

# **Praktikum Automatisierungstechnik**

## **Wintersemester 2016/2017**

Protokoll zum

### **Versuch 3: Kugelwippe**

der Gruppe 5

Xiaoyu	Xie
Shaochen	Qian
Jun	Lou

Tag der Versuchsdurchführung: 6. Dezember 2016  
13. Dezember 2016

Hiermit versichern wir, dass wir dieses Protokoll selbstständig angefertigt haben.  
Karlsruhe,

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung und Versuchsaufbau .....</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitung des Versuchs .....	1
1.2 Versuchsaufbau .....	1
1.2.1 Das Laborsystem im Überblick .....	1
1.2.2 Aktorik und Sensorik der Kugelwippe .....	2
<b>2 Theoretische Grundlage .....</b>	<b>3</b>
2.1 Modellbildung .....	3
2.2 Methoden zur Zustandsbeobachtung .....	6
2.2.1 Numerische Differentiation .....	6
2.2.2 Lineares Kalmanfilter .....	6
2.2.3 Sigmapunkt-Kalmanfilter .....	7
2.2.4 Zentraldifferenzenfilter (CDKF) .....	8
2.3 Regelung der Kugelwippe .....	9
<b>3 Aufgaben .....</b>	<b>10</b>
Aufgabe 1: Verfahren der Zeitdiskretisierung .....	10
Aufgabe 2: Numerische Differentiation .....	11
Aufgabe 3: Störmodelle .....	12
Aufgabe 4: Zeitdiskretisierung des Zustandsraummodells .....	13
Aufgabe 5: Prädiktionsgleichungen des CDKF .....	14
Aufgabe 6: Filterschritt des CDKF bei linearer Ausgangsgleichung .....	15
Aufgabe 7: Manuelle Steuerung .....	15
Aufgabe 8: Numerische Differentiation .....	17
Aufgabe 9: Lineares Kalmanfilter .....	18
Aufgabe 10: CDKF .....	21
Aufgabe 11: Vergleich in der Simulation .....	23
Aufgabe 12: Vergleich am Laborsystem .....	27
<b>4 Auftretende Probleme und Diskussion .....</b>	<b>33</b>
<b>5 Literatur .....</b>	<b>33</b>

---

# 1. Einleitung und Versuchsaufbau

## 1.1 Einleitung des Versuchs

Die Regelung mithilfe vollständiger Zustandsrückführungen ist ein sehr vielfältig einsetzbares Verfahren in der Regelung technischer Systeme. Beim Entwurf davon wird allerdings vorausgesetzt, dass der komplette Zustandsvektor im Betrieb jederzeit gemessen werden kann, welche für viele technische Systeme nicht oder nur mit unvertretbar hohem Aufwand erfüllt werden kann.

Das Problem wird durch den Einsatz von Zustandsbeobachtern begegnet, mit deren Hilfe auf Basis eines mathematischen Modells und der zur Verfügung stehenden Messinformationen der Systemzustand rekonstruiert werden kann. Denn die Meisten in der Praxis auftretenden Systeme sind nichtlinear und das linearisierte Systemmodell ist manchmal nicht ausreichend, wird ein nichtlineares Modell bzw. die eingesetzten linearen Beobachter benötigt. Im Falle nichtlinearer Systeme verstärkt die Abweichung aus dem Einschwingvorgang des nichtlinearen Beobachters sehr. Deshalb ist beim Entwurf von Zustandsbeobachtern genauso sorgfältig vorzugehen wie beim Entwurf der Regelung selbst.

Im Praktikumsversuch sollen daher verschiedene lineare und nichtlineare zeitdiskrete Verfahren zur Zustandsschätzung untersucht und verglichen werden. Der Vergleich geschieht anhand von Simulationen und am Laboraufbau der Kugelwippe. Die Simulation wird mit der Software LabVIEW durchgeführt. Die Ansteuerung des Laborsystems erfolgt mittels eines Rapid-Prototyping-Systems. Die Programmierung dieses Systems erfolgt ebenfalls mithilfe von LabVIEW.

### Ziel des Versuchs:

- Einführung in LabVIEW
- Implementierung verschiedener Verfahren zur Zustandsschätzung für lineare und nichtlineare Systeme:
  - numerische Differentiation
  - lineares Kalmanfilter
  - Sigmapunkt-Kalmanfilter
- Vergleich der Verfahren in der Simulation und am Laborsystem

## 1.2 Versuchsaufbau

### 1.2.1 Das Laborsystem im Überblick

Die Kugelwippe besteht aus einem in der Mitte drehbar gelagerten Wippenbalken, auf dem eine Kugel frei rollen kann. Die Wippe wird über einen Antriebsriemen durch eine Gleichstrommaschine angetrieben. Ziel der Regelung ist es, die Kugel an eine frei wählbare Position auf der Wippe zu überführen und dort zu stabilisieren.

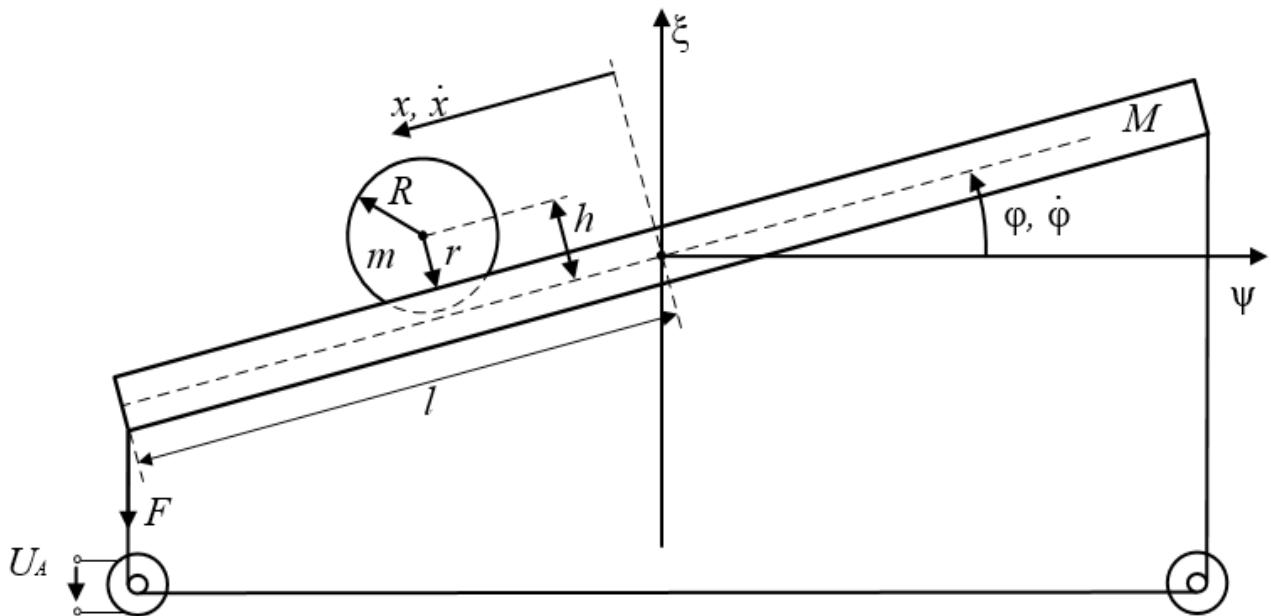


Abbildung 1.1 Schematische Darstellung der Kugelwippe

Parameter	Bedeutung	Zahlenwert
$M$	Effektive Wippenmasse (incl. Motorträgheit)	1.8 kg
$l$	Halbe Wippenlänge	0.515 m
$J_{\omega} = \frac{1}{3} M l^2$	Trägheitsmoment der Wippe bezüglich Wippenachse	0.159 $\text{kgm}^2$
$m$	Kugelmasse	0.27 kg
$R$	Geometrischer Kugelradius	0.02 m
$r$	Kugelrollradius	0.016 m
$h$	Höhe Kugelschwerpunkt über Wippenmitte	0.029 m
$J_k = \frac{2}{5} m R^2$	Trägheitsmoment der Kugel bezüglich Kugelschwerpunkt	4.32e-5 $\text{kgm}^2$
$g$	Erdbeschleunigung	9.81 $\text{m/s}^2$
$R_A$	Ankerwiderstand des Motors	3.1 $\Omega$
$r_A$	Radius des Motor-Antriebsrads	0.01 m
$C_A$	Motorkonstante	0.1 $\text{Nm/A}$

Tabelle 1.1 Modellparameter der Kugelwippe

### 1.2.2 Aktorik und Sensorik der Kugelwippe

Die Gleichstrommaschine wird über die Ankerspannung angesteuert. Die gewünschte Spannung wird über das compact-RIO-System an einen Servoverstärker ausgegeben, der die benötigte Leistung für die Motoransteuerung zur Verfügung stellt.

Als Messgrößen stehen die Position der Kugel sowie der Wippenwinkel zur Verfügung.

Die Kugelposition wird mithilfe einer Kamera bestimmt. Hierzu nimmt die Kamera eine Bildzeile entlang der Wippe von +50 cm bis -50 cm auf. Diese Bildzeile wird digital

---

ausgewertet und die Kugelposition über die Detektion der Bildhelligkeit ermittelt. Das Positionssignal liefert direkt die Absolutposition der Kugel.

Der Wippenwinkel über einen inkrementellen Winkelgeber, welcher nur relative Winkel messen kann, gemessen. Zu Beginn des Praktikumsversuchs muss daher die Winkelmessung initialisiert werden.

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1 Modellbildung

Zur Gewinnung der Bewegungsgleichungen wird die Methode nach Lagrange gebraucht, die sich aus einer Energiebetrachtung mechanischer Starrkörpersysteme herleiten lässt. Aus den *Lagrangeschen Gleichungen 2. Art*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i=1, \dots, f$$

erhält man direkt die Bewegungsgleichungen. Dabei sind die  $q_i$  die generalisierten Koordinaten. Die Anzahl  $f$  der generalisierten Koordinaten entspricht der Systemordnung  $n$  abzüglich der Anzahl der Zwangsbedingungen. Die Funktion  $L=T-V$  heißt Lagrangefunktion, wobei  $T$  die Summe der kinetischen Energien und  $V$  die Summe der potentiellen Energien des Systems darstellt.

Zuerst müssen die Energiefunktionen  $V$  und  $T$  aufgestellt werden. Die gesamte potentielle Energie  $V$  ergibt sich aus der potentiellen Energie  $V_K$  der Kugel und dem durch die äußere Kraft  $F$  hervorgerufenen Potential  $V_F$ .

Aus Abbildung 1.1 erhält man durch Betrachtung des Kugelschwerpunkts die potentielle Energie der Kugel zu

$$V_K = mg(h \cos \varphi - x \sin \varphi).$$

Mit dem Potential

$$V_F = -lF \sin \varphi$$

erhält man schließlich

$$V = V_F + V_K = -lF \sin \varphi + mg(h \cos \varphi - x \sin \varphi).$$

Die kinetische Energie  $T$  des Systems setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie  $T_K$  der Kugel und der kinetischen Energie  $T_W$  der Wippe, erhält man

$$T_K = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} J_K \omega_K^2 \quad \text{und} \quad T_W = \frac{1}{2} J_\omega \dot{\varphi}^2.$$

Dabei ist  $v_s$  die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Kugel und  $\omega_K$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel:

$$v_s^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left[ \frac{d}{dt} (-x \cos \varphi - h \sin \varphi) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (-x \sin \varphi + h \cos \varphi) \right]^2 = x^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{x} + h \dot{\varphi})^2$$

mit

$$\omega_K = \frac{\dot{x}}{r} + \dot{\varphi}$$

Damit ergibt sich schließlich

$$T = T_K + T_w = \frac{1}{2} m(x^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{x} + h \dot{\varphi})^2) + \frac{1}{2} J_K \left( \frac{\dot{x}}{r} + \dot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} J_\omega \dot{\varphi}^2.$$

Nach dem Einsetzen erhält man die zwei Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\frac{J_K}{r^2}(\ddot{x} + r \ddot{\varphi}) + m(\ddot{x} + h \ddot{\varphi}) - mx \dot{\varphi}^2 - mg \sin \varphi = 0$$

$$J_\omega \ddot{\varphi} + J_K \left( \frac{\ddot{x}}{r} + \ddot{\varphi} \right) + mh(\ddot{x} + h \ddot{\varphi}) - IF \cos \varphi - mg(h \sin \varphi + x \cos \varphi) + m(2x \dot{x} \dot{\varphi} + x^2 \ddot{\varphi}) = 0$$

Dann kann man die Gleichungen nach  $\ddot{x}$  bzw.  $\ddot{\varphi}$  auflösen:

$$\ddot{x} = \frac{-r(mhr + J_K)\ddot{\varphi} - mr(x\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi)r}{J_K + mr^2}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{-xmr(mhr + J_K)\dot{\varphi}^2 - 2xm\dot{x}(J_K + mr^2)\dot{\varphi} + (J_K + mr^2)(IF + mgx)\cos \varphi + mg \sin \varphi J_K(h - r)}{m(J_K + mr^2)x^2 + ((h - r)^2 J_K + J_\omega r^2)m + J_\omega J_K}$$

Die Kraft  $F$  der Gleichstrommaschine ist durch der Ankerspannung bestimmt:

$$F = \frac{C_A}{r_A R_A} U_A - \frac{C_A^2 l}{R_A r_A^2} \dot{\varphi}.$$

Dazu wirkt auf die Wippe eine Haft- und Gleitreibung, die als eine der Antriebskraft  $F$  entgegenwirkende Kraft  $F_R$  angesehen werden kann. Es wird als stückweise konstante Störgröße  $z$  angenommen.

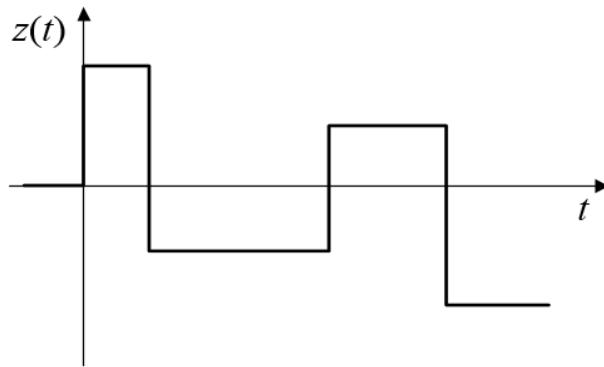


Abbildung 2.1 Haft- und Gleitreibung als Störgröße

Aus den Bewegungsgleichungen kann ein nichtlineares Zustandsraummodell hergeleitet werden, das anschließend durch Linearisierung in ein lineares Modell überführt werden kann. Die Zustandsgrößen sind die Position  $x$ , die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  der Kugel, der Winkel  $\varphi$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  der Wippe. Die Eingangsgröße ist die

---

Ankerspannung  $U_A$  :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u = U_A$$

Das nichtlineare Zustandsraummodell vierter Ordnung der Kugelwippe lautet:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\underline{x}, u) \\ x_4 \\ f_4(\underline{x}, u) \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Dabei gilt:

$$f_2(\underline{x}, u) = \frac{-(mhr + J_K)f_4(\underline{x}, u) - mr(x_1x_4^2 + gr \sin x_3)}{J_K + mr^2}$$

$$f_4(\underline{x}, u) = \frac{-x_1mr(mhr + J_K)x_4^2 - 2x_1mx_2(J_K + mr^2)x_4}{m(J_K + mr^2)x_1^2 + ((h-r)^2J_K + J_\omega r^2)m + J_\omega J_K}$$

$$+ \frac{(J_K + mr^2)(l(\frac{C_A}{r_A R_A}u - \frac{C_A^2 l}{R_A r_A^2}x_4) + mgx_1)\cos x_3 + mgJ_K(h-r)\sin x_3}{m(J_K + mr^2)x_1^2 + ((h-r)^2J_K + J_\omega r^2)m + J_\omega J_K}$$

Danach kann man das nichtlineare Zustandsraummodell um die Ruhelage  $\underline{x}_R = 0$ ,  $u_R = 0$  linearisieren. Mit der gegebene Parameter erhält man die lineare Modellbildung

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3920 & 0 & 6.0059 & 1.2663 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16.6426 & 0 & 0.0806 & -53.7579 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2459 \\ 0 \\ 10.4384 \end{bmatrix} \underline{u},$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Berücksichtigt man die Haft- und Gleitreibung als zusätzliche Kraft auf die Wippen, erhält man das erweiterte linearisierte Modell:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}\underline{u} + \underline{e}\underline{z}$$

mit dem Störvektor

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0762 \\ 0 \\ 3.2359 \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Methoden zur Zustandsbeobachtung

### 2.2.1 Numerische Differentiation

Eine wenige rechenintensive Methode zur Bestimmung nicht messbarer Zustandsgrößen ist die numerische Differentiation. Sie kann unter der Voraussetzung, dass die nicht messbaren Zustandsgrößen die Ableitung messbarer Größen sind, angewandt werden.

Aus der Messgröße  $y(t)$  erhält man die nicht messbare Größe

$$x(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

$$X(s) = sY(s)$$

Zur Realisierung auf einem Rechner muss diese zeitdiskretisiert und in einer Differenzgleichung dargestellt werden. Probleme können hierbei bei großen Abtastzeiten durch Quantisierung und durch Rauscheinflüsse entstehen.

Zur Glättung des Verlaufs, d.h. zur Verringerung der Rauscheinflüsse, muss eine Tiefpassfilterung durchgeführt werden. Im Rahmen des Praktikumsversuchs soll ein Tiefpassfilter erster Ordnung, also ein zusätzliches PT1-Glied, verwendet werden, das mit dem Differenzierer zur Gesamtübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{as}{s+b}$$

zusammengefasst wird. Aus der Forderung, dass bei Aufschaltung einer Rampe der Steigung  $m$  auch der Ausgang des Übertragungsgliedes den Wert  $m$  annehmen soll, erhält man mit dem Grenzwertsatz der Laplace-Transformation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{as}{s+b} \frac{m}{s^2} = m \frac{a}{b}$$

die Bedingung  $a=b$ . Der Parameter  $a$  bestimmt hierbei die Grenzfrequenz des Tiefpasses. Für ihn muss ein Kompromiss zwischen Darstellbarkeit schneller Änderungen und Rauschunterdrückung gefunden werden. Besitzt  $G(s)$  einen zu starken Tiefpasscharakter, werden beispielweise Sprünge des Signals nur ungenügend rekonstruiert.

### 2.2.2 Lineares Kalmanfilter

Im Vergleich zu einem Luenberger Beobachter ist ein Kalmanfilter besser, wenn das betrachtete System zusätzlich von Rauschsignalen beeinflusst. Der Vorteil des Kalmanfilters gegenüber dem Luenberger-Beobachter ist die Einbeziehung von zusätzlichen Informationen über den Prozess und die Messgrößen, wie die Modellgenauigkeit oder die Qualität der Sensordaten.

Das Kalmanfilter basiert auf einem zeitdiskreten, linearen Systemmodell

$$\underline{x}(k) = \underline{\Phi} \underline{x}(k-1) + \underline{H} \underline{u}(k-1) + \underline{L} \underline{v}(k-1)$$

$$y(k) = \underline{C} \underline{x}(k) + \underline{w}(k)$$

Dabei bezeichnet  $\underline{v}$  das Systemrauschen und  $\underline{w}$  das Messrauschen. Beide Rauschprozesse werden dabei als mittelwertfreie, weiße Rauschprozesse angenommen. Weiterhin wird angenommen, dass die Rauschprozesse sowohl unkorreliert zueinander als auch unkorreliert zum System-Anfangszustands sind.

### Prädiktionsschritt:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k|k-1) &= \underline{\Phi} \hat{x}(k-1|k-1) + \underline{H} \underline{u}(k-1) \\ \underline{P}(k|k-1) &= \underline{\Phi} \underline{P}(k-1|k-1) \underline{\Phi}^T + \underline{L} \underline{Q}(k-1) \underline{L}^T\end{aligned}$$

### Verstärkungsmatrix:

$$\underline{K}(k) = \underline{P}(k|k-1) \underline{C}^T (\underline{C} \underline{P}(k|k-1) \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1}$$

### Filterschritt:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) + \underline{K}(k) (\underline{y}(k) - \underline{C} \hat{x}(k|k-1)) \\ \underline{P}(k|k) &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \underline{C}) \underline{P}(k|k-1)\end{aligned}$$

Die Matrix  $\underline{Q}$  ist die Kovarianzmatrix des Systemrausches. Ihre Elemente werden häufig als freie Entwurfsparameter des Kalmanfilters verwendet, um beispielsweise Modellgenauigkeiten abilden zu können. Die Matrix  $\underline{R}$  stellt die Kovarianzmatrix des Ausgangsrauschens dar. Ist diese nicht bekannt, so kann sie als Stichprobenkovarianz aus den vergangenen N Messinformationen geschätzt werden:

$$\begin{aligned}\mu_y(k) &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{y}(k-i) \\ \underline{R}(k) &\approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{y}(k-i) - \mu_y(k)) (\underline{y}(k-i) - \mu_y(k))^T\end{aligned}$$

### 2.2.3 Sigmapunkt-Kalmanfilter

Zur genauen Ermittlung von Zustandsgrößen ist ein exaktes Modell des technischen Prozesses von großer Bedeutung. Werden nichtlineare Systeme in einem weiten Arbeitsbereich betrieben, so reicht häufig die Linearisierung um einen Arbeitspunkt nicht mehr aus, um das Systemverhalten hinreichend gut zu beschreiben. Eine Weiterentwicklung des linearen Ansatzes zur nichtlinearen Schätzung stellt das erweiterte Kalmanfilter dar.

Problematisch sind hierbei vor allem der Aufwand für die Linearisierung und die mangelnde Güte der Schätzung. Um diese Problematik zu überwinden, entstanden die sogenannten *Sigmapunkt Kalmanfilter*. Sie basieren nicht auf einer Linearisierung, sondern verwenden direkt ein nichtlineares Systemmodell der Form

$$\begin{aligned}\underline{x}(k) &= f(\underline{x}(k-1), \underline{u}(k-1)) + \underline{v}(k-1) \\ \underline{y}(k) &= g(\underline{x}(k)) + \underline{w}(k)\end{aligned}$$

Da eine zeitkontinuierliche nichtlineare Systemfunktion im Allgemeinen nicht exakt zeitdiskretisiert werden kann, wie dies bei linearen Systemen der Fall ist, wird häufig direkt

---

die zeitkontinuierliche Systembeschreibung verwendet. Der benötigte Folgezustand eines betrachteten Systemzustands wird dann mithilfe eines Simulationsverfahrens wie beispielsweise dem expliziten Eulerverfahren oder einem Runge-Kutta-Verfahren berechnet.

Die Sigmablock-Kalmanfilter verwenden nur Mittelwert und Varianz zur Beschreibung der auftretenden Dichtefunktionen. Die gesuchten ersten beiden Momente werden aus einer gewichteten Summe einer kleiner Menge repräsentativer Punkte berechnet. Diese Punkte sind die Abbilder, also die Folgezustände, der sogenannten Sigmablockpunkte, die in jedem Schritt deterministisch auf Basis der zur Verfügung stehenden Informationen berechnet werden.

### **Prinzip des Sigmablock-Kalmanfilters**

Die nichtlineare Funktion wird durch eine Lineare Regression linearisiert, statt durch eine Taylor-Entwicklung um einzelnen Punkt. Die lineare Regression benutzt Punkten des Zufallsvariables vor der nichtlinearen Transformation und deren nichtlineare Funktionswerte. Die statistische Eigenschaften des Zufallsvariables nach der nichtlinearen Transformation werden berücksichtigt, deswegen der erwartete Linearisierungsfehler kleiner als den Linearisierungsfehler von der Taylor-Entwicklung Linearisierung ist. [1]

Wir haben jetzt  $r$  Sigmablockpunkten  $\underline{X}_j$  mit

$$\bar{\underline{x}} = \sum_{j=1}^r w_j \underline{X}_j$$

mit

$$\underline{Y}_j = f(\underline{X}_j)$$

$w_j$  ist Regressionsgewichtung mit

$$\sum w_j = 1$$

Das Ziel ist, eine Lineare Regression  $y = A\underline{x} + b$  zu finden, um eine Kostenfunktion des Linearisierungsfehlers zu minimieren.

Kostenfunktion

$$J = E \{ (\underline{Y}_j - A\underline{X}_j - b)^T (\underline{Y}_j - A\underline{X}_j - b) \}$$

Unterschiedliche Sigmablock-Kalmanfilter besitzen unterschiedliche Sigmablockpunkten und Regressionsgewichtungen. In dem Versuch wird das Zentraldifferenzenfilter(CDKF) benutzt.

#### **2.2.4 Zentraldifferenzenfilter(CDKF)**

Das CDKF wurde ursprünglich als erweitertes Kalmanfilters 2.Ordnung entwickelt, das gegenüber dem normalen erweiterten Kalmanfilter nicht nur den linearen Term, sondern zusätzlich die quadratischen Term der Taylorreihe der Systemfunktion berücksichtigt. Um den Aufwand des analytischen Differenzierens zu umgehen, wurden die auftretenden Ableitungen durch Differenzenquotienten approximiert, die symmetrisch um den

betrachteten Punkt ausgewertet wurden. Im [2] wird gezeigt, dass das CDKF auch als Sigmapunkt-Kalmanfilter aufgefasst werden kann. Der einzige Entwurfsparameter  $h$  aus der Bildung des Differenzquotienten stammt. Für Gaußsche Verteilung ist  $h=\sqrt{3}$  optimal. [1] Andere Sigmapunkt-Kalmanfilter weisen demgegenüber mehrere Entwurfsparameter auf, was ihren Parametrierungsaufwand erhöht.

## 2.3 Regelung der Kugelwippe

Die Kugelwippe wird mithilfe einer vollständigen Zustandsrückführung geregelt. Obwohl es nicht im Rahmen des Versuchs ist, wird ein kurzer Überblick über das verwendete Regelungskonzept gegeben, welche ist überhaupt im Versuch 1 schon implementiert geworden.

### Zustandsabhängige Polvorgaberegelung

Die Methode der *quasilinearen Darstellung* dient zur Erweiterung des linearen Reglerentwurfsverfahrens auf nichtlineare Systeme der Form

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

mit stetig differenzierbarer Funktion  $f(x)$ . Ein nichtlineares System kann stets in eine quasilineare Darstellung

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u$$

überführt werden, wenn die Matrix  $A(x)$  ebenfalls stetig differenzierbar ist. Die punktweise lineare Darstellung wird häufig zum Entwurf eines zustandsabhängigen Riccatireglers verwendet, bei dem in jedem Zeitschritt für den aktuellen Zustand die Matrizen  $A(x)$  und  $B(x)$  auszuwerten sind und anschließend durch Lösung der Riccatigleichung ein Regelungsgesetz  $u = -R(x)x$  berechnet werden kann.

Aus der beschränkten Rechenkapazität des compact-RIO-Systems wird in jedem Abtastschritt nur eine zeitdiskrete Darstellung berechnet und anschließend mittels der Ackermannformel und der Formel für ein lineares zeitdiskretes Vorfilter  $v(x)$  ein Polvorgaberegler der Formalismus  $u = -r^T(x)x + v(x)w$  berechnet.

### Störgrößenaufschaltung

Bei einer Dauerstörung muss eine geeignete Erweiterung des Regelungsgesetzes erledigt. Zur Verbesserung der Regelung wird eine Störgrößenaufschaltung verwendet, das Regelungsgesetz wird zu  $u = -r^T(x)x + v(x)w + u_z(z)$  erweitert. Setzt man das Regelungsgesetz in das linearisierte Streckenmodell ein, so erhält man

$$\dot{x} = (A - b r^T)x + bu_z(z) + ez.$$

Ziel ist es,  $u_z(z)$  so zu wählen, dass die Summe der letzten beiden Terme möglichst klein bzw. der Einfluss der Störgröße minimal wird. Das erreicht man durch

$$u_z(z) = -(b^T b)^{-1} b^T e z.$$

Da die Reibung an der Wippe nicht gemessen werden kann, wird sie im Versuch mithilfe

---

eines erweiterten Streckenmodells geschätzt.

### 3. Aufgaben

#### Aufgabe 1: Verfahren der Zeitdiskretisierung

Der Entwurf regelungstechnischer Verfahren erfolgt physikalisch motiviert zumeist im kontinuierlichen Zeitbereich bzw. im Laplace-Bereich. Die Umsetzung der Algorithmen wird in modernen Regelsystemen jedoch auf digitalen Architekturen durchgeführt, was eine kontinuierliche Verarbeitung ausschließt. Problematisch wird dies, wenn die Zeitkonstanten dynamischer Vorgänge im Bereich der Abtastzeit oder sogar darunter liegen. Abhilfe bietet eine echt-zeitdiskrete Systembeschreibung, die mittels verschiedener Verfahren direkt aus der zeitkontinuierlichen Systembeschreibung gewonnen werden kann. In den Vorlesungen „Systemdynamik und Regelungstechnik“, „Signale und Systeme“ und „Regelung linearer Mehrgrößensysteme“ werden hierzu verschiedene Verfahren vorgestellt.

1. Nennen Sie je drei Verfahren zur Zeitdiskretisierung von Laplace-Übertragungsfunktionen. Beschreiben Sie kurz wie man bei den genannten Verfahren auf Basis einer gegebenen Laplace-Übertragungsfunktion eine zugehörige z-Übertragungsfunktion berechnen kann.
2. Nennen Sie drei Verfahren um aus einem gegebenen zeitkontinuierlichen Zustandsraummodell die Transitionsmatrix  $\Phi$  zu berechnen. Geben Sie, falls möglich, die Berechnungsvorschriften an.

**Antwort:**

1. Drei Verfahren zur Zeitdiskretisierung von Laplace-Übertragungsfunktionen sind im Folgenden gezeigt.
  - (1) Eine Übertragungsfunktion für eine gegebene Laplace-Übertragungsfunktion  $G(s)$  für eine Abtastzeit  $T$  kann durch die Ergänzung eines Haltegliedes  $G_H(s)$  berechnet werden. Dabei ist

$$G_H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} .$$

Nach der Z-Transformation wird die Berechnung vereinfacht geschrieben:

$$(G_H G)_z(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{ L^{-1}\left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\}$$

- (2) Numerische Integration: bei der numerischen Integration entsteht die zeitdiskrete Übertragungsfunktion  $G(z)$  durch Ersetzen der Variablen  $s$  der zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion durch drei unterschiedliche Gleichungen, die auf verschiedene Verfahren zur numerischen Darstellung der Differentialgleichung basieren:

Rechteckregel vorwärts:  $s = \frac{z-1}{T}$  ;

---

Rechteckregel rückwärts:  $s = \frac{z-1}{Tz}$  ;

Trapezregel/ bilineare Transformation:  $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$  ,

dabei ist hier  $T$  die Abtastzeit.

(3) Pol-/Nullstellenübertragung: in diesem Verfahren werden alle Pole und Nullstellen von  $G(s)$  mit der Abbildung  $z = e^{sT}$  in den z-Bereich übertragen, dabei ist  $T$  die Abtastzeit, damit man ein System mit gleichem Übertragungsverhalten erhalten kann. Außerdem müssen alle Nullstellen im Unendlichen und der Proportionalitätsfaktor besonders berücksichtigt werden. Alle  $s_0 \rightarrow \infty$  werden auf den Punkt  $z_0 = -1$  übertragen. Der Proportionalitätsfaktor wird durch gleiches Übertragungsverhalten

$G(s=j2\pi f_0) = G(z=e^{j2\pi f_0 T})$  bei einer bestimmten Frequenz  $f_0$  berechnet.

2. Drei Verfahren um aus einem gegebenen zeitkontinuierlichen Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

die Transitionsmatrix  $\Phi$  zu berechnen sind folgendenweise beschrieben:

(1) Berechnung über Exponentialreihenansatz:  $\Phi(t-\tau) = e^{A(t-\tau)}$ . Aber über diesen Ansatz ist geschlossene Darstellung nur möglich in einfachen Fällen.

(2) Berechnung durch numerische Näherung:  $\Phi(t-\tau) \approx \sum_{v=0}^N \frac{(A(t-\tau))^v}{v!}$ .

(3) Berechnung durch Vergleich mit der Frequenzbereichslösung:

durch die Laplace-Transformation des Zustandsraummodells ergibt sich

$$x(t) = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}X(0) + L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} * Bu(t).$$

Diese Gleichung wird mit der allgemeinen Lösung der Zustandsgleichung für  $t_0=0$  verglichen:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{\tau=t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

dann kann man erhalten  $\Phi(t) = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ .

## Aufgabe 2: Numerische Differentiation

Zur Bestimmung der Kugelgeschwindigkeit sowie der Winkelgeschwindigkeit im Rechner muss das Übertragungsglied aus Gleichung 2.2 zeitdiskretisiert werden. Bestimmen Sie die dazu notwendigen Differenzengleichungen in Abhängigkeit des Parameters  $a$  sowie der Abtastzeit  $T$  durch die Anwendung eines Verfahrens Ihrer Wahl.

**Antwort:**

---

Übertragungsglied:  $G(s) = \frac{as}{s+a}$ , um den Prozess zu diskretisieren brauchen wir hier ein Sample and hold Glied  $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ , dann erhalten wir das gesamte Übertragungsglied.

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{as}{s+a}$$

Durch Z-Transformation erhalten wir,

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{a}{s+a} \right\} \\ &= \frac{a(z-1)}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Durch z-Rücktransformation erhalten wir,

$$y(k) = au(k) - au(k-1) + e^{-aT} y(k-1)$$

### Aufgabe 3: Störmodelle

Zur Verbesserung der Regelung durch eine Störgrößenaufschaltung müssen die Haf- und Gleitreibung mithilfe eines erweiterten Streckenmodells geschätzt werden. Die Reibungseinflüsse sollen dabei als konstant, also ohne eigene Dynamik, angenommen werden.

1. Stellen Sie ein zeitkontinuierliches Störmodell für die Reibung auf.
2. Fassen Sie Ihr Reibungsmodell mit dem linearisierten Modell zu einem erweiterten Steckmodell zusammen.
3. Überlegen Sie, wie das nichtlineare Zustandsraummodell zur Berücksichtigung der Reibung erweitert werden muss.

#### Antwort:

1. Die Reibungskraft wird als Konstant betrachtet. Erhalten wir sofort das Zustandsraummodell der Reibungskraft.

$$x_f = f, \dot{x}_f = 0$$

2. Wenn die Reibungskraft betrachtet wird, das linearisierte Modell wird erweitert.

$$\dot{x} = Ax + bu + \underline{e} z$$

mit dem Störvektor.

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0762 \\ 0 \\ 3.2359 \end{bmatrix}.$$

Mit dem Zustandsmodell der Reibungskraft erhalten wir das erweiterte Zustandsraummodell

---


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.392 & 0 & 6.0059 & 1.2663 & -0.0762 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16.6426 & 0 & 0.0806 & -53.7579 & 3.2359 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2459 \\ 0 \\ 10.4384 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

3. Die Reibungskraft soll jetzt in die nichtlineare Funktion eingefügt werden.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\underline{x}, u, f) \\ x_4 \\ f_4(\underline{x}, u, f) \end{bmatrix}$$

#### Aufgabe 4: Zeitdiskretisierung des Zustandsraummodells

Berechnen Sie eine zeitdiskrete Darstellung des ursprünglichen linearisierten und des um die Störgröße erweiterten Wippenmodells aus Aufgabe 3 unter Verwendung einer Methode Ihrer Wahl. Nehmen Sie eine Abtastzeit von  $T = 50\text{ ms}$  an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat der Zeitdiskretisierung des kontinuierlichen Modells in *Matlab*.

**Antwort:**

#### Ursprüngliches Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.392 & 0 & 6.0059 & 1.2663 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16.6426 & 0 & 0.0806 & -53.7579 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2459 \\ 0 \\ 10.4384 \end{bmatrix} u$$

Mit  $T = 50\text{ ms}$ , benutzen wir den Befehl  $\text{expm}(0.05*A)$  im *Matlab*, erhalten wir

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.05 & 0.0075 & 0.0008 \\ -0.0056 & 0.9998 & 0.3003 & 0.0256 \\ 0.0101 & 0.0002 & 1.0001 & 0.0173 \\ 0.2885 & 0.0101 & 0.0026 & 0.0682 \end{bmatrix}$$

Berechnen wir jetzt  $\underline{H}$  durch  $\underline{H} = \int_0^T \underline{\Phi}(v) dv B$

Aber mit *Matlab* ist die Berechnung von  $\underline{\Phi}(v)$  mit `syms v` sehr langsam. Deshalb machen wir zum erstens eine Zerlegung von Matrix A durch `eig()` Befehl. Erhalten wir

$$A = \underline{V} \underline{D} \underline{V}^{-1}$$

Mit

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 0.0004 & 0.6156 & 0.3021+0.5298i & 0.3021-0.5298i \\ -0.0215 & 0.7502 & -0.7535 & -0.7535 \\ -0.0186 & 0.1531 & 0.0758 & 0.0758 \\ 0.9996 & 0.1866 & 0.098+0.1637i & 0.098-0.1637i \end{bmatrix}$$

---


$$D = \begin{bmatrix} -53.7528 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.612 + 1.0732i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.612 - 1.0732i \end{bmatrix}$$

Nach der Zerlegung berechnen wir  $H = \underline{V} \int_0^T e^{\underline{A}v} dv \underline{V}^{-1} B$  mit Befehl integral().

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0035 \\ 0.0063 \\ 0.1806 \end{bmatrix}$$

Mit Befehl c2d erhalten wir die Gleiche  $\underline{\Phi}$  Matrix, aber

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0035 \\ 0.0063 \\ 0.1809 \end{bmatrix}$$

### Erweitertes Modell

Mit der gleichen Methode erhalten wir

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.05 & 0.0075 & 0.0008 & 0 \\ -0.0056 & 0.9998 & 0.3003 & 0.0256 & -0.0011 \\ 0.0101 & 0.0002 & 1.0001 & 0.0173 & 0.002 \\ 0.2885 & 0.0101 & 0.0026 & 0.0682 & 0.0561 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0035 \\ 0.0063 \\ 0.1806 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit c2d erhalten wir die gleiche  $\underline{\Phi}$  Matrix, aber

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0035 \\ 0.0063 \\ 0.1809 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 5: Prädiktionsgleichungen des CDKF

Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsvariable  $x$  mit dem Mittelwert  $\mu_x = 0.75$  und der Varianz  $\sigma_x^2 = 0.0225$ . Diese Zufallsvariable soll durch die nichtlineare Abbildung

$$y = 10x^2$$

abgebildet werden. Berechnen Sie den Mittelwert  $\mu_y$  und die Varianz  $\sigma_y^2$  der

abgebildeten Zufallsvariablen  $y$ . Verwenden Sie dazu die Gleichungen des CDKF mit  $h=\sqrt{3}$  und  $q=0$ . Runden Sie ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

**Antwort:**

Mit  $h=\sqrt{3}$  erhält man die Sigmepunkte für den Prädiktionsschritt:

$$\chi = [0.75 \quad 0.75 + 0.15\sqrt{3} \quad 0.75 - 0.15\sqrt{3}] \approx [0.75 \quad 1.0098 \quad 0.4902].$$

Nach der Abbildung der Sigmepunkte mithilfe der nichtlinearen Funktion  $y=10x^2$  ergibt sich:

$$\chi = [10 \times 0.75^2 \quad 10 \times 1.0098^2 \quad 10 \times 0.4902^2] \approx [5.625 \quad 10.197 \quad 2.403].$$

Nach den Gleichungen des Prädiktionsschritts erhält man:

$$\hat{x} = \frac{h^2 - n}{h^2} \chi^{(0)} + \frac{1}{2h^2} (\chi^{(1)} + \chi^{(2)}) = \frac{2}{3} \times 5.625 + \frac{1}{6} (10.197 + 2.403) = 5.850,$$

$$P = \frac{1}{4h^2} (\chi^{(1)} - \chi^{(2)})^2 + \frac{h^2 - 1}{4h^4} (\chi^{(1)} + \chi^{(2)} - 2\chi^{(0)})^2 + 0,$$

$$P = \frac{1}{12} (10.197 - 2.403)^2 + \frac{1}{18} (10.197 + 2.403 - 2 \times 5.625)^2 = 5.069,$$

Durch die Auswertung der Prädiktionsgleichungen des CDKF wird der Mittelwert  $\mu_y$  und die Varianz  $\sigma_y^2$  der abgebildeten Zufallsvariablen  $y$  berechnet:

$$\mu_y = 5.850, \quad \sigma_y^2 = 5.069.$$

### Aufgabe 6: Filterschritt des CDKF bei linearer Ausgangsgleichung

Wie wirkt sich die Annahme einer linearen Ausgangsgleichung  $y=Cx$  auf den Filterschritt des Zentraldifferenzenfilters aus? Welchem anderen Filter entspricht das?

**Hinweis:** Bitte argumentieren sie nachvollziehbar. Ein detaillierter mathematischer Beweis ist allerdings nicht nötig.

**Antwort:**

Wenn die Ausgangsgleichung des Zustandsmodells linear ist, werden die Gleichungen des Filterschritts linearisiert. Das entspricht dem linearen Kalmanfilter.

Dem Algorithmus des CDKF gemäß werden die auftretenden Ableitungen von der Taylorreihe der Systemfunktion durch Differenzenquotienten approximiert, die symmetrisch um den betrachteten Punkt ausgewertet werden. Das heißt, die Sigmepunkte sind beim CDKF symmetrisch u den Schätzwert. Wenn  $y=Cx$ , ist der Schätzwert linearisiert:

$\hat{y}(k|k-1) = \underline{Y}^{(0)}(k|k-1) = c \hat{x}(k|k-1)$ . Außerdem ist der zweite Term von  $\tilde{P}(k|k-1)$  gleich Null und damit beseitigt. Dann erhält man die identischen Gleichungen wie beim linearen Kalmanfilter.

### Aufgabe 7: Manuelle Steuerung

Ein LabVIEW-Programm erstellen, das die manuelle Vorgabe der Motorspannung im

Bereich  $\pm 5V$  über einen Schieberegler erlaubt. Versuchen, durch manuelle Vorgabe einer geeigneten Motorspannung die Kugel an einer beliebigen Position zu stabilisieren.

### Antwort:

Das grobe Modell der manuellen Steuerung ist im Versuch schon gegeben.

Auf dem Frontpanel werden einer Schieberegler und drei „Waveform Chart“, die jeweils zur Anzeige der Werte von Kugelposition, Wippenwinkel sowie Spannung dienen, zugefügt. Hier kann man die vorgegebene Spannung der Anlage durch Schiebung des Reglers verändern. Und der Verlauf der aufgenommenen Messgrößen kann man direkt lesen.

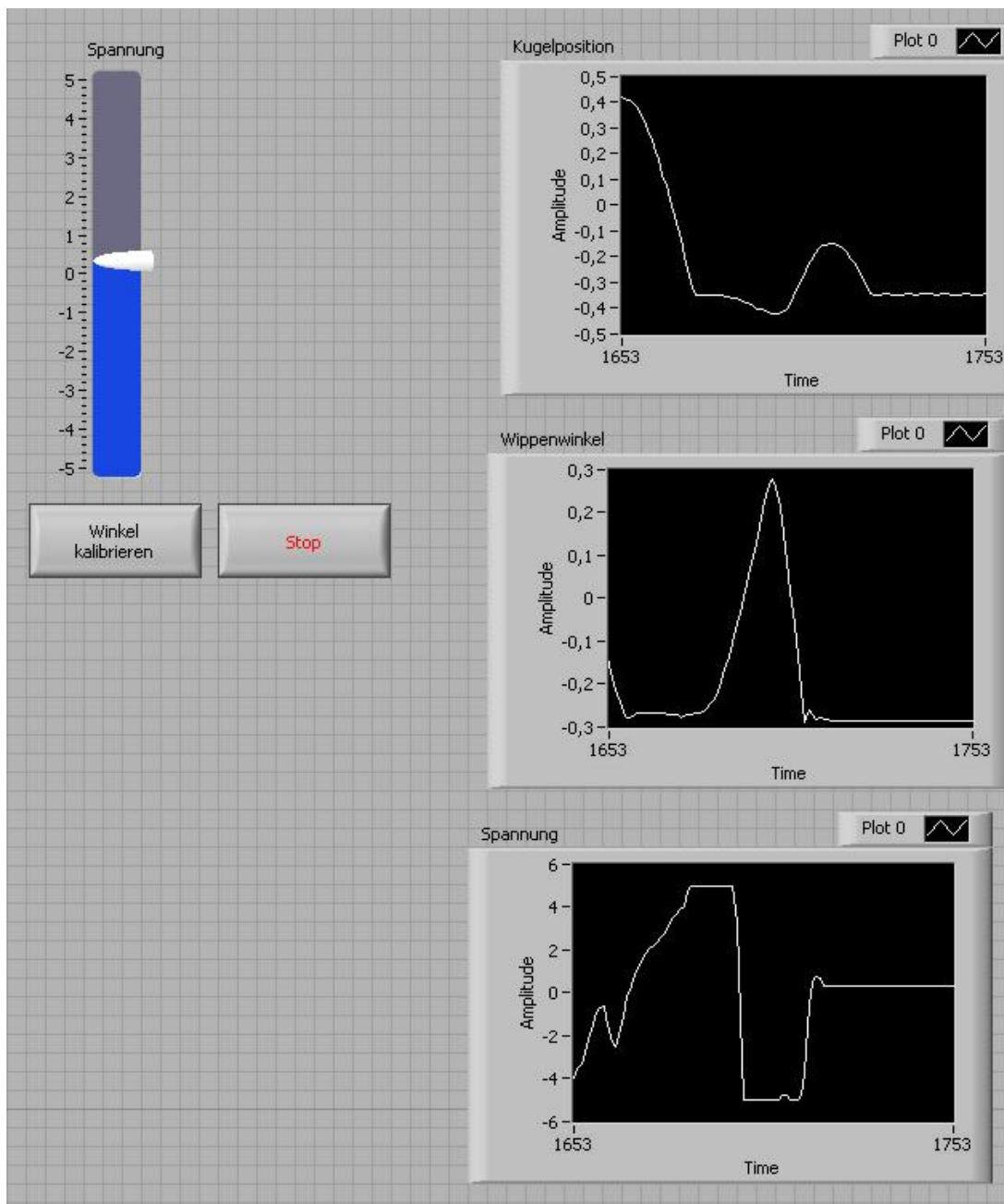


Abbildung 3.1 Frontpanel der manuellen Steuerung

Auf dem Blockdiagramm soll zuerst ein „Loop block“ zugefügt werden. Dann werden die

Elemente verbunden. Die Spannungsbegrenzung (-5V bis 5V) wird durch die Funktion „In Range and Coerce“ erledigt.

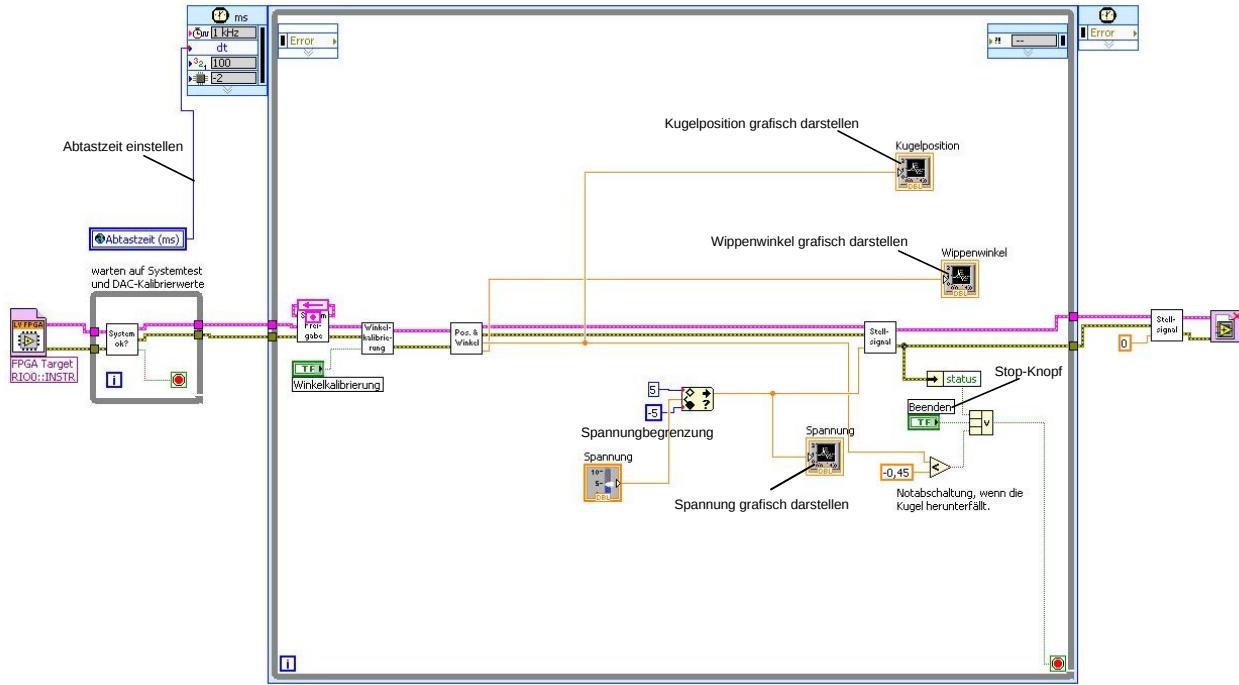


Abbildung 3.2 Blockdiagramm der manuellen Steuerung

Es dauert eine Weile, dass wir die manuelle Steuerung der Kugelwippe probieren. Allerdings ist es ganz schwierig, die Kugel an irgendeiner Position zu stabilisieren. Die Einführung Regelung mit der Zustandsschätzung ist deshalb offensichtlich sehr nötig.

### Aufgabe 8: Numerische Differentiation

Die Schätzung der Kugel- sowie der Winkelgeschwindigkeit implementieren. Durch Simulationen geeignete Werte für den Parameter  $a$  so bestimmen, dass die simulierten und die geschätzten Geschwindigkeiten möglichst gut übereinstimmen.

#### Antwort:

In Aufgabe 2 wird die Differenzengleichung bestimmen:

$$y(k) = a u(k) - a u(k-1) + e^{-aT} y(k-1).$$

Nach dem Einsatz der 2 Schätzwerte, erhält man die 2 Gleichungen:

$$\dot{x}(k) = a_{Ges} x(k) - a_{Ges} x(k-1) + e^{-a_{Ges} T} \dot{x}(k-1)$$

$$\dot{\varphi}(k) = a_{WinGes} \varphi(k) - a_{WinGes} \varphi(k-1) + e^{-a_{WinGes} T} \dot{\varphi}(k-1)$$

Dann werden die 2 Gleichungen im LabVIEW wie folgende implementiert. Die Strukturen der 2 Schätzwerte sind gleich. Durch die Simulation kann man der optimale Parameter  $a$  bestimmen. Das konkrete Verfahren und Ergebnis wird in der Aufgabe 11 erklärt.

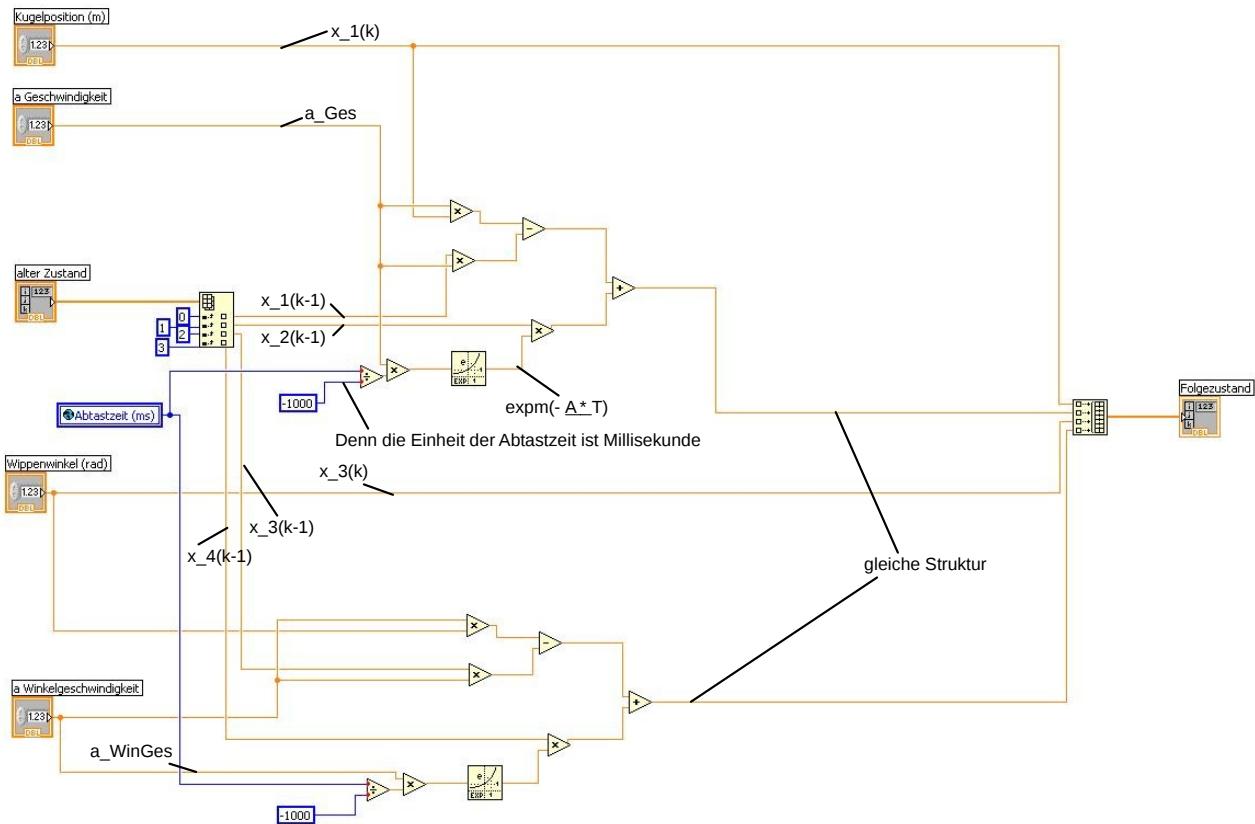


Abbildung 3.3 Blockdiagramm der numerischen Differentiation

### Aufgabe 9: Lineares Kalmanfilter

Implementieren Sie die Zustandsschätzung für die Kugelwippe mithilfe linearer Kalmanfilter für

- das lineare, zeitdiskrete Modell
- das erweiterte, zeitdiskrete Modell

Die Kovarianzmatrix des Systemrauschen geeignet wählen.

**Antwort:**

• **lineares, zeitdiskretes Modell:**

In der Aufgabe 4 bekommen wir schon die Parameter des Systems:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.05 & 0.0075 & 0.0008 \\ -0.0056 & 0.9998 & 0.3003 & 0.0256 \\ 0.0101 & 0.0002 & 1.0001 & 0.0173 \\ 0.2885 & 0.0101 & 0.0026 & 0.0682 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0035 \\ 0.0063 \\ 0.1809 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Im Haupt-Blockdiagramm vom LabVIEW werden die folgenden Gleichungen des Prädiktionsschritts vom Linearen Kalman-filter implementiert:

$$\hat{x}(k|k-1) = \Phi \hat{x}(k-1|k-1) + Hu(k-1),$$

$$P(k|k-1) = \Phi P(k-1|k-1) \Phi^T + LQ(k-1)L^T,$$

wobei  $x_{pred}$  im Diagramm  $\hat{x}(k|k-1)$ ,  $P_{pred}$   $P(k|k-1)$  bezeichnet. Die Matrix  $LQ(k-1)L^T$  wird zuerst als Einheitsmatrix definiert.

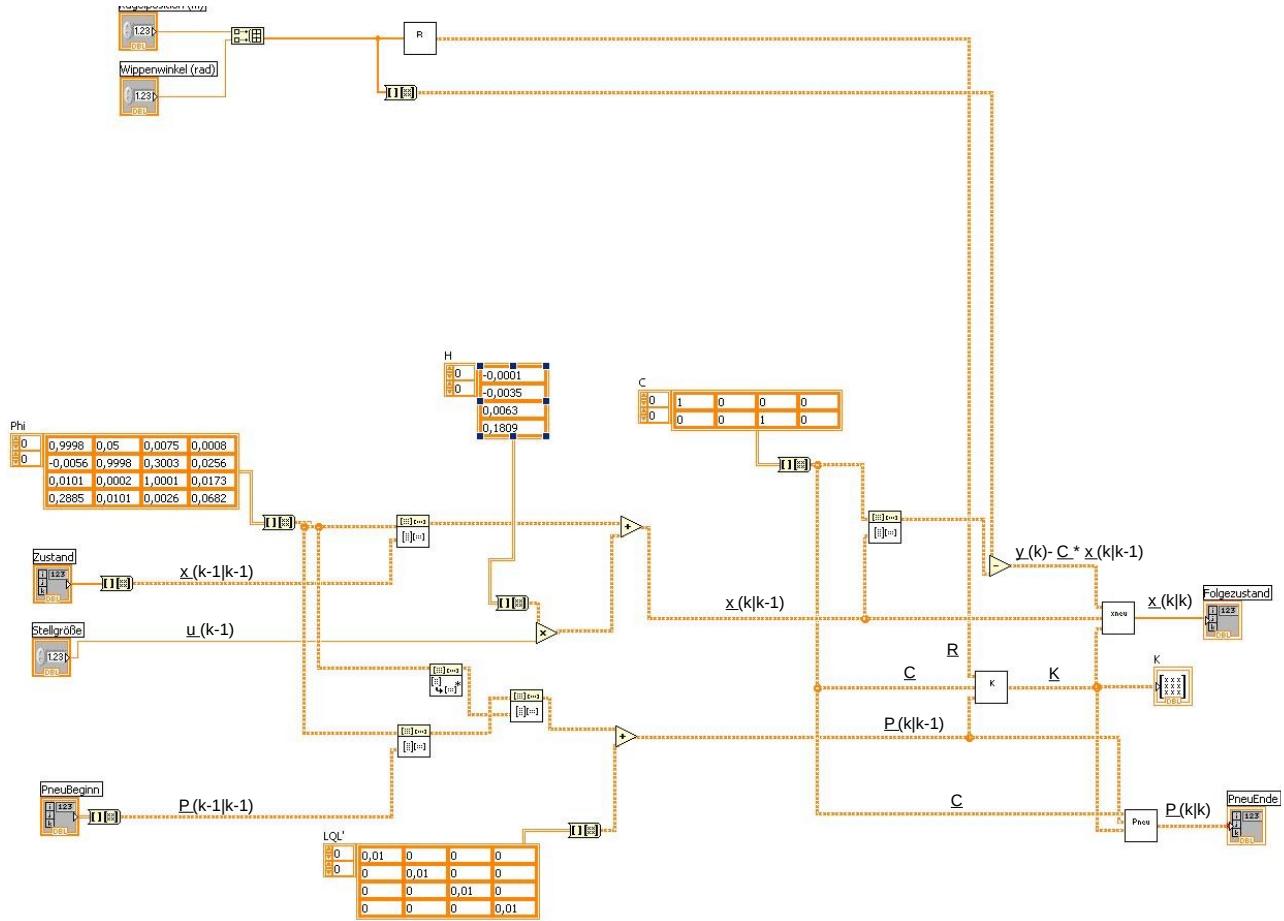


Abbildung 3.4 Blockdiagramm des linearen Modells ohne Störgröße

In jeweiliger Blöcke werden die folgenden Gleichungen der Verstärkungsmatrix und des Filterschritts implementiert:

$$K(k) = P(k|k-1)C^T(CP(k|k-1)C^T + R(k))^{-1},$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)),$$

$$P(k|k) = (I - K(k)C)P(k|k-1),$$

wobei  $x_{neu}$  im Diagramm  $\hat{x}(k|k)$ ,  $P_{neu}$   $P(k|k)$ , bzw.  $K$   $K(k)$  bezeichnet.

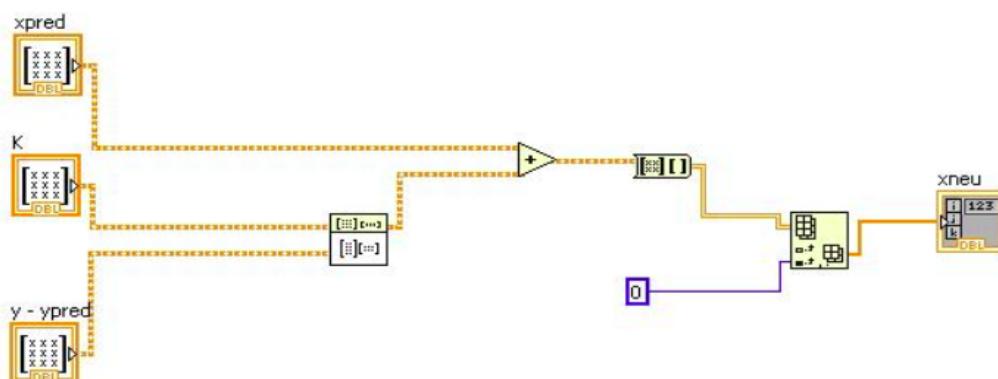
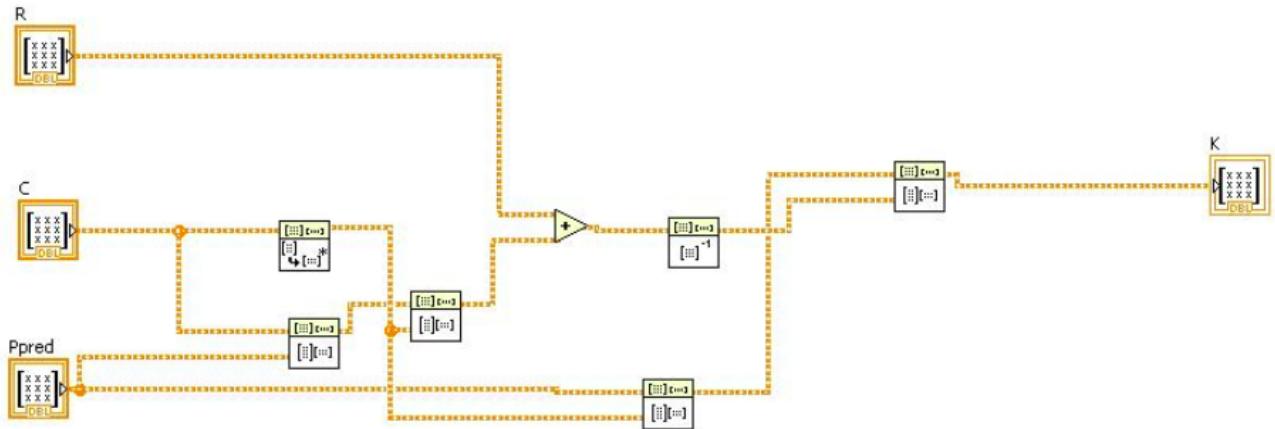
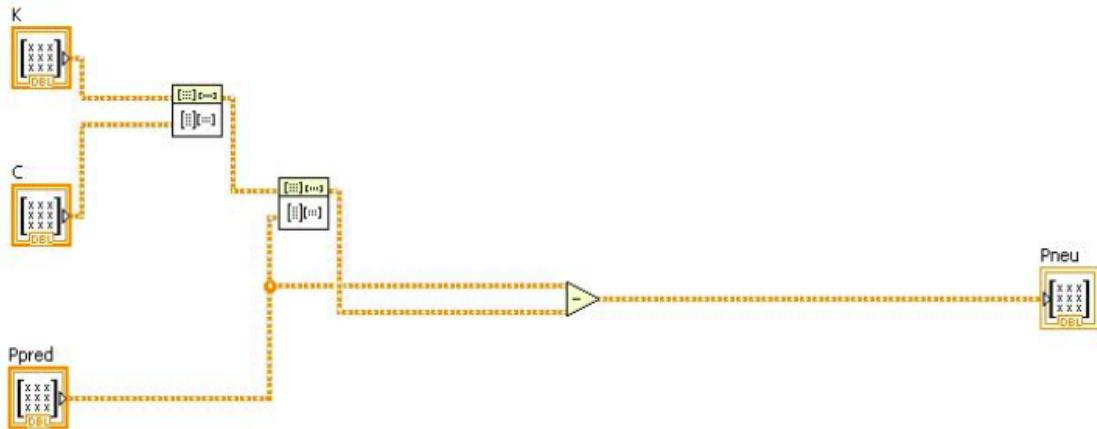


Abbildung 3.5 Blockdiagramm von  $\hat{x}(k|k)$ Abbildung 3.6 Blockdiagramm von  $K(k)$ Abbildung 3.7 Blockdiagramm von  $P(k|k)$ 

- erweitertes, zeitdiskretes Modell (mit Störgröße):**

Die Parameter des Systems lauten:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.05 & 0.0075 & 0.0008 & 0 \\ -0.0056 & 0.9998 & 0.3003 & 0.0256 & -0.0011 \\ 0.0101 & 0.0002 & 1.0001 & 0.0173 & 0.002 \\ 0.2885 & 0.0101 & 0.0026 & 0.0682 & 0.0561 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0035 \\ 0.0063 \\ 0.1809 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Im Haupt-Blockdiagramm vom LabVIEW werden die Gleichungen des Prädiktionsschritts vom Lineare Kalman-filter wie die des Modells ohne Störgröße implementiert. Der einzelne Unterschied ist das Zustandsraummodell.

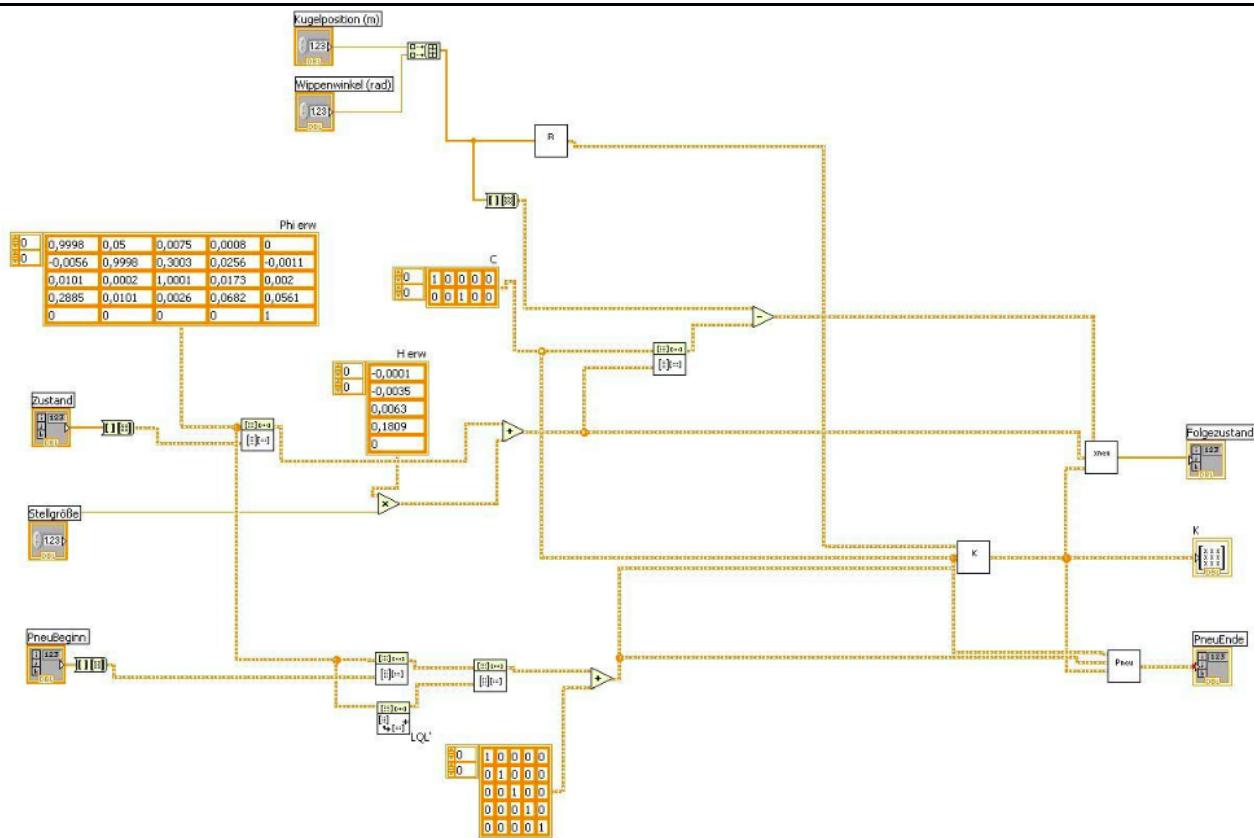


Abbildung 3.8 Blockdiagramm des erweiterten Modells mit Störgröße

### Aufgabe 10: CDKF

Implementieren Sie ein CDKF zur nichtlinearen Zustandsschätzung für das nichtlineare Modell. Erweitern Sie das CDKF anschließend um die Störgrößenschätzung.

#### Antwort:

Im Haupt-Blockdiagramm vom LabVIEW werden die folgenden Gleichungen des Prädiktionsschritts vom Lineare Kalman-filter implementiert:

Sigmapunkte für den Prädiktionsschritt:

$$\underline{x}^{(0)}(k-1|k-1) = \hat{x}(k-1|k-1)$$

$$\underline{x}^{(i)}(k-1|k-1) = \hat{x}(k-1|k-1) + h \sqrt{P(k-1|k-1)}^{(i-1)}, (i=1, \dots, n)$$

$$\underline{x}^{(n+i)}(k-1|k-1) = \hat{x}(k-1|k-1) - h \sqrt{P(k-1|k-1)}^{(i-1)}, (i=1, \dots, n)$$

Sigmapunkte für den Filterschritt:

$$\tilde{x}^{(0)}(k|k-1) = \hat{x}(k|k-1)$$

$$\tilde{x}^{(i)}(k|k-1) = \hat{x}(k|k-1) + h \sqrt{P(k|k-1)}^{(i-1)}, (i=1, \dots, n)$$

$$\tilde{x}^{(n+i)}(k|k-1) = \hat{x}(k|k-1) - h \sqrt{P(k|k-1)}^{(i-1)}, (i=1, \dots, n)$$

Prädiktionsschritt:

$$\underline{x}^{(i)}(k|k-1) = f(\underline{x}^{(i)}(k-1|k-1), u(k-1)), (i=0, \dots, 2n)$$

$$\hat{x}(k|k-1) = \frac{h^2 - n}{h^2} x^{(0)}(k|k-1) + \frac{1}{2h^2} \sum_{j=1}^{2n} x^{(j)}(k|k-1)$$

$$\underline{P}(k|k-1) = \frac{1}{4h^2} \sum_{j=1}^n (\chi^{(j)}(k|k-1) - \chi^{(n+j)}(k|k-1)) \cdot (\chi^{(j)}(k|k-1) - \chi^{(n+j)}(k|k-1))^T$$

$$+ \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{j=1}^n (\chi^{(j)}(k|k-1) + \chi^{(n+j)}(k|k-1) - 2\chi^{(0)}(k|k-1))$$

$$\cdot (\chi^{(j)}(k|k-1) - \chi^{(n+j)}(k|k-1) - 2\chi^{(0)}(k|k-1))^T + \underline{L}Q(k-1)\underline{L}^T$$

wobei  $x_{\text{neu}}$  im Diagramm  $\hat{x}(k|k-1)$ ,  $P_{\text{neu}}$   $\underline{P}(k|k-1)$  bezeichnet. Hier  $h=\sqrt{3}$ ,  $n=4$ .

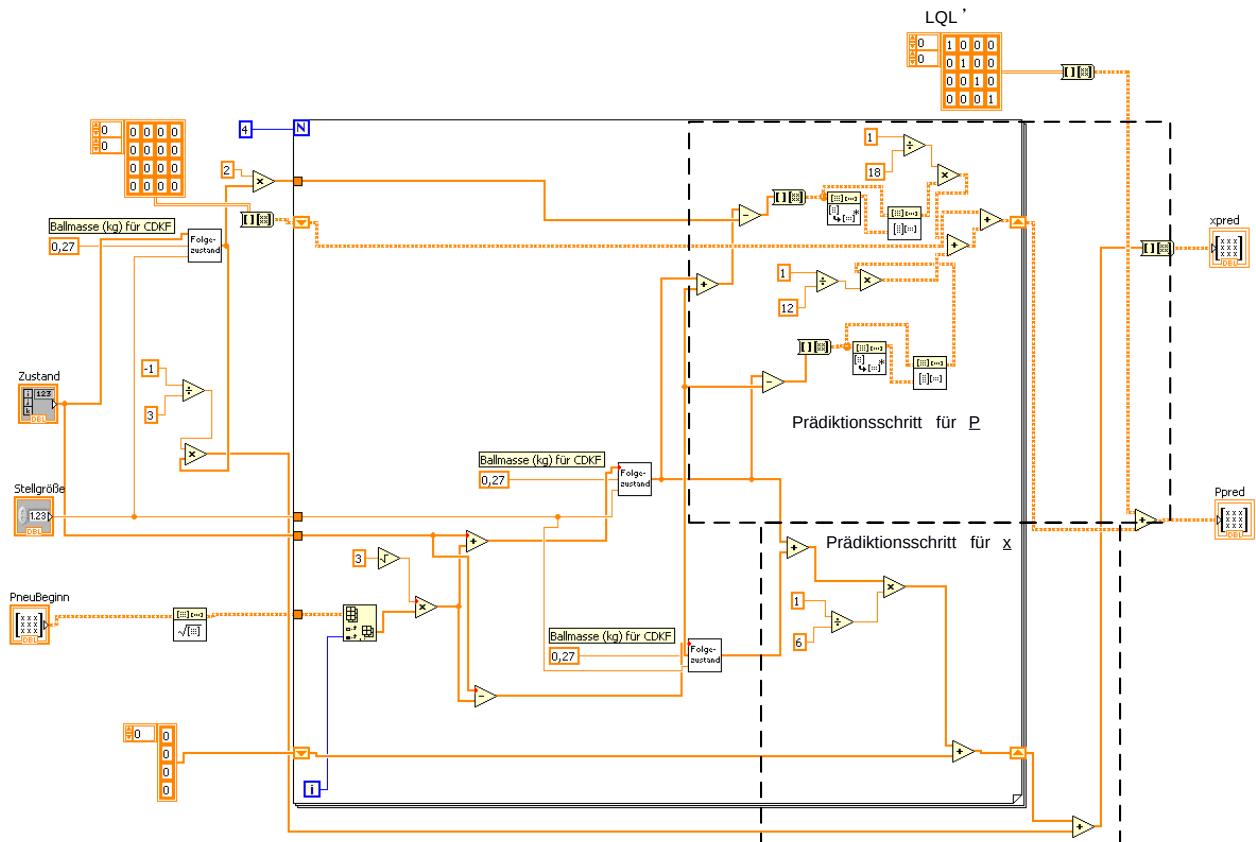


Abbildung 3.9 Blockdiagramm vom CDKF ohne Störgröße

Im Versuch wird das erweiterte Modell im LabVIEW schon gegeben. Der zu zufügende Teil ist die Matrix der Störgröße, die als hier als Einheitsmatrix definiert wird.

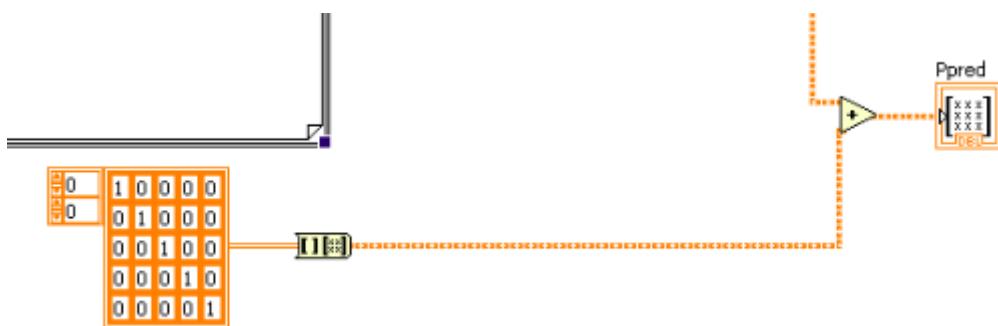


Abbildung 3.10 Teil des Blockdiagramms vom CDKF mit Störgröße

## Aufgabe 11: Vergleich in der Simulationen

Vergleichen Sie die Ergebnisse der nichtlinearen Schätzer anhand von Simulationen mit denen der linearen Schätzer und der numerischen Differentiation. Wo liegen die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren?

Antwort:

Die Ergebnisse der Simulation von unterschiedlichen Zustandschätzer werden durch folgenden Bildern dargestellt.

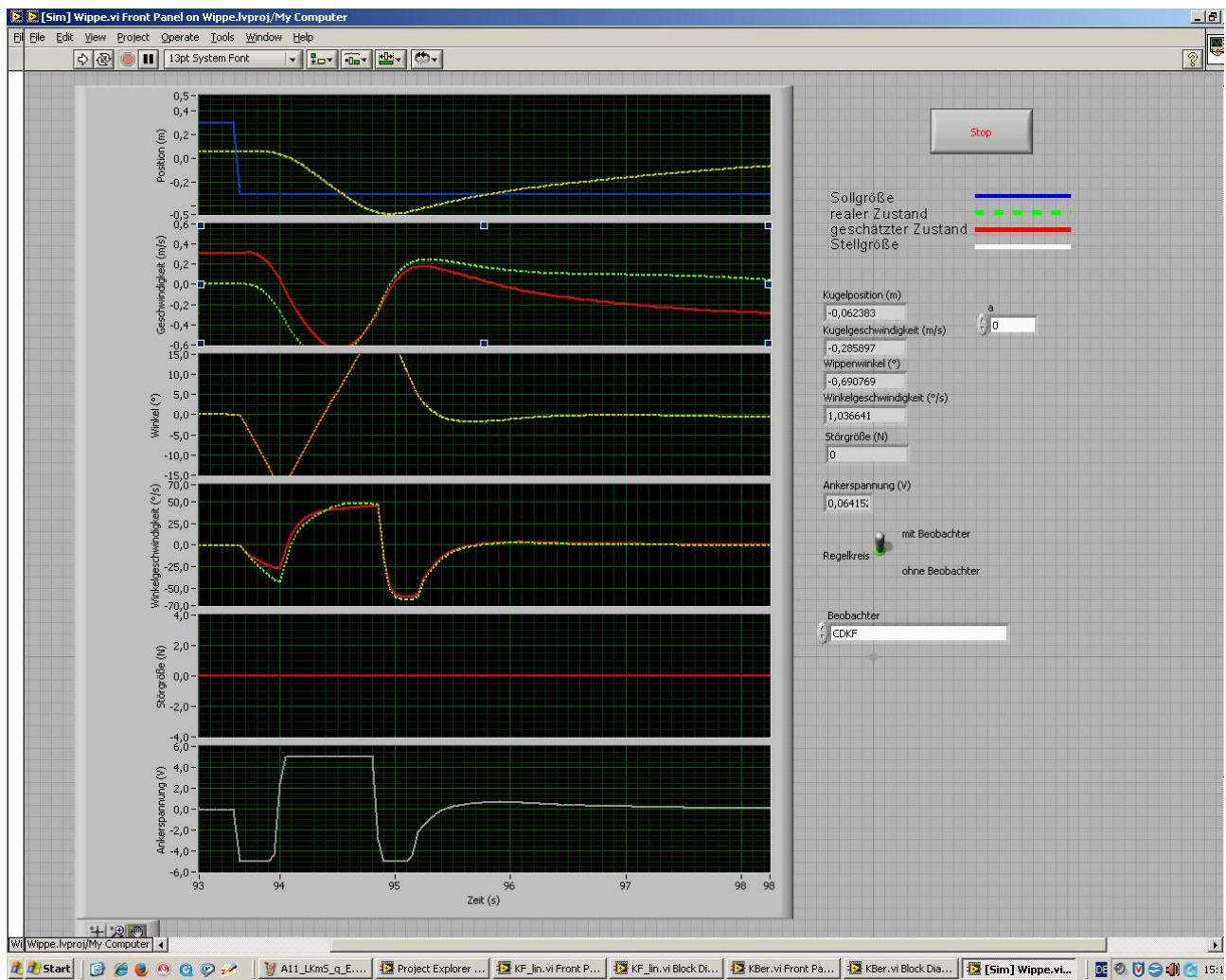


Abbildung 3.11 Simulationsergebnis des CDKFs( $Q = \text{Einheitsmatrix}$ )

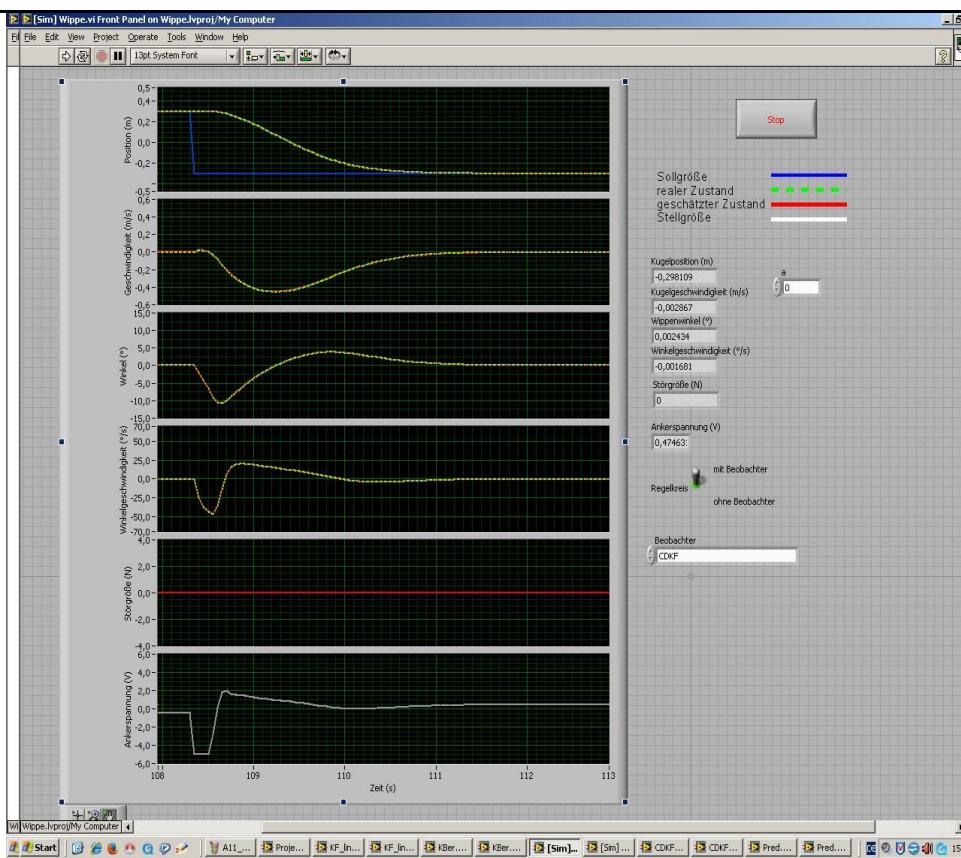


Abbildung 3.12 Simulationsergebnis des CDKFs( $Q = 0.01 * \text{Einheitsmatrix}$ )

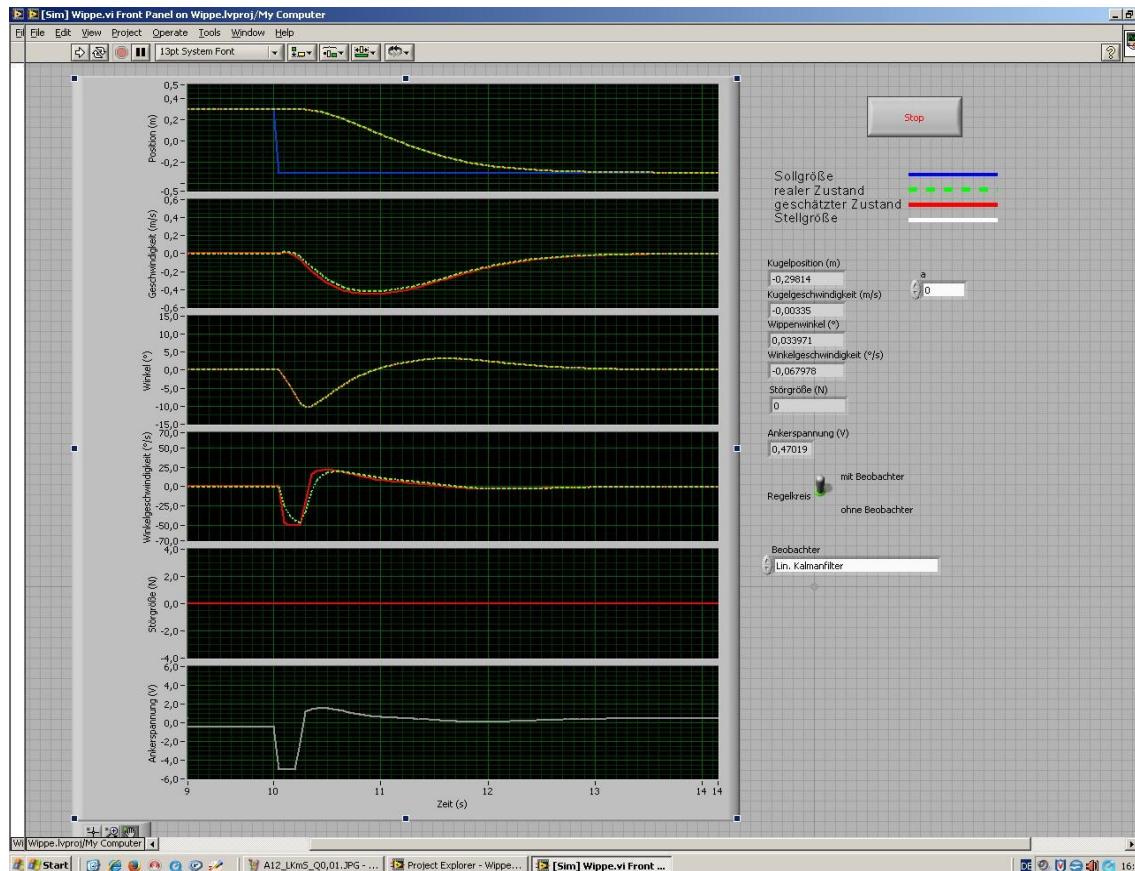


Abbildung 3.13 Simulationsergebnis des Lin.Kalmanfilter( $Q = 0.01 * \text{Einheitsmatrix}$ )

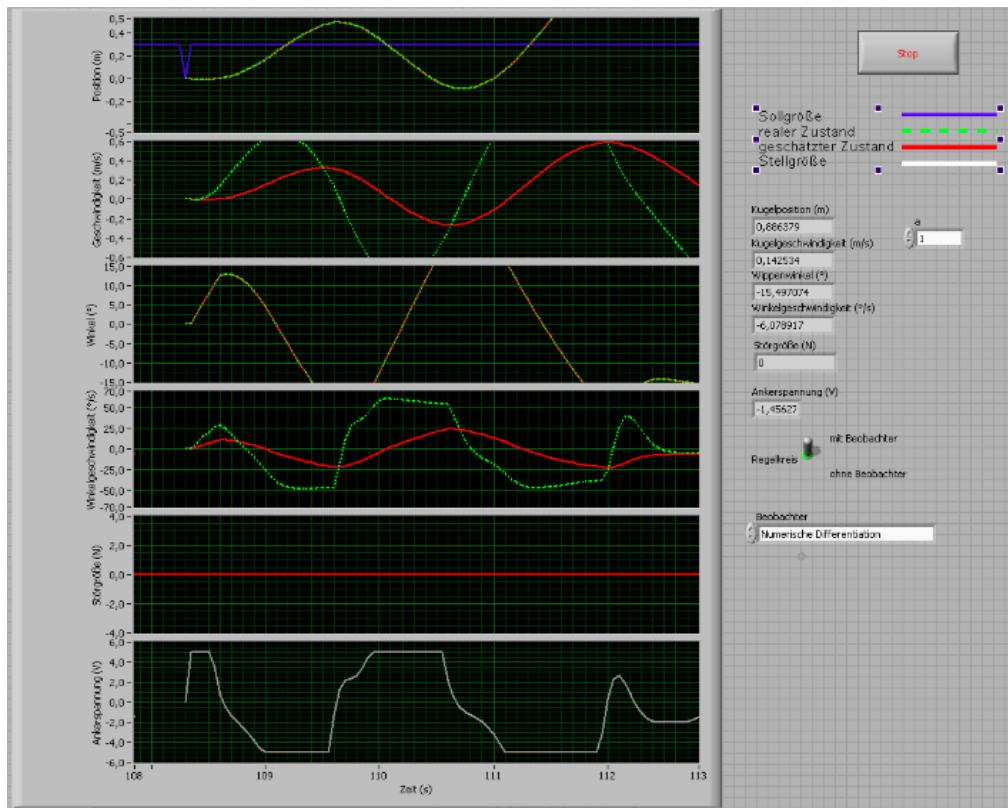


Abbildung 3.14 Simulationsergebnis der numerischen Differentiation ( $a=1$ )

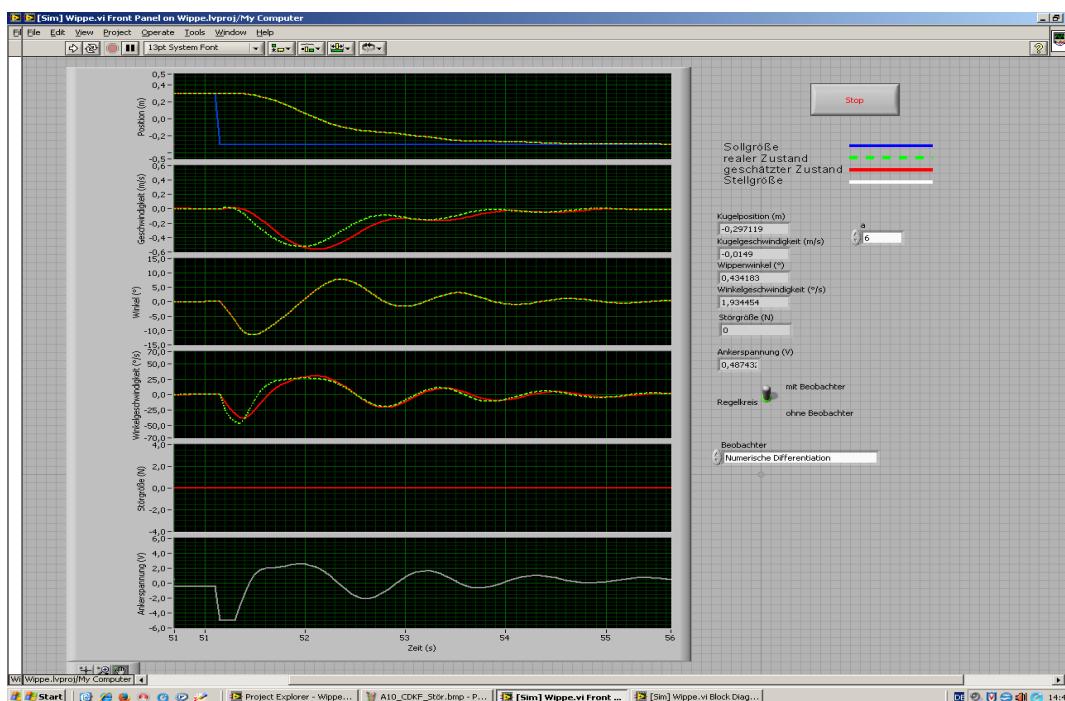


Abbildung 3.15 Simulationsergebnis der numerischen Differentiation ( $a=6$ )

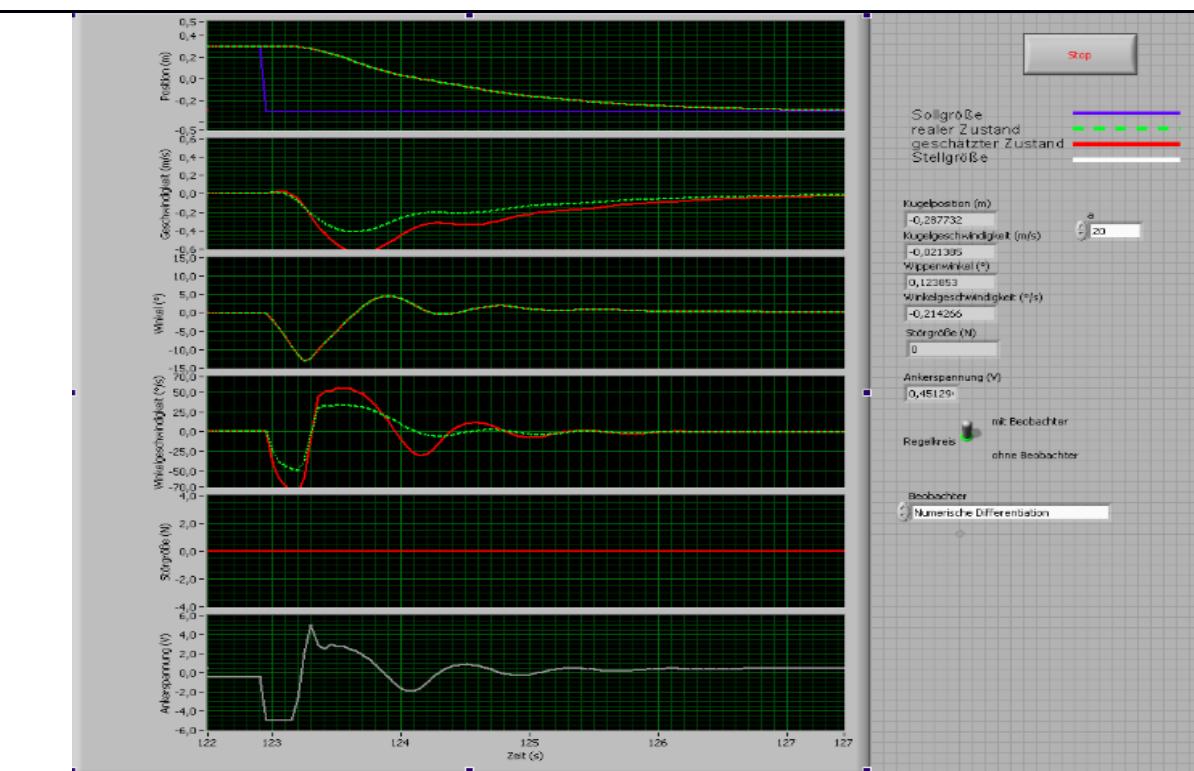


Abbildung 3.16 Simulationsergebnis der numerischen Differentiation ( $a=20$ )

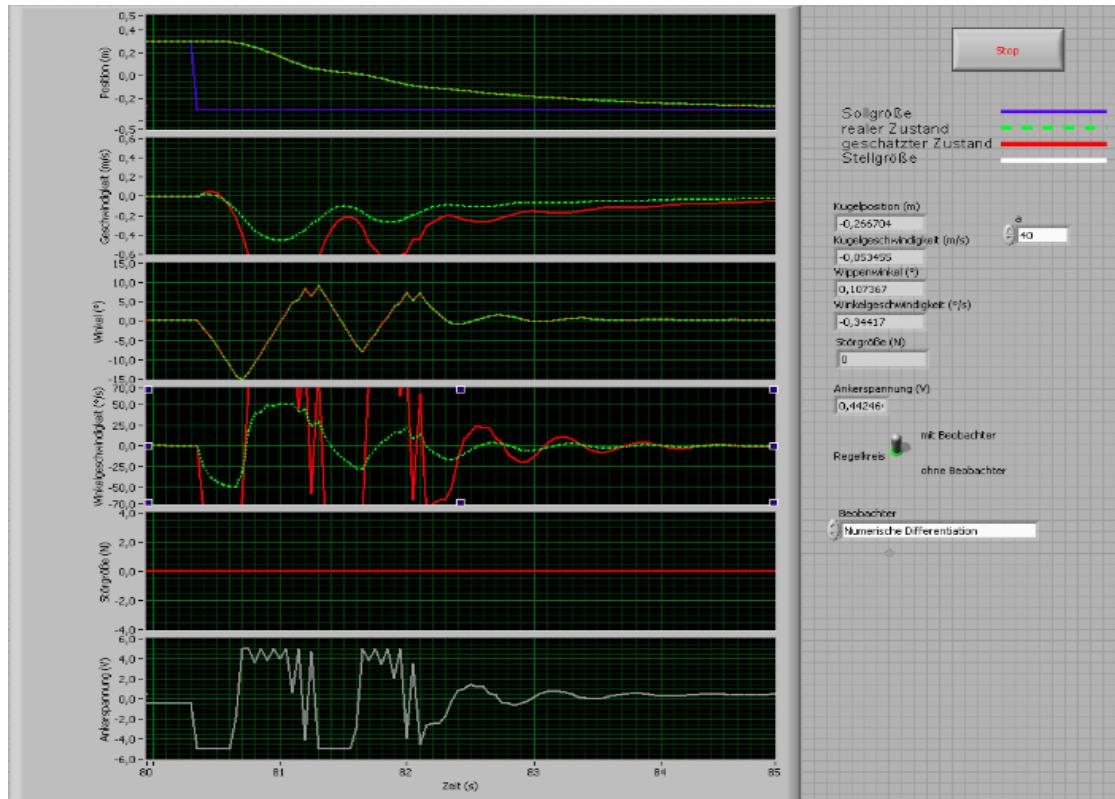


Abbildung 3.17 Simulationsergebnis der numerischen Differentiation ( $a=40$ )

In unserer Simulation wird die Reibungskraft und das Messrauschen vernachlässigt. Deswegen sind die Kalmanfilter stark von den Messwerten gestützt. Deshalb sind die Position und Winkel sehr gut geschätzt.

Das CDKF mit einer kleinen Systemrauschmatrix kann die Zustände besser als das lineare Kalmanfilter verfolgen. Weil das Systemmodell ist tatsächlich ein nichtlineares Modell. Aber wenn die Systemrauschmatrix größer wird, wird das Ergebnis des CDKFs schlechter, sogar schlechter als das Ergebnis des linearen Kalmanfilters. Man kann auch sehen, dass mit unterschiedlichen  $a$  die Ergebnisse der Numerische Differentiation verschieden sind. Wenn die  $a$  Koeffizient zu klein ist, wird die Änderung der Zustände nicht gut verfolgt. Wenn die  $a$  Koeffizient zu groß ist, wird das Rauschen nicht gefiltert. Aber hat die Numerische Differentiation einen Vorteil, dass ihre Rechenaufwand kleiner ist.

### Aufgabe 12: Vergleich am Laborsystem

Vergleichen Sie die Ergebnisse der verschiedenen Zustandsschätzer am Laboraufbau. Welchen der entworfenen Zustandsschätzer würden Sie für einen dauerhaften Betrieb des Systems bevorzugen? Berücksichtigen Sie den Implementierungsaufwand und die Qualität der Ergebnisse.

#### Antwort:

Die Ergebnisse der verschiedenen Zustandsschätzer am Laboraufbau sind folgenderweise gezeigt.

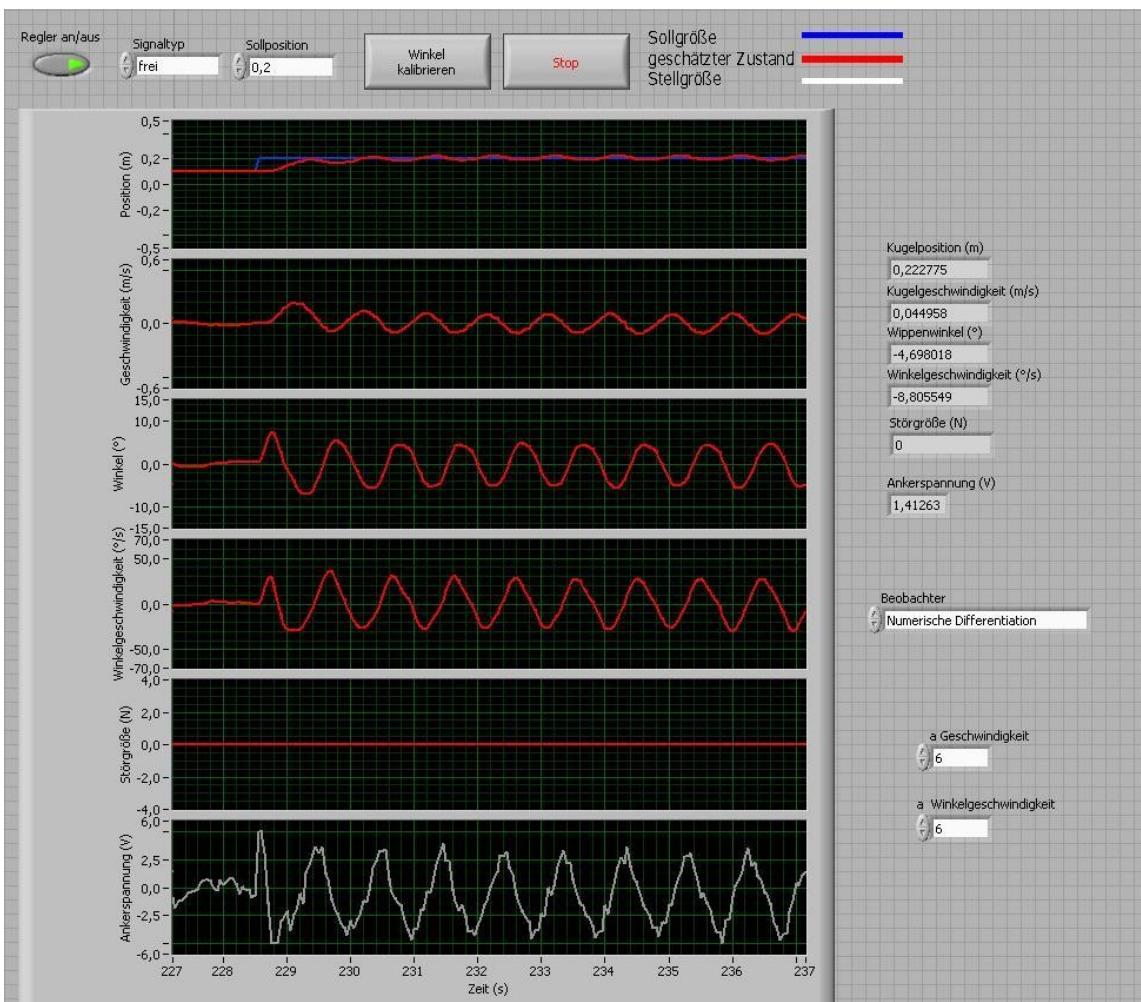


Abbildung 3.18 Ergebnis der numerischen Differentiation( $a = 6$ , Sollposition = 0,2)

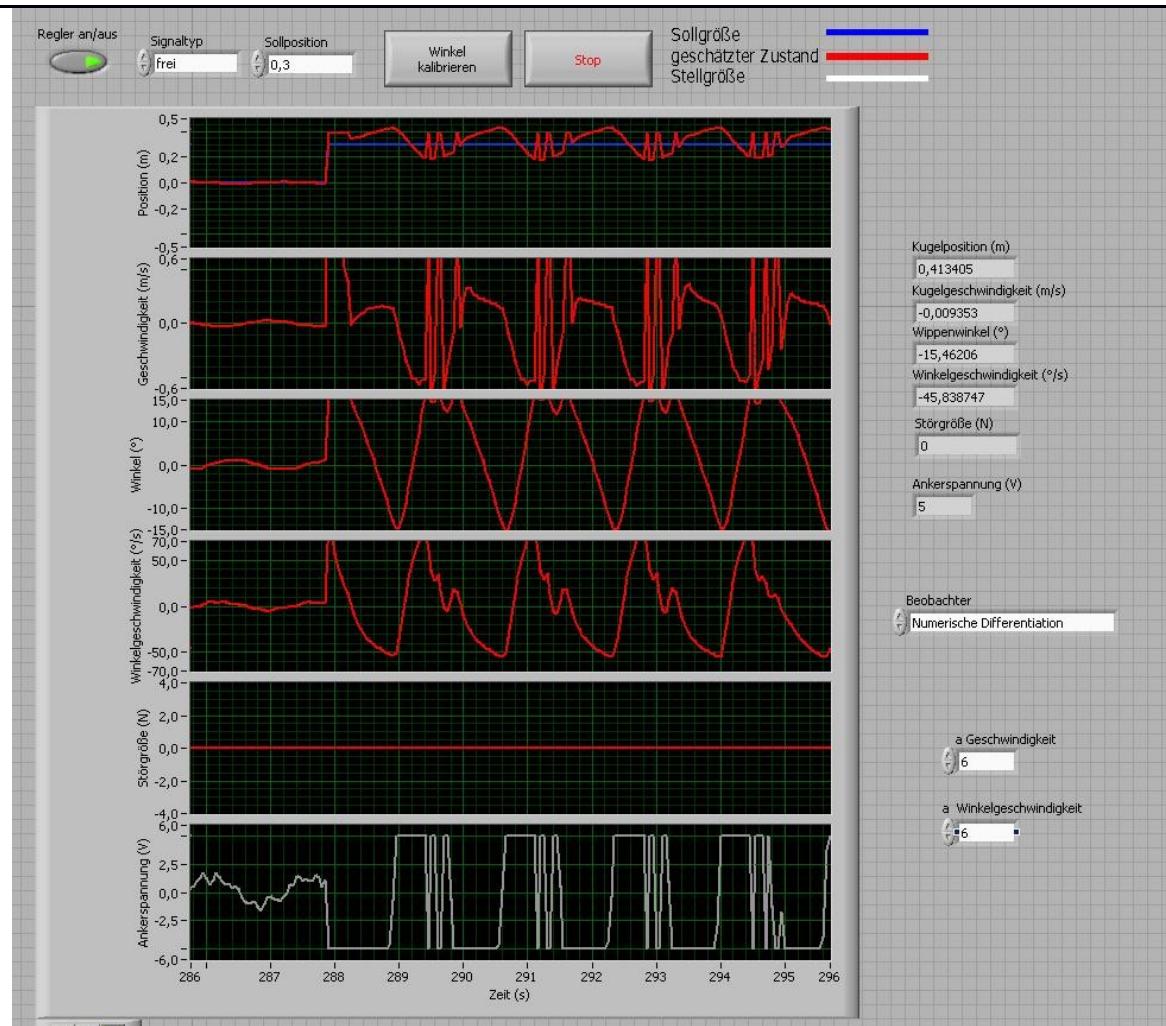


Abbildung 3.19 Ergebnis der numerischen Differentiation ( $a = 6$ , Sollposition = 0,3)

Die obigen zwei Abbildungen zeigen die Ergebnisse der numerischen Differentiation mit von der Aufgabe 11 bestätigtem optimalem Parameter  $a = 6$  und verschiedener vorgegangener Sollposition. 0,3 ist schon nahe der Grenze des Wippenbalkens des Laborsystems. Das Ergebnis in der Abbildung 3.18 ist gut mit nur kleinen Schwankungen um dem Sollwert, während Abbildung 3.19 stärkere Schwankungen zeigt. Die Grenze des Wippenbalkens hat Einfluss auf den Zustandsschätzer.

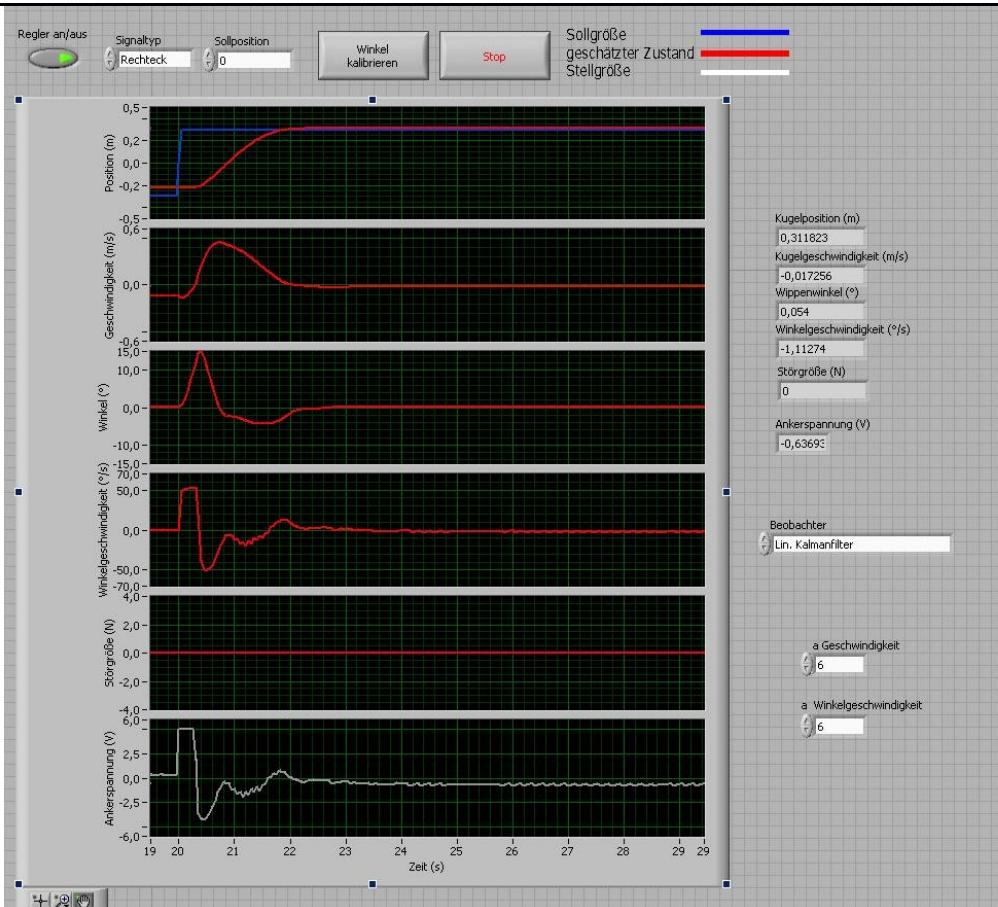


Abbildung 3.20 Ergebnis des lin. Kalmanfilters(ohne Störgröße,  $Q = \text{Einheitsmatrix}$ )

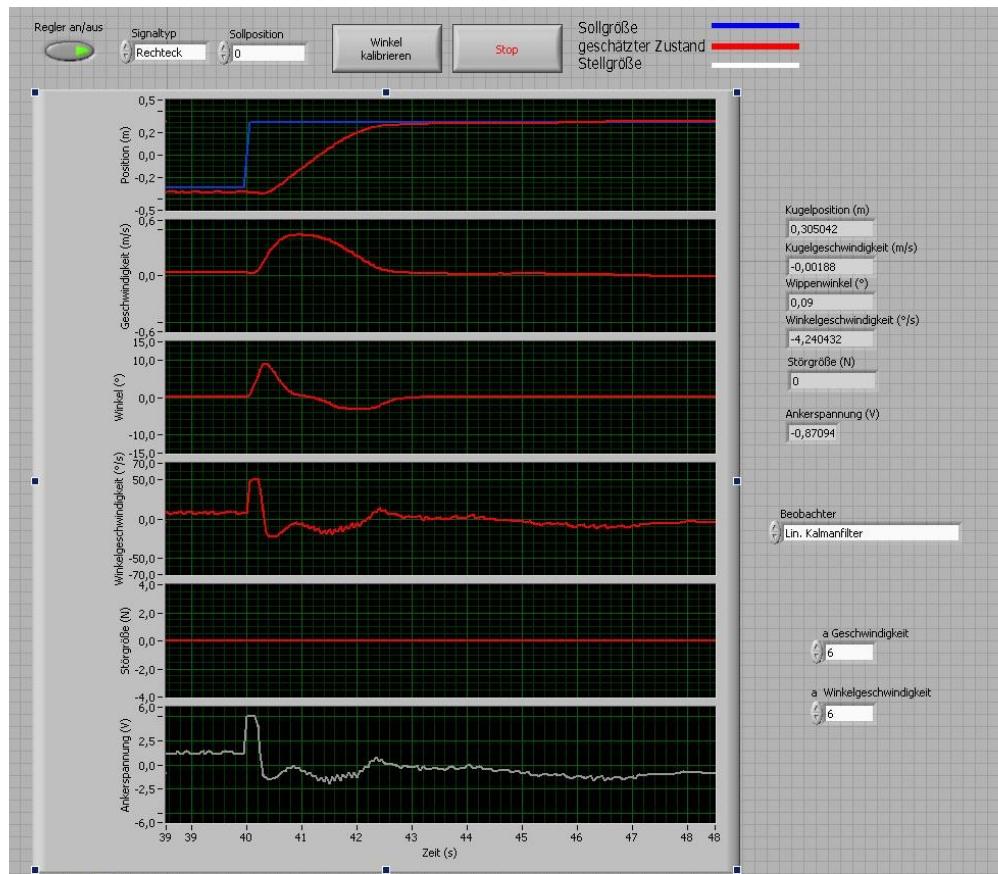


Abbildung 3.21 Ergebnis des lin. Kalmanfilters(ohne Störgröße,  $Q = 0,01 \cdot \text{Einheitsmatrix}$ )

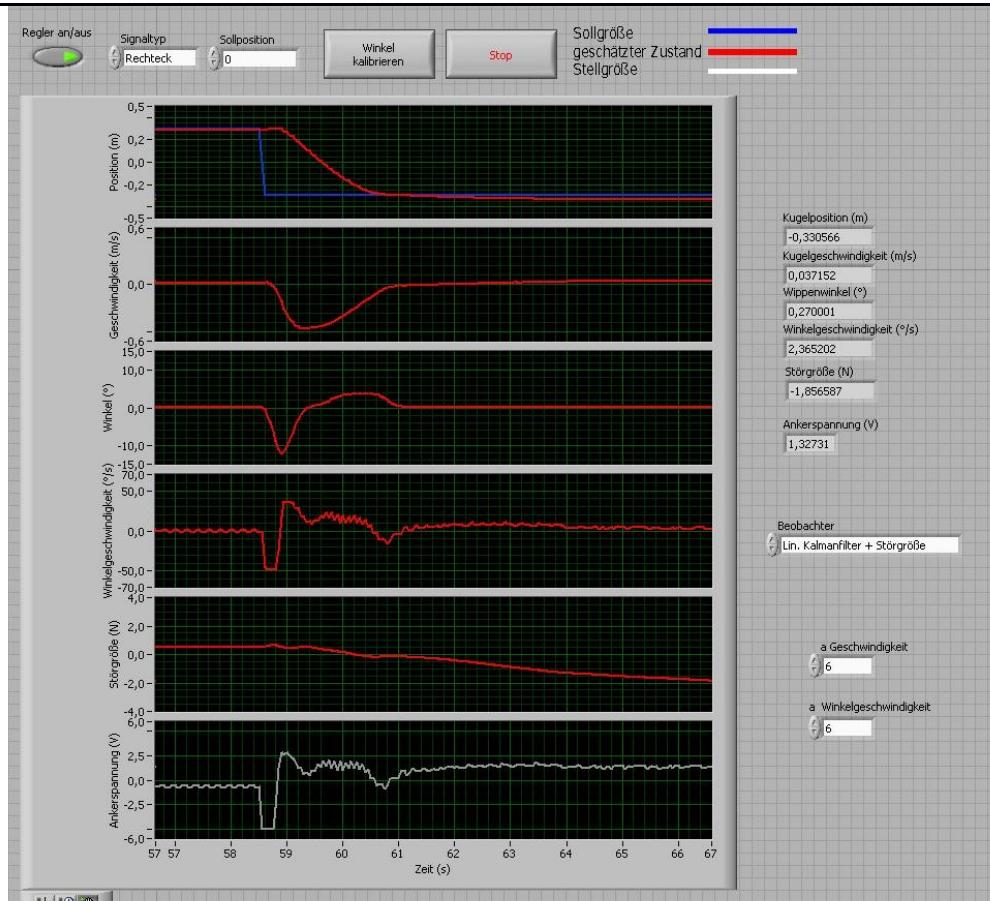


Abbildung 3.22 Ergebnis des Lin. Kalmanfilters(mit Störgröße,  $Q = \text{Einheitsmatrix}$ )

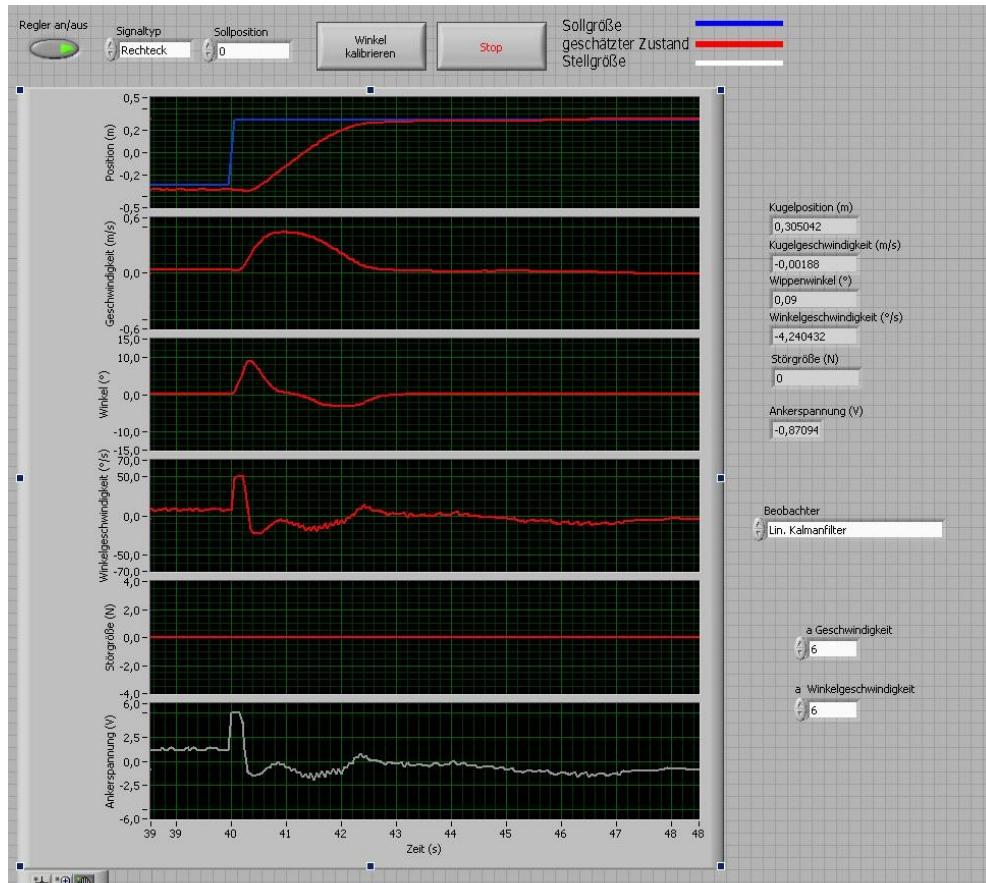


Abbildung 3.23 Ergebnis des Lin. Kalmanfilters(mit Störgröße,  $Q = 0,01 \cdot \text{Einheitsmatrix}$ )

Mit linearem Kalmanfilter ist die Sollposition auf 0 gesetzt. Aber die Position der Kugel ändert sich entweder auf 0,3 oder auf -0,3. Der gleiche Fall tritt im Ergebnis der CDKF auf. Nach den Ergebnissen des linearen Kalmanfilters ist es übersichtlich, dass der Fehler zwischen den Sollgröße und dem geschätzter Zustand der Position, Schwindigkeit und Winkel ist kleiner mit kleiner Q, aber die Zeitaufwand den Sollzustand zu erreichen und der Fehler zwischen den Sollgröße und dem geschätzter Zustand der Winkelgeschwindigkeit sind größer mit kleiner Q.

Die Abbildungen 3.24-3.25 zeigen die Ergebnisse der CDKF.

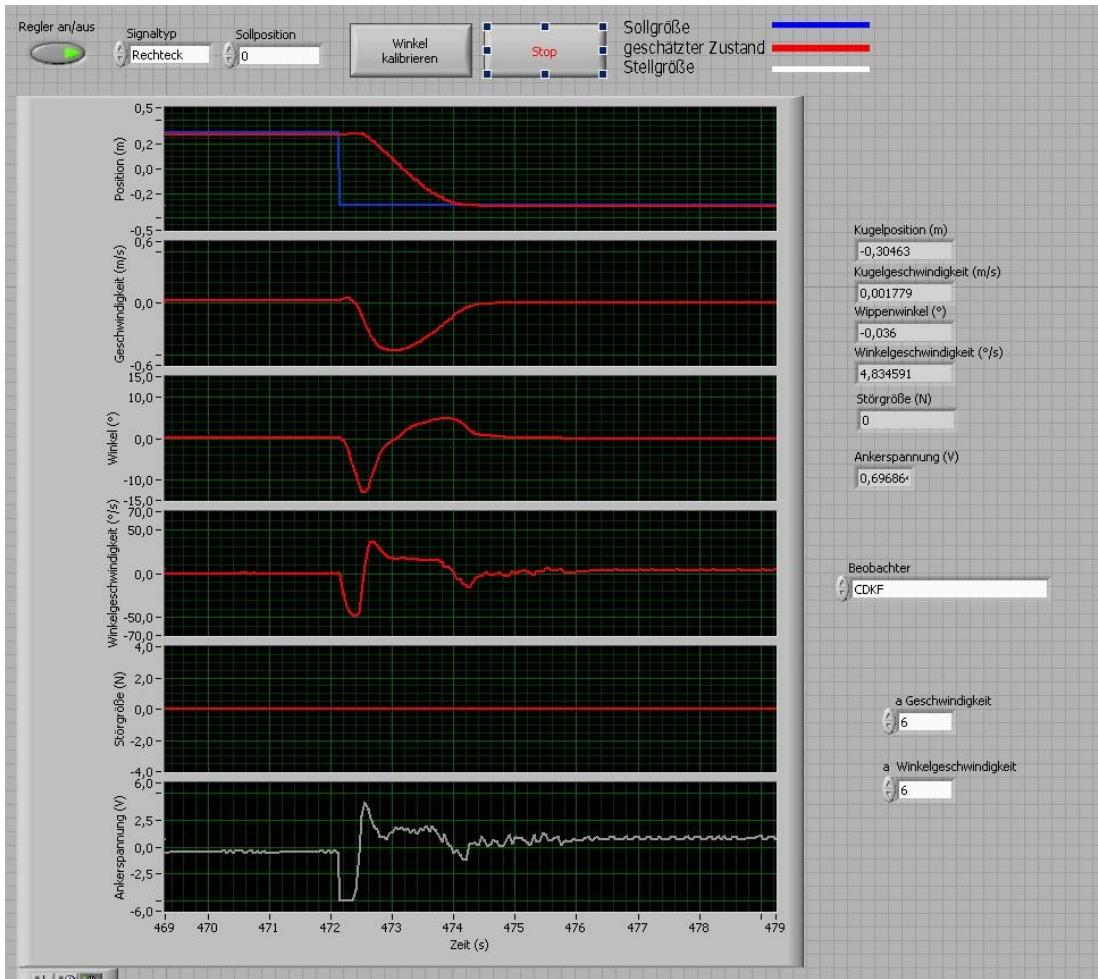


Abbildung 3.24 Ergebnis der CDKF (ohne Störgröße,  $Q = 0,01 \cdot \text{Einheitsmatrix}$ )

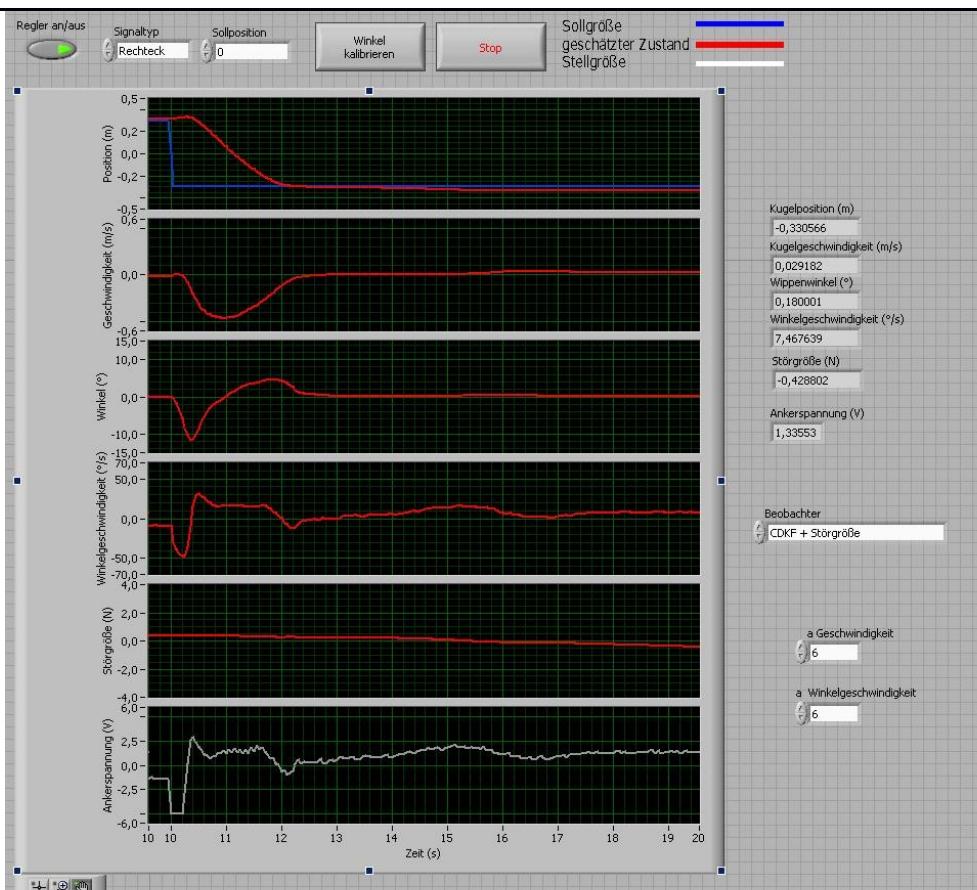


Abbildung 3.25 Ergebnis der CDKF (mit Störgröße,  $Q = 0,01 \cdot$  Einheitsmatrix)

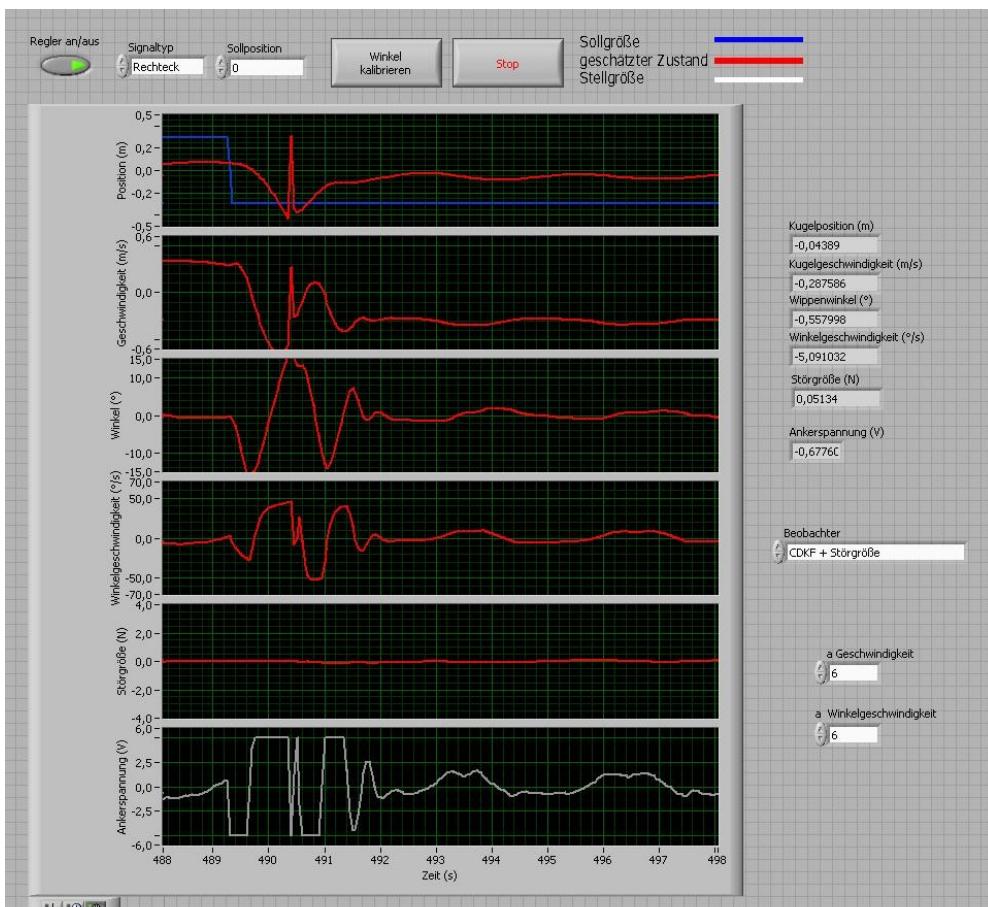


Abbildung 3.26 Ergebnis der CDKF (mit Störgröße,  $Q =$  Einheitsmatrix)

---

Davon kann man sehen, dass das Ergebnis der CDKF ohne oder mit Störgröße mit kleinerer  $Q = 0,01 \cdot \text{Einheitsmatrix}$  sehr gut ist. Vergleicht man die Ergebnisse der numerischen Differentiation und der CDKF und kann man wissen, dass das Ergebnis der Letzteren sehr glätter als der Ersteren ist, dabei zeigt das Ergebnis der Ersteren periodische Schwankungen. Durch das Vergleich zwischen den Ergebnisse der CDKF und des linearen Kalmanfilters mit gleicher  $Q$  mit Störgrößen sind die Ergebnisse der Position und der Geschwindigkeit von diesen zwei Schätzer ganz sehr gut. Aber der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit sind mit CDKF besser geschätzt. Tatsächlich ist der Wert von  $Q$  noch nicht optimal, den kann man durch mehr Teste festlegen.

In diesem Versuch erweisen sich diese drei Verfahren einfach zu implementieren. Aber das Modell muss zuerst beim Entwurf des linearen Kalmanfilters linearisiert sowie beim Entwurf der numerischen Differentiation zeitdiskretiert werden. In Anbetracht der Implementierung und die Ergebnisse der Zustandsschätzer sowie die in praktischen Anwendungen auftretenden Reibung ist CDKF der Zustandsschätzer, der wir für einen dauerhaften Betrieb des Systems bevorzugen.

## 4. Auftretende Probleme beim Test und Diskussion

1. Der Anfangszustand der Kugel hat Einfluss auf das Ergebnis der Zustandsschätzer, insbesondere die Grenzposition.
2. Durch die Wahl der  $Q$  kann man ein optimale CDKF entwerfen. Eine optimale Kovarianzmatrix des Systemrauschen  $Q$  vom CDKF muss durch mehrmals Versuche festgelegt werden. Wegen der mangelnden Zeit des Praktikumsversuchs können wir leider die optimale  $Q$  nicht feststellen.

## 5. Literatur

- [1] Merwe, Rudolph van Der: Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models. Faculty of the OGI School of Science & Engineering, Oregon Health & Science University, 2004.
- [2] Material zum Versuch 3 IRS
- [3] Puente León, Fernando: Signale und Systeme. 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 2011.
- [4] Skriptum zur Vorlesung „Regelung linearer Mehrgrößensysteme“. Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Wintersemester 2015/2016.