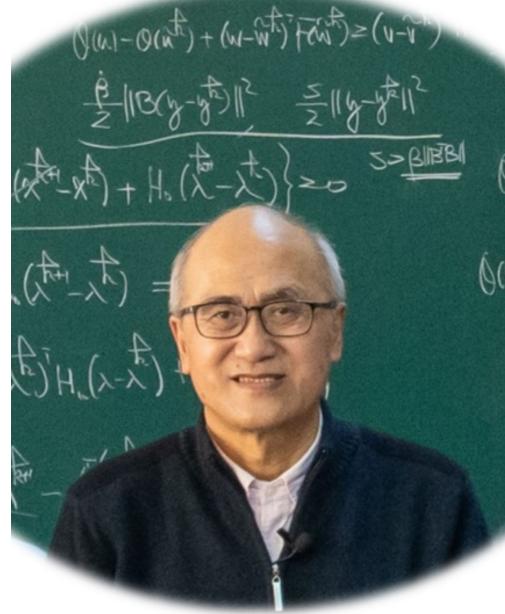


一些典型凸优化问题的分裂收缩算法

南师大系列讲座计划介绍



南京大学数学系

何炳生

Bingsheng He

<http://maths.nju.edu.cn/~hebma/>

南京师范大学数学科学学院 2022年元月4日-9日



衷心感谢南京师范大学数学科学学院的邀请！



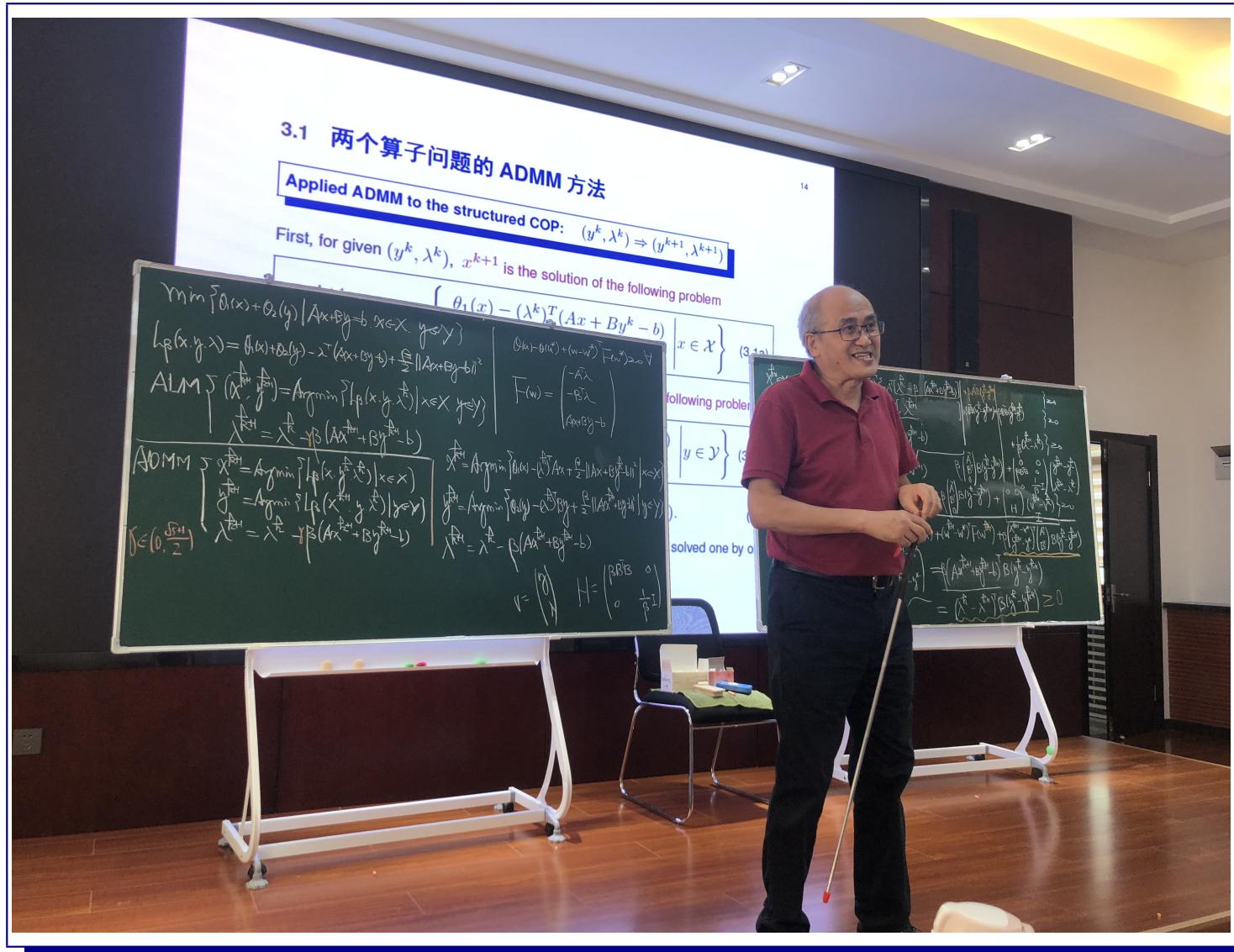
讲课的只是体力劳动, 听课的才是辛苦的脑力劳动!



讲自己熟悉的东西, 我个人更喜欢这样的大黑板!



听众如果也喜欢的话,课间休息手机照张相就可以!



在没有固定黑板的地方, 也请人尽量提供移动黑板!



退休后到南科大干了五年，最让我留恋的是那大黑板！

Homepage: maths.nju.edu.cn/~hebma



Department of Mathematics, Nanjing University,
Nanjing, 210093, China E-mail: hebma@nju.edu.cn

Current Research Areas:

Mathematical Programming, Numerical Optimization,
Variational Inequalities, Projection and contraction methods for VI,
ADMM-like splitting contraction methods for convex optimization

Education:

PhD: Applied Mathematics, The University of Wuerzburg, Germany, 1986

Thesis Advisor: Professor Dr. Josef Stoer

BSc: Computational Mathematics, Nanjing University, 1981

Work:

2015-2020 Professor, Dept. of Math, Southern University of Science and Technology (SUSTech)

2013-2015 Professor, School of Management Science and Engineering, Nanjing University

1997~2013 Professor, Department of Mathematics, Nanjing University

1992~1997 Associate Professor, Department of Mathematics, Nanjing University



我的几类主要研究工作的分类论文和简要介绍 (附阅读建议)

- 1. [变分不等式的投影收缩算法\(Projection-Contraction Methods\)](#)
- 2. [两个可分离函数的乘子交替方向法\(ADMM\)](#)
- 3. [多个可分离函数的交替方向类算法\(ADMM-Like Methods\)](#)
- 4. [变分不等式框架下的邻近点算法\(VI & PPA\)](#)

My Thinkings: 1. [关门感想](#) 2. [说说我的主要研究兴趣 — 兼谈华罗庚推广优选法对我的影响](#)

- 3. [说说我的主要研究兴趣\(续\) --- 我们在ADMM类方法的主要工作](#)
- 4. [古稀回首](#)
- 5. [两页纸简述我职业生涯中的主要研究工作](#)

《数学文化》2020 年/ 第 11 卷第 2 期刊登的我的自述: [四十年上下求索](#) [一份珍贵的回忆材料](#)

My Talks: 比较系统的知识建议阅读第 3 个报告 (报告3 基本上是英文写成的)

For more systematic knowledge, it is recommended to read Talk 3, which is written in English.

- 1. [从变分不等式的投影收缩算法到凸规划的分裂收缩算法 — 我研究生涯的来龙去脉](#)
- 2. [生活理念对设计优化分裂算法的帮助 — 以改造 ADMM 求解三个可分离算子问题为例](#)
- 3. [凸优化的分裂收缩算法 — 变分不等式为工具的统一框架 \(适合打印的综合文本\)](#)
- 4. [从商业谈判的角度看一些优化方法的设计 — 从 min-max 问题的求解谈起](#)
- 5. [我和乘子交替方向法\(ADMM\) 的20年 — 2017 年5月全国数学规划会议报告 综述版本](#)
- 6. [图像处理中的凸优化问题及其相应的分裂收缩算法 — ISICDM会议报告I 报告II 报告III](#)
- 7. [介绍: 构造求解凸优化的分裂收缩算法—用好变分不等式和邻近点算法两大法宝](#)
- 8. [线性化ALM-ADMM等方法中的“替代”参数严重影响收敛速度—提升空间有多少?](#)
- 9. [被S. Becker 誉为 Very Simple yet Powerful 的 Technique — 应用及新的进展](#)
- 10. [瞎子爬山-步步为营—凸优化算法中的变分不等式和邻近点策略](#)
- 11. [一类便于向求解多块问题推广并能处理不等式约束问题的交替方向法 \(ArXiv:2107.01897\)](#)
- 12. [均困平衡的增广拉格朗日乘子法 — Balanced ALM \(ArXiv: 2018.08554\)](#)
- 13. [ADMM 类分裂收缩算法的一些最新进展 统一框架下的Balanced-ALM 便于推广的ADMM](#)

我的报告的 PDF 文件, 一般都可以在我的主页上查到.

连续优化中一些代表性数学模型

1. 简单约束问题 $\min\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$ 其中 \mathcal{X} 是一个凸集.

2. min-max 问题 $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{y \in \mathcal{Y}} \{\Phi(x, y) = \theta_1(x) - y^T A x - \theta_2(y)\}$

3. 线性约束的凸优化问题 $\min\{\theta(x) \mid Ax = b \text{ (or } \geq b), x \in \mathcal{X}\}$

4. 结构型凸优化 $\min\{\theta_1(x) + \theta_2(y) \mid Ax + By = b, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$

5. 多块可分离凸优化 $\min\{\sum_{i=1}^p \theta_i(x_i) \mid \sum_{i=1}^p A_i x_i = b, x_i \in \mathcal{X}_i\}$

变分不等式(VI) 是瞎子爬山的数学表达形式

邻近点算法(PPA) 是步步为营 稳扎稳打的求解方法.

变分不等式和邻近点算法是分析和设计凸优化方法的两大法宝.

凸函数的定义和基本性质

A function $f(x)$ is convex iff

$$f((1-\theta)x + \theta y) \leq (1-\theta)f(x) + \theta f(y) \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

Properties of convex function

- $f \in \mathcal{C}^1$. f is convex iff

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x).$$

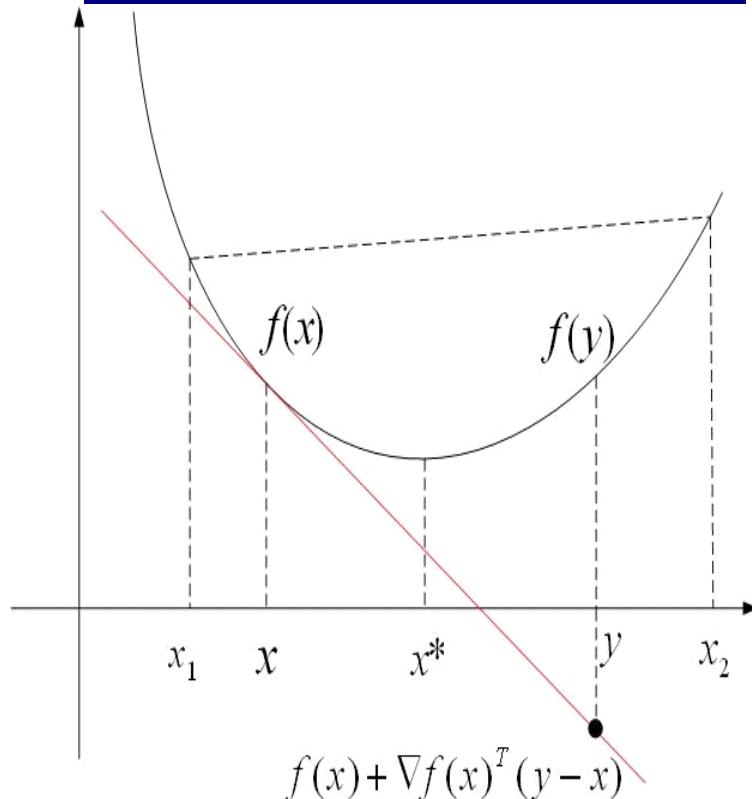
Thus, we have also

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)^T (x - y).$$

- Adding above two inequalities, we get

$$(y - x)^T (\nabla f(y) - \nabla f(x)) \geq 0.$$

- $f \in \mathcal{C}^1$, ∇f is monotone. $f \in \mathcal{C}^2$, $\nabla^2 f(x)$ is positive semi-definite.
- Any local minimum of a convex function is a global minimum.



Convex function

这个系列讲座系统介绍最近10多年来我们对基本凸优化问题的研究成果，提出的一系列ALM, PPA, ADMM类分裂收缩算法.

内容安排

1. 预备知识. 最优性条件, 变分不等式(VI) 和邻近点算法(PPA).
2. 求解鞍点问题, 从原始-对偶混合梯度法(PDHG) 到 PPA 算法.
3. 从增广拉格朗日乘子法(ALM) 到交替方向法(ADMM).
4. ADMM 和线性化ADMM.
5. 求解凸优化分裂收缩算法的统一框架
6. 如何用统一框架设计算法
7. 均匀的ALM, 均匀的ADMM
8. 三块可分离问题的ADMM类方法
9. 多块可分离问题的ADMM类方法

10. 凸优化分裂收缩算法的统一框架的由来
11. 用统一框架设计算法的一般原则
12. 为投影梯度法做准备的预备知识
13. 投影梯度收缩法
14. 投影梯度下降法.

报告内容简单, 算法一脉相承. 所需的预备知识:
线性代数的基本运算和微积分的一般常识.

掌握了这些知识, 学员就可以考虑
自行设计凸优化问题的一阶分裂收缩算法.

或者, 像下面一位读者, 会惊喜地发现
有的方法可以用来解决一些长期没有解决的问题.



何炳生

14:09:44

20 多年前发表的算法，渐渐被工程界了解和采用。今天又有来信报告，据说效果还很好。工程上的问题我不懂，倘若真能帮他们打破“垄断”，弯道超车，老朽我一生也就值了！

下面的截图是这位年轻学者跟我的微信交流。

何炳生

14:10:29

尊敬的先生您好，五一节快乐，我按照先生您的变分不等式方法求解含有软化本构特征的本构模型，完成了非常强健的本构积分效果。先生的 Vi 真的是凸函数最优化求解的神器啊。以前的这样的问题采用 maping return 没有办法进行，因为没有显式的二次梯度表达式啊。

真的是太兴奋了，五年前没办法积分的本构模型，这次大约花了两天时间就实现了啊

何炳生

14:10:29

学生真的感谢先生您的帮助啊

先生您的 Vi 方法太了不起了。

中午12:32

谢谢你！我感谢每一个用户！没有你们，我什么都不是！

先生啊，这个真的了不起啊。您谦虚了。我是先生的忠实粉丝啊。但是算法迭代格式我按照本构方程的积分特点进行了一些修改。由于太累了，现在眩晕症犯了。等我好点，把求解格式写出来，先生您多批评指正。

希望你得到 Becker 在 arXiv: 1908.03633 中的感受: Very Simple yet Powerful

University of Colorado **Boulder**

Technical Report, Department of Applied Mathematics

The Chen-Teboulle algorithm is the proximal point algorithm

Stephen Becker *

November 22, 2011; posted August 13, 2019

Abstract

We revisit the
on the step-size p
Recent works such as [HY12] have proposed a very simple yet
powerful technique for analyzing optimization methods.

1 Background

Recent works such as [HY12] have proposed a very simple yet powerful technique for analyzing optimization methods. The idea consists simply of working with a different norm in the *product* Hilbert space. We fix an inner product $\langle x, y \rangle$ on $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$. Instead of defining the norm to be the induced norm, we define the primal norm as follows (and this induces the dual norm)

$$\|x\|_V = \sqrt{\langle Vx, x \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle_V}, \quad \|y\|_V^* = \|y\|_{V^{-1}} = \sqrt{\langle y, V^{-1}y \rangle} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{V^{-1}}}$$

for any Hermitian positive definite $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$; we write this condition as $V \succ 0$. For finite dimensional spaces \mathcal{H} , this means that V is a positive definite matrix.