Funktionenräume

Dozent: Prof. Dr. M. Griesemer

Vorlesungsmitschrieb[1]

Stand 3. Juli 2015

Universität Stuttgart, Sommersemester 2015

[1]Für Hinweise bezüglich Inhalt oder Form via eMail (uni@robinlang.net) bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Motivation

1) Elektron im Feld statischer Kerne. Suche $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $E \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(-\Delta_x - \sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{|x - R_i|} \right) \varphi = E\varphi,$$

wobei $z_i \in \mathbb{N}$ und $R_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, \dots, N$ ist. Die Lösungen sind im Allgemeinen nicht in $C^2(\mathbb{R}^3)$ sondern in $H^2(\mathbb{R}^3)$, d.h.

$$-\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial_{x_i}^2} \varphi$$

ist im Sinn **schwacher Ableitungen** zu verstehen.

2) Elektrostatik: Das Potential Φ zur Ladungsverteilung $\rho \in L^1(\Omega)$, für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, umgeben von einem Leiter Ω^c, ist bestimmt durch das Randwertproblem (RWP)

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\Phi &= 4\pi\rho \qquad &&\text{in } \Omega, \\ \Phi &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}\right\}$$

Die klassische C^2-Lösung minimiert das Funktional

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla\Phi|^2 - 8\pi\rho\Phi \right) \, \mathrm{d}x$$

bezüglich allen Funktionen Φ aus $\{\Phi \in C^2(\Omega) \mid \Phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, sofern sie existiert. Auch wenn der Minimierer existiert, so ist es doch einfacher, die Existenz zuerst im **Sobolev-Raum** $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$ nachzuweisen.
Frage: Wie regulär sind Funktionen aus $H^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$, etc?

Kapitel 1

Vorbereitung

- Ein **Gebiet** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und zusammenhängend und $\overline{\Omega}$ ist der **Abschluss** von Ω in $\mathbb{R}^n$.
- $G \subset\subset \Omega$ bedeutet, dass $\overline{G} \subset \Omega$ **kompakt** ist und somit $\operatorname{dist}(\overline{G}, \Omega^c) > 0$ gilt.
- Für $u : \Omega \to \mathbb{C}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der **Träger** von u definiert durch

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}.$$

Multiindices

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir verwenden folgende Notationen:

- $\alpha \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq \beta_i$ für alle $i = 1, \dots, n$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und
- $\alpha! = \alpha_1 \cdots \alpha_n$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$
- $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ für $\alpha \geq \beta$

Damit lässt sich nun der Binomische Lehrsatz verallgemeinern:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta},$$

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g)$$

Funktionenräume

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

- $C^m(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ hat stetige partielle Ableitungen } \partial^\alpha u \text{ bis zur Ordnung } |\alpha| = m\}$
- $C(\Omega) := C^0(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ ist stetig}\}$
- $C_0^m(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega\}$
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega)$
- $C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \geq 0} C_0^m(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Lebesgue-)messbar und $p \geq 1$. $L^p(\Omega)$ besteht aus Äquivalenzklassen messbarer Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$$

falls $1 \leq p < \infty$ und

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| := \inf\{\alpha \geq 0 \mid |u(x)| \leq \alpha \text{ f.ü.}\} < \infty$$

falls $p = \infty$. Zwei Funktionen u, v heißen **äquivalent** genau dann wenn

$$u \propto v \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = v(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

L^p versehen mit den Normen

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$
$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |u(x)| \quad (p = \infty)$$

ist ein **Banachraum**. Es gilt die **Höldersche Ungleichung**:

Satz. *Seien $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$, dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Theorem 1.1. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$, dann ist $C_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Satz 1.2. *Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ und $u_h(x) := u(x - h)$. Dann gilt $\|u_h - u\|_p \to 0$ für $h \to 0$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle (siehe Theorem 1.1) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - \varphi\|_p < \varepsilon/3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u_h - u\|_p &\leq \|\varphi_h - \varphi\|_p + \underbrace{\|u_h - \varphi_h\|_p}_{=\|u-\varphi\|_h} + \|u - \varphi\|_p \\ &< \|\varphi_h - \varphi\|_p + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon\end{aligned}$$

für $|h|$ klein genug, da supp φ kompakt und somit φ gleichmäßig stetig ist. □

Faltung und Glättung

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar, $x \in \mathbb{R}^n$ und sei $y \mapsto f(x - y)g(y)$ integrierbar, dann ist

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, \mathrm{d}y = (g * f)(x)$$

die **Faltung** von f mit g.

Satz 1.3. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist auch $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Beweis. Der Fall $p = 1, \infty$ verbleibt als Übung. Sei also $1 < p < \infty$ und q so, dass $1/p + 1/q = 1$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}|f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)|^{1/p} \cdot |g(y)|^{1/q} \, \mathrm{d}y \\ &\leq \|g\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p \cdot |g(y) \, \mathrm{d}y\right)^{1/p}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^p \, \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}y\right) \cdot \|g\|_1^{p/q} \, \mathrm{d}x \\ &= \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1^{1+p/q} < \infty.\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. □

Theorem 1.4 (Young'sche Ungleichung). *Seien* $1 \leq p, q \leq \infty$ *und* $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. *Falls* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *dann ist* $f * g \in L^r\mathbb{R}^n$ *und es gilt*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. Siehe [AF]. □

Sei im Folgenden

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ ist messbar mit } u \in L^p(K) \text{ für beliebige } K \subset\subset \Omega\}.$$

Lemma 1.5. *Sei* $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *dann gilt für* $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

(a) $J * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\partial^\alpha(J * u) = (\partial^\alpha J) * u$ *für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(b) *Falls* $\operatorname{supp} J \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$, *dann gilt* $\operatorname{supp}(J * u) \subset \operatorname{supp}(u)_\varepsilon$[1]

Beweis. **(a)** Skizze: (1) $J * u \in C(\mathbb{R}^n)$, (2) $\partial_{x_i}(J * u) = (\partial_{x_i} J) * u$ mit Satz von Lebesgue, (3) Induktion. □

Beispiele. **(a)** Für die Funktion J gegeben durch

$$J(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases}$$

gilt $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $0 \leq J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} J \subset \{|x| \leq 1\}$ und $\int J(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon).$$

Dann gilt

(i) $J_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $J_\varepsilon \geq 0$ und $\operatorname{supp} J_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$,

(ii) $\int J_\varepsilon(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

Lemma 1.6. *Sei* $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *stetig in der offenen Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Dann gilt für jede kompakte Menge* $K \subset \Omega$

$$\sup_{x \in K} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} J_\varepsilon * u(x) - u(x) &= \int J_\varepsilon(x-y) u(y)\, \mathrm{d}y - \underbrace{\int J_\varepsilon(x-y)\, \mathrm{d}y}_{=1}\, u(x) \\ &= \int J_\varepsilon(x-y)\big(u(y) - u(x)\big)\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| &\leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon} J_\varepsilon(x-y) |u(y) - u(x)|\, \mathrm{d}y \\ &\leq \sup_{y : |y-x| \leq \varepsilon} |u(y) - u(x)|. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon < \varepsilon_0 := \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Dann ist

$$\sup_{x \in K} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leq \sup_{x \in K_\varepsilon,\, y \in K_\varepsilon,\, |x-y| \leq \varepsilon} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+),$$

da u auf K_ε gleichmäßig stetig ist. □

[1] Dies ist die Menge aller x mit $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} u) < \varepsilon$ gemeint.

Theorem 1.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in L^p(\Omega)$. Dann gilt*

(a) $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$,

(b) $\|J_\varepsilon * u\|_{p,\Omega} \le \|u\|_{p,\Omega}$,

(c) $\|J_\varepsilon * u - u\|_{p,\Omega} \to 0$ *für* $\varepsilon \to 0^+$,

wobei $J_\varepsilon * u(x) = \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ *ist, d.h. setze u in* $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ *durch* $u(x) = 0$ *fort.*

Beweis. **(a)** Aus $u \in L^p(\Omega)$ folgt $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (siehe Blatt 1). Also ist nach Lemma 1.5 und Satz 1.3 $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Aus Satz 1.3 folgt weiter, dass

$$\|J_\varepsilon * u\|_{p,\Omega} \le \|J_\varepsilon * u\|p, \mathbb{R}^n \le \underbrace{\|J_\varepsilon\|_1}_{=1} \underbrace{\|u\|_{p,\mathbb{R}^n}}_{=\|u\|p,\Omega}.$$

(c) Nach Theorem 1.1 existiert ein $\Phi \in C_0(\Omega)$ mit

$$|u - \Phi\|_p < \delta/3 \quad \text{für } \delta > 0.$$

Nach Lemma 1.6 konvergiert dann

$$|J_\varepsilon * \Phi - \Phi| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+)$$

gleichmäßig auf $K := \operatorname{supp}(\Phi)_1 = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}\Phi) \le 1\}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p^p &= \int \left|J_\varepsilon * \Phi(x) - \Phi(x)\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&\le \sup_{x \in K} \left|J_\varepsilon * \Phi(x) - \Phi(x)\right|^p \int_K 1 \,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+).
\end{aligned}$$

Somit existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p < \delta/3$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\|J_\varepsilon * u - u\|_p &\le \|J_\varepsilon * (u - \Phi)\|_p + \|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p + \|\Phi - u\|_p \\
&\le \|J_\varepsilon\|_1 \cdot \|u - \Phi\| + \frac{2}{3}\delta < \delta.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Beweis. Nach Theorem 1.1 ist $C_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht. Sei also $u \in L^p(\Omega)$, $\delta > 0$ und $\Phi \in C_0(\Omega)$ mit $\|u - \Phi\|_p < \delta/2$. Nach Lemma 1.5 ist dann $J_\varepsilon * \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ falls $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\Phi, \Omega^c)$ und

$$\|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p < \frac{\delta}{2}$$

für ε klein genug (Theorem 1.7(c)). Also ist

$$\|J_\varepsilon * \Phi - u\|_p \le \|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p + \|\Phi - u\|_p < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

für ε klein genug. □

Satz 1.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Falls*

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann ist $u(x) = 0$ fast überall in Ω.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$K_n = \{x \in \Omega \mid |x| \leq n \text{ und } \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/n\}.$$

Also ist $K_n \subset \Omega$ kompakt, $K_n \subset K_{n+1}$ und $\bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega$. Weiter ist

$$\operatorname{dist}(K_n, K_{2n}^c) \geq \frac{1}{2n}.$$

Sei

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x)\chi_{K_n}(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Dann ist$u_n \in L^1(\Omega)$ und für $x \in K_n$ und $\varepsilon \leq 1/(2n)$ gilt

$$J_\varepsilon * u_{2n}(x) = \int_{|x-y| \leq \frac{1}{2n}} J_\varepsilon(x-y) u_{2n}(y) \, \mathrm{d}y = \int_\Omega J_\varepsilon(x-y) u(y) \, \mathrm{d}y = 0,$$

da $y \mapsto J_\varepsilon(x-y)$ in $C_0^\infty(\Omega)$ liegt. Es folgt $\chi_{K_n}(J_\varepsilon * u_{2n}) \equiv 0$, wobei

$$J_\varepsilon * u_{2n} \to u_{2n} \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Also gilt

$$\|\chi_{K_n} u\|_1 = \|\chi_{K_n} u_{2n}\|_1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\chi_{K_n}(J_\varepsilon * u_{2n})\|_1 = 0,$$

d.h. $u(x) = 0$ fast überall in K_n und somit auch

$$u(x) = 0 \quad \text{fast überall in } \bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega.$$

□

Kapitel 2

Sobolev-Räume

Schwache Ableitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Identität

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\partial^\alpha u) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Das motiviert folgende Definition:

Definition 2.1. *Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $u, b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit*

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, \mathrm{d}x$$

*für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann heißt v **schwache α-Ableitung** von u und man schreibt $v = \partial^\alpha u$.*

Bemerkungen. 1) Die schwache α-Ableitung ist eindeutig, falls sie exisitiert: Sind $v, \tilde{v}$ schwache α-Ableitungen von u, dann gilt

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und somit $v = \tilde{v}$ f.ü. in Ω. D.h. $v = \tilde{v}$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

2) Falls $u \in C^k(\Omega)$, dann ist $\partial^\alpha u$ für $|\alpha| \leq k$ die klassische α-Ableitung von u.

3) Es ist möglich, dass $\partial^\alpha u$ existiert aber $\partial^\beta u$ für ein $\beta \leq \alpha$ nicht existiert.

Beispiele. 1) Sei $u(x) = x \cdot \chi_{\{x \geq 0\}}(x)$. Dann ist $u' = \Theta$ die *Heaviside Funktion* aber Θ hat keine schwache Ableitung ($\Theta' = \delta$ im Distributionssinn).

Beweis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi' \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = x\varphi(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

□

2) Sei $u(x, y) = \Theta(x)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha = (1, 1)$, dann gilt $\partial^\alpha u = 0$ aber $\partial_x u$ existiert nicht.

Beweis.

$$\int u\partial^\alpha\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\Theta(x)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\Theta(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}_{=0} = 0.$$

Also ist $\partial^\alpha u = 0$. □

3) Für $\kappa < n-1$ gilt

$$\partial_i|x|^{-\kappa} = -\kappa\frac{x_i}{|x|^{\kappa+2}}.$$

2.0.1 Sobolevräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } \alpha:\ |\alpha| \le m\}$$

mit

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)$$
$$\|u\|_{m,\infty} := \max_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_\infty \qquad (p = \infty)$$

ist ein normierter Vektorraum.

Theorem 2.2. *Für $1 \le p \le \infty$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(u_k)_{k=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$, dann ist $(\partial^\alpha u_k)$ für jedes $|\alpha| \le m$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ (dieser ist vollständig). Also existiert ein u_α mit

$$\partial^\alpha u_k \to u_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

für alle α mit $|\alpha| \le m$. Sei $u = u_{\alpha=0}$. Zu zeigen ist $u_\alpha = \partial^\alpha u$ für alle α mit $|\alpha| \le m$.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann

$$\int_\Omega u\partial^\alpha u \,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k\partial^\alpha \,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{k\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u_k\varphi \,\mathrm{d}x$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha\varphi \,\mathrm{d}y.$$

Also ist $u_\alpha = \partial^\alpha u$ und somit $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ für alle α mit $|\alpha| \le m$ und somit $\|u_k - u\|_{m,p} \to 0$ für $k \to \infty$. Zu $(*)$:

$$\left|\int_\Omega (u\partial^\alpha\varphi - u_k\partial^\alpha\varphi)\ \mathrm{d}x\right| \le \|u - u_k\|_p\|\partial^\alpha\varphi\|_q \to 0 \qquad (k\to\infty),$$

wobei $1/q + 1/q = 1$. □

Beispiele. 1) Sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ und

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \alpha < n$$

Dann ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$\nabla u(x) = -\alpha \frac{x}{|x|^{\alpha+2}} \quad \alpha < n-1$$

(Blatt 1). Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{|x|<R} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x &= \alpha \int_{|x|<R} \frac{1}{|x|^{(\alpha+1)p}} \,\mathrm{d}^n x \\ &= \begin{cases} \alpha\omega_n \frac{R^{n-(\alpha+1)p}}{n-(\alpha+1)p} & \alpha < \frac{n}{p}-1 \\ \infty & \alpha \geq \frac{n}{p}-1 \end{cases}\end{aligned}$$

wobei $\omega_n = \int_{|x|=1}$ der Flächeninhalt der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ ist. Im Fall $\alpha < \frac{n}{p}-1$ folgt $u \in W^{1,p}(B_R(0))$ (dann $u \in L^p(B_R(0))$ Übung). Es gilt auch $u \in W^{1,p}(B_R(0))$. Dann folgt $\alpha < \frac{n}{p}-1$ (Übung).

Also

$$u \in W^{1,p}(B_R(0)) \iff \alpha < \frac{n}{p} - 1$$

2) Sei $(d_k)_{k\geq 1}$ dicht in $B_1(0)$ und

$$u(x) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}|x-a_k|^{-\alpha} \tag{2.1}$$

Dann ist $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ genau dann wenn $\alpha < \frac{n}{p}-1$.

Beweis. Falls $\alpha < \frac{n}{p}-1$, dann ist $u(x) = 2^{-k}|x-a_k|^{-\alpha}$ in $W^{1,p}(B_1(0))$ und $\|u_k\|_{1,p} \leq i^k C_{\alpha,p,n}$, also ist die Reihe $\sum_{k\geq 1} \|u_k\|_{W^{1,p}(B_1(0))} < \infty$, d.h. (2) ist absolut konvergent in $W^{1,p}(B_1(0))$ und somit $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ denn $W^{1,p}$ ist vollständig. Übung: $u \in W^{1,p}(B_1(0)) \implies \alpha < \frac{n}{p}-1$. □

Proposition 2.3. *Falls $n > p$ und $0 < \alpha < \frac{n}{p}-1$ dann ist $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ und trotzdem in jedem Punkt d_k divergent.*

Wir wollen nun zeigen, dass $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ dicht ist in $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen:

Satz 2.4. *Seien $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ und $|\alpha| \leq m$. Dann gilt*

i) $\partial^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$ *und* $\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^{\alpha+\beta} u$ *falls* $|\alpha| + |\beta| \leq m$.

ii) $\lambda u + \mu v \in W^{m,p}(\Omega)$ *und* $\partial^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda \partial^\alpha u + \mu \partial^\alpha v$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

iii) Ist $v \subset \Omega$ *offen, dann ist* $u \restriction V \in W^{m,p}(V)$.

iv) Ist $\gamma \in C_0^\infty(\Omega)$, *dann ist* $\gamma u \in W^{m,p}(\Omega)$ *und*

$$\partial^\alpha(\gamma u) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \gamma)(\partial^{\alpha-\beta} u)$$

Beweis. (i)-(iii) Übung (L.C. Evans).
(iv) Beweis der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned}\int (\gamma u)\partial_i \varphi \,\mathrm{d}x &= \int u(\gamma \partial_i \varphi) \\ &= \int u(\partial_i(\gamma\varphi) - (\partial_i\gamma)\varphi) \\ &= -\int (\partial_i u)(\gamma\varphi) + u(\partial_i\gamma)\varphi \\ &= -\int ((\partial_i u)\gamma + u\partial_i\gamma))\varphi.\end{aligned}$$

Per Induktion bekommt man nun die Leibnizregel für ∂^α (s. Evans). Aus der Leibniz-Regel folgt $\gamma u \in W^{m,p}(\Omega)$ denn $\partial^\beta\gamma \in C_0^\infty$ und $\partial^{\alpha-\beta} u \in L^p(\Omega)$. □

Lemma 2.5. *Ist $K \subset \Omega$ kompakt, dann existiert $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und $\varphi \equiv 1$ auf K und*

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)| \le c_\alpha \delta^{-|\alpha|}$$

wobei $\delta = \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$ und c_α ist unabhängig von K, Ω.

Beweis. Sei X_δ die charakteristische FUnktion von $K_{\delta/2} := \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x,K) \le \frac{\delta}{2}\}$. Sei $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ und $\varphi := J_\varepsilon * \chi_\delta$. Dann ist $0 \le \varphi \le 1, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \operatorname{supp}(\chi_\delta) \subset K_{\delta/2+\varepsilon} \subset \Omega$ nach Lemma 1.5. Außerdem gilt

$$\partial^\alpha \varphi = (\partial^\alpha J_\varepsilon) * \chi_\delta,$$

wobei $\partial^\alpha J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\alpha|}(\partial_\alpha J)_\varepsilon(x)$ und somit

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty &\le \|\partial^\alpha J_\varepsilon\|_1 \underbrace{\|\chi_\delta\|_\infty}_{=1} \\ &= \varepsilon^{-|\alpha|}\|(\partial^\alpha J)_\varepsilon\|_1 = \varepsilon^{-|\alpha|}\|\partial^\alpha J\|_1\end{aligned}$$

□

Satz 2.6 (Zerlegung der Eins). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega = \bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$ eine offene Überdeckung von Ω, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann existiert eine Folge $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega), k \in \mathbb{N}$ mit*

(i) $0 \le \psi_k \le 1$.

(ii) *supp$(\psi_k) \subset U$ für ein $u \in \mathcal{O}$.*

(iii) *Ist $K \subset \Omega$ kompakt, dann existiert $W \supset K$ offen, $K \subset W \subset \Omega$ und $m \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\sum_{k=1}^m \psi_k(x) = 1 \quad x \in W$$

*(bzw. $\sum_{k\ge1}\psi_k(x) = 1$ in Ω). (ψ_k) heißt eine **der offene Überdeckung** $\Omega = \bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$ **untergeordnete, lokal endliche Zerlegung der Eins**.*

Beweis. Sei $D \subset \Omega$ eine abzählbar und dicht und sei $(B(x_j, r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ die Folge der abgeschlossenen Kugeln welche alle Kugeln $\overline{B(x,r)}$ mit $X \subset D, r \in \mathbb{Q}$ und $\overline{B(x,r)} \subset U$ für ein $U \in \mathcal{O}$ umfasst.

Sei $V_j = \{x | |x - x_j| < \frac{r_j}{2}\} \subset B(x_j, r_j)$. Dann existiert $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

(i) $0 \le \varphi_j \le 1$

(ii) $\varphi_j \equiv 1$ auf V_j

(iii) supp $(\varphi_j) \subset B(x_j, r_j)$

(vgl. Lemma 4). Definiere

$$\begin{aligned}
\psi_1 &:= \varphi_1 \\
\psi_2 &:= (1-\varphi_1)\varphi_2 \\
&\vdots \\
\psi_j &:= (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\cdots(1-\varphi_{i-1})\varphi_i.
\end{aligned}$$

Dann gilt $0 \le \psi_j \le 1$, $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset \overline{B(x_i, r_i)}$ und

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_i = 1 - \prod (1-\varphi_i)$$

(FIXME) Da $\varphi_i = 1$ in V_i folgt $\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_i = 1$ in $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_j$. Sei $K \subset \Omega$ kompakt, dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j =: W$ denn □

Lemma 2.7. *Sei $u \in W^{m,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$ und sei $V \subset\subset \Omega$ offen. Dann gilt*

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_{W^{m,p}(V)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass

$$\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) = J_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$$

in V für $|\alpha| \le m$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \Omega^c)$. Nach Lemma 1.5 ist $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega)$ und

$$\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) = (\partial^\alpha J_\varepsilon) * u.$$

Sei $x \in V$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \Omega^c)$ Dann ist die Funktion $y \mapsto J_\varepsilon(x-y)$ in $C_0^\infty(\Omega)$ und somit

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha J_\varepsilon * u)(x) &= \int \partial^\alpha J_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int J_\varepsilon(x-y) \partial^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= J_\varepsilon * (\partial^\alpha u)(x).
\end{aligned}$$

$\partial^\alpha u \in L^p(V)$, $1 \le p < \infty$. Also nach Theorem 1.7, $J_\varepsilon * \partial^\alpha u \to \partial^\alpha u$ in $L^p(V)$ $(\varepsilon \to 0+)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|J_\varepsilon * u - u\|_{W^{1,p}(V)} &= \sum_{|\alpha \le m} \|\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) - \partial^\alpha u\|_{p,V}^p \\
&= \sum_{|\alpha| \le m} \|J_\varepsilon * (\partial^\alpha u) - \partial^\alpha u\|_{p,V}^p \to 0(\varepsilon 0+),
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.8 (Meyers, Serrin 1964)**.** *Für $1 \le p < \infty$ ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega_k = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{k} \quad \text{und } |x| < k\}.$$

Dann $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ und $\bigcup_{k \ge 1} \Omega_k = \Omega$ für $k \ge 2$. Sei

$$U_k = \Omega_{k+1} \cap \overline{\Omega_{k-1}}^c = \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}}$$

und $U_1 = \Omega_1$ Dann $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Sei (φ_j) eine der offene Überdeckung $\Omega = \bigcup_{i \ge 1} U_i$ untegeordnete lokal endliche Zerlegung der Eins (Satz 5) und sei $(\psi_k)_{k \ge 1}$ wie folgt definiert. ψ_1 ist die Summe der φ_i mit $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_1$. φ_2 ist die Summe der φ_i mit $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_2$ aber $\operatorname{supp}(\varphi_i) \not\subset U_1$

etc. Dann ist $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ dann $\overline{U}_k$ kompakt und somit ist ψ_k eine endliche Summe. Außerdem $0 \leq \psi_k \leq 1, \sum \psi_k(x) = 1$ in Ω, $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset U_k$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_k > 0$ so klein, dass

$$\operatorname{supp}(J_{\varepsilon_k} * (\psi_k U)) \subset U_k$$

und

$$\|J_{\varepsilon_k} * \underbrace{(\psi_k u)}_{\in W^{m,p}} - \psi_k u\|_{W^{m,p}(\Omega_k)} < 2^{-k}\varepsilon$$

(nach Lemma 6). Definiere

$$\varphi := \sum_{k \geq 1} J_{\varepsilon_k} * (\psi_\varepsilon U)$$

auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ sind nur endlich viele Summanden $\neq 0$ also $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. In Ω_k gilt

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(x) u(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k+1} J_{\varepsilon_i} * (\psi_j u)(x).$$

Also gilt

$$\|\varphi - u\|_{W^{m,p}(\Omega_k)} \leq \sum_{i=1}^{k+2} \|J_{\varepsilon_i} * (\psi_i u) - \psi_i u\|_{W^{m,p}(\Omega_k)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon \cdot 2^{-j} < \varepsilon$$

Mit monotoner Konvergenz folgt $\|\varphi - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \varepsilon$. □

2.1 Einbettungssätze

2.1.1 Sobolev-Ungleichungen

Beispiel. Es gilt

$$u : x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(B_1(0)) \iff \alpha < \frac{n}{p} - 1$$

Dieses Beispiel zeigt, dass mit steigender Dimension n FUnktionen mit “schlimmeren” Singularitäten immer noch in $W^{1,p}(\Omega)$ liegen können. In diesem Kapitel ist immer $p < n$ (später $p > n$, dann $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ für $k < m - \frac{n}{p}$).

Sei $1 \leq p < n$. Gibt es ein $q \geq 1$ und ein $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_p \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.2}$$

gilt? Falls (2.1.1) stimmt, dann gilt auch

$$\|u_\lambda\|_q \leq C\|\nabla u_\lambda\|_p \tag{2.3}$$

für alle $\lambda > 0$, wobei $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$ ist. Es gilt

- $\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \,\mathrm{d}x \cdot \lambda^{-n}$
- $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda(x)|^p \,\mathrm{d}x = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x.$

Einsetzen in (2.1.1) liefert $\|u\|_q \leq \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \cdot C\|\nabla u\|_p \quad \forall \lambda > 0$.

Falls $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, dann liefert $\lambda \to 0$ (bzw. $\lambda \to \infty$), dass $\|u\|_q = 0$ für alle $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Ein Widerspruch. Somit ist

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0 \iff \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

notwendig für die Gültigkeit von (2.1.1).

Definition 2.9. *Sei $1 \leq p < n$. Dann ist $p^* > p$ gegeben durch*

$$\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

d.h. $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Theorem 2.10 (Gagiardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sei $q \leq p < n$. Dann exististiert $C = C_{n,p} \in \mathbb{R}$, so dass gilt*

$$\|u\|_p^* \leq C\|\nabla u\|_p \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung.

- Die Konstante $C = C_{n,p}$ hängt nicht von $\operatorname{supp} u$ ab, dennoch kann man die Bedingung $\operatorname{supp} u \subset\subset \mathbb{R}^n$ nicht ersatzlos streichen (vgl $u \equiv 1$).
- Unser Beweis liefert $C = \frac{p(n-1)}{n-p}$. Der bestmögliche Wert von C ist jedoch $C = \sup_u \frac{\|u\|_{p^*}}{\|\nabla u\|_p}$ (dies lässt sich explizit berechnen und nimmt sogar ein Maximum an).

Beweis. Sei $p = 1$ und somit $p^* = \frac{n}{n-1}$. Sei $U \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$u(x) = u(x_1, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}y_i \quad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

und somit

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, \mathrm{d}y_i$$

bzw.

$$\begin{aligned} |u(x)|^n n - 1 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|\, \mathrm{d}y_i\right)^{1/(n-1)} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|\, \mathrm{d}x_i\right)^{1/(n-1)}. \end{aligned}$$

Wir integrieren beide Seiten bzgl. x_1 und verwenden die verallgemeinerte Hölderungleich. Wir bekommen so

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{n/(n-1)}\, \mathrm{d}x_1\right) \leq \left(\int_{-\infty} |\nabla u(x)|\, \mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|\, \mathrm{d}x\right)$$

□

(FIXME)
Sei $m > \frac{n}{p}$ bzw $1 > \frac{n}{p} \iff p > n$.

Theorem 2.11 (Morrey)**.** *$n < p \leq \infty$ und $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist u beschränkt, Hölderstetig mit Exponent $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ und*

$$\|u\|_{\alpha,\gamma} \leq C\|u\|_{1,p}$$

wobei C nur von n, p abhängt.

Beweis. $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ gilt: (FIXME)

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \,\mathrm{d}y \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(x)|}{|y-x|^{n-1}} \,\mathrm{d}y.$$

Hölderstetigkeit: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $r = |x-y| > 0$. Sei $W := B(x,r) \cap B(y,r)$. Für $z \in W$

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u(z)| + |u(x) - u(z)|.$$

Also

$$|u(x) - u(y)| \leq ⨍_W |u(x) - u(z)| \,\mathrm{d}z + ⨍_W |u(y) - u(z)| \,\mathrm{d}z$$

wobei

$$\begin{aligned}
⨍_W |u(x) - u(z)| \,\mathrm{d}z &\leq \frac{|B(x,r)|}{|W|} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| \,\mathrm{d}z \\
&= C_n ⨍_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| \,\mathrm{d}z \\
&\leq \frac{c_n}{\omega_n} \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} \,\mathrm{d}y \\
&\leq \frac{c_n}{\omega_n} \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y \right)^{1/p} \left(\underbrace{\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p/(p-1)}} \,\mathrm{d}y}_{=I(r)} \right)^{(p-1)/p}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
I(r) &= \omega_n \int_0^r \mathrm{d}t\, t^{n-1} \frac{1}{t^{(n-1)p/(p-1)}} \\
&= \omega_n \int_0^r \mathrm{d}t \frac{1}{t^{(n-1)/(p-1)}} \,\mathrm{d}t = \omega_n r^{1-(n-1)/(p-1)} \frac{1}{1 - \frac{n-1}{p-1}} \\
&= \omega_n r^{(p-n)/(p-1)} \frac{p-1}{p-n}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq c_n \|\nabla u\|_{L^p(B(x,r))} |x-y|^{1-n/p} + \|\nabla u\|_{L^p(B(y,r))} |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq C_{n,p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B(x,r) \cup B(x,r))}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \leq C_{n,p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Theorem 2.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n < p < \infty$ und $\gamma = 1 - n/p$, dann gilt $W_0^{1,p}(\Omega) \to C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$*

Beweis. Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und (u_n) eine Folge in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}$. Wir setzen u_n durch 0 zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^n$ fort. Dann gilt nach Theorem 2.11 ...

Da $C^{0,\gamma}$ ein Banachraum ist, existiert $\tilde{u} \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_n \to \tilde{u}$ bezechnet $\|\cdot\|_{0,\gamma}$ und insbesondere gleichmäßig. Da $u_n \to u$ in L^p folgt $\tilde{u} = u$ f.ü. Aus

$$\|u_n\|_{0,\gamma} \leq C \|u_n\|_{1,p}$$

folgt im Limes $h \to \infty$

$$\|\tilde{u}\|_{0,\gamma} \leq C \|\tilde{u}\|_{1,p}$$

wobei $\tilde{u}$ der stetige Repräsentant von u ist. □

Theorem 2.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$ und sei $m > \frac{n}{p}$. Dann gilt*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \in (0,1)$ mit

$$m - \frac{n}{p} \geq k + \gamma$$

Bemerkung. Ist $n/p \notin \mathbb{N}$ dann können wir $k = \left[m - \frac{n}{p}\right] = m - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$ und $\gamma = \left(m - \frac{n}{p}\right) - k = \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}$ wählen.

Ist $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ dann gilt die Einbettung für $k = m - \frac{n}{p} - 1$ und jedes $\gamma \in (0,1)$.

Beweis. 1. Falls $p > n$ dann ist $W_0^{m,p}(\Omega) \to C^{m-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit $\gamma = 1 - \frac{k}{p}$. (FIXME: überprüfen)

Beweis. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt für $|\alpha| \leq m-1$ nach Theorem 2.12.

$$\|\partial^\alpha u\|_{0,\gamma} \leq C\|\partial^\alpha u\|_{1,p} \leq C\|u\|_{m,p}.$$

Also

$$\|u\|_{m-1,p} = \max_{|\alpha| \leq m-1} \|\partial^\alpha u\|_\infty + \max_{|\alpha < m-1} |\partial^\alpha u|_\gamma \leq C\|u\|_{m,p} \tag{2.4}$$

Sei $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, $U_k \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u_n - u\|_{m,p} \to 0$. Dann folgt aus (1)

$$\|u_n - u_m\|_{m-1,\gamma} \leq C\|u_n - u_m\|_{m,p} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

D.h. (u_n) ist CF in $C^{m-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit $u_n \to \tilde{u}$ in $C^{m-1,\gamma}(\overline{\Omega})$. Da $u_n \to u$ in L^p folgt $\tilde{u} = u$ fast überall und aus

$$\|u_n\|_{m-1,\gamma} \leq C\|u_n\|_{m,p}$$

folgt im Limes $n \to \infty$: $\|\tilde{u}\|_{m-1,r} \leq C\|\tilde{u}\|_{m,p}$. □

2. $W_0^{m,p}(\Omega) \to W_0^{m-l,r}(\Omega)$ falls $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$ $(l < \frac{n}{p})$.

Beweis. Für $|\alpha| \leq m - l$, $n \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt $\partial^\alpha u \in W_0^{l,p}(\Omega) \to L^r(\Omega)$ nach Theorem **??**. insbesondere

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha u\| \leq C\|\partial^\alpha u\|_{l,p} &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m-l} \|\partial^\alpha u\|_{l,p} \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p \leq C''\|u\|_{m,p}\end{aligned}$$

Somit $\|u\|_{m-l,r} \leq \tilde{c}\|u\|_{m,p}$ für $\tilde{c} > 0$.

Für $p < n$, $\frac{n}{p} \not\in \mathbb{N}$, gilt die Behauptung des Theorems in der Form der Bemerkung nach dem Theorem

Beweis. Wähle $l \in \mathbb{N}$ mit

$$l < \frac{n}{p} < l + 1$$

d.h. $l = \left[\frac{n}{p}\right]$. dann gilt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{p} - l\right) \in (0, \frac{1}{n}).$$

Also ist $r > n$ und $l < \frac{n}{p} < m$. Aus (2) und (1) folgt also

$$W_=^{m,p}(\Omega) \to W_0^{m-l,r}(\Omega) \to C^{m-l-1,\gamma}(\overline{\Omega})$$

wobei

$$\gamma = 1 - \frac{n}{r} = 1 - (\frac{n}{p} - l) = l + 1 - \frac{n}{p} = [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}.$$

□

Für $p < n$ und $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ gilt die Behauptung des Theorems in der Form der Bemerkung:

$$W^{m,p}(\Omega) \to C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad k = m - \frac{n}{p} - 1, \gamma \in (0,1).$$

Beweis beruht auf Theorem 2.14 bzw auf

$$W^{1,n}_{=}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad n \leq q < \infty.$$

(falls Ω beschränkt ist braucht man das nicht vgl. Evans.) Wähle $l = \frac{n}{p} - 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{p} - 1\right) = \frac{1}{n}$$

(FIXME) und somit $r = n$. Nach (2), Theorem 2.14 und (1) gilt

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W_0^{m-l,n}(\Omega) \to W_{=}^{m-l-1,n,q}(\Omega) \to C^{m-\frac{n}{p}-1,\gamma}(\overline{\Omega})$$

wobei $\gamma = 1 - \frac{n}{q} \in (0,1)$ und $n < q < \infty$. $\square$

$\square$

(FIXME) Korrekturen In Theorem 2 und Theorem 3 braucht Ω nicht beschränkt zu sein!

Theorem 2.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $m = \frac{n}{p}$. Dann gilt*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

für alle $q \in [p, \infty)$.

Beweis. Das Theorem sei richtig für $m = 1$ und $p = n$, d.h.

$$W_0^{1,n}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad q \in [n, \infty) \tag{2.5}$$

Dann gilt für $m = \frac{n}{p} > 1$ nach Theorem **??**

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W_0^{1,r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{p} - m + 1\right) = \frac{1}{n}$$

für $q \in [n, \infty)$. Da $W_0^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ (FIXME)

$n = 1$: $W_0^{1,1}(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ (Blatt 3) also gilt sogar $W_0^{1,1}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\left(\int |u|^{\gamma n/(n-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{(n-1)/n} \leq \gamma \left(\int |u|^{(\gamma-1)n/(n-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{(n-1)/n} (\int |\nabla u|^n\,\mathrm{d}x)^{1/n} \quad \gamma > 1 \tag{2.6}$$

(FIXME) Wir zeigen induktiv, dass

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{q_j}(\Omega), \quad q_j = \frac{(n+j-1)n}{n-1} \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Verankerung:

$$W_0^{1,n}(\Omega) \to L^n(\Omega) = L^{q_0}(\Omega)$$

Schritt: Angenommen $W_0^{1,n}(\Omega) \to L^{q_j}(\Omega), j \geq 0$. Wähle γ so, dass

$$(\gamma - 1)\frac{n}{n-1} = q_j = \frac{(n+i-1)n}{n-1}.$$

D.h. $\gamma = n + j$. Dann $\gamma \frac{n}{n-1} = (n+i)\frac{n}{n-1} = q_{i+1}$ und somit nach (2.1.1)

$$(\int |u|^{q_j+1}\,\mathrm{d}x)^{(n-1)/n} \le (n+j)(\int |u|^{q_j}\,\mathrm{d}x)^{(n-1)/n}\|\nabla u\|_n$$

d.h.

$$\|u\|_{q_{j+1}}^{q_{i+1}(n-1)/n} \le (n+i)\|u\|_{q_i}^{q_i\frac{n-1}{n}}\|\nabla u\|_n$$

oder

$$\|u\|_{q_{i+1}}^{n+i} \le (n+i)\|u\|_{q_i}^{q_i(n-1)/n}\|\nabla u\|_n$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\|u\|_{q_{i+1}} &\le (n+j)^{q_i(n-1)/n}\|\nabla u\|_n \\ &\le (n+j)^{1/(n-i)} \\ &\le c_{n,j}\|u\|_{1,n}\end{aligned}$$

(FIXME) nach Induktionsannahme. Durch das übliche Approximationsargument ($C_0^\infty(\Omega) \subset L^{q_j}(\Omega)$ dicht) folgt nun $W^{1,n}(\Omega) \to L^{q_{i+1}}(\Omega)$.

Da $q_j \to \infty$ ($j \to \infty$) und $W_0^{1,n}(\Omega) \to L^n(\Omega)$ folgt die Behauptung (2.1.1). □

Theorem 2.15 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $p \le n$. Dann ist die Einbettung*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad (1 \le q < p^*)$$

kompakt wobei

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} &\quad p < n \\ p^* = \infty &\quad p = n\end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $p < n$. Wir zeigen zuerst, dass $W_0^{1,1}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ kompakt. Da Ω beschränkt ist, gilt $W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,1}(\Omega)$ und somit $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ kompakt. Sei $A = \{u \in W^{1,1}(\Omega) | \|u\|_{1,1} \le 1\}$. Wir zeigen, dass $\overline{A}^{\|\cdot\|_1}$ in $L^1(\Omega)$ kompakt ist. Sei $A_\varepsilon = \{u_\varepsilon|_\Omega | u \in A\}$ wobei

$$u_\varepsilon = (J_\varepsilon * u) \quad J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon}), \|J\|_1 = 1.$$

Schritt 1: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_1}$ kompakt in $L^1(\Omega)$.

Beweis. Es gilt für $u \in A$:

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x)| &= |\int J_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y| \\ &\le \|J_\varepsilon\|_\infty \|u\|_1 \le \varepsilon^{-n}\|J\|_\infty\|u\|_1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|\nabla u_\varepsilon(x)| &\le \int |\nabla J_\varepsilon(x-y)||u(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le \|\nabla J_\varepsilon\|_\infty \cdot \|u\|_1 \le c\varepsilon^{-n-1}.\end{aligned}$$

Somit ist A_ε gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig und somit ist $\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_\infty}$ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ (Arzela-Acoli). Daraus folgt dass $\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_1}$ kompakt ist in $L^1(\Omega)$. (**Beweis:** Sei (u_n) eine Folge in $\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_1}$.

Dann existiert (v_n) in A_ε mit $\|u_n - v_n\|_1 < \frac{1}{n}$ Da $\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_\infty}$ kompakt ist, existieren Teilfolgen (v_{n_k}) und $v \in C(\overline{\Omega})$ mit $\|v_{n_k} - v\|_\infty \to 0$. $\overline{\Omega}$ beschränkt, so folgt $v \in L^1(\overline{\Omega})$ underbrace

$$\begin{aligned}\|u_{n_k} - v\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|v_{n_k} - v\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{n_k} \\ &\leq c\|v_{n_k} - v\|_\infty + \frac{1}{n_k} \to 0 \quad (k \to \infty)\end{aligned}$$

□

Schritt 2: Für alle $u \in A$ gilt

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Beweis. Sei zuerst $u \in C_0^\infty(\Omega) \cap A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x) &= \int J_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int \varepsilon^{-n} J(\frac{y}{\varepsilon})u(x-y)\,\mathrm{d}y \quad z = \frac{y}{\varepsilon} \\ &= \int J(z)u(x - \varepsilon z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x) - u(x)| &= |\int J(z)(u(x-\varepsilon z) - u(x))\,\mathrm{d}z| \\ &\leq \int J(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}|u(x-\varepsilon z) - u(x)| &\leq \int_0^1 |\nabla u(x - t\varepsilon z)||\varepsilon z|\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon|z|\int_0^1 |\nabla u(x-t\varepsilon z)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Also

$$\int |u_\varepsilon(x) - u(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{|z|\leq 1} \mathrm{d}z J(z)|z| \int |\nabla u(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\|\nabla u\|_1 \leq \varepsilon\|u\|_1 \leq \varepsilon.$$

(FIXME) Sei nun $u \in A$. Dann existiert $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - \varphi\|_1 < \delta$ und $\|\varphi\|_{1,1} \leq 1$ denn $C_0^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ dicht. Dann gilt

$$\|J_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

Also

$$\begin{aligned}\|J_\varepsilon * u - u\|_1 &\leq \underbrace{\|J_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_1}_{\leq\|u-\varphi\|_1} + \|J_\varepsilon(u-\varphi)\|_1 + \|u-\varphi\|_1 \\ &\leq \varepsilon + 2\delta.\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ belibig war, folgt

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_1 \leq \varepsilon.$$

Wir zeigen jetzt, dass A total beschränkt ist in $L^1(\Omega)$. Dann ist $\overline{A}^{\|\cdot\|_1}$ total beschränkt und abgeschlossen also kompakt in $L^1(\Omega)$.

Wir zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ und $u_1, \ldots, u_n \in A$ mit

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B(u_i, \varepsilon)$$

(Kugeln in L^1-Norm). Wir wissen, dass $\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_1}$ kompakt ist. Aus

$$\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_1} \subset \bigcup_{U \in A} B(u_\varepsilon, \varepsilon)$$

folgt dass

$$\overline{A_\varepsilon}^{\|\cdot\|_1} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(u_{i,\varepsilon}, \varepsilon)$$

für $u_1, \dots, u_N \in A$. Nach Schritt 2 ist $\|u_{i,\varepsilon} - u_i\| \leq \varepsilon$. Also

$$B(u_{i,\varepsilon}, \varepsilon) \subset B(u_i, 3\varepsilon)$$

und aus $u \in A$ folgt $u_\varepsilon \in A_\varepsilon$ wobei $\|u_\varepsilon - u\| \leq \varepsilon$. Also

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(u_i, \psi_\varepsilon).$$

Also ist A total beschränkt. Wir haben also gezeigt, dass $W_0^{1,1}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ kompakt für $p < n$.

Sei $p > 1$. Da Ω beschränkt ist, ist $L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ stetig und somit auch $W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,1}(\Omega)$ stetig. Also ist $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ kompakt. Im Fall $p < n$ ist $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$ stetig und für $1 \leq q < p^*$ gilt

$$\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*} \quad \text{mit } \theta \in (0,1]$$

und

$$\|u\|_q \leq \|u\|_1 \|u\|_{p^*}$$

für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Sei (u_k) eine beschränkte Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$, z.B. $\|u_k\|_{1,p} \leq M$. Dann folgt

$$\|u_k - u_l\| \leq c\|u_k - u_l\|_1 (2M)^{1-\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Da $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ kompakt ist, enthält u_k eine L^1-Cauchyfolge. Diese sei auch mit (u_k) bezeichnet. Dann zeigt (2.1.1), dass (u_k) eine L^q-Cauchyfolge ist. Also ist $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ kompakt.

Im Fall $p = n > 1$ ist $1 \leq p - \varepsilon < n$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ und daher ist

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{\text{stetig}}{\to} W_0^{1,p-\varepsilon}(\Omega) \overset{\text{kompakt}}{\to} L^q(\Omega)$$

kompakt für $1 \leq q < \frac{n(p-\varepsilon)}{n-(p-\varepsilon)} = \frac{n(n-\varepsilon)}{\varepsilon}$. □

Bemerkung. Für $p > n$ ist $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ kompakt für $1 \leq q \leq \infty$ denn

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma = 1 - \frac{n}{p}.$$

stetig sowie

$$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$$

kompakt und

$$C^0(\overline{\Omega}) \to L^q(\Omega)$$

stetig.

Kapitel 3

Fortsetzungs- und Randoperatoren

Wir wollen nun Einbettungssätze für $W^{m,p}(\Omega)$ beweisen. Diese führen wir auf Einbettungssätze für $W^{1,p}(\Omega)$ zurück.

Die Idee ist die Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fortzusetzen zu Funktionen $\tilde{u} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ mit $\tilde{u} = u$ in $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. Dann können wir die bekannten Sätze auf $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ anwenden. Genauer suchen wir eine beschränkte lineare Abbildung $E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ mit $Eu = u$ in Ω. Die Existenz von E impliziert dass $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ dicht ist.

Erinnerung: Nach Meyers-Serrin ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ wobei $C^\infty(\Omega) \supset C^\infty(\overline{\Omega})$.

Diese Dichtheit brauchen wir für die Konstruktion von E:

Definition 3.1. *Der Rand von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist von der Klasse C^∞ falls zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Abbildung*

$$h : B(0, \eta) \to \mathbb{R} \quad B(0, \eta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

existiert so, dass (nach Verschiebung und Rotation des Koordinatensystems).

$$\Omega \cap U = \{(x', x_n) \in U | x_n > h(x'), x' \in B(0, \eta)\}$$

Theorem 3.2. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ von der Klasse C^0, dann ist $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ für $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren $U_1, ..., U_N \subset \mathbb{R}^n, N < \infty$ mit

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$$

so dass $\partial\Omega \cap U_i$ (nach Verschiebung un Rotation) als Graph einer stetigen Funktion h_i dargestellt werden kann. Sei $U_0 \subset \Omega$ offen mit $U_0 \supset \Omega \setminus (\bigcup_{i=1}^N U_i)$ so dass

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{N} U_i.$$

Sei $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine der offenen Überdeckung $(*)$ untergeordnete Zerlegung der Eins, d.h.

$$\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_i \quad \sum_{i=0}^{N} \varphi_i = 1 \quad auf \overline{\Omega}$$

(vgl. Satz 2.5).

Sei $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$. Wir wollen u approximieren durch Elemente aus $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$. Sei $u_i = \varphi_i u, i = 0, \ldots, N$. Dann ist $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ und

$$\sum_{i=0}^{N} u_i = u, \operatorname{supp}(u_i) \subset U_i$$

Für $i = 1, \dots, N$ setzen wir u_i durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort und definieren

$$u_{i,\tau}(x) = u_i(x + \tau e_n) \quad \tau > 0$$

wobei $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

FIXME(BILD?)

u_i ist C^∞ in

$$U_i \cap \Omega = \{(x', x_n) \in U_i | x_n > h(x'), x' \in B(0, \eta_i)\}.$$

u_i ist C^∞ in

$$\{(x', x_n) \in U_i | x_n > h(x') - \tau \quad x' \in B(0, \eta_i)\}$$

was eine offene Umgebung der kompakten Menge $\operatorname{supp}(u_{i,\tau}) \cap \overline{\Omega}$. Also ist $u_{i,\tau} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Es folgt $u_0 + \sum_{i=1}^N u_{i,\tau} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ wobei

$$\begin{aligned}\|u_0 + \sum_{i=1}^N u_{i,\tau} - u\|_{m,p} &= \|\sum_{i=1}^N (u_{i,\tau} - u_i)\|_{m,p} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \|u_{i,\tau} - u_i\|_{m,p,\Omega} \to 0 (\tau \to 0).\end{aligned}$$

Wenn

$$\|u_{i,\tau} - u_i\|^p_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u_i(x + \tau e_n) - \partial^\alpha u_i(x)|^p \to 0 (\tau \to 0).$$

Da $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht ist in $W^{m,p}(\Omega)$ folgt daraus die Behauptung des Theorems. □

□

Lemma 3.3. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $g : \Omega' \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen $\partial_i g, \partial_i g^{-1}, i, j = 1, \dots, n$. Dann wird durch $Tu = u \circ g$ eine bijektive, beschränkte, lineare Abbildung $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega'), 1 \leq p \leq \infty$ mit beschränkter Inversen definiert.*

Beweis. Sei $u \in L^p(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |u(g(x))|^p \, dx &\overset{x = g^{-1}(y)}{=} \int_\Omega |u(y)|^p |\det Dg^{-1}(y)| \, dy \\ &\leq C \int_\Omega |u(y)|^p \, dy\end{aligned}$$

Also $\|Tu\|_p \leq C' \|u\|_p$. Ebenso

$$\int_\Omega |u(y)|^p \, dy = \int |u(g(x))|^p |\det Dg(x)| \, dx$$

$$\leq C \int_\Omega' |u(g(x))|^p \, dx = C \|Tu\|^p_p.$$

T ist bijektiv, denn für $u \in L^p(\Omega')$ ist $u \circ g^{-1} \in L^p(\Omega)$ und $T(u \circ g^{-1}) = u$. □

Satz 3.4. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : \Omega' \to \Omega$ sei wie in Lemma 2. Dann ist $T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega'), 1 \leq p < \infty$, bijektiv und beschränkt mit beschränkter Inversen. Die Ableitung von $Tu, u \in W^{1,p}(\Omega)$, sind durch die Kettenregel gegeben.*

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nach Meyer-Serrin existiert eine Folge $u_k \in C^\infty(\Omega \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u_k \to uinW^{1,p}(\Omega)$. $Tu_k = u_k \circ g$ ist in C^1 und nach der Kettenregel gilt

$$\partial_i (u_k \circ g) = \sum_{l=1}^n ((\partial_l u_k) \circ g) \cdot (\partial_i g_l).$$

bzw.

$$\partial_i(Tu_k) = \sum_{l=1}^{n} T(\partial_l u_k)(\partial_i g_l) \tag{3.1}$$

Da $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ also nach Lemma (3.3)

$$\begin{aligned} Tu_k &\to Tu \quad &\text{in } L^p, &\qquad (3.2)\\ T(\partial_l u_k) &\to T(\partial_l) \quad &\text{in } L^p &\qquad (3.3)\end{aligned}$$

Da $\partial_i g_l \in L^\infty$ folgt aus (4.2), (4.2) dass

$$\partial_i(Tu_k) \to \sum_{l=1}^{n} T(\partial_l u)(\partial_i g_l) \quad (k \to \infty)$$

in L^p. Also ist $Tu \in W^{1,p}(\Omega')$ und

$$\partial_i(Tu) = \sum_{l=1}^{n} T(\partial_l u)(\partial_i g_l)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|\partial_i(Tu)\|_p &\leq \sum_{l=1}^{n} \|T\partial_l u\|_p \|\partial_i g_l\|_\infty \\ &\overset{Lm3.3}{\leq} C \sum_{l=1}^{n} \|\partial_l u\|_p \|\partial_i g_l\|_\infty \leq \tilde{C}\|u\|_{1,p}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|Tu\|_{1,p}^p = \|Tu\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i Tu\|_p^p \leq \overline{C}\|u\|_{1,p}.$$

□

Satz 3.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt $C^{0,1}(\overline{\Omega}) \subset W^{1,\alpha}(\Omega)$ und für $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega}$ und für $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ und für $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ gilt*

$$\max_{i=1,\dots,n} \|\partial_i u\|_\infty \leq |u|_{0,1}.$$

Beweis. Sei $\Omega_c \subset\subset \Omega$ und offen. Sei $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ der $i - te$ Einheitsvektor von $\mathbb{R}^n$.

Für $x \in \Omega_0$ und $\varepsilon > 0$ klein genug gilt

$$\begin{aligned}\partial_i(J_\varepsilon * u)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[(J_\varepsilon * u)(x + he_i) - (J_\varepsilon * u)(x)\right] \\ &\overset{x \in \Omega_c}{=} \lim_{h \to 0} \int J_{varepsilon}(y) \left[\frac{u(x + he_i - y) - u(x - y)}{h}\right] \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|\partial_i(J_\varepsilon * u)\|_\infty \leq |u|_{0,1} \quad u \in C^{0,1}(\Omega). \tag{3.4}$$

Da $L^\infty(\Omega_0) = L^1(\Omega_0)^*$ und $L^1(\Omega_0)$ seperabel ist, ist jede abgeschlossene Kugel in $L^\infty(\Omega_c)$ schwach-$*$-folgenkompakt. Wegen (4.6) existiert somit eine Folge $\varepsilon_k \downarrow 0$, so dass

$$\partial_i(J_{\varepsilon_k} * u) \overset{*}{\to} u_i \in L^\infty(\Omega_0)$$

Also für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_c) \subset L^1(\Omega_0)$

$$\int \partial_i(J_{\varepsilon_k} * u)\varphi \,\mathrm{d}x \overset{(k \to \infty}{\to} \int u_i \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Anderersets,

$$\int \partial_i(J_{varepsilon_k} * u)\varphi \,\mathrm{d}x = -\int (J_{\varepsilon_k} * u)\partial_i \varphi \,\mathrm{d}x \to - \in u\partial_i \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Also ist $u_i = \partial_i u$ in Ω_0 und

$$\begin{aligned} \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega_0)} &= \|u_i\|_{L^\infty(\Omega_0)} \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \|\partial_i (J_{\varepsilon_k} * u)\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq |u|_{0,1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Diese Ergebnisse sind anwendbar auf jede Teilmenge $\Omega_n \subset\subset \Omega$ eine Folge $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots \subset \Omega$ mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Für jedes Ω_n existert also eine schwache Ableitung $\partial_i u^{(n)}$ von u in Ω_n-

Für $l < n$ gilt

$$\partial_i u^{(n)}\big|_{\Omega_l} = \partial_i u^{(l)}$$

wegen der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung von u in Ω_l.

Wir definieren $\partial_i u$ durch

$$\partial_i u\big|_{\Omega_l} = \partial_i u^{(l)}$$

Dann ist $\partial_i u$ wohldefiniert, $\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\partial_i u$ ist die schwache Ableitung von u nach x_i. Aus (2.1.1) folgt $\|\partial_i u\|_\infty \leq |u|_{0,1}$. □

Satz 3.6. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : \Omega' \to \Omega$ bijektiv mit g, g^{-1} Lipschitz. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit* supp $(u) \subset\subset \Omega$. *Dann ist $Tu = u \circ g \in W^{1,p}(\Omega')$ und es gilt*

$$\partial_i (Tu) = \sum_{l=1}^{n} T(\partial_l u) \cdot (\partial_i g_l)$$

und $\|Tu\|_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Beweis. Für einen Beweis verweisen wir auf Dobrowolski: Lemma 6.9. □

Definition 3.7. *Der Rand vn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ist von der Klasse $C^{0,1}$ (Lipschitz-Rand) für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und Abbildung $h : B(0,\eta) \to \mathbb{R}$, $B(0,\eta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von der Klase $C^{0,1}$ existiert, so dass*

$$\Omega \cap U = \{(x', x_n) | x_n > h(x'), x' \in B(0,\eta)\}.$$

Nach Verschiebung nach Verschiebung und Rotation des Koordinatensystems.

Theorem 3.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand der Klasse $C^{0,1}$. Sei $\Omega \subset\subset \Omega_1$. Dann existiert eine stetige lineare Abbildung*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega_1), \quad 1 \leq p < \infty,$$

mit $Eu\big|_\Omega = u$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Beweis. Sei zuerst $\Omega = \{(x', x_n) | x_n > 0\}$ und $u \in C^1(\overline{\Omega} \cap W^{1,p}(\Omega)$. und $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Seien $u^+, \partial_i u^+$ die stetigen Fortsetzungne von $u_i \partial_i u$ auf $\overline{\Omega}$. Wir definieren für $x_n \leq 0$

$$u^-(x', x_n) = -3u^+(x', -x_n) + 4u^+ \left(x_1' - \frac{1}{2} x_n \right)$$

Dann gilt $u^{-1}(x', 0) = u^+(x', 0)$ und für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \to 0-} \partial_i u^{-1}(x', x_n) &= -3\partial_i u^+(x', 0) + 4\partial_i u^+(x', 0) \\ &= \partial_i u^+(x', 0). \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x_n \to 0-} \partial_n u^-(x', x_n) = \lim_{x_n \to 0} (3(\partial_n u^+)(x', -x_n) - 2(\partial_n u^+)(x', -\frac{x_n}{2}))$$
$$= \partial_n u^-(x', 0)$$

Wir definieren

$$(Eu)(x', x_n) = \begin{cases} u^+(x', x_n) & x_n \geq 0 \\ u^-(x', x_n) & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann ist $Eu \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n})$. und

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

FIXME: Es fehlen drei Vorlesung. Heute ist der 9.6.15

Theorem 3.9. *Jede Distribution $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich erweitern zu einem (eindeutig bestimmten linearen Funktional $L_u \in (H^s)^*$ wobei*

$$L_u(v) = \int \hat{u}(p)\hat{v}(-p)\,\mathrm{d}p \quad v \in H^s.$$

Die Abbildung $L : H^{-s} \to (H^s)^*$, $u \mapsto L_u$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Sei $L \in H^s(\mathbb{R}^n)^*$. Nach dem Satz von Riesz existiert $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $\|g\|_s = \|L\|$ und für alle $v \in H^s$:

$$\begin{aligned} L(v) &= \langle g, v\rangle_s \\ &= \int \overline{\hat{g}(p)}\hat{v}(p)(1+p^2)^s\,\mathrm{d}p \\ &\overset{p \to -p}{=} \int \overline{\hat{g}(-p)}(1+p^2)^s\hat{v}(p)\,\mathrm{d}p \\ &= \int \hat{u}(p)\hat{v}(-p)\,\mathrm{d}p \end{aligned}$$

wobei $\hat{u}(p) := \overline{\hat{g}(-p)}(1+p^2)^s$.

$\hat{u} \in \mathcal{S}'$, denn $\hat{g}(p)(1+p^2)^{s/2}$ ist in L^2. Also ist $u := \mathcal{F}^{-1}\hat{u} \in \mathcal{S}'$ und

$$\begin{aligned} \int |\hat{u}(p)|^2(1+p^2)^{-s}\,\mathrm{d}p &= \int |\hat{g}(-p)|^2(1+p^2)^{2s-s}\,\mathrm{d}p \\ &= \int |\hat{g}(p)|^2(1+p^2)^s\,\mathrm{d}p = \|g\|_s^2 < \infty. \end{aligned}$$

D.h. $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ und $L = L_u$ und

$$\|L\| = \|g\|_s = \|u\|_{-s}.$$

Frage: Wie sehen die Elemente von H^{-m}, $m \in \mathbb{N}$ aus?

Satz 3.10. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert f_α, $|\alpha| \leq m$, mit*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{in } \mathcal{S}'. \tag{3.6}$$

Umgekehrt ist jede Distribution der Form (3.10) in H^{-m}.

Beweis. Sei $u \in H^{-m}$. Nach Theorem 3.9 und nach Riesz existiert $v \in H^m$ so dass für alle $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
u(\varphi) &= \langle v, \varphi \rangle_m \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int \overline{\partial^\alpha v}(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int \underbrace{f_\alpha(x)}_{in L^2} \partial^\alpha \varphi(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha(\varphi).
\end{aligned}$$

Sei $f_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \overline{\partial^\alpha v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sei $f \in L^2$ und

$$u := \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Dann ist

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} \widehat{\partial^\alpha f_\alpha} = \sum_{|\alpha| \leq m} (ip)^\alpha \hat{f}_\alpha$$

wobei $\hat{f}_\alpha \in L^2$. Also □

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(p)|(1+p^2)^{-m/2} &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\hat{f}_\alpha(p)||p|^{|\alpha|} \frac{1}{(1+p^2)^{m/2}} \\
&\leq \sum_{|\alpha \leq m}
\end{aligned}$$

was quadratintegrierbar ist. Also $u \in H^{-m}$ □

3.1 Elliptische Regularität

Lemma 3.11. *Sind $u, v \in H^s$ und $\Delta u = v$ dann gilt $u \in H^{s+2}$.*

Beweis. Aus $\Delta u = v$ folgt $\widehat{\Delta u}(p) = \hat{v}(p)$, also

$$-p^2 \hat{u}(p) = \widehat{\Delta u}(p) = \hat{v}(p)$$

und somit

$$(1+p^2)\hat{u}(p) = \hat{u}(p) - \hat{v}(p).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(1+p^2)^{(s+2)/2} \hat{u}(p) &= (1+p^2)^{s/2}(1+p^2)\hat{u}(p) \\
&= (1+p^2)^{s/2}(\hat{u}(p) - \hat{v}(p))
\end{aligned}$$

was in L^2 ist, denn $u, v \in H^s$. □

Theorem 3.12. *Seien $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + Vu = Eu$$

wobei $E \in \mathbb{C}$ und $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar ist wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $V\big|_\Omega \in C^m(\Omega)$. Dann ist

$$u\big|_\Omega = C^k(\Omega) \quad \text{für } k < m + 2 - \frac{n}{2}.$$

Beweis. Nach Theorem 4.6 (Sobolev-Lemma) genügt es zu zeigen, dass

$$\varphi u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dann folgt $\varphi u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und somit $u \in C^k(\Omega)$.

Wir zeigen induktiv, dass

$$\varphi u \in H^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

für $k = 2, \dots, m+2$.

Aus $u \in H^3$ folgt $\varphi u \in H^2$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Also gilt (**??**) für $k = 2$. Wir rechnen nun den Induktionsschritt von $k = m+1$ auf $k = m+2$.

Sei (**??**) richtig für $k = m+1$. Dann gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi u) &= (\Delta\varphi u) + 2\underbrace{\nabla\varphi \cdot \nabla u}_{\div(\nabla\varphi\cdot u) - \Delta\varphi u} + \varphi\Delta u \\ &= -\Delta\varphi u + 2 \div (\nabla\varphi \cdot u) + \varphi(v - E)u\end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$\Delta\varphi \cdot u, \nabla\varphi \cdot u, \varphi u \in H^{m+1}$$

und somit

$$\div(\nabla\varphi \cdot u) \in H^m, \quad (v - E)\varphi u \in H^m$$

denn $V - E \in C^m(\Omega)$ und $\partial^\alpha(v - E) \in L^\infty(\operatorname{supp}\varphi)$ für $|\alpha| \leq m$.

Also $\Delta(\varphi u) \in H^m$ und somit $\varphi u \in H^{m+2}$ nach Lemma **??**. Das beweist (3.10) für $k = m+2$.

□

3.2 Das Dirichlet Prinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen beschränkt oder enthalten in einem Streifen, z.B. $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_n \leq d\}$. Wir betrachten das RWP

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

mit gegebener Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und gesuchter Funktion u. Eine klassische Lösung von (3.2) liegt in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Das fordert $f \in C(\Omega)$ was oft zu restriktiv ist. Sei u dennoch klassische Lösung von (3.2).

Wir multiplizieren $-\Delta u = f$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und benutzen dass

$$\div(\varphi\nabla u) = \nabla\varphi\nabla u + \varphi\Delta u$$

wegen $\int_{\partial\Omega} \varphi\overline{\nabla u} \cdot \overline{u}\, d\sigma = 0$ folgt aus Gauß

$$-\int_\Omega \varphi \cdot \Delta u \, dx = \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u \, dx.$$

Somit

$$\int \nabla\varphi\nabla u \, dx = \int \varphi f \, dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

was auch für $u \in H_0^1(\Omega)$ sinnvoll ist und sich auf alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ausdehnen lässt (wegen $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ dicht). Das motiviert:

Definition 3.13. *Eine schwache Lösung von* (**??**) *ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\int \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int v f \, dx$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Theorem 3.14 (Dirichlet–Riemann–Hilbert). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und enthalten in einem Streifen, z.B. $\Omega \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_n \leq d\}$. Dann hat das RWP (3.2) genau dann eine schwache Lösung $U \in H_0^1(\Omega)$ und dieses u ist der eindeutige Minimierer des Funktional $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla|^2 \, \mathrm{d}x - \mathrm{Re} \int \overline{v} f \, \mathrm{d}x$$

Beweis. Aus der Poincaré-Ungleichung (s. Blatt 3) folgt

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \geq c \int |v|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ wobei $C > 0$. Daher ist

$$\langle v, w \rangle := \int_\Omega \overline{\nabla v(x)} \cdot \nabla w(x) \, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt in $H_0^1(\Omega)$ und $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ ist äquivalent zur Norm von $H^1_=(\Omega)$. Sei $H = H_0^1(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist H ein Hilbertraum und

$$H \to \mathbb{C} : v \mapsto \int \overline{v} f \, \mathrm{d}x$$

ist ein beschränktes antilineares Funktional. Nach Riesz existiert $u \in H = H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int \overline{v} f \, \mathrm{d}x = \langle v, u \rangle = \int \overline{\nabla v(x)} \cdot \nabla u(x) \, \mathrm{d}x$$

für alle $v \in H = H_0^1(\Omega)$. Also ist u schwache Lösung von (3.2).

Nach Definition von F gilt

$$\begin{aligned}
F(v) &= \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - \mathrm{Re} \langle v, u \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle v, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle \right) - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle v - u, v - u \rangle - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle v - u, v - u \rangle + F(u)
\end{aligned}$$

denn

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle - \mathrm{Re} \langle u, u \rangle = -\frac{1}{2} \langle u, u \rangle.$$

□

3.3 Der Satz von Rellich für H^s-Räume

Wir erinnern

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{ I \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : I \text{ regulär und } \int (1 + x^2)^0 |I(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \} (s \in \mathbb{R})$$

und insbesondere $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) (s \in \mathbb{R})$.

Definition 3.15. $H_0^s(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\| \cdot \|_s}$

Bemerkung. 1. $H_0^s(\Omega) \to H_0^t(\mathbb{R})$ für $s \geq t$ (denn $H^0(\mathbb{R}^n \subset H^t(\mathbb{R}^n)$ und $\| \cdot \|_t \leq \| \cdot \|_s$ für $s \geq t$)

2. $H_0^s(\Omega) \subset \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) | \operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}\}$ (Sei $f \in H_0^s(\Omega)$ mit $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ in H^s mit $f_k \in C_c^\infty(\Omega)$, dann gilt $f(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C^\infty_{\overline{\Omega}^c}$. Sei nämlich $\varphi \in C^\infty_{\overline{\Omega}^c}$, dann $f_k(\varphi) = 0 (k \in \mathbb{N})$
   Wegen

$$|f_k(\varphi) - f(\varphi)| = |I_k(\check{\varphi}) - I(\check{\varphi})| = |\int (I_k(x) - I(x))\check{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x|$$
$$\leq \underbrace{\|f_k - f\|_s}_{\to 0} \left(\int (1+x^2)^{-s}|\check{\varphi}(x)|^2\right)^{1/2}$$

   gilt $f(\varphi) = \lim_{k\to\infty} f_k(\varphi) = 0$)

Lemma 3.16. $(1+x^2)^s \leq 2^{|s|}(1+(x-y)^2)^{|s|}(1+y^2)^s \quad (x, y \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R})$

Beweis. Sei $s \geq 0$, dann

$$1 + x^2 \leq 1 + 2((x-y)^2 + y^2 \leq 2(1+(x-y)^2)(1+y^2).$$

Sei $s \geq 0$, dann folgt

$$\frac{(1+x^2)^s}{(1+y^2)^s} = \frac{(1+y^2)^{|s|}}{(1+x^2)^{|s|}} \leq 2^{|s|}(1+(y-x)^2)^{|s|}.$$

□

Lemma 3.17. *Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ($s \in \mathbb{R}$). Dann gilt*

$$\widehat{\varphi f} = (2\pi)^{-n/2}\hat{\varphi} * \hat{f} \in \mathcal{S}' \cap C^\infty$$

und $(\hat{\varphi} * \hat{f})(x) = \int \hat{\varphi}(x-y)\hat{f}(y)\,\mathrm{d}x$ ($x \in \mathbb{R}^n$)

Beweis. **Schritt 1:** $y \mapsto \hat{\varphi}(x-y)\hat{f}(y)$ integrierbar und $\hat{\varphi} * \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$(1+x^2)^{s/2} \int |\hat{\varphi}(x-y)||\hat{f}(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$stackrel \text{Lem.1} \leq 2^{|s/2|} \int (1+(x-y)^2)^{|s/2|}|\hat{\varphi}(x-y)| \cdot (1+y^2)^{s/2}|\hat{f}(y)|\,\mathrm{d}y$$
$$\leq 2^{|s/2|}\|\varphi\|_{|s|}\|f\|_s < \infty (x \in \mathbb{R}^n)$$

1.2. $\hat{\varphi} * \hat{f}$ stetig. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, denn

$$(1+x^2)^{s/2}|(\hat{\varphi} * \hat{f})(x+h) - \hat{\varphi} * \hat{f}(x)| \leq 2^{|s/2|} \underbrace{\left(\int (1+y^2)^{|s|}|\hat{\varphi}(yh) - \hat{\varphi}(y)|^2\right)^{1/2}}_{\to 0\ (h\to 0)} \cdot \|f\|_s$$

nach Lebesgue unter Ausnutzung von Lemma 1. 1.3 $\hat{\varphi} * \hat{f}$ partiel differenzierbar mit

$$\partial_i(\hat{\varphi} * \hat{f}) = (\partial_i\hat{\varphi}) * \hat{f}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$(1+x^2)^{s/2}|(\hat{\varphi} * \hat{f})(x+he_i) - (\hat{\varphi} * \hat{f})(x) - (\partial_i\hat{\varphi}) * \hat{f})(x)|$$
$$2^{|s/2|} \underbrace{\left((1+y^2)^{|s|}\left|\frac{\hat{\varphi}(y+he_i) - \hat{\varphi}(y)}{h} - (\partial_i\hat{\varphi})(y)\right|^2 \mathrm{d}y\right)^{1/2}}_{to 0\ (h\to 0)} \|f\|_s$$

1.4 Iterativ $\hat{\varphi} * \hat{f} \in C^\infty$ mit $\partial^\alpha(\hat{\varphi} * \hat{f}) = (\partial^\alpha\hat{\varphi}) * \hat{f}$.

Schritt 2: $\widehat{\varphi f} = (2\pi)^{-n/2}\hat{\varphi} * \hat{f}$
2.1 $(x,y) \mapsto \hat{\varphi}(y-x)\hat{f}(x)\psi(y)$ integrierbar $(x \in \mathcal{S})$

$$\int \underbrace{\int (1+y^2)^{s/2}|\hat{\varphi}(y-x)\hat{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\leq 2^{|s/2|}\|\varphi\|_{|s|}\|f\|_s\ (y\in\mathbb{R}^n)}(1+y^2)^{-s/2}|\psi(y)|\,\mathrm{d}y \leq 2^{|s/2|}\|\varphi\|_{|s|}\|\check{\psi}\|_{-s} < \infty.$$

2.2 Sei $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{f\varphi}(\psi) = (\varphi f)\hat{\psi}) = f(\varphi\hat{\psi}) = (2\pi)^{-n/2} I(\check{\varphi} * \psi) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{f}(x)\cdot(\check{\varphi} * \psi)(x)\,\mathrm{d}x = \dots$$

denn $\hat{f}$ ist regulär und $\hat{f}\cdot(\check{\varphi} * \psi)$ integrierbar nach Schritt 2.1. Mit Fubini folgt

$$\widehat{f\varphi}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\int \hat{f}(x)\underbrace{\check{\varphi}(x-y)}_{=\hat{\varphi}(y-x)}\psi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Schritt 2.1, Fubini}}{=} (2\pi)^{-n/2}\int\int \hat{f}(x)\hat{(}y-x)\,\mathrm{d}x\psi(y)\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{-n/2}(\hat{\varphi} * \hat{f})(\psi).$$

□

Satz 3.18. *Sei Ω offen und beschränkt in $\mathbb{R}^n$, dann gilt $H_0^s(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ kompakt für $s > t$.*

Beweis. Sei (f_k) beschränkt in $H_0^s(\Omega) \subset \{f \in \mathcal{S}' : \operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}\}$, dann gilt $f_k = \varphi\cdot f_k (k \in \mathbb{N})$, wobei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi|_\Omega = 1$ ($\Omega \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \mathbb{R}^n$) (weil $\operatorname{supp} f_k \subset \overline{\Omega}$)
und außerdem

$$\hat{f}_k = (2\pi)^{-n/2}\hat{\varphi} * \hat{f}_k \in C^\infty$$

nach Lemma 2.
Schritt 1: $\mathcal{M}_k := \{\hat{f}_k\big|_K : k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in $C(K)$ und gleichmäßig gleichgradig stetig ($K \subset\subset \mathbb{R}^n$)
1.1

$$(1+x^2)^{s/2}|\hat{f}_k(x)| \leq C\|\varphi\|_{|s|}\underbrace{\|f_k\|_s}_{\leq M} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

und

$$\|\hat{f}_k\big|_K\|_\infty \leq \frac{CM\|\varphi\|_{|s|}}{\inf_{x\in K}(1+x^2)^{s/2}} < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Also ist $\mathcal{M}_k$ beschränkt in $C(K)$.
1.2

$$(1+x^2)^{s/2}|\underbrace{\partial_i\hat{f}_k(x)}_{=(2\pi)^n\partial_i(\hat{\varphi}*\hat{f}_k)=(2\pi)^{-n}(\partial_i\hat{\varphi})*\hat{f}_k}|$$

Also

$$\|\partial_i\hat{f}_k)\big|_K\|_\infty \leq C_K' < \infty \quad (k \in \mathbb{N})$$

damit ist $\mathcal{M}_k$ gleichmäßig und gleichgradig stetig.
Wegen Arzela Ascoli existiert Teilfolge $(\hat{f}_k)$ so dass $(\hat{f}_{k_i}\big|_K)$ Cauchyfolge in $C(K)$.
Schritt 2: (f_{k_i}) Cauchyfolge in H_0^t für alle $t < s$. Sei $\varepsilon > 0$

$$\|f_{k_i} - f_{k_j}\|_t^2 = \underbrace{\int (1+x^2)^t|\hat{f}_{k_i}(x) - \hat{f}_{k_j}(x)|^2\,\mathrm{d}x}_{:=(I)} + \underbrace{\int_{|x|>R}(1+x^2)^t|\hat{f}_{k_i}(x) - \hat{f}_{k_j}(x)|^2\,\mathrm{d}x}_{:=(II)}.$$

Es folgt

$$(I) \leq \underbrace{\int_{|x| le R} (1+x^2)^t \, \mathrm{d}x}_{<\infty} \, |\hat{f}_{k_i}|_{B_R} - \hat{f}_{k_j}|_{B_R}\|_\infty.$$

bzw.

$$(II) \leq \underbrace{(\sup_{|x|\geq R} (1+x^2)^{t-s})}_{\leq (1+R^2)^{-|t-s|} \to 0} \underbrace{\|f_{k_i} - f_{k_j}\|_s^2}_{\leq (2M)^2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

□

Kapitel 4

Interpolationstheorie

Sei $S := \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$

Lemma 4.1. *Sei $F : S \to \mathbb{C}$ beschränkt stetig und analytisch im Inneren von s. Für $0 \leq \theta \leq 1$. Sei*

$$M_\theta := \sup_{< \in \mathbb{R}} |F(\theta + iy)|.$$

Dann gilt

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Beweis. Sei zuerst $M_0 = 1 = M_1$. Also $|F(z)| \leq 1$ für $z \in \partial S$. Falls $F(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Dann gilt $|F(z)| \leq 1$ für alle $z \in \partial S_R$ wobei

$$S_R = \{z \in S || \operatorname{Im}(z)| \leq R\}$$

und $R \geq R_0$ mit R_0 groß genug. Also $|F(z)| \leq 1$ für alle $z \in S_R$ da der Betrag einer analytischen Funktion das Maximum auf dem Rand annimmt. Da $R \geq R_0$ beliebig groß gewählt werden kann folgt $|F(z)| \leq 1$ für alle $z \in S$.

Falls $F(z) \not\to 0$ ($|z| \to \infty$) dann sei

$$F_n(z) := F(z) e^{(z^2-1)/n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |F_n(\theta + iy)| &= \left| F(\theta + iy) e^{(\theta+iy)^2/n - 1/n} \right| \\ &\leq |F(\theta + iy)| e^{-y^2/n} \leq C e^{-y^2/n} \end{aligned}$$

da F beschränkt ist. Außerdem ist $F_n : S \to \mathbb{C}$ stetig und in $\operatorname{int} S$ analytisch. Außerdem

$$\left| F_n(\theta + iy)\big|_{\theta=0,1} \right| \leq |F(\theta + iy)\big|_{\theta=0,1}||e^{-y^2/n} \leq 1$$

Aus obigem folgt somit $|F_n(z)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$|F(z)| = \lim_{n \to \infty} |F_n(z)| \leq 1.$$

Seien $M_0, M_1 > 0$ und sei

$$G(z) = \frac{F(z)}{M_0^{1-z} M_1^z}.$$

Dann ist $G : S \to \mathbb{R}$ stetig, analytisch in $\operatorname{int} S$ und

$$G(\theta + iy) = \frac{F(\theta + iy)}{M_0^{1-\theta-iy} M_1^{\theta+iy}}.$$

Dann folgt

$$|G(\theta + iy)| = \frac{|F(\theta + iy)|}{M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}} \tag{4.1}$$

was beschränkt ist in S. Weiter

$$|G(iy)| \le \frac{M_0}{M_e} = 1, |G(1 + iy)| \le 1.$$

Nach dem oben gezeigtem gilt $|G(z)| \le 1$. Also folgt aus (4), dass

$$|F(\theta + iy)| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

□

Definition 4.2. *Ein Maßraum (Ω, μ) heißt σ-endlich falls Ω die abzählbare Vereinigung messbarer mengen mit endlichen Maß ist.*

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Lebesgue-Maß ist σ-endlich.

Lemma 4.3. *Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und sei $f \in L^p(\Omega)$ wobei $1 \le p \le \infty$. Sei q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann glt*

$$\|f\|_p = \sup_{\|s\|_q \le 1} \left| \int f(x) s(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \right|,$$

wobei das Supremum über alle messbaren Treppenfunktionen S

Beweis. "$\ge$" folgt aus Hölder. Für $1 < p < \infty$ ist $(L^p)^* = L^q, 1 < q < \infty$, und die Treppenfunktionen sind somit dicht in L^q. Also gilt "$=$" für $1 < p < \infty$.

Für $p = 1$ ist $q = \infty$ und f Treppenfunktion gilt "$=$" (Übung). Daraus folgt die Behauptung da Treppenfunktionen dicht in L^1 sind. Den Beweis für $p = \infty$ überlassen wir als Übung. □

Theorem 4.4 (Riesz–Thorin)**.** *Seien (Ω, μ), (Λ, ν) σ-endliche Maßräume und sei T ein linearer Operator mit*

$$T : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Lambda) \quad \textit{Norm } M_0$$

$$T : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Lambda) \quad \textit{Norm } M_1$$

wobei $1 \le p_0, q_0, p_1, q_1 \le \infty$. Seien $0 < \theta < 1$ und seien p, q definiert durch

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{1}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{1}{q_1}.$$

Dann gilt für alle $f \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$

$$\|Tf\|_q \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p$$

Bemerkung. $L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht, denn Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(\Omega)$ und gehören auch zu $L^{p_0} \cap L^{p_1}$. Somit lässt sich T eindeutig auf $L^p(\Omega)$ fortsetzen zu einem beschränkten Operator $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Lambda)$ mit

$$\|T\| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Beweis. Sei zuerst $p_0 = p_1$. Falls zusätzlich $q_0 = q_1$, dann ist nichts zu zeigen. Falls $q_0 \ne q_1$ dann gilt für $f \in L^{p_0} = L^{p_1} = L^p$.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &\le \|Tf\|_{q_0}^{1-\theta} \|Tf\|_{q_1}^{\theta} \\ &\le (M_0 \|f\|_{p_0})^{1-\theta} (M_1 \|f\|_{p_1})^{\theta} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Sei nun $p_0 \neq p_1$ und somit $p < \infty$. Dann sind Treppenfunktionen dicht in L^p und nach Lemma 4.3 genügt es zu zeigen, dass

$$| \int (Tf)(x) g(x) \, \mathrm{d}\nu| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p \|g\|_q,$$

für alle Treppenfunktionen f, g und $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$.

Sei $p(z), q'(z)$ für $z \in S$ definiert durch

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

und

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}$$

so dass $p(\theta) = p, q'(z) = q'$.

Seien f, g Treppenfunktionen und sei

$$f_z(x) = |f(x)|^{p/p(z)} \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

$$g_z(x) = |g(x)|^{q'/q'(z)} \frac{g(x)}{|g(x)|}$$

wobei $w/|w| := 0$, wenn $w = 0$. Dann gilt

$$f_\theta(x) = f(x), g_\theta(x) = g(x).$$

Sei

$$F(z) := \int_\Lambda (Tf_z)(x) g_z(x) \,^\circ .$$

Dann

$$F(\theta) = \int Tf(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

wir wollen nun Lemma 1 (fixme) auf F anwenden. Nach Annahme an f, g.

$$f(x) = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

$$g(x) = \sum_k \beta_k \chi_{B_k}(x)$$

und somit

$$F(z) = \sum_{i,k} |\alpha_i|^{p/p(z)} |\beta_k|^{q'/q'(z)} \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \frac{\beta_k}{|\beta_k|} \int_{B_k} (T\chi_{A_i}) \, \mathrm{d}\nu. \tag{4.2}$$

was in s stetig und in $\mathring{S}$ analytisch ist.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |F(it)| &\leq \|Tf_{it}\|_{q_0}\| \cdot \|g_{it}\|_{q_0'} \\ &\leq M_0 \|f_{it}\|_{p_0} \|g_{it}\|_{q_0'}, \end{aligned}$$

wobei

$$|f_{it}(x)| \leq |f(x)|^{p/p_0}.$$

Dann folgt $\|f_{it}\|_{p_0} = \|f\|_p^{p/p_0}$ und entsprechend aus

$$|g_{it}(x)| = |g(x)|^{q'/q_0'}$$

folgt $\|g_{it}\|_{q_0'} = \|g\|_{q'}^{q'/q_0'}$. Demnach folgt

$$|F(it)| \leq M_0 \|f\|_p^{p/p_0} \cdot \|g\|_{q'}^{q'/q_0}.$$

Analog

$$\begin{aligned}|F(1+it)| &\leq \|Tf_{1+it}\|_{q_1} \|g_{1+t}\|_{q_1'} \\ &\leq M_1 \|f_{1+it}\|_{p_1} \|g_{1+it}\|_{q_1'} \\ &\leq M_1 \|f\|_p^{p/p_1} \|g\|_{q'}^{q'/q_1'}.\end{aligned}$$

Die Beschränktheit von F auf S folgt aus (4).

Aus Lemma 1 (fixme) folgt nun

$$\begin{aligned}|F(\theta)| &\leq M_0^{1-\theta} \|f\|_p^{p/p_0(1-\theta)} \|g\|_{q'}^{q'/q_0(1-\theta)} M_1^\theta \|f\|_p^{p/p_1\theta} \|g\|_{q'}^{q'/q_1\theta} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p^{p/p(\theta)} \|g\|_{q'}^{q'/q'(\theta)} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \|g\|_{q'}\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\mathcal{F}(\varphi)(p) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ip\cdot x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

ist bijektiv mit

$$\begin{aligned}\|\hat{\varphi}\|_2 &= \|\varphi\|_2 \\ \|\hat{\varphi}\|_\infty &\leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi\|_1.\end{aligned}$$

Daher lässt sich $\mathcal{F}$ eindeutig fortsetzen zu einer beschränkten linearen Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2 \to L^2 : \quad \|F\|_{2,2} = 1$$
$$\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty \quad \|\mathcal{F}\|_{1,\infty} \leq (2\pi)^{-n/2}$$

Mit dem Satz von Riesz-Thorin folgt

Theorem 4.5 (Hausdorff-Young)**.** *Sei $1 \leq p \leq 2$ und sei q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Fourier-Transformation $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ hat eine eindeutige Fortsetzung zu einer beschränkten linearen Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$\|\mathcal{F}\|_{p,q} \leq (2\pi)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$$

Beweis. Wir verweisen auf die Übung. □

4.1 Freie Schrödingergleichung

Die Lösung des AWP

$$i\dot{\psi} = -\Delta\psi \qquad \psi\big|_{t=0} = \psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

für die gesuchte Funktion $t \mapsto \psi_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$\psi_t = e^{i\Delta t}\psi_0.$$

Die lineare Abbildung $e^{i\Delta t} := \mathcal{F}^{-1} e^{-ip^2 t} \mathcal{F}$ ist unität und für $\varphi \in L^1 \cap L^2$ gilt

$$\left(e^{i\Delta t}\varphi\right)(x) = (4\pi i t)^{-n/2} \int e^{i|x-y|^2/4t} \varphi(y)\, \mathrm{d}y.$$

Also

$$\|e^{i\Delta t \varphi}\varphi\||_\infty \leq (4\pi|t|)^{n/2} \|\varphi\|_1.$$

D.h. $e^{i\Delta t} : L^2 \to L^2$ ist isometrisch und $e^{i\Delta t} : L^1 \to L^\infty$ beschränkt.

Durch Interpolation (Riesz-Thorin) bekommen wir für $1 \leq p \leq 2$ und $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ die Abschätzung

$$\|e^{i\Delta t}\varphi\|_q \leq (4\pi|t|)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|\varphi\|_p$$

für alle $|t| > 0$. Solche Abschätzungen finden Anwendung in der Streutheorie. (Existenz der Wellenpakte für Potenzialstreeung) FIXME.

4.2 Der Interpolationssatz von Marcinkiewicz

Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $u : \Omega \to \mathbb{C}$ sei messbar. Die Verteilungsfunktion δ_k (Dibution function) von u ist definiert durch

$$\delta_u(t) := \mu\{x \in \Omega : |u(x)| > t\} \qquad t > 0.$$

Es gilt

$$\int_\Omega |u|\, \mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \delta_u(t)\, \mathrm{d}t \tag{4.3}$$

denn beide Seiten stimmen überein mit dem Produktmaß $\mu \otimes \lambda$ von $\{(x,t)||u(x)| > t\}$ wobei λ das Lebesgue auf $\mathbb{R}$ ist.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \lambda\{(x,t)||u| > t\} &= \int_{\{(x,t):|u(x)|>t\}} \mathrm{d}(\mu \otimes \lambda) \\
&\overset{\text{Fub.}}{=} \int_\Omega \mathrm{d}\mu(x) \int_{\{t||u(x)|>t\}} \mathrm{d}\lambda(t) = \int \mathrm{d}\mu(x)|u(x)| \\
&\overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{d}\lambda(t) \int_{\{x||u(x)|>t\}} = \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{d}\lambda(t)\delta_u(t). \\
&= \int_0^\infty \delta_u(t)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

als uneigentliches Riemann-Integral. □

Ist $0 < p < \infty$, dann ist

$$\int_\Omega |u|^p\, \mathrm{d}\mu \geq \int_{\{x:|u(x)|>t\}} |u|^p\, \mathrm{d}\mu \geq t^p \delta_u(t). \tag{4.4}$$

Also gilt

$$\delta_u(t) \leq \frac{c}{t^p} \quad \text{alle } t > 0, \tag{4.5}$$

wobei $c = \int |u|^p\, \mathrm{d}\mu$. Jede messbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$ welche einer Abschätzung der Form (4.2) genügt liegt $L^p_w(\Omega)$ (weak-L^p) per Definition von L^p_w. Für $u \in L^p_w(\Omega)$ definiert man die Quasinorm

$$[u]_p := (\sup_{t>0} t^p \delta_u(t))^{1/p}$$

$c = [u]_p^p$ ist die kleinste Konstante für welche (4.2) gilt. Nach (4.2) gilt

$$[u]_p \leq \|u\|_p$$

und somit gilt

$$L^p(\Omega) \subset L^p_w(\Omega).$$

Die Räume sind aber nicht gleich. Z.B. ist $u(x) = |x|^{-n}$ in $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ aber nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Aus (4.2) folgt

Lemma 4.6. *Sei $u : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und $0 < p < \infty$ dann*

$$\int |u|^p \, \mathrm{d}\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \delta_u(t) \, \mathrm{d}t \tag{4.6}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int |u|^p \, \mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu\{x||u(x)|^p > t\} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mu\{x||u(x)|^p > s^p\} p s^{p-1} \, \mathrm{d}s \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \delta_u(t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Die Gleichung (4.5) zeigt, dass für $u \in L^p(\Omega)$

$$\int_0^\infty t^{p-1} \delta_u(t) \, \mathrm{d}t < \infty,$$

während dieses Integral $u \in L^p_w(\Omega)$ sowohl bei $t = 0$ als auch bei $t = \infty$ logarithmisch divergent sein darf.

Falls $u \in L^{p_1} w(\Omega) \cap L^{p_2}_w(\Omega)$ mit $p_1 < p_2$. Dann ist $U \in L^p(\Omega)$ für $p_1 < p < p_2$ und

$$\|u\|_p^p \le \frac{p}{p - p_1} [u]_{p_1} + \frac{p}{p_2 - p} [u]_{p_2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int |u|^p \, \mathrm{d}\mu &= p \int_0^\infty t^{p-1} \delta_u(t) \, \mathrm{d}t \\ = p \int_0^1 t^{p-p_1-1} t^{p_1} \delta_u(t) \, \mathrm{d}t &+ p \int_1^\infty t^{p-p_2-1} t^{p_2} \delta_u(t) \, \mathrm{d}t \\ &\le [u]_{p_1}^{p_1} \frac{p}{p - p_1} + [u]_{p_2}^{p_2} \frac{p}{p_2 - p} \end{aligned}$$

Für den Beweis des folgenden Theorems brauchen wir dass die Minkowski-Ungleichung $\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$ $(p \ge 1)$ auf Integrale (statt Summe $u + v$) verallgemeinert werden kann: es gilt

$$\left(\int \mathrm{d}t \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}s u(t,s) \right)^p \right)^{1/p} \le \int \mathrm{d}s \left(\int \mathrm{d}t \, u(t,s)^p \right)^{1/p}$$

für $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ und $1 \le p < \infty$.

Mit anderen Worten

$$\| \int \mathrm{d}s u(\cdot, s) \|_p \le \int \mathrm{d}s \, \|u(\cdot, s)\|$$

(ein Beweis dazu ist zum Beispiel in Adams zu finden)

Seien X, Y Vektorräume messbarer Funktionen. Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt sublinear falls für alle $u, v \in X, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |F(u+v)| &\le |F(u)| + |F(v)| \\ |F(\alpha u)| &= |\alpha||F(u)|. \end{aligned}$$

Jeder lineare Operator $T : X \to Y$ ist sublinear.

Ist $F : L^p(\Omega) \to L^q_w(\Lambda)$ sublinear mit $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ dann sagt man

(a) F ist von starken (p,q)-Typ falls $F(L^p) \subset L^q$ und $\exists K$

$$\|F(u)\|_q \leq K\|u\|_p.$$

(b) F ist vom schwachen (p,q)-Typ falls $F(L^p) \subset L^q_w$ und $\exists K$

$$[F(u)]_q \leq K\|u\|_p \quad q < \infty$$

oder falls $q = \infty$ und F von starkem (p,∞)-Typ ist.

Bemerkung. $u \mapsto [u]_p$ hat die Eigenscheinft einer Norm bis auf die Δ-Ungleichung welche nicht erfüllt ist (Übung). Es gilt aber

$$[u+v]_p \leq 2[u]_p + 2[v]_p$$

(vgl. Blatt 8).

□

Theorem 4.7 (Marcinkiewicz)**.** *Seien (Ω,μ), (Λ,ν) σ-endliche Maßräume und sei $F : L^{p_i}(\Omega) \to L^{q_i}(\Lambda)$ sublinear und von schwachen (p_i,q_i)-Typ, $i = 0,1$, wobei $1 \leq p_0 \leq q_0 < \infty$, $1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \infty$ und $q_0 < q_1$. Sei $\theta \in (0,1)$ und*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Dann ist F von starken (p,q)-Typ.

Erinerung: Nach Voraussetzung ist

$$[F(u)]_{q_i} \leq c_i\|u\|_{p_i}, \quad i = 0,1,$$

wobei $[F(u)]_\infty := \|u\|_\infty$.

Beweis. **Fall:** $q_0 < q < q_1 < \infty$. Also $p_0, p_1 < \infty$. Sei $M > 0$, $u \in L^p(\Omega)$ und

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x) & |u(x)| \leq M \\ M\frac{u(x)}{|u(x)|} & |u(x)| > M. \end{cases}$$

Weiter sei

$$u_1(x) = u(x) - u_0(x) = \begin{cases} 0 & |u(x)| \leq M \\ M(1 - \frac{u(x)}{|u(x)|}) & |u(x)| > M. \end{cases}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} |u_0| &= \min\{|u_0|, M\} \\ |u_1| &= \max\{0, |u| - M\}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\delta_{u_0}(t) = \begin{cases} \delta_u(t) & t < M, \\ 0 \quad \&t \geq M. \end{cases}$$

$$\delta_{u_1}(t) = \delta_u(t+M).$$

Also

$$\int |u_0|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu = p_1 \int_0^M t^{p_1-1}\delta_u(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

$$\int |u_1|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu = p_0 \int_M^\infty t^{p_0-1}\delta_u(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

Wir müssen $\|F(u)\|_q$ durch $\|u\|_p$ abschätzen. Da F sublinear ist gilt

$$|F(u)| \leq |F(u_0)| + F(u_1)|.$$

Also $|F(u)| > t$. Dann folgt $|F(u_0)| > t/2$ oder $|F(u_1)| > t/2$ und somit

$$\delta_{F(u)}(t) \leq \delta_{F(u_0)}(t/2) + \delta_{F(u_1)}(t/2).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int |F(u)|^q \, \mathrm{d}\mu &= q \int_0^\infty t^{q-1} \delta_{F(u)}(t) \, \mathrm{d}t \\
&= q \int_0^\infty t^{q-1} \delta_{F(u_0)}(t/2) \, \mathrm{d}t + q \int_0^\infty t^{q-1} \delta_{F(u_1)}(t/2) \, \mathrm{d}t \\
&= 2^q q \int_0^\infty t^{q-1} \delta_{F(u_0)}(t) \, \mathrm{d}t + 2^q q \int_0^\infty \int_0^\infty t^{q-1} \delta_{F(u_1)}(t) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Diese Integrale sind durch $\|u\|_p$ abzuschätzen. Dazu wählen wir $M = t^\sigma$ mit geeignetem $\sigma > 0$. Also

$$\begin{aligned}
\delta_{F(u_0)} &= \\
\delta_{F(u_1)} &= .
\end{aligned}$$

Für das erste Integral bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{q-1} \delta_{F(u_0)}(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^\infty t^{q-1-q_1} t^{q_1} \delta_{F(u_0)}(t) \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty t^{q-1-q_1} [F(u_0)]_{q_1}^{q_1} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty t^{q-1-q_1} (c_1^{p_1} \|u_0\|_{p_1}^{p_1})^{q_1/p_1} \\
&\overset{(4.2)}{=} c_1^{q_1} \int_0^\infty t^{q-1-q_1} (p_1 \int_0^{t^\sigma} s^{p_1-1} \delta_u(s) \, \mathrm{d}s)^{q_1/p_1} \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq} c \left[\int_0^\infty \mathrm{d}s \int_{s^{1/\sigma}}^\infty \left((t^{q-1-q_1})^{p_1/q_1} s^{p_1-1} \delta_u(s) \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \, \mathrm{d}t \right] \\
&= c \left(\int_0^\infty \mathrm{d}s s^{p_1-1} \delta_u(s) \left(\int_{s^{1\sigma}} \mathrm{d}t \, t^{q-1-q_1} \right)^{p_1/q_1} \right)^{q_1/p_1} \\
&= c \left(\int_0^\infty \mathrm{d}s s^{p_1-1} \delta_u(s) \left(\frac{1}{q-q_1} t^{q-q_1} \big|_{s^{1/\sigma}}^\infty \right)^{p_1/q_1} \right)^{q_1/p_1} \\
&= c' \left(\int_0^\infty \mathrm{d}s \delta_u(s) s^{p_1-1+(q-q_1)/\sigma} \right)^{q_1/p_1} \\
&= c' \left(\int_0^\infty \mathrm{d}s \delta_u(s) s^{p-1} \right)^{q_1/p_1} \\
&= c' \left(\int_0^\infty \mathrm{d}s \delta_u(s) s^{p-1} \right)^{q_1/p_1} \\
&= c' \|u\|_p.
\end{aligned}$$

wenn $p_1 + \frac{(q-q_1)}{\sigma} \cdot \frac{p_1}{q_1} = p \iff \sigma = \frac{q-q_1}{p_2} \cdot \frac{p_1}{q_1}$. FIXME

Für das zweite Integral bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{q-1}\delta_{F(u_1)}(t)\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^\infty t^{q-1-q_0}[F(u_1)]_{q_0}^{q_0}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{q-1-q_0}(c_0\|u_1\|_{p_0}^{p_0})^{q_0/p_0}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(4.2)}{=} c_0^{q_0/p_0}\int_0^\infty t^{q-1-q_0}(p_0\int_{t^\sigma}^\infty s^{p_0-1}\delta_u(s)\,\mathrm{d}s)^{q_0/p_0} \\
F = c\int_0^\infty \mathrm{d}t\, &\left(\int_{t^\sigma}^\infty \mathrm{d}s\, t^{(q-1-q_0)p_0/q_0}s^{p_0-1}\delta_u(s)\right)^{q_0/p_0} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} c\left(\int_0^\infty \mathrm{d}s\left(\int_0^{s^{1/\sigma}} \mathrm{d}t\, t^{(q_1-q_0)}(s^{p_0-1}\delta_u(s))^{q_0/p}\right)^{p_0/q_0}\right)^{q_0/p_0} \\
&= c\left[\int_0^\infty \mathrm{d}s\, s^{p_0-1}\delta_u(s)\left(\underbrace{\int_0^{s^{1/\sigma}}\mathrm{d}t\, t^{q-1-q_0}}_{=\frac{1}{q-q_0}t^{q-q_0}|_0^{s^{1/\sigma}}}\right)^{p_0/q_0}\right]^{q_0/p_0} \\
&= c'\left[\int_0^\infty \mathrm{d}s\delta_u(s)s^{p_0-1+\frac{q-q_0}{\sigma}\cdot\frac{p_0}{q_0}}\right]^{q_0/p_0} = c''(\|u\|_p^p)^{q_0/p_0}.
\end{aligned}$$

Also wenn $\|u\|_p = 1$, dann

$$\|F(u)\|_q \leq K < \infty$$

und somit

$$\|F(u)\|_q = \|u\|_p \cdot \|F(u/\|u\|_p)\|_q \leq \|u\|_p \cdot K$$

wegen der Sublinearität von F. Aus der Annahme an p, q folgt

$$(1/p, 1/q) = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$$

Steigung auf zwei Arten ausrechnen (FIXME bzw. Inverse) und mit p/q multiplizieren:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{1/p_1 - 1/p}{1/q_1 - 1/q} = \frac{p/p_1 - 1}{q/q_1 - 1} = \frac{p-p_1}{q-q_1}\cdot\frac{q_1}{p_1} = 1/\gamma$$
$$\frac{p}{q}\cdot\frac{1/p - 1/p_0}{1/q - 1/q_0} = \frac{1-p/p_0}{1-q/q_0} = \frac{p_0-p}{q_0-q}\frac{q_0}{p_0} = 1/\gamma.$$

Fall 2: $q_1 = \infty$, $p_0 < p_1$. In diesem Fall kann man $M = M(t)$ so wählen, dass $\delta_{F(u_1)}(t) = 0$ für alle $t > 0$. Also

$$\int |F(u)|^q\,\mathrm{d}\nu = 2^q q\int_0^\infty t^{q-1}\delta_{F(u_1)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

was man wie zuvor abschätzt.

Fall 3: $q_1 = 0\infty$, $p_0 > p_1$. Jetzt wählt man $M = M(t)$, sodass $\delta_{F(u_1)}(t) = 0$, also

$$\int |F(u)|^q\,\mathrm{d}\nu \leq 2^q q\int_0^\infty t^{q-1}\delta_{F(u_0)}(t)\,\mathrm{d}t$$

was man wie zuvor abschätzt.

Fall 4: $q_0 < q < q_1 = \infty$ und $p_0 = p = p_1 < \infty$. Nach Definition von $[\cdot]_{q_0}$ gilt

$$t^{q_0}\delta_{F(u)}(t) \leq [F(u)]_{q_0}^{q_0} \leq (c_0\|u\|_{p_0=p})^{q_0}. \tag{4.9}$$

Andererseits $\delta_{F(u)}(t) = 0$ falls $t > \|F(u)\|_\infty$ oder

$$t > T = c_1\|u\|_{p_1} \geq \|F(u)\|_\infty.$$

D.h.

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|_q^q &= q\int_0^\infty t^{q-1}\delta_{F(u)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= q\int_0^T t^{q-1}\delta_{F(u)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(4.2)}{=} q\int_0^T t^{q-1-q_0}(c_0\|u\|_p)^{q_0}\,\mathrm{d}t \\
&= q(c_0\|u\|_p)^{q_0}\frac{1}{q-q_0}T^{q-q_0} \quad (T = c_1\|u\|_p \\
&= c\|u\|_p^q.
\end{aligned}$$

In Adams findet sich der Beweis auch mit mehr Details. □

4.2.1 Abstrakte Interpolation

Wir verallgemeinern den Satz von Riesz-Thorin. Sei X ein komplexer Banachraum und $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt (schwach) analytisch, falls die Funktion $z \mapsto \eta(f(z)) \in \mathbb{C}$ analytisch ist in Ω für alle $\eta \in X^*$.

Jede (schwach) analytische Funktion ist analytisch im Sinn, dass $z \mapsto f(z)$ differenzierbar ist, d.h.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert in X für alle $z \in$.

Für vektorwertige analytische Funktionen gilt ebenfalls das Maximumprinzip (Blatt 9). Daher gilt auch folgende Verallgemeinerung des Lemmas 4.1. Wie zuvor sei $S = \{z \in |0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$.

Theorem 4.8 (Hadamard)**.** *quatIst X ein komplexer Vektorraum und $F : S \to X$ stetig, beschränkt und analytisch in $\mathring{S}$ und ist*

$$M_\theta := \sup_{<\in\mathbb{R}} \|F(\theta + iy)\|, \quad \theta \in [0,1]$$

dann gilt $M_\theta \le M_0^{1-\theta}M_1^\theta$.

Anwendung: Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ mit $A^* = A$ und mit Eigenwerten in $I \subset \mathbb{R}$. Sei $f : I \to \mathbb{C}$. Dann definieren wir

$$f(A) = U^*\operatorname{diag}(f(\lambda_1), \quad , f(\lambda_n))U^*,$$

falls $U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Beispiel. 1) Für $A \ge 0$ ist $A^{1/2}$ definiert und $A^{1/2}A^{1/2} = A$.

2) Für $A > 0$ ist $\log(A)$ definiert und $\exp(\log A) = A$.

Satz 4.9. *Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ mit $A \ge 0$ und $\|AB\| \le 1$, $\|BA\| \le 1$. Dann gilt $\|A^{1/2}BA^{1/2}\| \le 1$.*

Beweis. Sei zuerst $A > 0$ und sei

$$F(z) = A^z BA^{1-z} = e^{z\log(A)}Be^{1-z}\log(A).$$

F ist ganz und somit stetig auf S und analytisch in $\mathring{S}$.

Außerdem gilt

$$F(x+iy) = e^{(x+iy)\log(A)}Be^{(1-x-iy)\log(A)}$$

wobei $e^{iy\log(A)}$ unitär ist und für $x \in [0,1]$ gilt

$$F(x+iy) = e^{(x+iy)\log(A)}Be^{(1-x-iy)\log(A)}$$

wobei $e^{iy\log(A)}$ unitär ist und für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}\|e^{x\log(A)}\| &= \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|^x \le \max(1+|\lambda_i|) \\ &= 1+\max|\lambda_i| = 1+\|A\|.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\|F(x+iy)\| &\le \|e^{x\log(A)}\|\cdot\|B\|\cdot\|e^{(1-x)\log(A)}\| \\ &\le \|B\|(1+\|A\|)^2\end{aligned}$$

für $x+iy \in S$. Außerde

$$\begin{aligned}\|F(iy)\| &= \|BA\| \le 1 \\ \|F(1+iy)\| &= \|AB\| \le 1.\end{aligned}$$

Also gilt nach Hadamard

$$\|A^{1/2}BA^{1/2}\| = \|F(1/2)\| \le 1.$$

Falls $A \ge 0$ wähle $\varepsilon > 0$ und definiere $A_\varepsilon = A+\varepsilon$, $B_\varepsilon = \frac{B}{1+\varepsilon\|B\|}$. Dann $A_\varepsilon > 0$ und

$$\begin{aligned}\|A_\varepsilon B_\varepsilon\| &= \|(A+\varepsilon)B\|\frac{1}{1+\varepsilon\|B\|} \\ &\le (\|AB\|+\varepsilon\|B\|)\frac{1}{1+\varepsilon\|B\|} \le 1.\end{aligned}$$

Ebenso $\|B_\varepsilon A_\varepsilon\| \le 1$. Also gilt

$$\|A_\varepsilon^{1/2}B_\varepsilon A_\varepsilon^{1/2}\| \le 1.$$

Gehen wir zu $\varepsilon \to 0+$ ergibt sich

$$\|A_\varepsilon^{1/2}B_\varepsilon A_\varepsilon^{1/2}\| = \|(A+\varepsilon)^{1/2}B(A+\varepsilon)^{1/2}\|\frac{1}{1+\varepsilon\|B\|} \to \|A^{1/2}BA^{1/2}\|.$$

Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X$ ein Unterraum. Der Quotientenraum X/M ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$[x] := \{y \in X | y-x \in M\} = X+M$$

versehen mit

$$\begin{aligned}[][x]+[y] &= [x+y] \\ \lambda[x] &= [\lambda x] \quad \lambda \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

für $x,y \in X$. □

Satz 4.10. *Sei X ein normierter Vektorraum. Dann*

a) Ist $M \subset X$ abgeschlossener Unterraum, dann wird durch

$$\|[x]\|_M := \inf_{y\in x+M}\|y\| = \operatorname{dist}(x,M) \le \|x\|.$$

b) Ist $M \subset X$ abgeschlossen und X vollständig dann ist $(X/M, \|\cdot\|_M)$ ein Banachraum.

Beweis. a) Δ-Ungleichung: Sei $[x_1],[x_2] \in X/M$, $\varepsilon > 0$ und $y_k \in [x_k]$ mit $\|y_k\| \le \|[x_k]\|+\varepsilon$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}&\|[x_1]+[x_2]\| = \|[y_1]+[y_2]\| \\ &= \|[y_1+y_2]\| \le \|y_1+y_2\| \le \|y_1\|+\|y_2\| \le \|[x_1]\|+\|[x_2]\|+2\varepsilon.\end{aligned}$$

b) Wir verwenden, dass ein normierter Raum genau dann vollständig ist, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergent ist.

Sei also $\sum_{k\geq 0} \|[x_k]\| < \infty$. Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty}[x_k]$ in X/M konvergiert. Wähle $y_k \in [x_k]$ mit $\|y_k\| \leq \|[x_k]\| + \sum 2^{-k} y \infty$ und somit existiert $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \in X$, da X vollständig ist.

Außerdem

$$\begin{aligned} \|[y] - \sum_{k=1}^{N}[x_k]\| &= \|[y] - \sum_{k=1}^{N}[y_k]\| \\ &= \|[y - \sum_{k=1}^{N} y_k]\| \leq \|y - \sum_{k=1}^{N} y_k\| \to 0 (N \to \infty). \end{aligned}$$

□

Wir verallgemeinern nun die Situation bei Riesz–Thorin. Seien X_0, X_1 Banachräume (über $\mathbb{C}$) die Unterräume eines größeren Vektorraums V sind. Wir konstruieren Interpolierende Banachräume $X_t, t \in (0,1)$, mit

$$(X_0 \cap X_1) \subset X_t \subset X_0 + X_1.$$

Definition: Die Normen der Banachräume X_0, X_1 heißen konsistent, falls für jede Folge (x_n) in $X_0 \cap X_1$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{X_0} 0 \quad \text{und } x_n \xrightarrow{X_1} x.$$

Dann gilt $X = 0$. Ebenso mit X_0 und X_1 verstauscht.

Satz 4.11. *Seien $X_0, X_1 \subset V$ Banachräume mit konsistenten Normen. Dann ist*

$$\|X\|_+ = \inf\{\|y\|_0 + \|z\|_1 | x = y + z, y \in X_0, z \in X_1\}$$

eine Norm in $X_+ = X_0 + X_1$. $(X_+, \|\cdot\|_+)$ ist vollständig und die Einbettungen

$$X_0 \to X_+, X_1 \to X_+$$

sind injektive Kontraktionen.

Beweis. Sei $J : X_0 \times X_1 \to X_0 + X_1$ definiert durch $J(x,y) = x + y$. J ist linear und surjektiv und $\ker J = D$, wobei

$$D = \{(x, -x) | x \in X_0 \cap X_1\}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} X_0 \times X_1/D &\to X_0 + X_1 \\ [(x,y)] &\mapsto J(x,y) \end{aligned}$$

bijektiv.

$X_0 \times X_1$ mit $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ ist ein Banachraum da X_0, X_1 Banachräume sind. D ist abgeschlossen in $X_0 \times X_1$, da die Normen konsistent sind: Sei $(x_n, -x_n)$ eine Folge in D mit $(x_n, -x_n) \to (x,y)$. D.h. $\|x_n - x\|_0 \to 0$ und $\| - x_n - y_n\|_1 \to 0$.

Dann $\|(x_n - x) - (-x_n - y)\| \to 0$. Also $-x - y = 0$. D.h. $y = -x$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|[(x,y)]\|_D &= \inf\{\|x'\|_0 + \|y'\|_1 | \, x' + y' = x + y\} \\ &= \|x + y\|_+ = \|J(x,y)\|_+ = \|[(x,y)]\|_+. \end{aligned}$$

Also ist J eine Isometrie von $X_0 \times X_1/D$ auf X_+. Insbesondere ist $\|\cdot\|_+$ eine Norm und $(X_+, \|\cdot\|_+)$ ist vollständig.

Für $x \in X_0$ ist

$$\|x\|_+ = \inf\{\|y\|_0 + \|z\|_1 | y + z = x\} \leq \|x\|_0$$

und $\|x\|_+ = 0$. Also

$$\|[(x,c)]\|_D = \|J(x,0)\|_+ = \|x\|_+ = 0.$$

Daraus folgt $(x,0) \in D$ bzw. $x = 0$ in X_0. □

Seien $X_0, X_1 \subset V$ Banachräume mit konsistenten Normen. Wir definieren einen Funktionenraum $F(X_0, X_1)$ als den Raum der Funktionen

$$f : S \to X_+$$

mit den Eigenschaften:

(i) $z \mapsto f(z)$ ist in $C_B(S, X_t)$ und sie ist analytisch in $\mathring{S}$.

(ii) $t \mapsto f(it)$ ist in $C_B(\mathbb{R}, X_0)$

(iii) $t \mapsto f(1+it)$ ist in $C_B(\mathbb{R}, X_1)$.

Für $f \in F(X_0, X_1)$ ist

$$|||f||| := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|f(it)\|_0, \|\|f(1+it)\|_1\} \tag{4.10}$$

Satz 4.12. *Durch (4.2.1) wird eine Norm auf $F(X_0, X_1)$ definiert und $(F(X_0, X_1), |||\cdot|||)$ ist ein Banachraum. Der Unterraum*

$$K_\theta := \{f \in F(X_0, X_1) | f(\theta) = 0\}, 0 \le \theta \le 1$$

ist abgeschlossen.

Beweis. $|||f||| \geq, |||\lambda f||| = |\lambda| |||f|||$.

Sei $f \in F(X_0, X_1)$. Aus Hadamard FIXME: Satz 10?

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in S} \|f(z)\|_t &= \sup_{z\in\partial S} \|f(z)\|_t \\
&= \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \underbrace{\|f(it)\|_t}_{\le\|f(it)\|_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \underbrace{\|f(1+it)\|_t}_{\le\|f(1+it)\|_1}\} \\
&\overset{\text{Satz 10}}{\le} \max\{\sup_t \|f(it)\|_0, \sup_t \|f(1+it)\|_1\} = |||f|||
\end{aligned}$$

Also

$$\sup_{z\in S} \|f(z)\|_t \le |||f||| \tag{4.11}$$

D.h. wegen $|||f||| = 0$ folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in S$.

Sei nun (f_k). Cauchy-Folge in $F(X_0, X_1)$. Dann ist (f_n), nach (4.2.1), eine Cauchyfolge in $C_B(S; X_+)$. Dieser Raum ist vollständig. Also existiert $f \in C_B(S, X_+)$ mit $F_k \to f$ gleichmäßig. Daraus folgt, dass f in $\mathring{S}$ analytisch ist, da $f_n : \mathring{S} \to X_+$ analytisch sind. Sei $g_n(t) = f_n(it), h_n(t) = f_n(1+it)$. Dann ist (g_n) Cauchy-Folge in $C_B(\mathbb{R}, X_0)$ und (h_n) ist Cauchy-Folge in $C_B(\mathbb{R}, X_1)$. Also existiert g, h mit $g_n \to g$ in $C_B(\mathbb{R}, X_0)$ und $h_n \to h$ in $C_B(\mathbb{R}, X_1)$.

Wegen

$$\begin{aligned}
\|f_n(it) - g(t)\|_+ &\le \|f_n(it) - g(t)\|_0 \to 0 \\
\|f_n(1+it) - h(t)\|_+ &\le \| \underbrace{f_n(1+it)}_{h_n(t)} - h(t)\|_1 \to 0
\end{aligned}$$

folgt

$$f(it) = g(t), \qquad f(1+it) = h(t).$$

Also sind (ii), (iii) erfüllt. D.h. $f \in F(X_0, X_1)$ und

$$|||f_n - f||| = \sup_t\{\|f_n(it) - f(it)\|_0, \|f_n(1+it) - f(1+it)\|_1\} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Abgeschlossenheit von $K_\theta = \{f \in F(X_0, X_1) | f(\theta) = 0\}$ folgt aus (4.2.1). Aus $f_n \in K_\theta$ und $|||f_n - f||| \to 0$ folgt

$$\|f(\theta)\|_+ = \lim_n \underbrace{\|f_n(\theta)\|_+}_{=0} = 0$$

wegen

$$|\|f(\theta)\|_t - \|f_n(\theta)\| + | \leq \|f_n(\theta) - f(\theta)\|_+ \leq |\|f_n - f\||.$$

$\square$

Für $\theta \in (0,1)$ definieren wir den Interpolationsraum $(X_\theta, \|\cdot\|_\theta)$ durch

$$X_\theta := \{f(\theta) | f \in F(X_0, X_1)\}$$
$$\|a\|_\theta := \inf\{|\|f\|| | f(\theta) = a\}.$$

Dieser normierte Vektorraum ist normisomorph zu $F(X_0, X_1)/K_\theta$ via die Abbildung

$$F(X_0, X_1)/K_\theta \to X_\theta, \quad [f] \mapsto f(\theta).$$

Tatsächlich ist

$$\|[f]\|_{K_\theta} = \inf\{|\|g\|| | \underbrace{g \in [f]}_{g(\theta)=f(\theta)}\} = \|f(\theta)\|_\theta.$$

Da $F(X_0, X_1)/K_\theta$ nach Satz 4.12 ein Banachraum ist, ist auch X_θ ein Banachraum.

Bemerkung. $X_\theta \to X_+$ für $\theta \in (0,1)$ und

$$\|a\|_+ \leq \|a\|_\theta \qquad a \in X_\theta.$$

Das folgt aus Hadamard (Übung).

Lemma 4.13. *Ist $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, X_1)$ und $T_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ und $T_0 = T_1$ auf $X_0 \cap X_1$. Dann wird durch*

$$Tx = t_0 x_0 + T_1 x_1 \qquad x = x_0 + x_1 \in X_+$$

ein Operator $T \in \mathcal{L}(X_+, Y_+)$ definiert.

Beweis. T ist wohldefiniert. Sei $x = x_0' + x_1' = x_0 + x_1$ mit $x_0, x_0' \in X_0$, $x_1, x_1' \in X_1$. Dann ist

$$\underbrace{x_0' - x_0}_{\in X_0} = \underbrace{x_1' - x_1}_{\in X_1}.$$

Also $x_0' - x_0, x_1' - x_1 \in X_0 \cap X_1$. Es folgt

$$(T_0 x_0' + t_1 x_1') - (T_0 x_0 + T_1 x_1) = T_0(x_0' - x_0) - T_1 \underbrace{(x_1 - x_1')}_{x_0' - x_0 \in X_0 \cap X_1} ?T(x_0' - x_0) - T_0(x_0' x_0) = 0.$$

Außerdem

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_+ &= \inf\{\|y\|_{Y_0} + \|z\|_{Y_1} | Tx = y + z\}, y \in Y_0, z \in Y_1 \\
&\leq \inf\{\|Tx_0'\|_{Y_0} + \|Tx_1'\|_{Y_1} | x_0' + x_1' = x\} \\
&\leq \max(\|T_0\|, \|T\|_1) \cdot \inf\{\|x_0'\| + \|x_1'\| | x_0' + x_1' = x\} \\
&= \max(\|T_0\|, \|T_1\|)\|x\|_+
\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 4.14. *Sei $X_0, X_1 \subset V$ und $Y_0, Y_1 \subset W$ Banachräume mit konsistenten Normen und sei $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y_0), T_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ und $T_0 = T_1$ auf $X_0 \cap X_1$. Sei $T : X_+ \to Y_+$ definiert wie in Lemma 4.13. Dann gilt für $\theta \in (0,1)$:*

$$TX_\theta \subset Y_\theta$$

und

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)} \leq \|T_0\|^{1-\theta}\|T_1\|^\theta$$

Beweis. Sei $a \in X_\theta$ und $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ mit $f(\theta) = a$. Sei $M_0 = \|T_0\| + \varepsilon$, $M_1 = \|T_1\| + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Sei

$$g(z) = \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{z-\theta} Tf(z) \qquad z \in S. \tag{4.12}$$

Dann $g(\theta) = Tf(\theta) = Ta$. Dann ist $g \in F(Y_0, Y_1)$ nach Lemma 4.13 und

$$\begin{aligned} \|g(iy)\|_{Y_0} &= \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-\theta} \|Tf(iy)\|_{Y_0} \\ &\leq \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-theta} M_0 \|f(iy)\|_{X_0} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f(it)\|_0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \|g(1+iy)\|_{Y_1} &= \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{1-\theta} \|Tf(1+iy)\|_{Y_1} \\ &\leq M_0^{1_\theta} M_1^{\theta} \|f(1+iy)\|_{Y_0}. \end{aligned}$$

Also

$$|||g||| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} |||f|||.$$

Aus $Ta = f(\theta), g \in F(Y_0, Y_1)$ folgt $Ta \in Y_\theta$ und

$$\begin{aligned} \|Ta\|_\theta &= \inf\{|||h||| \,|\, h(\theta) = Ta\} \\ &\leq \inf\{|||g||| \,|\, g \text{ def. durch } (4.2.1)\} \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \underbrace{\inf\{|||f||| | f(\theta) = a\}}_{\|a\|_\theta} \end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

[AF] Robert A. Adams and John F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd Edition, Academic Press (2003).