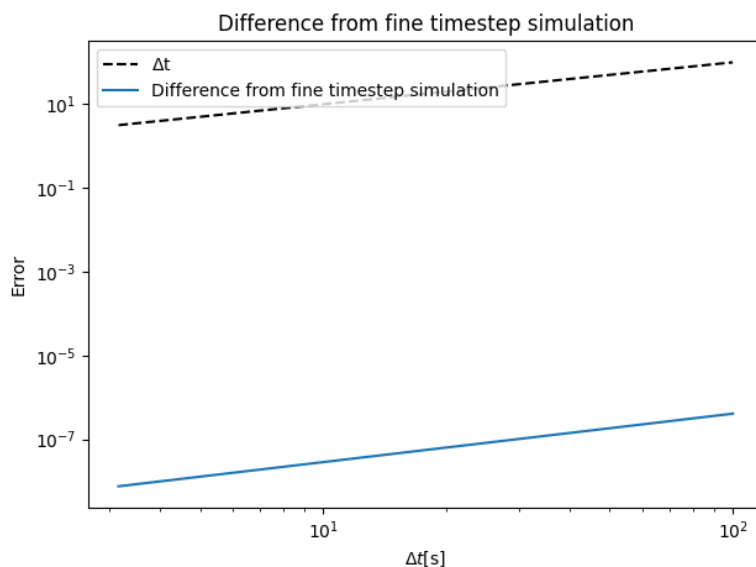
I løpet av prosjektet har vi kun hatt problemer med tidssteg. Gitt disse to grunnene besluttet vi å kun se på fin h og variere Δt .

Vi har valgt å ikke genere feilestimat fra en analytisk løsning, ettersom vi ikke har hatt noen analytisk løsning å sammenligne mot. Vi valgte heller å sammenligne mot en simulering hvor vi hadde Δt en tiendedel av den laveste verdien av Δt som var med i konvergenstesten. For simuleringene i testen, vil "fasiten" være mye nærmere en eventuell analytisk løsning enn de selv, og derfor gi et troverdig feilestimat.

Tidssteget vi valgte å sammenligne mot, var $\Delta t = 1s$. Vi simulerte over 24 timer, som vil

si at $\Delta t = 1\text{s}$ er en veldig fin oppløsning. For å holde oss innenfor CFL-betingelsen, og holde simuleringstiden tolererbar, valgte vi $h = 1/5$, og testet med $\Delta t \in \{10\text{s}, 100\text{s}\}$.

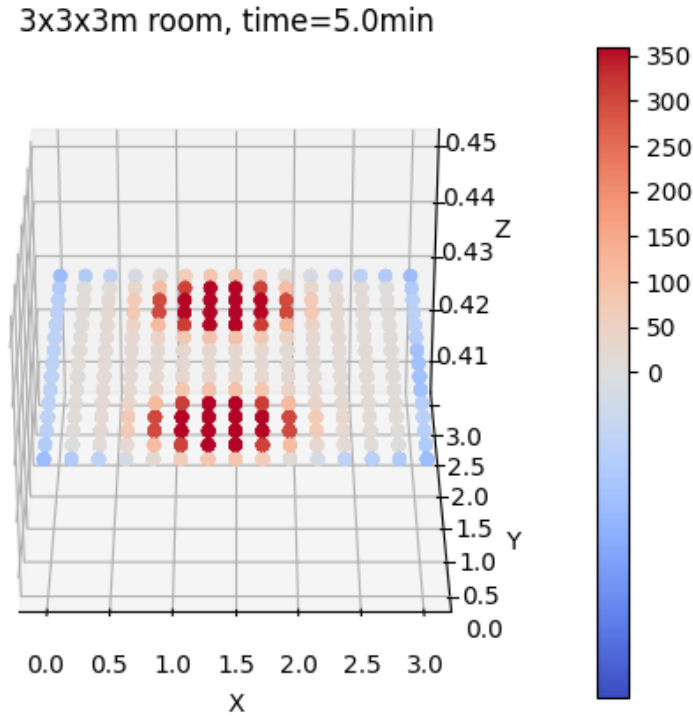
Med disse verdiene fikk vi plottet i Figur 10. Her har vi sett på relativ feil, og normert feilen med den teoretiske verdien. Vi kan se at feilen har en tydelig lineær oppførsel. Generelt ser vi at feilen er ganske lav, og ettersom det er mennesker som skal leve i dette rommet, kan man godta et relativt langt tidssteg.



Figur 10: Viser feilen mellom simuleringer av $\Delta t \in \{10\text{s}, 100\text{s}\}$ mot en simulering med $\Delta t = 1\text{s}$. Merk at dette er et log-log plott, og den teoretisk er $\Delta T \propto \Delta t$.

6 Resultater

6.1 Overoppheting av varmekilden



Figur 11: Et plan av temperaturen i rommet som illustrerer at ovnene blir for varme. Merk at temperaturskalaen går opp til 350 °C.

I Figur 11 ser vi resultatene fra de numeriske beregningene etter 5 minutter i et rom som er 3 meter i bredde, lengde og høyde. Denne modellen regner på diffusjon i lufta, varmetilførsel fra ovn (500W i dette tilfellet), og varmeutveksling med omgivelsene. Dette gir tydelig dårlige resultater da det hoper seg opp uutholdelig mye varme tett på ovnene, samtidig som lufta tett på veggen i hytten kjøles kraftig ned. Disse resultatene er stabile, og kan gjenskapes selv med kortere tidssteg og finere diskretisering av rommet.

Siden koden bestod testene i forrige seksjon, ble det etter nøye gjennomgang av koden og teorien klart at problemet skyldes både den lave diffusiviteten til luft og at adveksjon ikke er inkludert i modellen. Man kan også se fra figur 7 at diffusjon i luft er en langsom prosess, siden det tar hele 6 timer før rommets høyeste temperatur nærmerer seg den lave utetemperaturen. Dette diskuteres nærmere i neste seksjon.

6.2 Uniform varmekilde

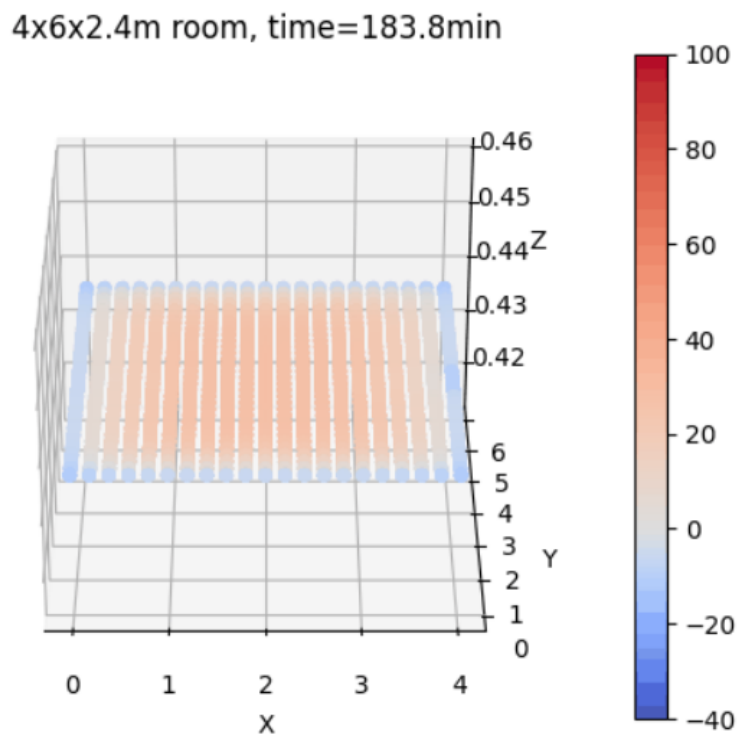
Det er flere måter å løse problemet med at varmen hoper seg opp i ovn-nodene. Eksempelvis kan man

1. Anta høyere (eller temperaturavhengig) diffusivitet for luft.
2. Inkludere adveksjonsleddet fra ligning (3), og dermed modellere adveksjonsligningen.
3. Hardkode en mekanisme som flytter varme oppover eller rundt i rommet.

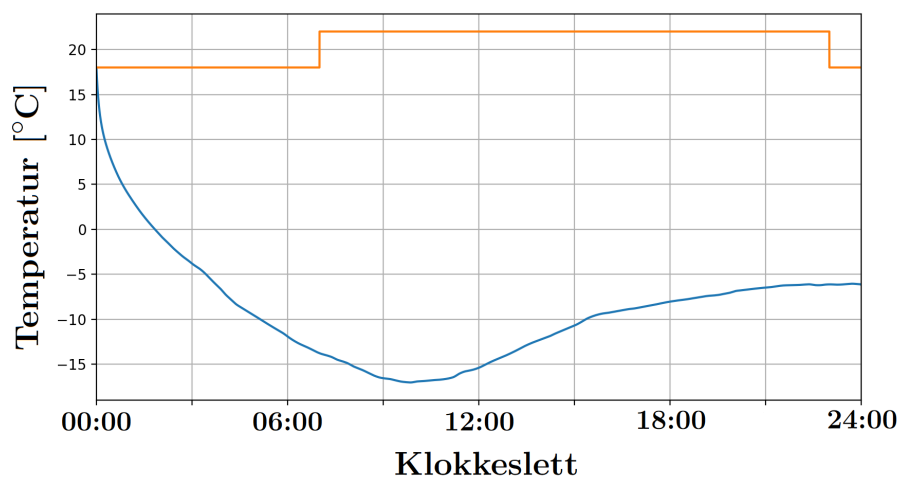
Imidlertid ble det klart at den enkleste løsningen, gitt prosjektets tidsbegrensning, er å anta at varmen fra ovnene utstråles uniformt over hele rommet ved hvert tidssteg. Vi lar dermed $\Gamma = \mathcal{R}$. På denne måten trenger vi ikke å modellere adveksjonen. Merk at denne løsningen er enklere å implementere enn strategiene nevnt over, og har den fordelen at man ikke trenger å modifisere diskretiseringen av rommet for å bruke den.

Dette medfører at varmekilde-leddet i (5) må byttes med $\frac{w(t)}{c_p \rho LWH}$, og at det siste leddet i (17) må byttes med $\frac{\Delta t}{c_p \rho LWH} w(t_m)$. Ut resten av rapporten vil det være denne modifiserte versjonen av modellen som brukes for å lage figurer, og som produserer resultater, med mindre noe annet er bestemt.

Figur 12 viser at nodene i rommet ikke lenger blir glovarme når varmekilden fordeles uniformt over hele rommet. Figur 13 viser temperaturen i rommet når ovnene er skrudd av. I dette tilfellet er kostnaden av å bruke ovnene lik $\Phi_2 = 0$ NOK. I tillegg *definerer vi* skaleringskonstanten δ i (9) slik at temperaturavviket er nøyaktig $\Phi_1 = 10$ i dette tilfellet.

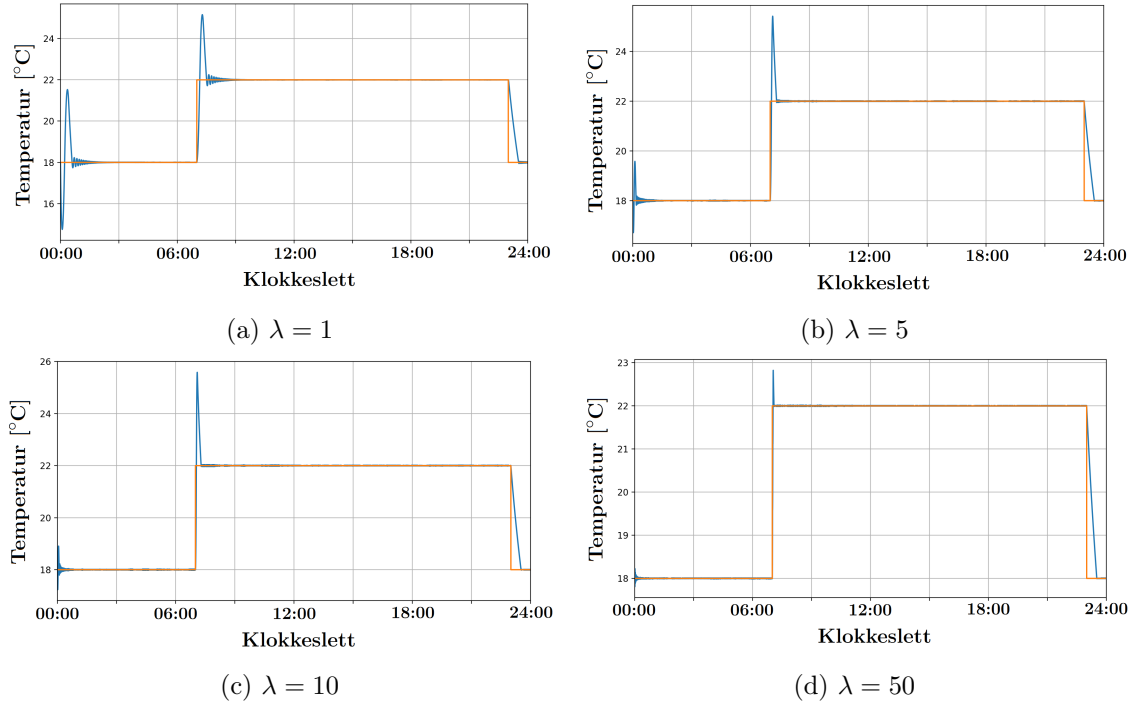


Figur 12: Et plan av temperaturen i rommet som illustrerer at ovnene ikke lenger blir for varme. Her gir hver ovn ut 150watt, og temperaturskalaen går fra -40 til 100 °C.



Figur 13: Rommets gjennomsnittstemperatur [blått] og idealtemperatur [orange] når ovnene er skrudd av ($w \equiv 0$).

6.3 Strategi 1: Ovner med termostat



Figur 14: Rommets gjennomsnittstemperatur [blått] og idealtemperatur [orange] med forskjellig ovnsensitivitet. Ovnene har termostat.

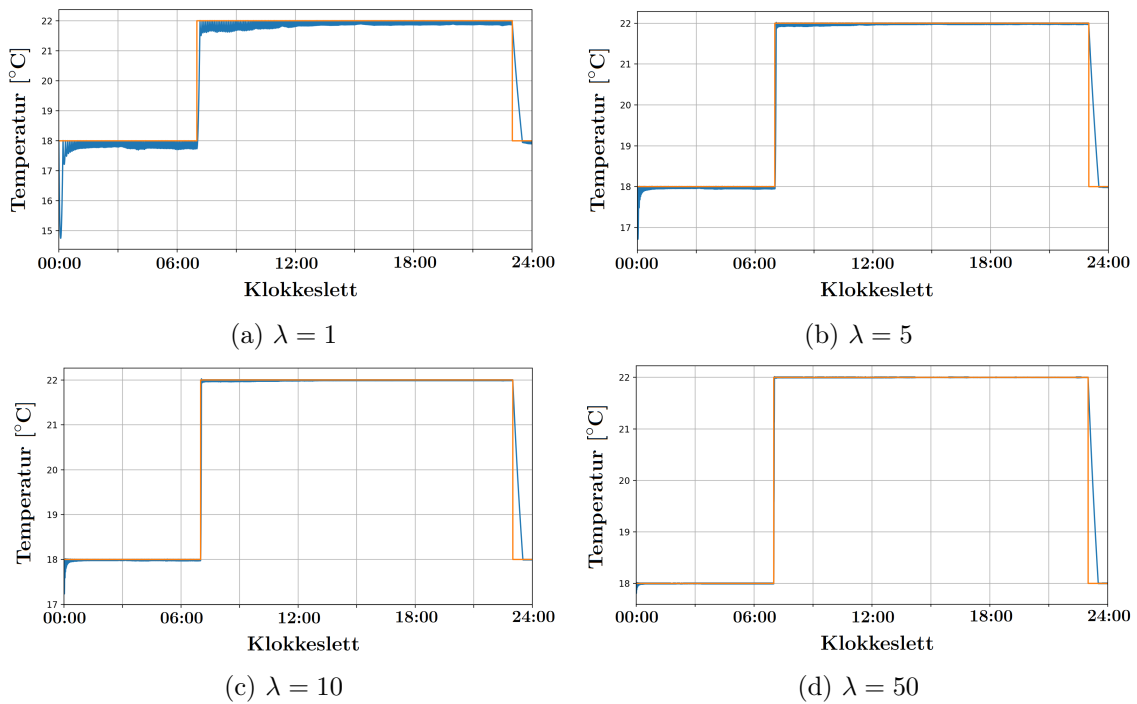
Figur 14 viser temperaturutviklingen i rommet i fire tilfeller hvor ovnene har termostat, som vil si at de øker eller minker effekten basert på om romtemperaturen er høyere eller lavere enn idealtemperaturen ved forrige tidssteg. Altså er

$$w(t_m) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m = 0 \\ \min(w(t_{m-1}) + \lambda, 2500) & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} \leq T_{\text{ideell}}(t_m) \\ \max(w(t_{m-1}) - \lambda, 0) & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} > T_{\text{ideell}}(t_m), \end{cases}$$

hvor $\lambda > 0$ er “sensitiviteten”, og $\overline{T^{m-1}}$ er rommets numeriske gjennomsnittstemperatur ved tidssteg t_{m-1} . Som vi ser av plottet blir temperaturen for høy like etter klokken 07:00 og igjen like etter klokken 23:00, noe som skyldes at ovnene her kun har lov å endre effekten sin med λ watt per sekund. Tabell 2 viser den assosierte kostnaden i de fire tilfellene.

λ	Φ_1	$\Phi_2[\text{NOK}]$
1	6.163333401376316	8.766818682
5	6.159401398726857	8.764076489999999
10	6.159039030032713	8.76358026
50	6.156060616948078	8.759919

Tabell 2: Kostnad for ovner med termostat som gradvis endrer effekt.



Figur 15: Rommets gjennomsnittstemperatur [blått] og idealtemperatur [orange] med forskjellig ovnsensitivitet. Ovnene har termostat, og kan slås av momentant.

Figur 15 viser temperaturutviklingen i rommet i fire tilfeller hvor

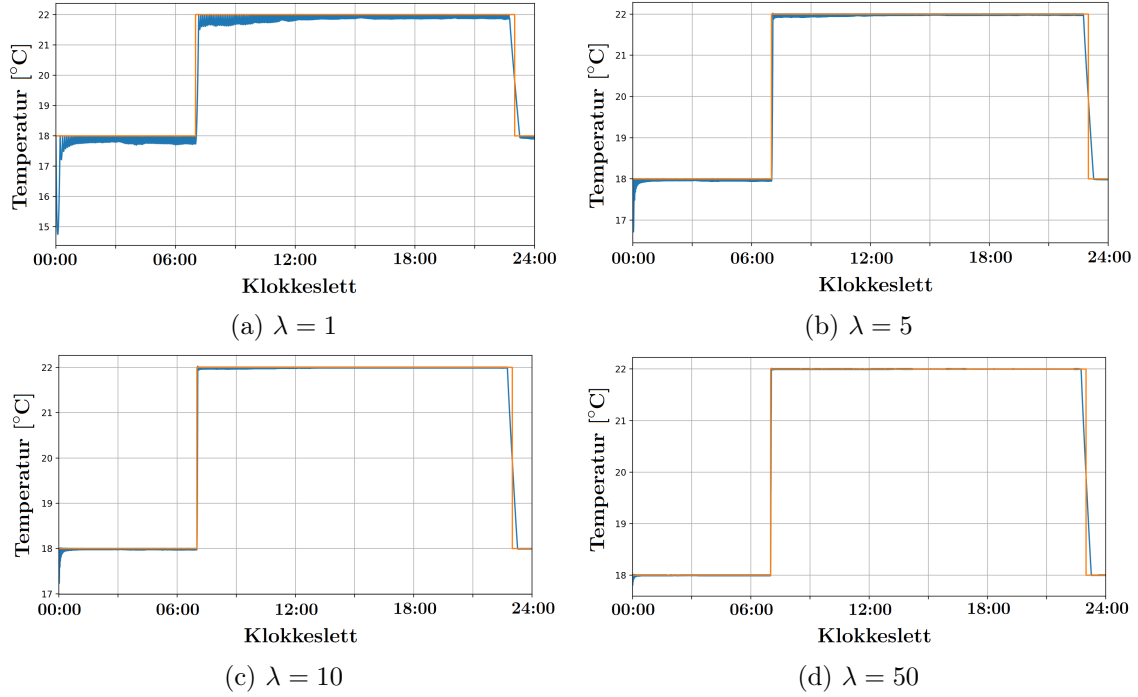
$$w(t_m) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m = 0 \\ \min(w(t_{m-1}) + \lambda, 2500) & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} \leq T_{\text{ideell}}(t_m) \\ 0 & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} > T_{\text{ideell}}(t_m), \end{cases}$$

for forskjellige verdier av λ . Siden ovnene nå har mulighet til å skru effekten ned til null dersom temperaturen er for høy, får vi ikke lenger for høy temperatur like etter klokken 07:00. Vi har imidlertid fortsatt for høy temperatur like etter klokken 23:00, noe som kan forklares ved at ovnene i rommet ikke har evnen til å redusere temperaturen i rommet, og heller ikke “tenker fram i tid”. Tabell 3 viser den assosierte kostnaden i de fire tilfellene.

λ	Φ_1	$\Phi_2[\text{NOK}]$
1	6.123046765526633	8.711425235999998
5	6.14897166208813	8.74944813
10	6.152649717314338	8.75503176
50	6.155344899555675	8.7588765

Tabell 3: Kostnaden for ovner med termostat, og som kan slås av momentant.

6.4 Strategi 2: Ovner som ser 15 minutter fram i tid



Figur 16: Rommets gjennomsnittstemperatur [blått] og idealtemperatur [orange] med forskjellig ovnsensitivitet.

Figur 16 viser temperaturutviklingen i rommet i fire tilfeller hvor $w(t_0) = 0$, og

$$w(t_m) = 0 \quad \text{hvis} \quad \frac{1}{15 \cdot 60} \sum_{i=1}^{15 \cdot 60} T_{\text{ideell}}(t_{m+i}) < T_{\text{ideell}}(t_m).$$

Hvis dette kriteriet ikke er innfridd, er

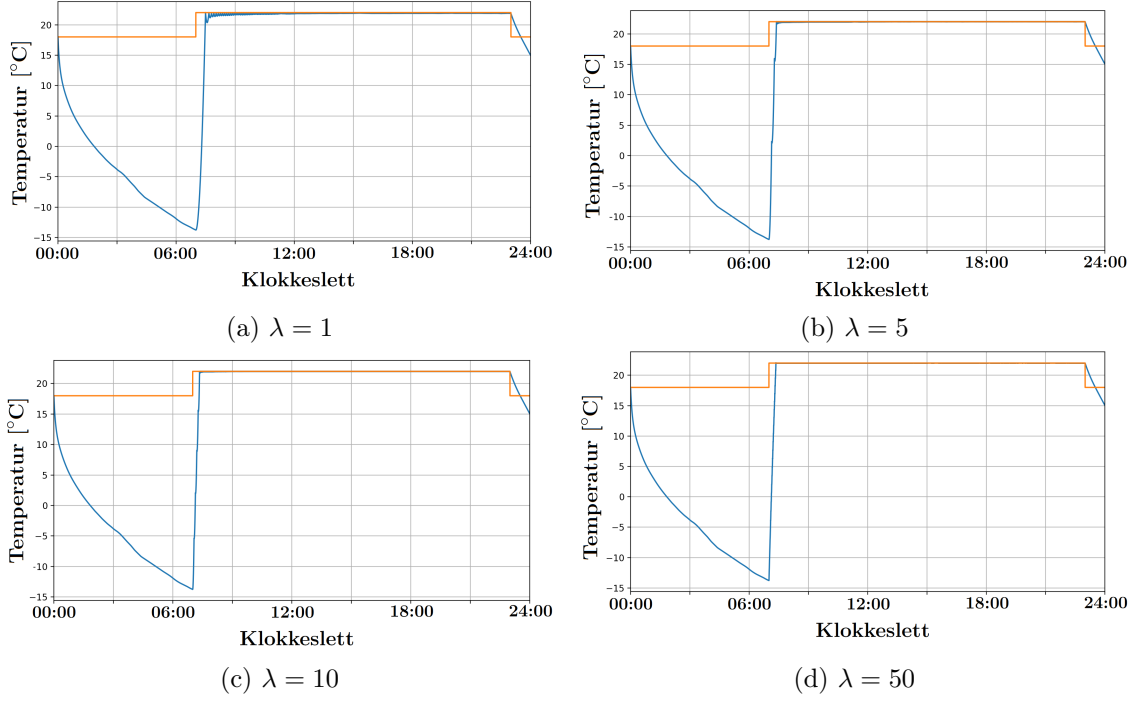
$$w(t_m) = \begin{cases} \min(w(t_{m-1}) + \lambda, 2500) & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} \leq T_{\text{ideell}}(t_m) \\ 0 & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} > T_{\text{ideell}}(t_m) \end{cases}.$$

Plottet viser en ovn som ser 15 minutter fram i tid, og skruer seg av hvis gjennomsnittet av idealtemperaturen de neste 15 minuttene er lavere enn den nåværende idealtemperaturen. Ellers fungerer ovnen som i forrige seksjon. Merk at ovnen ikke øker effekten når idealtemperaturen stiger de neste minuttene. Tabell 4 viser den assosierte kostnaden i de fire tilfellene.

λ	Φ_1	$\Phi_2[\text{NOK}]$
1	6.11782351522167	8.697534966
5	6.143824313640183	8.73583725
10	6.147435812845041	8.74143759999998
50	6.150135537671287	8.7452823

Tabell 4: Kostnad for ovner som ser 15 minutt frem i tid.

6.5 Strategi 3: Skru ovnene av om natten



Figur 17: Rommets gjennomsnittstemperatur [blått] og idealtemperatur [orange] med forskjellig ovnsensitivitet.

Figur (17) viser temperaturutviklingen i rommet i fire tilfeller hvor $w(t_m) = 0$ om natten, og

$$w(t_m) = \begin{cases} \min(w(t_{m-1}) + \lambda, 2500) & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} \leq T_{\text{ideell}}(t_m) \\ 0 & \text{hvis } \overline{T^{m-1}} > T_{\text{ideell}}(t_m). \end{cases}$$

Altså er ovnene skrudd helt av om natten. De assosierte kostnadene står i Tabell 5.

λ	Φ_1	$\Phi_2[\text{NOK}]$
1	6.514951688163701	6.808526634
5	6.507918178848359	6.8834857199999995
10	6.507990175083017	6.890991719999999
50	6.507672487369913	6.8970132

Tabell 5: Kostnad for ovner som slår seg av om natten.

7 Diskusjon

7.1 Diffusjon er ikke tilstrekkelig

Vi kan utlede et uttrykk for bredden av diffusjonen til varmen, se vedlegg D. Når vi setter inn verdi for α_{luft} og ser på utviklingen over en time, får vi $\Delta x = \sqrt{6\alpha_{\text{luft}}t} \approx 0.64\text{m}$. Dermed vil varmediffusjon kun gi varme til en kule med radius 0.64m i løpet av en time. Det er åpenbart feil, da en ovn vil kunne varme opp et rom på mye større enn $\sim 1.28\text{m} \times 1.28\text{m} \times 1.28\text{m}$ i løpet av en time.

Vi velger å se på en temperaturuavhengig termisk diffusivitet, α . En dobling av α , som tilsvarer 150 grader [21], vil kun øke radiusen med $\sim 40\%$. Dermed vil ikke temperaturavhengig termisk diffusivitet utgjøre stor nok forskjell.

Dette forklarer de urealistiske resultatene den opprinnelige modellen ga. Vi har hovedsakelig kun sett på diffusjon, når vi burde sett på adveksjon. Ifølge [22] er konveksjon den dominerende prosessen for varmeoverføring i gasser. Dette ble løst med en forenkling der ovnen uniformt varmer opp alle punktene i rommet. Dette anser vi som en realistisk nok antakelse for dette prosjektet. Det er imidlertid en liten svakhet ved modellen at det ikke er regnet på hvor stort utslag denne forenklingen gir. Det er altså ukjent hvor stor innvirkning adveksjon ville hatt på varmedistribusjonen i rommet.

7.2 Ovnstrategier

I resultatseksjonen ser det ut til at de numeriske beregnede kostnadene Φ_1 ikke samsvarer helt med plottet. Ifølge plottene ser det ut som at gjennomsnittstemperaturen i rommet oscillerer lenger vekk fra idealtemperaturen for små verdier av λ , men de samme verdiene av λ gir også lavest numerisk temperaturavvik Φ_1 . Grunnen til dette er ukjent. Vi er imidlertid temmelig sikre på at beregningen av Φ_1 og Φ_2 er korrekt utført, så vi får ta plottene med en klype salt.

Det er klart fra resultatseksjonen at man kan spare opp mot 9 kroner per døgn i denne modellen ved å skru ovnene helt av om natten. Dette er en markant forskjell med tanke på rommets dimensjoner. Uheldigvis gjør dette at temperaturen i rommet faller ned til -13°C like før klokken 07:00. Dette er en temperatur de fleste ikke ønsker å ha om natta. En av grunnene til at rommet blir så kaldt kan være at rommet er helt umøblert. Dersom det hadde vært møbler og inventar i rommet, vil det ta lenger tid før disse varmes opp enn det tar for luft å varme opp, og de vil derfor holde på noe av rommets varme. Det bør også nevnes at vi har brukt samme U-verdi på gulvet, taket og veggene i rommet. I realiteten vil U-verdien på gulvet og taket være noe lavere. Dette kan også være grunner til at modellen gir en noe urealistisk lav temperatur ved avskrudde ovner.

Fra de to strategiene brukt i seksjon 6.3 ser vi at både temperaturavviket og ovnkostnadene er lavere når ovnene har evnen til å skru effekten ned til null over ett sekund. Dette gir mening, siden det forhindrer ovnene å gi unødvendig mye energi i rommet. Man kan imidlertid spørre seg hvor mye man kan forvente at en ovn kan endre effekten per tidsenhet uten å ødelegge elektronikken. Når det gjelder oppvarmingsstrategiene der ovnene aktivt gjør det de kan for å holde temperaturen nær idealtemperaturen, ser vi at ovnene med $\lambda = 1$ som tenker 15 minutter fram i tid gir både lavest temperaturavvik og lavest strømutfgift.

8 Konklusjon

Vi startet med å se på kun diffusjon for å modellere varmeoverføringen i rommet. Det viste seg etterhvert å være utilstrekkelig simulere et rom på en realistisk måte. Varmen fikk ikke spredt seg slik den gjør i virkeligheten. Det å neglisjere konveksjon i et fluid er ikke holdbart. Vi kom fram til at den metoden som balanserer kompleksitet og realistiske svar best, var en uniform varmekilde. Dette var strategien vi valgte for å generere resultater.

Vi testet tre strategier: *ovn med termostat, ovner som ser 15 minutter fram i tid og å skru av ovnene om natten*. For de to strategiene med ovnen påslått i løpet av natten, prøvde vi med ulik ovnsensitivitet λ . Med tanke på komforten Φ_1 , virker *ovner som ser 15 minutter fram i tid* med $\lambda = 1$ å gi best resultat. Med tanke på kostnaden Φ_2 , får testen *skru av ovnene om natten* best resultat. Men ettersom den gir uholdbare lave temperaturer om natten, virker *ovner som ser 15 minutter fram i tid* med $\lambda = 1$ å gi best økonomisk resultat.

Denne modellen fungerer helt greit, og har gitt interessante resultater. Den kan likevel forbedres, for eksempel med bedre modellering av konveksjon.

Det finnes også oppvarmingsstrategier vi ikke har testet ut, som kan være spennende å se på.

En ovn med termostat og kjennskap til idealtemperaturen fremover i tid vil holde temperaturen i rommet behagelig, gjør det marginalt bedre enn en ovn med termostat, og kjennskap til nåværende idealtemperatur. Å skru ovnen helt av om natten viste seg å ikke være en akseptabel strategi i den modellerte hytten.

Det er mulig at den beste oppvarmingsstrategien er en ovn som har kjennskap til idealtemperaturen, værmeldingen, og tilgang til temperaturdata fra innsiden og utsiden av rommet, og kan justere effekten basert på dette.

9 Videre arbeid

En av svakhetene til den opprinnelige modellen var at varmen ikke bredte seg raskt nok ved diffusjon alene. Adveksjonen som "løser" dette i virkeligheten ble tilnærmet med en ovn som hadde lik oppvarmingseffekt over alt. Denne modellen kan derfor gjøres mer virkelighetsnær om man tar utgangspunkt i f.eks. adveksjonsligningen. Denne gir en mer nøyaktiv beskrivelse av prosessen.

Det er ikke fjernt å trekke inn mer reguleringsteknikk for å se hvor bra det er mulig å kontrollere temperaturen i hytten når f.eks temperaturen i hele rommet er kjent, eller om man har termometre på visse punkter, utetemperaturen tas til betraktning osv. Det er også mange mer avanserte reguleringsstrategier som er verdt å teste.

Et annet element som har blitt neglisjert i dette prosjektet er kompleksiteten inne i ekte hytter. Man kan for eksempel ta til betraktningen at det er flere rom i hytten med vegger mellom seg, eventuelt med åpne eller lukkede dører mellom dem. Møbler i hytten vil også påvirke resultatet.

I en forbedret modell bør man kanskje ha en mer kontinuerlig idealtemperatur, slik at man ikke får temperatursjokk klokken 07:00, når temperaturen plutselig hopper med 4°C . Her trengs det imidlertid mer forskning på hvilken romtemperatur som er ideell for et menneske gjennom et døgn. Videre kan man legge inn slingringsmonn på idealtemperaturen, ettersom eventuelle temperatursensorer i rommet eller på ovnene kan ha usikkerhet opp mot 1°C .

Avslutningsvis kan man ta en helt annen innfallsvinkel på optimeringen av ovneffekten. Dette kan man for eksempel gjøre ved å formulere optimeringsproblemet på en måte som kan løses ved hjelp av gradientmetoden eller den konjugerte gradientmetoden.

10 Vedlegg

A Stabil-tilstandsløsning for Dirichletproblemet i et rektangulært prisme

Her er et bevis på at (25) er den analytiske løsningen på

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

over det rektangulære prismet $\mathcal{R} = [0, L] \times [0, W] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$, som tilfredsstillet randbetingelsene

$$\begin{aligned} T(0, y, z) &= T(L, y, z) = 0 && (\text{vest, øst}) \\ T(x, y, 0) &= T(x, y, H) = 0 && (\text{ned, opp}) \\ T(x, 0, z) &= f_0(x, z) && (\text{sør}) \\ T(x, W, z) &= f_W(x, z) && (\text{nord}), \end{aligned}$$

hvor f_0 og f_1 er gitte funksjoner (som er null hvis $x \in \{0, L\}$ eller $z \in \{0, H\}$).

Anta at det finnes en løsning på formen $T(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Da kan $\nabla^2 T = 0$ uttrykkes som $X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$. Del nå på XYZ . Da har vi

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0. \quad (27)$$

Siden de tre leddene avhenger av forskjellige variabler, er denne ligningen kun mulig dersom alle de tre leddene er konstante (dette ser man ved å isolere hvert ledd på den ene siden av likhetstegnet). Dermed fins det konstanter λ_x, λ_y og λ_z , slik at

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda_x X(x) &= 0 \\ Y''(y) - \lambda_y Y(y) &= 0 \\ Z''(z) + \lambda_z Z(z) &= 0. \end{aligned}$$

Videre er $\lambda_y = \lambda_x + \lambda_z$, som man kan se fra (27).

Anta at $\lambda_x > 0$. Da er den generelle løsningen for X gitt ved

$$X(x) = \frac{1}{2}Ae^{i\sqrt{\lambda_x}x} + \frac{1}{2}Be^{-i\sqrt{\lambda_x}x} = \frac{A+B}{2}\cos(\sqrt{\lambda_x}x) + i\frac{A-B}{2}\sin(\sqrt{\lambda_x}x).$$

Siden $0 = X(0) = \frac{A+B}{2}$, har vi $B = -A$, som gir

$$X(x) = Ai\sin(\sqrt{\lambda_x}x).$$

Nå er

$$0 = X(L) = Ai\sin(\sqrt{\lambda_x}L),$$

og siden $A \neq 0$, må $\sin(\sqrt{\lambda_x}L) = 0$, slik at $\sqrt{\lambda_x}L = k\pi$ for et positivt heltall k . Dermed er $\lambda_x = (\frac{k\pi}{L})^2$, og $X(x) = Ai\sin(\frac{k\pi}{L}x)$.

Anta tilsvarende at $\lambda_z > 0$. Om vi bruker samme argument for $Z(z)$, men med L byttet med H , så får vi $\lambda_z = (\frac{\ell\pi}{H})^2$ og $Z(z) = Bi\sin(\frac{\ell\pi}{H}z)$, hvor ℓ er et positivt heltall.

Spesielt har vi

$$\lambda_y = \lambda_x + \lambda_z = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{H}\right)^2 > 0.$$

For å komme videre antar vi at f_0 og f_1 kan uttrykkes ved doble Fourierrekker som

$$\begin{aligned} f_0(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} A_{k\ell} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right) \\ f_W(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} B_{k\ell} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Ligningen

$$Y''(y) - \lambda_y Y(y) = 0,$$

har den generelle løsningen

$$Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda_y} y} + De^{-\sqrt{\lambda_y} y}.$$

Vi får dermed en løsning $T_{k,\ell}$ som tilfredsstiller randbetingelsene på øst, vest, opp og ned-delene på randen av prismet, altså

$$\begin{aligned} T_{k\ell}(x, y, z) &= -AB \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right) (Ce^{\sqrt{\lambda_y} y} + De^{-\sqrt{\lambda_y} y}) \\ &=: (\alpha e^{\sqrt{\lambda_y} y} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_y} y}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right). \end{aligned}$$

Da er

$$T_{k,\ell}(x, 0, z) = (\alpha + \beta) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right)$$

og

$$T_{k,\ell}(x, W, z) = (\alpha e^{\sqrt{\lambda_y} W} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_y} W}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right).$$

Dersom vi nå krever at

$$\alpha + \beta = A_k \quad \text{og} \quad \alpha e^{\sqrt{\lambda_y} W} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_y} W} = B_k,$$

så får vi

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{B_k e^{\sqrt{\lambda_y} W} - A_k e^{-\sqrt{\lambda_y} W}}{e^{\sqrt{\lambda_y} W} - e^{-\sqrt{\lambda_y} W}} = \frac{B_k e^{\sqrt{\lambda_y} W} - A_k e^{-\sqrt{\lambda_y} W}}{2 \sinh(\sqrt{\lambda_y} W)} \\ \beta &= -\frac{B_k e^{\sqrt{\lambda_y} W} - A_k e^{-\sqrt{\lambda_y} W}}{e^{\sqrt{\lambda_y} W} - e^{-\sqrt{\lambda_y} W}} = -\frac{B_k e^{\sqrt{\lambda_y} W} - A_k e^{-\sqrt{\lambda_y} W}}{2 \sinh(\sqrt{\lambda_y} W)}. \end{aligned}$$

Substituerer vi dette tilbake i $T_{k,\ell}$, så gir dette

$$T_{k,\ell} = \left(\frac{\sinh((W-y)\sqrt{\lambda_y})}{\sinh(W\sqrt{\lambda_y})} A_k + \frac{\sinh(y\sqrt{\lambda_y})}{\sinh(W\sqrt{\lambda_y})} B_k \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right),$$

med

$$\lambda_y = \lambda_x + \lambda_z = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{H}\right)^2.$$

Siden ligningen $\nabla^2 T = 0$ er lineær, får vi til slutt at løsningen av initialproblemet er gitt ved superposisjonen

$$T(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} T_{k,\ell}(x, y, z).$$

Dersom rekkeutviklingene (28) holder, så er koeffisientene gitt ved

$$\begin{aligned} A_{k\ell} &= \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f_0(x, z) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right) dx dz \\ B_{k\ell} &= \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f_W(x, z) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right) dx dz, \end{aligned}$$

se [23] eller [24].

I det konkrete eksemplet i seksjon 5 er $f_0 = f_W = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$. Dersom

$$f_0 = f_W = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} A_{k\ell} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{H}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right),$$

så ser man lett at $A_{11} = B_{11} = 1$, og at $A_{k\ell} = B_{k\ell} = 0$ for alle andre valg av k og ℓ . Altså er løsningen i dette tilfellet rett og slett

$$T(x, y, z) = \left(\frac{\sinh\left((W - y)\sqrt{\lambda}\right)}{\sinh\left(W\sqrt{\lambda}\right)} + \frac{\sinh\left(y\sqrt{\lambda}\right)}{\sinh\left(W\sqrt{\lambda}\right)} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right),$$

med

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2.$$

B Tidsavhengig løsning med Robin-randbetingelse

La $\mathcal{R} = [0, L] \times [0, W] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$. Vi betegner de seks delene av randen $\partial\mathcal{R}$ som øst, vest, nord, sør, opp og ned, med den opplagte betydningen. Vi ønsker å løse systemet

$$T_t = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

i \mathcal{R} med initialtemperatur

$$T(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z),$$

og randbetingelsen

$$\nabla T \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} = -\frac{U}{\kappa} (T(\mathbf{x}, t) - T_{\text{ute}}(t)),$$

eller ekvivalent

$$\frac{\kappa}{U} \nabla T \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} + T(\mathbf{x}, t) = T_{\text{ute}}(t),$$

for $(\mathbf{x}, t) \in \partial R \times [0, t_*)$. Merk at vi har fjernet U -s avhengighet av posisjonen \mathbf{x} på randen for å gjøre problemet enklere. Hvis vi skriver ut disse randbetingelsene, er de

$$\frac{\kappa}{U} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, z, t) - T(0, y, z, t) = -T_{\text{ute}}(t) \quad (1. \text{ Vest.})$$

$$\frac{\kappa}{U} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(L, y, z, t) + T(L, y, z, t) = T_{\text{ute}}(t) \quad (2. \text{ Øst.})$$

$$\frac{\kappa}{U} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, z, t) - T(x, 0, z, t) = -T_{\text{ute}}(t) \quad (3. \text{ Sør.})$$

$$\frac{\kappa}{U} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}(x, W, z, t) + T(x, W, z, t) = T_{\text{ute}}(t) \quad (4. \text{ Nord.})$$

$$\frac{\kappa}{U} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, 0, t) - T(x, y, 0, t) = -T_{\text{ute}}(t) \quad (5. \text{ Ned.})$$

$$\frac{\kappa}{U} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, H, t) + T(x, y, H, t) = T_{\text{ute}}(t) \quad (6. \text{ Opp.})$$

Anta at T er en løsning på dette problemet, og skriv T på formen

$$T(x, y, z, t) = T_{\text{hom}}(x, y, z, t) + T_{\text{ute}}(t).$$

Observer så at funksjonen T_{ute} tilfredsstiller $\nabla^2 T_{\text{ute}} \equiv 0$, og alle randbetingelsene over. Dermed er

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{hom}}}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial T_{\text{ute}}}{\partial t} \\ &= \alpha \nabla^2 T - \frac{\partial T_{\text{ute}}}{\partial t} \\ &= \alpha \nabla^2 T_{\text{hom}} + \alpha \nabla^2 T_{\text{ute}} - \frac{\partial T_{\text{ute}}}{\partial t} \\ &= \alpha \nabla^2 T_{\text{hom}} - \frac{\partial T_{\text{ute}}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Altså tilfredsstiller T_{hom} varmeligningen, dog med kilde-leddet $-\frac{\partial T_{\text{ute}}}{\partial t}$. Videre får vi fra randbetingelsen over at T_{hom} tilfredsstiller den homogene Robin-randbetingelsen

$$\nabla T_{\text{hom}} \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} = -\frac{U}{\kappa} T_{\text{hom}},$$

eller ekvivalent

$$\frac{\kappa}{U} \nabla T_{\text{hom}} \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}} + T_{\text{hom}} = 0,$$

for $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{R}$, samt initialverdien

$$T_{\text{hom}}(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) - T_{\text{ute}}(0). \quad (29)$$

La oss prøve å finne T_{hom} . Anta at denne funksjonen kan skrives på formen

$$T_{\text{hom}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k, \ell, m} T_{k\ell m} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi y}{W}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right), \quad (30)$$

der $T_{k\ell m} = T_{k\ell m}(t)$, og summen tas over $(k, \ell, m) \in \{1, 2, 3, \dots\}^3$. For å redusere den ellers håpløse notasjonen, la oss skrive $S(\zeta)$ for $\sin(\zeta)$, $C(\zeta)$ for $\cos(\zeta)$, og

$$S_{k\ell m} = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi y}{W}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right).$$

Dersom vi substituerer (30) inn i $(T_{\text{hom}})_t = \alpha \nabla^2 T_{\text{hom}} - (T_{\text{ute}})_t$, så får vi

$$\sum_{k,\ell,m} T'_{k\ell m} S_{k\ell m} = -\alpha \sum_{k,\ell,m} \lambda_{k\ell m} T_{k\ell m} S_{k\ell m} - T'_{\text{ute}}(t), \quad (31)$$

hvor

$$\lambda_{k\ell m} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

Utleddningen krever at vi finner en dekomponering på formen

$$T'_{\text{ute}}(t) = \sum_{k,\ell,m} C_{k\ell m} f_{k\ell m}(t) S_{k\ell m}.$$

Da er det nok å ta hver $f_{k\ell m} = T'_{\text{ute}}(t)$, og velge $C_{k\ell m}$ slik at

$$\sum_{k,\ell,m} C_{k\ell m} S_{k\ell m} \equiv 1. \quad (32)$$

La oss gjøre dette. Multipliser (32) med $S\left(\frac{\hat{k}\pi x}{L}\right)$ og integrer fra 0 til L med hensyn på x . Da får vi

$$\sum_{\ell,m} C_{\hat{k}\ell m} S\left(\frac{\ell\pi y}{W}\right) S\left(\frac{m\pi z}{H}\right) = 2 \frac{1 - C(\pi \hat{k})}{\pi \hat{k}}.$$

Multipliser nå denne ligningen med $S\left(\frac{\ell\pi y}{W}\right)$ og integrer fra 0 til W med hensyn på y . Dette gir

$$\sum_m C_{\hat{k}\hat{\ell}m} S\left(\frac{m\pi z}{H}\right) = 2^2 \cdot \frac{1 - C(\pi \hat{k})}{\pi \hat{k}} \cdot \frac{1 - C(\pi \hat{\ell})}{\pi \hat{\ell}}.$$

Multipliser til slutt denne ligningen med $\sin\left(\frac{\hat{m}\pi z}{H}\right)$ og integrer fra 0 til H med hensyn på z . Da står vi igjen med

$$C_{\hat{k}\hat{\ell}\hat{m}} = 2^3 \cdot \frac{1 - C(\pi \hat{k})}{\pi \hat{k}} \cdot \frac{1 - C(\pi \hat{\ell})}{\pi \hat{\ell}} \cdot \frac{1 - C(\pi \hat{m})}{\pi \hat{m}}.$$

Eller, om vi bytter $\hat{k}, \hat{\ell}, \hat{m} \rightarrow k, \ell, m$ og forenkler:

$$C_{k\ell m} = \frac{2^3}{\pi^3 k\ell m} \cdot [1 - (-1)^k] \cdot [1 - (-1)^\ell] \cdot [1 - (-1)^m].$$

Med dette tar ligning (31) formen

$$\sum_{k,\ell,m} S_{k\ell m} \cdot [T'_{k\ell m} + \alpha \lambda_{k\ell m} T_{k\ell m} + C_{k\ell m} T'_{\text{ute}}(t)] = 0.$$

Siden dette holder for alle x, y og z , har vi for alle $k, \ell, m \geq 1$ at

$$T'_{k\ell m} + \alpha \lambda_{k\ell m} T_{k\ell m} = -C_{k\ell m} T'_{\text{ute}}(t).$$

Vi kan løse denne inhomogene førsteordens differensialligningen ved hjelp av den integrerende faktoren $e^{\bar{a}(t)}$, hvor

$$\bar{a}(t) = \int_0^t \alpha \lambda_{k\ell m} ds = \alpha \lambda_{k\ell m} t.$$

Spesifikt har vi for enhver konstant $\tilde{D}_{k\ell m}$ at

$$\begin{aligned} T_{k\ell m} &= \tilde{D}_{k\ell m} e^{-\bar{a}(t)} - \int_0^t e^{\bar{a}(s)-\bar{a}(t)} C_{k\ell m} T'_{\text{ute}}(s) ds \\ &= \tilde{D}_{k\ell m} e^{-\alpha\lambda_{k\ell m}t} - C_{k\ell m} e^{-\alpha\lambda_{k\ell m}t} \int_0^t e^{\alpha\lambda_{k\ell m}s} T'_{\text{ute}}(s) ds \end{aligned}$$

løser differensialligningen. Vi kan fjerne T'_{ute} ved hjelp av partiell integrering

$$\begin{aligned} T_{k\ell m} &= \tilde{D}_{k\ell m} e^{-\alpha\lambda_{k\ell m}t} - C_{k\ell m} e^{-\alpha\lambda_{k\ell m}t} \left[e^{\alpha\lambda_{k\ell m}t} T_{\text{ute}}(t) - T_{\text{ute}}(0) \right. \\ &\quad \left. - \alpha\lambda_{k\ell m} \int_0^t e^{\alpha\lambda_{k\ell m}s} T_{\text{ute}}(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Når vi setter $D_{k\ell m} = \tilde{D}_{k\ell m} + C_{k\ell m} T_{\text{ute}}(0)$ og samler leddene, står vi omsider igjen med

$$T_{k\ell m} = D_{k\ell m} e^{-\alpha\lambda_{k\ell m}t} - C_{k\ell m} T_{\text{ute}}(t) + \alpha C_{k\ell m} \lambda_{k\ell m} \int_0^t e^{\alpha\lambda_{k\ell m}(s-t)} T_{\text{ute}}(s) ds.$$

Spesielt er

$$T_{k\ell m}(0) = D_{k\ell m} - C_{k\ell m} T_{\text{ute}}(0). \quad (33)$$

Vi må fortsatt bestemme konstantene $D_{k\ell m}$. Sett derfor (30) inn i initialverdi betingelsen (29). Da får vi ligningen

$$\sum_{k,\ell,m} T_{k\ell m}(0) S_{k\ell m} = \varphi(x, y, z) - T_{\text{ute}}(0).$$

Vi gjentar prosedyren over. Multipliser begge sider med $S(\frac{\hat{k}\pi x}{L})$ og integrer fra 0 til L med hensyn på x , slik at

$$\sum_{\ell,m} T_{k\ell m}(0) S\left(\frac{\ell\pi y}{W}\right) S\left(\frac{m\pi z}{H}\right) = \frac{2}{L} \int_0^L S\left(\frac{\hat{k}\pi x}{L}\right) \varphi \, dx - 2T_{\text{ute}}(0) \frac{1 - C\left(\pi\hat{k}\right)}{\pi\hat{k}}.$$

Multipliser nå begge sider med $S\left(\frac{\hat{\ell}\pi y}{W}\right)$ og integrer fra 0 til W med hensyn på y . Da har vi

$$\begin{aligned} \sum_m T_{k\hat{\ell}m}(0) S\left(\frac{m\pi z}{H}\right) &= \frac{2^2}{LW} \int_0^W \int_0^L S\left(\frac{\hat{\ell}\pi y}{W}\right) S\left(\frac{\hat{k}\pi x}{L}\right) \varphi \, d(x, y) \\ &\quad - 2^2 T_{\text{ute}}(0) \frac{1 - C\left(\pi\hat{k}\right)}{\pi\hat{k}} \cdot \frac{1 - C\left(\pi\hat{\ell}\right)}{\pi\hat{\ell}}. \end{aligned}$$

Multipliser til slutt begge sider med $S\left(\frac{\hat{m}\pi z}{H}\right)$ og integrer fra 0 til H med hensyn på z . Dette gir

$$\begin{aligned} T_{k\hat{\ell}\hat{m}}(0) &= \frac{2^3}{LWH} \iiint_{0,0,0}^{L,W,H} S_{k\hat{\ell}\hat{m}} \varphi \, d(x, y, z) \\ &\quad - 2^3 T_{\text{ute}}(0) \frac{1 - C\left(\pi\hat{k}\right)}{\pi\hat{k}} \cdot \frac{1 - C\left(\pi\hat{\ell}\right)}{\pi\hat{\ell}} \cdot \frac{1 - C\left(\pi\hat{m}\right)}{\pi\hat{m}}. \end{aligned}$$

Bytter vi nå $\hat{k}, \hat{\ell}, \hat{m} \rightarrow k, \ell, m$, og sammenligner resultatet over med (33), så ser vi at

$$D_{k\ell m} = C_{k\ell m} T_{\text{ute}}(0) + \frac{2^3}{LWH} \iiint_{0,0,0}^{L,W,H} S_{k\ell m} \varphi(x, y, z) d(x, y, z) \\ - \frac{2^3}{\pi^3 k\ell m} T_{\text{ute}}(0) [1 - C(\pi k)] \cdot [1 - C(\pi \ell)] \cdot [1 - C(\pi m)].$$

Det første og siste leddet kansellerer hverandre, og vi står igjen med

$$D_{k\ell m} = \frac{2^3}{LWH} \iiint_{0,0,0}^{L,W,H} S_{k\ell m} \varphi(x, y, z) d(x, y, z).$$

Merk at dersom φ er konstant over \mathcal{R} , så kan vi trekke φ ut av integralet, og får i det tilfellet

$$D_{k\ell m} = \frac{2^3 \varphi}{\pi^3 k\ell m} [1 - (-1)^k] \cdot [1 - (-1)^\ell] \cdot [1 - (-1)^m].$$

Merk at $[1 - (-1)^k] \cdot [1 - (-1)^\ell] \cdot [1 - (-1)^m]$ er null dersom minst ett av tallene k, ℓ eller m er et partall, og er ellers lik 8.

Vi har nå utledet formlene fra Seksjon 5.4.

C Spesifikke parametre

La oss nå sette inn $T_{\text{ute}}(0) = 261.35$. Dette er temperaturen i kelvin fra målestasjonen på Røros ved starten av døgnet (-11.8°C). Vi setter også $\varphi(x, y, z) \equiv 291.15$. Dette er idealtemperaturen (18°C) i kelvin i rommet klokka 00:00 . Vi får da

$$D_{k\ell m} \doteq \frac{75.120274001808250}{k\ell m} [1 - (-1)^k] \cdot [1 - (-1)^\ell] \cdot [1 - (-1)^m],$$

og

$$C_{k\ell m} \doteq \frac{0.258012275465596}{k\ell m} [1 - (-1)^k] \cdot [1 - (-1)^\ell] \cdot [1 - (-1)^m].$$

D Bredden av diffusjonen

Hvis vi ser på varmeligningen, kan vi se for oss at vi er i et uendelig rom. Det vil være en grei approksimasjon for tilfellet vi skal se på.

Vi kan finne en ansatz [20] for temperaturutviklingen $T(\vec{r}, t)$:

$$T(\vec{r}, t) = C(6\pi\alpha t)^{-3/2} \exp\left\{\frac{-r^2}{4\alpha t}\right\}, \quad (34)$$

hvor vi kan skrive $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Derivasjon av (34) med hensyn på x gir

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Cx}{16\alpha^2 t^2 \pi \sqrt{(\pi\alpha t)}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4\alpha t}\right\} \quad (35)$$

$$= -\frac{x}{2\alpha t} T. \quad (36)$$

For y og z får man tilsvarende.

Hvis vi dervierer igjen med hensyn på x , får vi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{2Ce^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\alpha t}}}{32(\pi\alpha t)^{3/2}\alpha t} + \frac{2Cx^2e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\alpha t}}}{64(\pi\alpha t)^{3/2}\alpha^2 t^2} \quad (37)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha t}T + \frac{x^2}{4\alpha^2 t^2}T. \quad (38)$$

For y og z får man tilsvarende.

Dermed får vi for $\nabla^2 T$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (39)$$

$$= -\frac{3}{2\alpha t}T + \frac{r^2}{4\alpha^2 t^2}T. \quad (40)$$

Derivasjon av (34) med hensyn på t gir

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{3 \cdot 2e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\alpha t}}}{32(\pi\alpha t)^{5/2}} + \frac{2Cr^2e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\alpha t}}}{64(\pi\alpha t)^{3/2}\alpha t^2} \quad (41)$$

$$= -\frac{3}{2t}T + \frac{r^2}{4\alpha t^2}T. \quad (42)$$

Vi ser at ligning (42) er lik (40) multiplisert med α . Dermed ser vi at (34) tilfredsstiller varmeligningen (4), med $H(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

Man kan også se at (34) er en normalfordeling med variasjon

$$(\Delta x)^2 = 2\alpha t = (\Delta y)^2 = (\Delta z)^2.$$

Da har vi $(\Delta r)^2 = 6\alpha t \implies \Delta r = \sqrt{6\alpha t}$, og vi kan derfor si at bredden av varmediffusjonen er $\sqrt{6\alpha t}$.

Referanser

- [1] I. Brunborg, E24. Strømprisen slår ny årsrekord tirsdag
<https://e24.no/olje-og-energi/i/v5zxkm/stroemprisen-slaar-ny-aarsrekord-tirsdag?referer=https%3A%2F%2Fwww.vg.no> (Oppdatert desember 2021)
- [2] A. Samland. Syv spørsmål og svar om strømprisen
<https://www.regjeringen.no/no/tema/energi/stromnettet/syv-sporsmal-og-svar-om-stromprisen/id2873517/>
(Oppdatert januar 2022)
- [3] Statistisk Sentralbyrå. Energibruk i husholdningene
<https://www.ssb.no/energi-og-industri/energi/statistikk/energibruk-i-husholdningene>
(Oppdatert juli 2014)
- [4] Miljøfyrtårn. Fem tips for å bli bedre på strømsparing
<https://www.miljofyrtarn.no/fem-tips-for-a-bli-bedre-pa-stromsparing>
(Oppdatert februar 2022)
- [5] EPA, Local Energy Efficiency Benefits and Opportunities
<https://www.epa.gov/statelocalenergy/local-energy-efficiency-benefits-and-opportunities>
(Oppdatert juli 2021)
- [6] T. N. Narasimhan, Fourier's Heat Conduction Equation: History, Influences and Connections, <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02842327.pdf>
(1999)
- [7] S.L.Brunton. ME565 Lecture 9: Heat equation in 2D and 3D. 2D Laplace Equation (on rectangle)
<https://www.youtube.com/watch?v=hLNyvp6MrXs>
(Oppdatert april 2016)
- [8] E.M.Stein, R.Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [9] J.W.N. Mol, *A numerical method for the convection-diffusion equation around a spherical particle with surface reaction*, Delft University of Technology (2016).
- [10] D.L.Powers, *Boundary Value Problems : And partial Differential Equations*, Elsevier Academic Press, 5.utgave 2006.
- [11] D.A. Anderson, J.C. Tannehill, R.H.Pletcher, R.Munipalli, V.Shankar, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis Group, LLC., 4. Utgave, 2021.
- [12] S.Thomas, *Introduction to climate modelling*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [13] S.L.Kakani, A.Kakain, *Material Science*, Newage International Ltd., publishers, 2004.
- [14] A. Manzoni, Q.Alfio, S. Salsa, *Optimal Control of Partial Differential Equations*, Springer, 2021.

- [15] Incropera, DeWitt, D. P., Bergman, T. L., & Lavine, A. S. *Incropera's Principles of heat and mass transfer*, Global ed., Wiley, 8. utg., 2017.
- [16] Direktoratet for byggkvalitet. Byggteknisk forskrift (TEK17) med veiledning
<https://dibk.no/regelverk/byggteknisk-forskrift-tek17/14/14-3/?fbclid=IwAR0D00ZHzi8ABSp7removoBgX-ZZJ0ddCcmzwf1Sv0adHIMIZ09lQquzxsM>
 (Oppdatert februar 2022)
- [17] Norsk Klimaservicesenter-Observasjoner og værstatistikk
<https://seklima.met.no/observations>
 (Oppdatert 2022)
- [18] D. Pacheco. The Bedroom Environment.
<https://www.sleepfoundation.org/bedroom-environment>
 (Oppdatert april 2022)
- [19] WHO Housing and health guidelines. Geneva: World Health Organization; 2018.
 Licence: CC BY-NC-SA 3.0 IGO.
- [20] P.C. Hemmer, *Termisk fysikk*, Fagbokforlaget, 2002.
- [21] Engineering ToolBox. Air - Thermal Diffusivity vs. Temperature and Pressure.
https://www.engineeringtoolbox.com/air-thermal-diffusivity-d_2011.html
 (Hentet april 2022)
- [22] Engineers edge. Convective heat transfer https://www.engineersedge.com/heat_transfer/convection.htm (Hentet april 2022)
- [23] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*, John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [24] YouTube video på kanalen DarrenOngCL: 7.3 Double Fourier series
<https://www.youtube.com/watch?v=ljUTQ7eJ0QQ>
 (Oppdatert mars 2016)



Oppvarming av hytte

Tobias Meyer Andersen, Robin Fissum, Hannah Hansen, Anne Louise Kristoffersen, Endre Sørbo Pedersen, Lavran Thorstensen

Vi undersøker hvordan man kan bruke en eksplisitt differansemetode for å modellere varme i en hytte. Målet er å finne den oppvarmingsstrategien der hytten oppnår en behagelig innetemperatur ved lavest mulig strømforbruk.

Introduksjon

I norske husholdninger blir 80% av energiforbruket dekket av elektrisitet, og rundt 60% av det totale energiforbruket går til oppvarming av rom. Her kan det altså være potensial for å redusere strømforbruket gjennom mer effektiv oppvarming, og dermed redusere de økende kostnadene som følge av de voldsomme prisstigningene på strøm.

Hvordan bør man varme opp en hytte ved hjelp av en elektrisk ovn, slik at man bruker så lite strøm som mulig og samtidig oppnår en behagelig innetemperatur?

Vi ser for oss at hytta skal holde en idealtemperatur definert som 22 °C fra 07:00 til 23:00 og 18 °C om natten.

Teori

Varmeligningen med varmekilde tar formen

$$T_t = \alpha \nabla^2 T + \frac{1}{c_p \rho V} w$$

med Robin-betingelsen

$$\nabla T \cdot \vec{n}_x = -\frac{1}{\kappa} U(x)(T - T_{ute}),$$

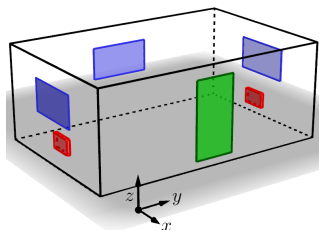
og løses numerisk ved hjelp av en eksplisitt differansemetode. Varmeligningen modellerer i utgangspunktet bare diffusjon, men vi får en brukbar modell som tar adveksjon med i betraktningen ved å bruke en uniform varmekilde.

Kostnaden av å varme opp rommet med effekt w beregnes som

$$\beta \int_I w(t) dt,$$

der β er strømkostnaden og $w(t)$ er ovnens effekt.

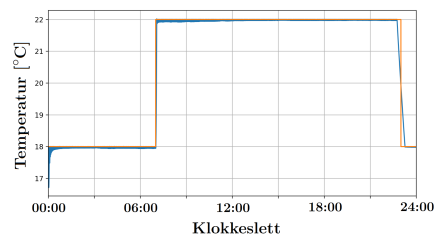
Rommet som modelleres er vist i figuren under. Modellen håndterer at vinduer, vegger, og dører har ulike evner til å lede varme. Utetemperaturen antas kjent og er hentet fra en værstasjon ved fylkesvei 30 i Rugldalen i Røros den 3. februar 2022.



Figur: Rommet med vinduer, ovner og dør markert.

Resultater

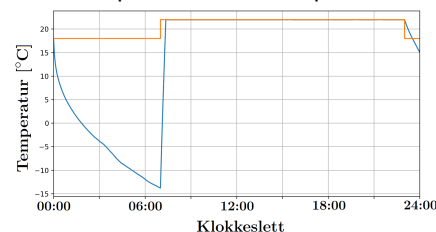
Vi testet tre oppvarmingsstrategier: *ovn med termostat, ovner som ser idealtemperaturen 15 min frem i tid og å skru av ovnene om natten.* I de to strategiene hvor vi har ovnen påslått, kan vi variere effekten λ ovnen skal justere med i et tidssteg. Da kan man vurdere om man ønsker lavest mulig kostnad, høyest komfort, eller finne en metode som balanser de to. I figuren under samsvarer gjennomsnittstemperaturen i rommet godt med idealtemperaturen, og vil score høyt på komfort.



Figur: Gjennomsnittstemperatur og idealtemperatur gjennom et døgn med ovn som ser 15 min frem i tid. $\lambda = 50$.

I neste figur slås ovnen av om natten.

Det vil minimere kostnaden i kroner svært bra, men temperaturen i rommet blir uakseptabel med tanke på komfort.



Figur: Gjennomsnittstemperaturen og idealtemperaturen gjennom et døgn med ovnen av om natta. $\lambda = 50$

Konklusjon

En ovn med termostat som kjenner den ideelle temperaturen frem i tid vil minimerte avviket fra idealtemperaturen bedre enn den som kun hadde termostat, og nattsinking ved å skru av ovnen viste seg å ikke være et akseptabelt alternativ. Det har også vist seg at diffusjon ikke er tilstrekkelig, og at det i tillegg er nødvendig å modellere adveksjon for å få en realistisk modell.

Videre arbeid

Etter endt prosjekt har vi fortsatt noen punkter som vi kunne jobbet mer med for å få en mer realistisk modell. Det første punktet er å modellere adveksjon mer realistisk. Det andre punktet er å trekke inn mer reguleringssteknikk når det gjelder ovnsstrategier. Det tredje punktet er å modellere en hytte med mer enn ett enkelt rom. Det fjerde punktet er å ikke ha en så brå endring på idealtemperaturen. Det femte punktet er å se på muligheten for å løse problemet ved hjelp av gradientmetoden. En kan også se for seg at ovnen har tilgang på temperaturen ute, slik at det kan tas til betraktning for å avgjøre effekten.