Funktionenräume

Dozent: Prof. Dr. M. Griesemer

Vorlesungsmitschrieb[1]

Stand 3. April 2015

Universität Stuttgart, Sommersemester 2015

[1]Für Hinweise bezüglich Inhalt oder Form via eMail (uni@robinlang.net) bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Motivation

1) Elektron im Feld statischer Kerne. Suche $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $E \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(-\Delta_x - \sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{|x - R_i|}\right) \varphi = E\varphi, \tag{0.1}$$

wobei $z_i \in \mathbb{N}$ und $R_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, \ldots, N$ ist. Die Lösungen sind im Allgemeinen nicht in $C^2(\mathbb{R}^3)$ sondern in $H^2(\mathbb{R}^3)$, d.h.

$$-\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial_{x_i}^2} \varphi \tag{0.2}$$

ist im Sinn **schwacher Ableitungen** zu verstehen.

2) Elektrostatik: Das Potential Φ zur Ladungsverteilung $\rho \in L^1(\Omega)$, für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, umgeben von einem Leiter Ω^c, ist bestimmt durch das Randwertproblem (RWP)

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\Phi &= 4\pi\rho \qquad \text{in } \Omega, \\ \Phi &= 0 \qquad\ \ \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{0.3}$$

Die klassische C^2-Lösung minimiert das Funktional

$$\int_\Omega \left(|\nabla\Phi|^2 - 8\pi\rho\Phi\right) \, \mathrm{d}x \tag{0.4}$$

bezüglich allen Funktionen Φ aus $\{\Phi \in C^2(\Omega) \mid \Phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, sofern sie existiert. Auch wenn der Minimierer existiert, so ist es doch einfacher, die Existenz zuerst im **Sobolev-Raum** $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$ nachzuweisen.
Frage: Wie regulär sind Funktionen aus $H^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$, etc?

Kapitel 1

Vorbereitung

- Ein **Gebiet** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und zusammenhängend und $\overline{\Omega}$ ist der **Abschluss** von Ω in $\mathbb{R}^n$.
- $G \subset\subset \Omega$ bedeutet, dass $\overline{G} \subset \Omega$ **kompakt** ist und somit $\operatorname{dist}(\overline{G}, \Omega^c) > 0$ gilt.
- Für $u : \Omega \to \mathbb{C}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der **Träger** von u definiert durch

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Multiindices

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir verwenden folgende Notationen:

- $\alpha \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und
- $\alpha! = \alpha_1 \cdots \alpha_n$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$
- $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ für $\alpha \geq \beta$

Damit lässt sich nun der Binomische Lehrsatz verallgemeinern:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta}, \tag{1.2}$$

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g) \tag{1.3}$$

Funktionenräume

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

- $C^m(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u$ hat stetige partielle Ableitungen $\partial^\alpha u$ bis zur Ordnung $|\alpha| = m\}$
- $C(\Omega) := C^0(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u$ ist stetig$\}$
- $C_0^m(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega\}$
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega)$
- $C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \geq 0} C_0^m(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Lebesgue-)messbar und $p \geq 1$. $L^p(\Omega)$ besteht aus Äquivalenzklassen messbarer Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \tag{1.4}$$

falls $1 \leq p < \infty$ und

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| := \inf\{\alpha \geq 0 \mid |u(x)| \leq \alpha \text{ f.ü.}\} < \infty \tag{1.5}$$

falls $p = \infty$. Zwei Funktionen u, v heißen **äquivalent** genau dann wenn

$$u \propto v \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = v(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega. \tag{1.6}$$

L^p versehen mit den Normen

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \tag{1.7}$$

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |u(x)| \quad (p = \infty) \tag{1.8}$$

ist ein **Banachraum**. Es gilt die **Höldersche Ungleichung**:

Satz. *Seien $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$, dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.9}$$

Theorem 1. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$, dann ist $C_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Satz 2. *Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ und $u_h(x) := u(x-h)$. Dann gilt $\|u_h - u\|_p \to 0$ für $h \to 0$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle (siehe Theorem 1) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - \varphi\|_p < \varepsilon/3$. Dann gilt

$$\|u_h - u\|_p \leq \|\varphi_h - \varphi\|_p + \underbrace{\|u_h - \varphi_h\|_p}_{=\|u-\varphi\|_h} + \|u - \varphi\|_p \tag{1.10}$$

$$< \|\varphi_h - \varphi\|_p + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \tag{1.11}$$

für $|h|$ klein genug, da $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt und somit φ gleichmäßig stetig ist. □

Faltung und Glättung

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar, $x \in \mathbb{R}^n$ und sei $y \mapsto f(x-y)g(y)$ integrierbar, dann ist

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}y = (g * f)(x) \tag{1.12}$$

die **Faltung** von f mit g.

Satz 3. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist auch $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1. \tag{1.13}$$

Beweis. Der Fall $p = 1, \infty$ verbleibt als Übung. Sei also $1 < p < \infty$ und q so, dass $1/p + 1/q = 1$ gilt. Dann ist

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|^{1/p} \cdot |g(y)|^{1/q} \, \mathrm{d}y \tag{1.14}$$

$$\leq \|g\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \cdot |g(y) \, \mathrm{d}y \right)^{1/p} \tag{1.15}$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}y \right) \cdot \|g\|_1^{p/q} \, \mathrm{d}x \tag{1.16}$$

$$= \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1^{1+p/q} < \infty. \tag{1.17}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. □

Theorem 4 (Young'sche Ungleichung). *Seien* $1 \leq p, q \leq \infty$ *und* $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. *Falls* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *dann ist* $f * g \in L^r \mathbb{R}^n$ *und es gilt*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.18}$$

Beweis. Siehe [AF]. □

Sei im Folgenden

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ ist messbar mit } u \in L^p(K) \text{ für beliebige } K \subset\subset \Omega\}. \tag{1.19}$$

Lemma 5. *Sei* $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *dann gilt für* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$

(a) $J * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\partial^\alpha (J * u) = (\partial^\alpha J) * u$ *für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(b) *Falls* $\operatorname{supp} J \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$, *dann gilt* $\operatorname{supp}(J * u) \subset \operatorname{supp}(u)_\varepsilon$[1]

Beweis. **(a)** Skizze: (1) $J * u \in C(\mathbb{R}^n)$, (2) $\partial_{x_i}(J * u) = (\partial_{x_i} J) * u$ mit Satz von Lebesgue, (3) Induktion. □

Beispiele. **(a)** Für die Funktion J gegeben durch

$$J(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.20}$$

gilt $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $0 \leq J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} J \subset \{|x| \leq 1\}$ und $\int J(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon). \tag{1.21}$$

Dann gilt

(i) $J_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $J_\varepsilon \geq 0$ und $\operatorname{supp} J_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$,

(ii) $\int J_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Lemma 6. *Sei* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *stetig in der offenen Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Dann gilt für jede kompakte Menge* $K \subset \Omega$

$$\sup_{x \in K} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+). \tag{1.22}$$

Beweis. Es ist

$$J_\varepsilon * u(x) - u(x) = \int J_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y - \underbrace{\int J_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y}_{=1}\, u(x) \tag{1.23}$$

$$= \int J_\varepsilon(x-y)\big(u(y) - u(x)\big)\,\mathrm{d}y \tag{1.24}$$

und somit

$$|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon} J_\varepsilon(x-y)|u(y) - u(x)|\,\mathrm{d}y \tag{1.25}$$

$$\leq \sup_{y : |y-x| \leq \varepsilon} |u(y) - u(x)|. \tag{1.26}$$

Sei $\varepsilon < \varepsilon_0 := \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Dann ist

$$\sup_{x \in K} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leq \sup_{x \in K_\varepsilon,\, y \in K_\varepsilon,\, |x-y| \leq \varepsilon} |J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+), \tag{1.27}$$

da u auf K_ε gleichmäßig stetig ist. □

[1]Dies ist die Menge aller x mit $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} u) < \varepsilon$ gemeint.

Theorem 7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in L^p(\Omega)$. Dann gilt*

(a) $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$,

(b) $\|J_\varepsilon * u\|_{p,\Omega} \le \|u\|_{p,\Omega}$,

(c) $\|J_\varepsilon * u - u\|_{p,\Omega} \to 0$ *für* $\varepsilon \to 0^+$,

wobei $J_\varepsilon * u(x) = \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ *ist, d.h. setze* u *in* $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ *durch* $u(x) = 0$ *fort.*

Beweis. **(a)** Aus $u \in L^p(\Omega)$ folgt $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (siehe Blatt 1). Also ist nach Lemma 5 und Satz 3 $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Aus Satz 3 folgt weiter, dass

$$\|J_\varepsilon * u\|_{p,\Omega} \le \|J_\varepsilon * u\|p, \mathbb{R}^n \le \underbrace{\|J_\varepsilon\|_1}_{=1} \underbrace{\|u\|_{p,\mathbb{R}^n}}_{=\|u\|p,\Omega}. \tag{1.28}$$

(c) Nach Theorem 1 existiert ein $\Phi \in C_0(\Omega)$ mit

$$|u - \Phi\|_p < \delta/3 \quad \text{für } \delta > 0. \tag{1.29}$$

Nach Lemma 6 konvergiert dann

$$|J_\varepsilon * \Phi - \Phi| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+) \tag{1.30}$$

gleichmäßig auf $K := \operatorname{supp}(\Phi)_1 = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}\Phi) \le 1\}$. Also ist

$$\|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p^p = \int |J_\varepsilon * \Phi(x) - \Phi(x)|^p \,\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

$$\le \sup_{x \in K} |J_\varepsilon * \Phi(x) - \Phi(x)|^p \int_K 1 \,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0^+). \tag{1.32}$$

Somit existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p < \delta/3$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$ und es folgt

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_p \le \|J_\varepsilon * (u - \Phi)\|_p + \|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p + \|\Phi - u\|_p \tag{1.33}$$

$$\le \|J_\varepsilon\|_1 \cdot \|u - \Phi\| + \frac{2}{3}\delta < \delta. \tag{1.34}$$

□

Satz 8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Beweis. Nach Theorem 1 ist $C_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht. Sei also $u \in L^p(\Omega)$, $\delta > 0$ und $\Phi \in C_0(\Omega)$ mit $\|u - \Phi\|_p < \delta/2$. Nach Lemma 5 ist dann $J_\varepsilon * \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ falls $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\Phi, \Omega^c)$ und

$$\|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p < \frac{\delta}{2} \tag{1.35}$$

für ε klein genug (Theorem 7(c)). Also ist

$$\|J_\varepsilon * \Phi - u\|_p \le \|J_\varepsilon * \Phi - \Phi\|_p + \|\Phi - u\|_p < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \tag{1.36}$$

für ε klein genug. □

Satz 9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Falls*

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.37}$$

dann ist $u(x) = 0$ fast überall in Ω.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$K_n = \{x \in \Omega \mid |x| \leq n \text{ und } \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/n\}. \tag{1.38}$$

Also ist $K_n \subset \Omega$ kompakt, $K_n \subset K_{n+1}$ und $\bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega$. Weiter ist

$$\operatorname{dist}(K_n, K_{2n}^c) \geq \frac{1}{2n}. \tag{1.39}$$

Sei

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x)\chi_{K_n}(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \notin \Omega. \end{cases} \tag{1.40}$$

Dann ist$u_n \in L^1(\Omega)$ und für $x \in K_n$ und $\varepsilon \leq 1/(2n)$ gilt

$$J_\varepsilon * u_{2n}(x) = \int_{|x-y| \leq \frac{1}{2n}} J_\varepsilon(x-y) u_{2n}(y) \, \mathrm{d}y = \int_\Omega J_\varepsilon(x-y) u(y) \, \mathrm{d}y = 0, \tag{1.41}$$

da $y \mapsto J_\varepsilon(x-y)$ in $C_0^\infty(\Omega)$ liegt. Es folgt $\chi_{K_n}(J_\varepsilon * u_{2n}) \equiv 0$, wobei

$$J_\varepsilon * u_{2n} \to u_{2n} \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{1.42}$$

Also gilt

$$\|\chi_{K_n} u\|_1 = \|\chi_{K_n} u_{2n}\|_1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\chi_{K_n}(J_\varepsilon * u_{2n})\|_1 = 0, \tag{1.43}$$

d.h. $u(x) = 0$ fast überall in K_n und somit auch

$$u(x) = 0 \quad \text{fast überall in } \bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega. \tag{1.44}$$

$\square$

Kapitel 2

Sobolev-Räume

Schwache Ableitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Identität

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\partial^\alpha u) \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Das motiviert folgende Definition:

Definition 10. *Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $u, b \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit*

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

*für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann heißt v **schwache α-Ableitung** von u und man schreibt $v = \partial^\alpha u$.*

Bemerkungen. 1) Die schwache α-Ableitung ist eindeutig, falls sie exisitiert: Sind $v, \tilde{v}$ schwache α-Ableitungen von u, dann gilt

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.3}$$

und somit $v = \tilde{v}$ f.ü. in Ω. D.h. $v = \tilde{v}$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

2) Falls $u \in C^k(\Omega)$, dann ist $\partial^\alpha u$ für $|\alpha| \leq k$ die klassische α-Ableitung von u.

3) Es ist möglich, dass $\partial^\alpha u$ existiert aber $\partial^\beta u$ für ein $\beta \leq \alpha$ nicht existiert.

Beispiele. 1) Sei $u(x) = x \cdot \chi_{\{x \geq 0\}}(x)$. Dann ist $u' = \Theta$ die *Heaviside Funktion* aber Θ hat keine schwache Ableitung ($\Theta' = \delta$ im Distributionssinn).

Beweis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi' \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = x\varphi(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x \tag{2.4}$$

$\square$

2) Sei $u(x, y) = \Theta(x)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha = (1, 1)$, dann gilt $\partial^\alpha u = 0$ aber $\partial_x u$ existiert nicht.

Beweis.

$$\int u\partial^\alpha\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \Theta(x) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \tag{2.5}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Theta(x) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}_{=0} = 0. \tag{2.6}$$

Also ist $\partial^\alpha u = 0$. □

3) Für $\kappa < n - 1$ gilt

$$\partial_i |x|^{-\kappa} = -\kappa \frac{x_i}{|x|^{\kappa+2}}. \tag{2.7}$$

2.0.1 Sobolevräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } \alpha: \ |\alpha| \leq m\} \tag{2.8}$$

mit

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{2.9}$$

$$\|u\|_{m,\infty} := \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty \qquad (p = \infty) \tag{2.10}$$

ist ein normierter Vektorraum.

Theorem 11. *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(u_k)_{k=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$, dann ist $(\partial^\alpha u_k)$ für jedes $|\alpha| \leq m$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ (dieser ist vollständig). Also existiert ein u_α mit

$$\partial^\alpha u_k \to u_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega) \tag{2.11}$$

für alle α mit $|\alpha| \leq m$. Sei $u = u_{\alpha=0}$. Zu zeigen ist $u_\alpha = \partial^\alpha u$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann

$$\int_\Omega u\partial^\alpha u \, \mathrm{d}x \stackrel{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \partial^\alpha \, \mathrm{d}x \tag{2.12}$$

$$= \lim_{k\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha u_k \varphi \, \mathrm{d}x \tag{2.13}$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \, \mathrm{d}y. \tag{2.14}$$

Also ist $u_\alpha = \partial^\alpha u$ und somit $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$ und somit $\|u_k - u\|_{m,p} \to 0$ für $k \to \infty$. Zu $(*)$:

$$\left|\int_\Omega (u\partial^\alpha\varphi - u_k\partial^\alpha\varphi) \, \mathrm{d}x\right| \leq \|u - u_k\|_p \|\partial^\alpha\varphi\|_q \to 0 \qquad (k \to \infty), \tag{2.15}$$

wobei $1/q + 1/q = 1$. □

Example FIXME:

1) Sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ und

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \alpha < n$$

Dann ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$\nabla u(x) = -\alpha \frac{x}{|x|^{\alpha+2}} \quad \alpha < n-1$$

(Blatt 1). Es gilt

$$\int_{|x|<R} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x = \alpha \int_{|x|<R} \frac{1}{|x|^{(\alpha+1)p}} \, \mathrm{d}^n x$$

$$= \begin{cases} \alpha\omega_n \frac{R^{n-(\alpha+1)p}}{n-(\alpha+1)p} & \alpha < \frac{n}{p} - 1 \\ \infty \quad \alpha \geq \frac{n}{p} - 1 \end{cases}$$

wobei $\omega_n = \int_{|x|=1}$ der Flächeninhalt der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ ist. Im Fall $\alpha < \frac{n}{p} - 1$ folgt $u \in W^{1,p}(B_R(0))$ (dann $u \in L^p(B_R(0))$ Übung). Es gilt auch $u \in W^{1,p}(B_R(0))$. Dann folgt $\alpha < \frac{n}{p} - 1$ (Übung).

Also

$$u \in W^{1,p}(B_R(0)) \iff \alpha < \frac{n}{p} - 1$$

2) Sei $(d_k)_{k\geq 1}$ dicht in $B_1(0)$ und

$$u(x) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x - a_k|^{-\alpha} \tag{2.16}$$

Dann ist $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ genau dann wenn $\alpha < \frac{n}{p} - 1$.

Beweis. Falls $\alpha < \frac{n}{p} - 1$, dann ist $u(x) = 2^{-k}|x - a_k|^{-\alpha}$ in $W^{1,p}(B_1(0))$ und $\|u_k\|_{1,p} \leq i^k C_{\alpha,p,n}$, also ist die Reihe $\sum_{k\geq 1} \|u_k\|_{W^{1,p}(B_1(0))} < \infty$, d.h. (2.16) ist absolut konvergent in $W^{1,p}(B_1(0))$ und somit $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ denn $W^{1,p}$ ist vollständig. Übung: $u \in W^{1,p}(B_1(0)) \implies \alpha < \frac{n}{p} - 1$. □

Folgerung FIXME
Falls $n > p$ und $0 < \alpha < \frac{n}{p} - 1$ dann ist $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ und trotzdem in jedem Punkt d_k divergent.
Wir wollen nun zeigen, dass $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ dicht ist in $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen:

Satz FIXME
Seien $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ und $|\alpha| \leq m$. Dann gilt

i) $\partial^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$ und $\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^{\alpha+\beta} u$ falls $|\alpha| + |\beta| \leq m$.

ii) $\lambda u + \mu v \in W^{m,p}(\Omega)$ und $\partial^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda \partial^\alpha u + \mu \partial^\alpha v$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

iii) Ist $v \subset \Omega$ offen, dann ist $u \restriction V \in W^{m,p}(V)$.

iv) Ist $\gamma \in C_0^\infty(\Omega)$, dann ist $\gamma u \in W^{m,p}(\Omega)$ und

$$\binom{\partial^\alpha(\gamma u) = \sum_{\beta\leq\alpha} \alpha}{\beta(\partial^\beta \gamma)(\partial^{\alpha-\beta} u)}$$

Beweis. (i)-(iii) Übung (L.C. Evans).
(iv) Beweis der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned}\int (\gamma u)\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x &= \int u(\gamma\partial_i\varphi) \\ &= \int u(\partial_i(\gamma\varphi) - (\partial_i\gamma)\varphi) \\ &= -\int (\partial_i u)(\gamma\varphi) + u(\partial_i\gamma)\varphi \\ &= -\int ((\partial_i u)\gamma + u\partial_i\gamma))\varphi.\end{aligned}$$

Per Induktion bekommt man nun die Leibnizregel für ∂^α (s. Evans). Aus der Leibniz-Regel folgt $\gamma u \in W^{m,p}(\Omega) denn \partial^\beta\gamma \in C_0^\infty$ und $\partial^{\alpha-\beta}u \in L^p(\Omega)$. □

Lemma FIXME
Ist $K \subset \Omega$ kompakt, dann existiert $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi \equiv 1$ (FIXME) auf K und

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha\varphi(x)| \leq c_\delta^{-|\alpha|}$$

wobei $\delta = \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$ und c_α ist unabhängig von K, Ω.

Beweis. FIXME
Sei X_δ die charakteristische FUnktion von $K_{\delta/2} := \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, K) \leq \frac{\delta}{2}\}$. Sei $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ und $\varphi := J_\varepsilon * \chi_\delta$. Dann ist $0 \leq \varphi \leq 1, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \operatorname{supp}(\chi_\delta) \subset K_{\delta/2+\varepsilon}\Omega$ nach Lemma 1.5. Außerdem gilt

$$\partial^\alpha\varphi = (\partial^\alpha J_\varepsilon * \chi_\delta,$$

wobei $\partial^\alpha J_\varepsilon(x) =^{-|\alpha|} (\partial_\alpha J)_\varepsilon(x)$ und somit

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty &\leq \|\partial^\alpha J_\varepsilon\|_1 \underbrace{\|\chi_\delta\|_\infty}_{=1} \\ &= \varepsilon^{-|\alpha|}\|(\partial^\alpha J)_\varepsilon\|_1 = \varepsilon^{-|\alpha|}\|\partial^\alpha J\|_1\end{aligned}$$

□

Satz (Zerlegung der Eins) FIXME
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega = \bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$ eine offene Überdeckung von Ω, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann existiert eine Folge $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega), k \in \mathbb{N}$ mit

(i) $0 \leq \psi_k \leq 1$.

(ii) $\operatorname{supp}(\psi_k)U$ für ein $u \in \mathcal{O}$.

(iii) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, dann existiert $W \supset K$ offen, $K \subset W \subset \Omega$ und $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_k(x) = 1 \quad x \in W$$

(bzw. $\sum_{k\geq 1} \psi_k(x) = 1$ in Ω). (ψ_k) heißt eine der offene Überdeckung $\Omega = \bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$ untergeordnete, lokal endliche Zerlegung der Eins.

Beweis. Sei $D \subset \Omega$ eine abzählbar und dicht und sei $(B(x_j, r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ die Folge der abgeschlossenen Kugeln welche alle Kugeln $\overline{B(x,r)}$ mit $X \subset D, r \in \mathbb{Q}$ und $\overline{B(x,r)} \subset U$ für ein $U \in \mathcal{O}$ umfasst.

Sei $V_j = \{x | |x - x_j| < \frac{r_j}{2}\} \subset B(x_j, r_j)$. Dann existiert $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

(i) $0 \leq \varphi_j \leq 1$

(ii) $\varphi_j \equiv 1$ auf V_j

(iii) $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset B(x_j, r_j)$ (Lemma 4). Definiere

$$\psi_1 := \varphi_1 \tag{2.17}$$
$$\psi_2 := (1-\varphi_1)\varphi_2 \tag{2.18}$$
$$\vdots \tag{2.19}$$
$$\psi_j := (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\cdots(1-\varphi_{i-1})\varphi_i. \tag{2.20}$$

Dann gilt $0 \le \psi_j \le 1$, $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset \overline{B(x_i, r_i)}$ und

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_i = 1-$$

Da $\varphi_i = 1$ in V_i folgt $\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_i = 1$ in $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_j$. Sei $K \subset \Omega$ kompakt, dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j =: W$ denn □

Lemma 6 FIXME
Sei $u \in W^{m,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$ und sei $V \subset\subset \Omega$ offen. Dann gilt

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_{W^{m,p}(V)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass

$$\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) = J_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$$

in V für $|\alpha| \le m$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \Omega^c)$. Nach Lemma 1.5 ist $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega)$ und

$$\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) = (\partial^\alpha J_\varepsilon) * u.$$

Sei $x \in V$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \Omega^c)$ Dann ist die Funktion $y \mapsto J_\varepsilon(x-y)$ in $C_0^\infty(\Omega)$ und somit

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha J_\varepsilon * u)(x) &= \int \partial^\alpha J_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int J_\varepsilon(x-y) \partial^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= J_\varepsilon * (\partial^\alpha u)(x).\end{aligned}$$

$\partial^\alpha u \in L^p(V)$, $1 \le p < \infty$. Also nach Theorem 1.7, $J_\varepsilon * \partial^\alpha u \to \partial^\alpha u$ in $L^p(V)$ $(\varepsilon \to 0+)$. Es folgt

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_{W^{1,p}(V)} = \sum_{|\alpha \le m} \|\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) - \partial^\alpha u\|_{p,V}^p$$
$$= \sum_{|\alpha| \le m} \|J_\varepsilon * (\partial^\alpha u) - \partial^\alpha u\|_{p,V}^p \to 0(\varepsilon 0+),$$

□

Theorem 7 (Meyers, Serrin 1964)
Für $1 \le p < \infty$ ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega_k = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{k} \quad \text{und } |x| < k\}.$$

Dann $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ und $\bigcup_{k \ge 1} \Omega_k = \Omega$ für

$$k \ge 2$$

. Sei $U_k = \Omega_{k+1} \cap \overline{\Omega_{k-1}}^c = \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}} und \mathrm{U}_1 = \Omega_1$ Dann $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Sei (φ_j) eine der offene Überdeckung $\Omega = \bigcup_{i \ge 1} U_i$ untegeordnete lokal endliche Zerlegung der Eins (Satz 5) und sei $(\psi_k)_{k \ge 1}$ wie folgt definiert. ψ_1 ist die Summe der φ_i mit $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_1$. φ_2 ist die Summe der φ_i mit

$\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset U_2$ aber $\mathrm{supp}(\varphi_i) \not\subset U_1$ etc. Dann ist $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ dann $\overline{U}_k$ kompakt und somit ist ψ_k eine endliche Summe. Außerdem $0 \leq \psi_k \leq 1, \sum \psi_k(x) = 1$ in Ω, $\mathrm{supp}(\psi_k) \subset U_k$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_k > 0$ so klein, dass

$$\mathrm{supp}(J_{\varepsilon_k} * (\psi_k U)) \subset U_k$$

und

$$\|J_{\varepsilon_k} * \underbrace{(\psi_k u)}_{\in W^{m,p}} - \psi_k u\|_{W^{m,p}(\Omega_k) < 2^{-k}\varepsilon}$$

(Lemma 6). Definiere

$$\varphi := \sum_{k \geq 1} J_{\varepsilon_k} * (\psi_\varepsilon U)$$

auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ sind nur endlich viele Summanden $\neq 0$ also $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. In Ω_k gilt

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(x) u(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k+1} J_{\varepsilon_i} * (\psi_j u)(x).$$

Also gilt

Literaturverzeichnis

[AF] Robert A. Adams and John F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd Edition, Academic Press (2003).