

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BACHELORARBEIT

Analyse des Verhaltens in Schwärmen anhand des Cucker-Smale Modells

Robin Mittas

Prüfer:
PROF. DR. PETER PICKL

14. Januar 2020

Diese Arbeit basiert auf den Ideen und den Konzepten des Papers „Emergent Behavior in Flocks“ [1] . Alle darin aufgeführten Beweise wurden ausführlicher gestaltet und Änderungen an gekennzeichneten Stellen vorgenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Cucker-Smale Modell	6
2.1	Motivation	6
2.2	Einführung in das Cucker-Smale Modell	6
2.3	Definitionen und Grundlagen	8
2.3.1	Laplace Matrix und Fiedler Zahl	8
2.3.2	Konzepte über den betrachteten Raum	9
3	Konvergenz in stetiger Zeit	12
3.1	Hilfsmittel	12
3.2	Theorem für stetige Zeit	16
4	Schwarm aus zwei Vögeln	21
5	Konvergenz in diskreter Zeit	24
5.1	Hilfsmittel	24
5.2	Theorem für diskrete Zeit	26
5.3	Diskussion über Notwendigkeit der Annahme	33
6	Ausblick und weitere Anwendungen	35
6.1	Evolution von Sprachen	35
6.2	Formation von Weltraumfahrzeugen	36
6.3	Schwarmverhalten unter Berücksichtigung des zufälligen Austauschs zwischen den Vögeln	37
7	Diskussion	39
	Literaturverzeichnis	42
8	Eigenständigkeitserklärung	43

1 Einleitung

Das sogenannte Flocking (Schwarmbildung) ist ein in der Natur häufig auftretendes Phänomen, welches sich bei vielen Lebewesen, wie Vögeln, Fischen oder auch an Menschen beobachten lässt. Flocking bedeutet, dass sich alle Individuen im Schwarm mit etwa derselben Geschwindigkeit zusammen in der Gruppe, mit beschränkten Abständen voneinander fortbewegen. Dabei nehmen Schwärme verschiedenste Formationen ein, wie zum Beispiel die V- oder auch Keilformation von Zugvögeln, welche in Abbildung 1.1 zu sehen ist. Wie eine neue Studie zeigt, sind dabei die Flügelschläge jedes einzelnen Vogels genau synchronisiert. Die Vögel können so den Auftrieb nutzen, den der Flügelschlag des vor ihnen fliegenden Tieres verursacht, was zu einer besseren Aerodynamik und somit einem geringeren Energieaufwand führt. Dies birgt vor allem bei langen Flügen einen großen Vorteil. Der Vogel mit dem stärksten Luftauftrieb fliegt dabei an vorderster Stelle der Formation. [2]

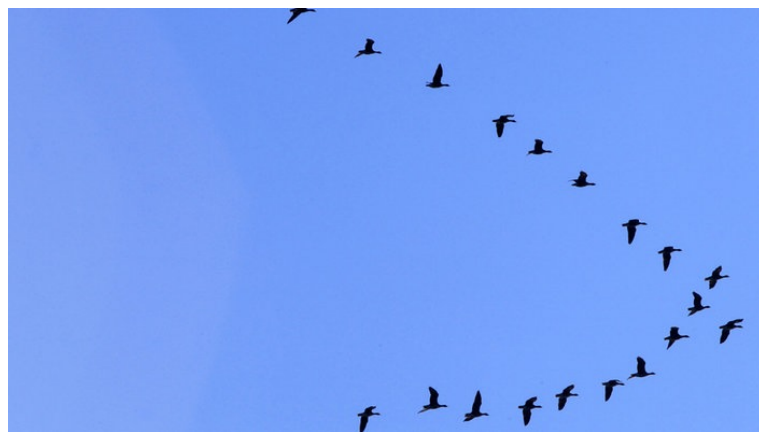


Abbildung 1.1: V-Formation [3]

Wenige Male im Jahr lässt sich eine besondere Art des Flockings beobachten, der sogenannte Tuna-Tornado, welcher in Abbildung 1.2 zu sehen ist. Dabei besteht dieser aus mehr als 100.000 Thunfischen. Diese Formation bildet sich, da alle Thunfische zeitgleich Eier und Spermien ablegen und versuchen diese zu beschützen, indem sie langsam im Kreis um die Eier schwimmen. Durch die kollektive Lagerung aller Eier an einem Ort ergibt sich eine hohe genetische Vielfalt. [4]

Ein weiterer positiver Aspekt des Flockings ist, dass die Tiere besser vor feindlichen Übergriffen geschützt sind und sich somit die Wahrscheinlichkeit des Überlebens eines einzelnen Individuums im Schwarm deutlich erhöht. In einigen Versuchen konnte gezeigt werden, dass



Abbildung 1.2: Tuna-Tornado [4]

die Fische, sobald sie aus dem Schwarm gerissen werden, starkem Stress ausgesetzt sind, was zu einer erhöhten Atemfrequenz führt. [5] Dennoch sei erwähnt, dass Flocking auch einen Nachteil mit sich bringen kann: Große Schwärme ziehen mehr Angreifer auf sich als kleine, wodurch die Anzahl der Angriffe auf einen Schwarm mit zunehmender Schwarmgröße steigt. [6]

„Sieht man den Schwarm aber nicht mehr nur als biologische Lebensform, sondern als Strukturmodell, dann ist dieses übertragbar auf die unterschiedlichsten Felder: Kommunikationsverhalten, Bewegungsmuster, militärische Taktik, soziale Gruppenbildung oder Formen politischer Mobilisierung.“ (vgl. S.9 [7]) Darunter fallen soziale Verhaltensmuster wie spontane Demonstrationen oder das „Verhalten von Konsumenten auf dem Börsenmarkt, wonach etliche Einzelpersonen plötzlich fast gleichzeitig und gleichsam affiziert von einander das gleiche tun.“ (vgl. S. 8 [7]) Flocking kann beim Menschen auch bei einem fallenden Schuss aus einer Waffe beobachtet werden, da die Angegriffenen schwarmartig zusammen in eine Richtung fliehen.

Das Verhalten und die Gründe, weshalb sich viele Lebewesen in Schwärmen fortbewegen, ist das Forschungsgebiet vieler Wissenschaftler. Im folgenden wird das Cucker-Smale Modell vorgestellt, welches unter bestimmten Anfangsbedingungen Schwarmbildung garantiert. Dieses Modell lässt sich am besten auf Vögel und Fische übertragen.

2 Cucker-Smale Modell

2.1 Motivation

Die Idee hinter dem Cucker-Smale Modell ist, dass eine Population, beispielsweise aus $k \in \mathbb{N}$ Vögeln oder Fischen betrachtet wird, welche sich im \mathbb{R}^3 bewegen. Es wurde beobachtet, dass unter bestimmten Anfangsbedingungen, wie zum Beispiel Bedingungen über die Geschwindigkeit oder die Positionen der Vögel, der Zustand der Vögel gegen einen gemeinsamen Zustand konvergiert. Das heißt alle Vögel nehmen die selbe Geschwindigkeit an und die Distanzen zwischen den Vögeln bleiben beschränkt. In diesem Modell wird das Emergenzverhalten eines Schwarms in diskreter und in stetiger Zeit betrachtet.

β erfasst im folgenden die Rate, mit der die gegenseitige Beeinflussung der Vögel im Schwarm mit zunehmenden Abständen abnimmt. Das heißt, dass sich Vögel, die weit voneinander entfernt sind, weniger stark beeinflussen als diejenigen Vögel die sehr nahe aneinander fliegen. Ziel dieser Arbeit ist es, die Konvergenz des Schwarms gegen eine gemeinsame Geschwindigkeit ohne weitere Anfangsbedingungen für $\beta < 1/2$ zu zeigen. Außerdem ist für $\beta \geq 1/2$ die Schwarmbildung unter bestimmten Anfangsbedingungen gegeben.

2.2 Einführung in das Cucker-Smale Modell

Wir nehmen zuerst an, dass der Schwarm aus $k \in \mathbb{N}$ Vögeln besteht. Im Folgenden bezeichnet \mathbb{E}^3 den dreidimensionalen euklidischen Raum und $(\mathbb{E}^3)^k$ das k -fache Kreuzprodukt von \mathbb{E}^3 mit sich selbst

$$(\mathbb{E}^3)^k = \underbrace{\mathbb{E}^3 \times \dots \times \mathbb{E}^3}_{k\text{-mal}}.$$

Dabei betrachten wir die Geschwindigkeit und die Position vom i -ten Vogel für alle $1 \leq i \leq k$ in \mathbb{E}^3 . Außerdem notieren wir mit $v_i \in \mathbb{E}^3$ den Geschwindigkeitsvektor des i -ten Vogels und mit $x_i \in \mathbb{E}^3$ die Position des i -ten Vogels im Raum. Im weiteren Verlauf der Arbeit bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und es gilt für alle $x \in (\mathbb{E}^3)^k$, dass

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^3 x_{il}^2.$$

Dabei gilt weiter für das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dass $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ für alle $x \in (\mathbb{E}^3)^k$. Das Cucker-Smale Modell setzt folgendes Verhalten voraus: Jeder Vogel passt seine eigene

Geschwindigkeit so an, indem er diejenige Geschwindigkeit hinzufügt, welche einen gewichteten Durchschnitt aus den Differenzen seiner eigenen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit aller anderen Vögel darstellt. Das lässt sich zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ und für den Vogel $1 \leq i \leq k$ folgendermaßen darstellen:

$$v_i(t+1) - v_i(t) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(v_j(t) - v_i(t)), \quad (2.1)$$

wobei $v_i(t) \in \mathbb{E}^3$ für alle $1 \leq i \leq k$. Die Gewichtungen $\{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq k}$ geben an, wie stark sich die Vögel gegenseitig beeinflussen. Es ist sinnvoll anzunehmen, dass diese Beeinflussung eine Funktion in Abhängigkeit der Abstände der Vögel zueinander ist. Dazu definieren wir die monoton fallende Funktion $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sodass die Adjazenzmatrix $A_x = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ folgende Einträge für alle $1 \leq i, j \leq k$ hat:

$$a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2). \quad (2.2)$$

Im folgenden sei für ein festes K ; $\sigma > 0$ und $\beta \geq 0$

$$\eta(y) = \frac{K}{(\sigma^2 + y)^\beta}. \quad (2.3)$$

Wir können das Gleichungssystem (2.1) mithilfe von Matrizen umschreiben. Dazu sei $A_x = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ und D_x eine $k \times k$ Diagonalmatrix, wobei der i -te Diagonaleintrag $d_i = \sum_{j \leq k} a_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq k$ entspricht. Des weiteren sei $L_x := D_x - A_x$. Dabei sind A_x und L_x symmetrische Matrizen, das heißt für alle $1 \leq i, j \leq k$ gilt $a_{ij} = a_{ji}$, und $l_{ij} = l_{ji}$, da $\eta(\|x_i - x_j\|^2) = \eta(\|x_j - x_i\|^2)$.

Veranschaulicht lassen sich die Matrizen A_x , D_x und L_x darstellen als

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} & D_x &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k a_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^k a_{kj} \end{pmatrix} \\ L_x = D_x - A_x &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k a_{1j} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^k a_{2j} - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k1} & \cdots & \cdots & \sum_{j=1}^k a_{kj} - a_{kk} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Somit lässt sich (2.1) für alle $1 \leq i \leq k$ schreiben als

$$\begin{aligned} v_i(t+1) - v_i(t) &= - \sum_{j=1}^k a_{ij}(v_i(t) - v_j(t)) = - \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} \right) v_i(t) + \sum_{j=1}^k a_{ij} v_j(t) \\ &= -[D_x v(t)]_i + [A_x v(t)]_i \\ &= -[L_x v(t)]_i, \end{aligned}$$

wobei $v(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t)) \in (\mathbb{E}^3)^k$ die Geschwindigkeit jedes einzelnen Vogels im Schwarm angibt. Zu beachten ist, dass $A_x v(t)$ nicht die „gewöhnliche Bedeutung einer $k \times k$ Matrix“ hat, welche im \mathbb{E}^k agiert. Vielmehr „wirkt A_x im $(\mathbb{E}^3)^k$ “ indem sie den Vektor (v_1, \dots, v_k) auf $(a_{i1}v_1 + \dots + a_{ik}v_k)_{i \leq k}$ abbildet. Dasselbe gilt für L_x und D_x .

Indem wir eine Gleichung, welche die Änderung der Positionen beschreibt, hinzufügen erhalten wir folgendes System für diskrete Zeit und $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \Delta t v(t) \\ v(t+1) &= (Id - L_x)v(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Außerdem betrachten wir ein Modell für stetige Zeit, welches sich durch folgende Differentialgleichungen darstellen lässt:

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= -L_x v. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sowohl für diskrete, als auch für stetige Zeit wird das Hauptresultat dieser Arbeit sein, dass die Geschwindigkeiten der Vögel gegen eine gemeinsame Geschwindigkeit konvergieren, das heißt alle Vögel fliegen dann mit der selben Geschwindigkeit. Des Weiteren bleiben die Abstände zwischen den Vögeln beschränkt.

2.3 Definitionen und Grundlagen

2.3.1 Laplace Matrix und Fiedler Zahl

Definition 2.1 (Laplace Matrix). *Sei $k \in \mathbb{N}$ und A eine nichtnegative, symmetrische $k \times k$ Matrix mit den Einträgen $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$. Die Laplace Matrix L von A wird als $L := D - A$ definiert, wobei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_k)$ und $d_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq k$. Dann ist L ebenfalls eine symmetrische Matrix, welche unabhängig von den Diagonaleinträgen von A ist.*

Die Matrix L_x , wie in (2.4) abgebildet, ist somit die Laplace Matrix von A_x . Dann agiert L_x im $(\mathbb{E}^3)^k$ und hat folgende Eigenschaften:

- a) Für alle $v \in (\mathbb{E}^3)$, $L_x(v, \dots, v) = 0$.
- b) Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von L_x sind, dann gilt

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k = \|L_x\|.$$

- c) Für alle $v \in (\mathbb{E}^3)^k$

$$\langle L_x v, v \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \|v_i - v_j\|^2.$$

Aus b) folgt, dass L_x positiv semidefinit ist, da alle Eigenwerte größer oder gleich 0 sind.

Definition 2.2 (Fiedler Zahl). *Die Fiedler Zahl von A_x entspricht dem zweitkleinsten Eigenwert λ_2 von L_x und wir notieren diese mit ϕ_x .*

2.3.2 Konzepte über den betrachteten Raum

Sei Δ die Diagonale im $(\mathbb{E}^3)^k$ und Δ^\perp ihr orthogonales Komplement im $(\mathbb{E}^3)^k$, d.h.

$$\Delta = \{(v, v, \dots, v) \mid v \in \mathbb{E}^3\} \quad \text{und} \quad \Delta^\perp = \{w \mid w \in (\mathbb{E}^3)^k, \forall v \in \Delta : \langle v, w \rangle = 0\}$$

Daraus folgt, dass sich jeder Punkt $x \in (\mathbb{E}^3)^k$ als $x = x_\Delta + x_\perp$, mit $x_\Delta \in \Delta$ und $x_\perp \in \Delta^\perp$ darstellen lässt. Falls $x(t+1) = x(t) + \Delta t v(t)$ und $v(t+1) = (Id - L_x)v(t)$, dann ist

$$\begin{aligned} x(t+1)_\perp &= x(t)_\perp + \Delta t v(t)_\perp \\ v(t+1)_\perp &= (Id - L_x)v(t)_\perp. \end{aligned}$$

Für alle $x = x_\Delta + x_\perp \in (\mathbb{E}^3)^k$ mit $x_\Delta = (u, \dots, u) \in \Delta$ und $x_\perp = (x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}) \in \Delta^\perp$ sind die Matrizen A_x und A_{x_\perp} identisch, da für alle $1 \leq i, j \leq k$

$$a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2) = \eta(\|u + x_{i\perp} - u - x_{j\perp}\|^2) = \eta(\|x_{i\perp} - x_{j\perp}\|^2) = a_{ij\perp}.$$

Es folgt, dass die Projektionen der Lösungen über Δ^\perp von (2.5) die Lösungen der Einschränkung von (2.5) auf Δ^\perp sind. Das selbe gilt für die stetige Betrachtung des Modells (2.6). Diese orthogonalen Projektionen sind fundamental, da die Differenzen $x_i - x_j$ und $v_i - v_j$ für uns viel mehr von Bedeutung sind, als die Absolutwerte x_i und v_i .

Wir definieren uns folgende Funktionen mit $x = (x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{E}^3)^k$ und $v = (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{E}^3)^k$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &:= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^k \|x_i - x_j\|^2 \\ \Lambda(v) &:= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^k \|v_i - v_j\|^2 \\ Q(u, v) &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \langle u_i - u_j, v_i - v_j \rangle, \end{aligned}$$

wobei $Q : (\mathbb{E}^3)^k \times (\mathbb{E}^3)^k \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei entspricht Γ der Hälfte der Quadratsummen über alle Abstände der Vögel zueinander und Λ der Hälfte der Quadratsummen der Geschwindigkeitsunterschiede aller Vögel. Außerdem folgt, dass Q bilinear, symmetrisch (beides folgt aus der Bilinearität und Symmetrie des euklidischen Skalarprodukts) und positiv semidefinit ist, da $Q(u, u) = 0$ für $u \in \Delta$. Wenn Q allerdings auf $\Delta^\perp \times \Delta^\perp$ einschränkt wird, ist positive Definitheit gegeben: Sei dazu $u = (u_1, \dots, u_k) \in \Delta^\perp$, dann erhalten wir, dass

$$Q(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \langle u_i - u_j, u_i - u_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \|u_i - u_j\|^2 > 0,$$

da per Definition von Δ^\perp $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ existieren, sodass $u_i \neq u_j$ gilt. Daraus schließen wir, dass Q ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ auf $(\mathbb{E}^3)^k / \Delta \simeq \Delta^\perp$ definiert. Dabei gilt:

$$\langle u, u \rangle_Q = Q(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \langle u_i - u_j, u_i - u_j \rangle = \|u\|_Q^2.$$

Zuletzt bemerken wir noch, dass $\Lambda(v) = \|v\|_Q^2$ und $\Gamma(x) = \|x\|_Q^2$ und dass $\Gamma(x) = \Gamma(x_\perp)$ und $\Lambda(v) = \Lambda(v_\perp)$ mit $x = x_\Delta + x_\perp$ und $v = v_\Delta + v_\perp$ wobei $x_\Delta, v_\Delta \in \Delta$, und $x_\perp, v_\perp \in \Delta^\perp$.

Da in Δ alle Vögel bereits die selbe Geschwindigkeit haben, betrachten wir die Geschwindigkeiten in

$$V := (\mathbb{E}^3)^k / \Delta \simeq \Delta^\perp.$$

Das heißt die Aussage „die Geschwindigkeiten $v_i(t)$ konvergieren für alle $1 \leq i \leq k$ gegen ein gemeinsames $\hat{v} \in \mathbb{E}^3$ “ ist äquivalent zu $v_\perp \rightarrow 0$, wobei $v = v_\Delta + v_\perp \in (\mathbb{E}^3)^k$ mit $v_\Delta \in \Delta$ und $v_\perp \in \Delta^\perp$.

Die Bedingung, dass sich die Vektoren $x_i - x_j$ einem Vektor beziehungsweise einem maximalen Abstand $\hat{x}_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ annähern, ist äquivalent zu $x_\perp \rightarrow \hat{x}$, mit $\hat{x} \in \Delta^\perp$. Somit betrachten wir die Positionen in

$$X := (\mathbb{E}^3)^k / \Delta \simeq \Delta^\perp.$$

Im folgenden existieren $\nu, \bar{\nu} \geq 0$, sodass eingeschränkt auf Δ^\perp folgendes gilt:

$$\nu \| \cdot \|^2 \leq \| \cdot \|_Q^2 \leq \bar{\nu} \| \cdot \|^2, \quad (2.7)$$

wobei $\nu, \bar{\nu}$ nur von $k \in \mathbb{N}$ abhängig sind. Wir werden nun Schranken für $\nu, \bar{\nu}$ in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$ finden.

Lemma 2.3. *Für alle $k \geq 2$ ist $\nu(k) \leq 2k(k-1)$ und $\bar{\nu}(k) \geq (1/3k)$.*

Beweis. Sei $x \in \Delta^\perp$. Mit (2.7) ist $\nu \leq \max_{\|x\|=1} \|x\|_Q^2$. Da $\|x\| = 1$ gilt, muss $\|x_i\| \leq 1$ für alle $i = 1, \dots, k$ gelten. Weiterhin gilt $\|x_i - x_j\| \leq \|x_i\| + \|x_j\| \leq 2$ und letztendlich erhalten wir $\|x_i - x_j\|^2 \leq 4$ für alle $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$. Das impliziert

$$\|x\|_Q^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^k \|x_i - x_j\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^k 4 = \frac{1}{2} k(k-1) 4 = 2k(k-1). \quad (2.8)$$

Ebenfalls mit (2.7) gilt $(1/\bar{\nu}) \leq \max_{\|x\|_Q=1} \|x\|^2$. Sei $x \in \Delta^\perp$, sodass $\|x\|_Q = 1$ gilt. Wir behaupten, dass für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq l \leq 3$, $|x_{il}| < 1$ ist.

Dazu nehmen wir zunächst das Gegenteil an. Dann existieren $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ und $1 \leq l \leq 3$, sodass $|x_{i_0 l}| \geq 1$ gilt. O.B.d.A. nehmen wir $x_{i_0 l} \geq 1$ an. Da $x \in \Delta^\perp$ und somit $\langle x, x_\Delta \rangle = 0$ für $x_\Delta \in \Delta$ ist $\sum x_i = 0$ und dementsprechend existiert ein i_1 , sodass $x_{i_1 l} < 0$. Dann müsste aber

$$\|x\|_Q^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^k \|x_i - x_j\|^2 \geq \|x_{i_0} - x_{i_1}\|^2 \geq (x_{i_0 l} - x_{i_1 l})^2 > 1$$

was im Widerspruch zu $\|x\|_Q^2 = 1$ steht. Also gilt $|x_{il}| < 1$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq l \leq 3$.
Zuletzt erhalten wir

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^3 x_{il}^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^3 1 = 3k.$$

Das heißt $(1/\bar{\nu}) \leq 3k \Leftrightarrow \frac{1}{3k} \leq \bar{\nu}$. Zusammen mit (2.8) folgt die Behauptung. □

3 Konvergenz in stetiger Zeit

Ziel dieses Kapitels ist es, die Konvergenz in stetiger Zeit zu beweisen.

Dazu fixieren wir eine Lösung (x, v) von (2.6). Zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$, sind $x(t) \in X$ und $v(t) \in V$. Außerdem bestimmt $x(t)$ eine Adjazenzmatrix $A_{x(t)}$, welche wir mit A_t bezeichnen. Wir notieren die Laplace Matrix und die Fiedler Zahl von A_t mit L_t und ϕ_t . Es seien weiterhin $\Lambda(t) := \Lambda(v(t))$ und $\Gamma(t) := \Gamma(x(t))$. Wir notieren $\Gamma_0 = \Gamma(0)$ und $\Lambda_0 = \Lambda(0)$.

3.1 Hilfsmittel

Bevor wir zur Hauptaussage des Kapitels kommen, werden wir zunächst ein paar Hilfsmittel aufstellen und beweisen.

Wir definieren $\Phi_t := \min_{\tau \in [0, t]} \phi_\tau$.

Proposition 3.1. *Für alle $t \geq 0$ gilt*

$$\Lambda(t) \leq \Lambda_0 e^{-2t\Phi_t}$$

Beweis. Sei $t \geq 0$ und $\tau \in [0, t]$.

$$\begin{aligned} \Lambda'(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \|v(\tau)\|_Q^2 \\ &= \frac{d}{d\tau} \langle v(\tau), v(\tau) \rangle_Q \\ &= \langle v'(\tau), v(\tau) \rangle_Q + \langle v(\tau), v'(\tau) \rangle_Q \\ &= 2 \langle v'(\tau), v(\tau) \rangle_Q \stackrel{(2.6)}{=} -2 \langle L_\tau v(\tau), v(\tau) \rangle_Q \\ &\leq -2 \langle \phi_{x(\tau)} v(\tau), v(\tau) \rangle \\ &= -2 \phi_{x(\tau)} \Lambda(\tau), \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt verwendet wurde, dass L_τ symmetrisch und positiv definit auf V ist, da $L_\tau v(\tau) \neq 0$ für alle $v \in V$. Somit entspricht $\phi_{x(\tau)}$ dem kleinsten Eigenwert von L_τ auf V . Mit dieser Ungleichung erhalten wir

$$\ln(\Lambda(\tau)) \Big|_0^t = \int_0^t \frac{\Lambda'(\tau)}{\Lambda(\tau)} d\tau \leq \int_0^t \frac{-2\phi_\tau \Lambda(\tau)}{\Lambda(\tau)} d\tau = \int_0^t -2\phi_\tau d\tau \leq -2t\Phi_t,$$

das heißt

$$\begin{aligned}\ln(\Lambda(t)) - \ln(\Lambda_0) &\leq -2t\Phi_t \\ \iff e^{\ln(\Lambda(t)) - \ln(\Lambda_0)} &\leq e^{-2t\Phi_t} \\ \iff \Lambda(t) &\leq \Lambda_0 e^{-2t\Phi_t}.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. *Es sei $T > 0$, dann gilt:*

$$\Gamma(T) \leq 2 \left(\Gamma_0 + \frac{\Lambda_0}{\Phi_T^2} \right)$$

Beweis. Sei $T > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}|\Gamma'(t)| &= \left| \frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle_Q \right| = |2 \langle x'(t), x(t) \rangle_Q| \underbrace{=}_{(2.6)} |2 \langle v(t), x(t) \rangle_Q|, \\ &\leq 2 \|v(t)\|_Q \|x(t)\|_Q,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet wurde. Weiter gilt, dass

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_Q &= \Gamma(t)^{1/2}, \\ \|v(t)\|_Q^2 &= \Lambda(t) \underbrace{\leq}_{\text{Proposition 3.1}} \Lambda_0 e^{-2t\Phi_t}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\Gamma'(t) \leq |\Gamma'(t)| \leq 2(\Lambda_0 e^{-2t\Phi_t})^{1/2} \Gamma(t)^{1/2}. \quad (3.1)$$

Außerdem ist die Abbildung $t \mapsto \Phi_t$ monoton fallend, da $\Phi_t = \min_{\tau \in [0, t]} \phi_\tau \geq \min_{\tau \in [0, T]} \phi_\tau = \Phi_T$ für alle $T \geq t$. Nun betrachten wir folgendes Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)^{1/2}} dt &\underbrace{\leq}_{(3.1)} 2 \int_0^T (\Lambda_0 e^{-2t\Phi_t})^{1/2} dt \\ &\leq 2 \int_0^T \Lambda_0^{1/2} e^{-t\Phi_T} dt \\ &= 2\Lambda_0^{1/2} \left(-\frac{1}{\Phi_T} \right) e^{-t\Phi_T} \Big|_0^T \\ &= 2\Lambda_0^{1/2} \left(\frac{1}{\Phi_T} \right) \underbrace{\left(1 - e^{-T\Phi_T} \right)}_{\geq 0} \leq \frac{2\Lambda_0^{1/2}}{\Phi_T}.\end{aligned}$$

Mit $\left(\sqrt{\Gamma(t)}\right)' = \frac{\Gamma'(t)}{2\sqrt{\Gamma(t)}}$ und dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(t)^{1/2}\Big|_0^T &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)^{1/2}} dt \leq \frac{\Lambda_0^{1/2}}{\Phi_T} \\ \iff \Gamma(T)^{1/2} - \Gamma_0^{1/2} &\leq \frac{\Lambda_0^{1/2}}{\Phi_T} \\ \iff \Gamma(T) &\leq \left(\Gamma_0^{1/2} + \frac{\Lambda_0^{1/2}}{\Phi_T}\right)^2\end{aligned}$$

und mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$, was wiederum impliziert, dass $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, und somit folgt unsere Behauptung

$$\Gamma(T) \leq \left(\Gamma_0^{1/2} + \frac{\Lambda_0^{1/2}}{\Phi_T}\right)^2 \leq 2\left(\Gamma_0 + \frac{\Lambda_0}{\Phi_T^2}\right).$$

□

Proposition 3.3. Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ eine nichtnegative, symmetrische Matrix, $L = D - A$ die Laplace Matrix von A , ϕ die Fiedler Zahl von A und $\mu := \min_{i \neq j} a_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq k$. Dann gilt $\phi \geq (1/2)\nu\mu$. Falls $a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2)$ für alle $1 \leq i, j \leq k$, dann gilt

$$\phi \geq \frac{1}{2}\nu\eta(\Gamma(x)).$$

Beweis. Sei $v \in V$ beliebig und $\mu = \min_{i \neq j} a_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq k$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\phi\|v\|^2 &= \|\phi v\|\|v\| = \|Lv\|\|v\| \\ &\geq \langle Lv, v \rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \|v_i - v_j\|^2 \quad (\text{Eigenschaft c) der Laplace Matrix}) \\ &\geq \frac{1}{2}\mu\|v\|_Q^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\mu\nu\|v\|^2 \quad (\text{Lemma 2.3.})\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für ein beliebiges $v \in V$ gilt, gilt dies insbesondere auch für ein $v \in V$ mit $Lv = \phi v$. Daher folgt:

$$\phi \geq (1/2)\nu\mu.$$

Sei nun $a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2)$ für alle $1 \leq i, j \leq k$. Dann erhalten wir für $v \in V$, wobei $\|v\| \neq 0$

$$\begin{aligned}
\phi\|v\|^2 &\geq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \eta(\|x_i - x_j\|^2) \|v_i - v_j\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{K}{(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta} \|v_i - v_j\|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{K}{(\sigma^2 + \max_{i,j \leq k} \|x_i - x_j\|^2)^\beta} \|v_i - v_j\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \|v\|_Q^2 \frac{K}{(\sigma^2 + \max_{i,j \leq k} \|x_i - x_j\|^2)^\beta} \\
&\geq \frac{1}{2} \nu \|v\|^2 \frac{K}{(\sigma^2 + \Gamma(x))^\beta} \\
&= \frac{1}{2} \nu \|v\|^2 \eta(\Gamma(x)).
\end{aligned}$$

Mit Division durch $\|v\|^2$ ergibt sich

$$\phi \geq \frac{1}{2} \nu \eta(\Gamma(x)).$$

□

Lemma 3.4. Seien $c_1, c_2 > 0$ und $s > q > 0$. Dann hat die Funktion

$$F(z) = z^s - c_1 z^q - c_2$$

genau eine positive Nullstelle z_* . Außerdem gilt

$$z_* \leq \max \left\{ (2c_1)^{\frac{1}{s-q}}, (2c_2)^{\frac{1}{s}} \right\}$$

und $F(z) \leq 0$ für $0 \leq z \leq z_*$.

Beweis. Der folgende Beweis wurde selbstständig erarbeitet.

Sei $F(z) = z^s - c_1 z^q - c_2$ mit $c_1, c_2 > 0$, $s > q > 0$ und $z \geq 0$. Als erstes berechnen wir die Ableitung F' und suchen dann die Extrempunkte von F .

$$F'(z) = sz^{s-1} - qc_1 z^{q-1}.$$

Dabei ist $F'(z) = 0$ für

$$z_1 = 0 \quad \text{und} \quad z_2 = \left(\frac{c_1 q}{s} \right)^{\frac{1}{s-q}} > 0.$$

Nun betrachten wir $F(z_2)$.

$$\begin{aligned}
F(z_2) &= F\left(\left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{1}{s-q}}\right) = \left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{s}{s-q}} - c_1 \left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{q}{s-q}} - c_2 \\
&= \left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{s}{s-q}} \underbrace{\left(1 - c_1 \left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{q-s}{s-q}}\right)}_{=\frac{s}{q} > 1} - c_2 \\
&= \underbrace{\left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{s}{s-q}}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{s}{q}\right)}_{<0} - c_2 < 0
\end{aligned}$$

Da F' genau zwei Nullstellen hat und $F'(z) \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow +\infty$, folgt dass F in $\left(\left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{1}{s-q}}, +\infty\right)$ streng monoton steigend ist. Weiter gilt $F(z) \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow +\infty$. Daraus folgern wir, dass es genau eine Nullstelle z_* in $\left(\left(\frac{c_1 q}{s}\right)^{\frac{1}{s-q}}, +\infty\right)$ gibt.

Für die Abschätzung von z_* ergeben sich zwei Fälle. Dazu sei $z > 0$ erstmal beliebig, dann gilt einer der beiden Fälle.

1. Fall: $c_1 z^q \geq c_2$

$$\begin{aligned} 0 \geq F(z) &\iff 0 \geq z^s - c_1 z^q - c_2 \geq z^s - 2c_1 z^q \\ &\iff 2c_1 z^q \geq z^s \\ &\iff (2c_1)^{\frac{1}{s-q}} \geq z \end{aligned}$$

2. Fall: $c_1 z^q < c_2$

$$\begin{aligned} 0 \geq F(z) &\iff 0 \geq z^s - c_1 z^q - c_2 > z^s - 2c_2 \\ &\iff 2c_2 \geq z^s \\ &\iff (2c_2)^{\frac{1}{s}} \geq z \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $F(z) \leq 0$ für $0 \leq z \leq z_*$ mit $z_* \leq \max\left\{(2c_1)^{\frac{1}{s-q}}, (2c_2)^{\frac{1}{s}}\right\}$. □

3.2 Theorem für stetige Zeit

Nachdem wir alle benötigten Hilfsmittel bewiesen haben, kommen wir nun zur Hauptaussage dieses Kapitels. Wir werden beweisen, dass unter bestimmten Anfangsbedingungen (nur für $\beta \geq 1/2$) der Schwarm gegen eine gemeinsame Geschwindigkeit mit beschränkten Abständen konvergiert.

Satz 3.5. Für $K, \sigma > 0$ und $\beta \geq 0$ sei für alle $1 \leq i, j \leq k$

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta}.$$

Wir nehmen an, dass eine der folgenden drei Fälle gilt.

- i) $\beta < 1/2$.
- ii) $\beta = 1/2$ und $\Lambda_0 < ((\nu K)^2/8)$.
- iii) $\beta > 1/2$ und

$$\left[\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}}\right] \left(\frac{(\nu K)^2}{8\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} > 2\Gamma_0 + \sigma^2$$

Dann gibt es eine Konstante B_0 , welche unabhängig von t ist und für jeden der Fälle explizit angeben wird, sodass $\Gamma(t) \leq B_0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Des Weiteren gilt dann $\Lambda(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und es gibt ein $\hat{x} \in X$, sodass $x(t) \rightarrow \hat{x}$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis. Seien $K, \sigma > 0$ und $\beta \geq 0$, sodass $a_{ij} = K/(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta$ für alle $1 \leq i, j \leq k$. Mit Proposition 3.3 folgt für alle $x \in X$,

$$\phi_x \geq \frac{1}{2} \nu \eta(\Gamma(x)) = \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \Gamma_x)^\beta}$$

Sei nun $t \geq 0$ und $t^* \in [0, t]$ der Zeitpunkt, welcher Γ in $[0, t]$ maximiert. Dann erhalten wir mit $\Gamma(\tau) \leq \Gamma(t^*)$ für alle $\tau \in [0, t]$:

$$\phi_t \geq \Phi_t = \min_{\tau \in [0, t]} \phi_\tau \geq \min_{\tau \in [0, t]} \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \Gamma(\tau))^\beta} \geq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \Gamma(t^*))^\beta}. \quad (3.2)$$

Mit Proposition 3.2 und (3.2) folgt, dass

$$\Gamma(t) \leq 2 \left(\Gamma_0 + \frac{\Lambda_0}{\Phi_t^2} \right) \leq 2\Gamma_0 + 8\Lambda_0 \frac{(\sigma^2 + \Gamma(t^*))^{2\beta}}{(\nu K)^2}. \quad (3.3)$$

Da Γ in $[0, t]$ zum Zeitpunkt t^* maximiert wird, ist auch $\Gamma(t^*) = \max_{\tau \in [0, t^*]} \Gamma(\tau)$, d.h. t^* maximiert Γ auch in $[0, t^*]$. Dann können wir (3.3) für $t = t^*$ schreiben als

$$(\sigma^2 + \Gamma(t^*)) - 8\Lambda_0 \frac{(\sigma^2 + \Gamma(t^*))^{2\beta}}{(\nu K)^2} - (2\Gamma_0 + \sigma^2) \leq 0. \quad (3.4)$$

Als nächstes definieren wir:

$$\begin{aligned} z &:= \Gamma(t^*) + \sigma^2, \\ a &:= \frac{8\Lambda_0}{(\nu K)^2}, \\ b &:= 2\Gamma_0 + \sigma^2. \end{aligned}$$

Dann lässt sich (3.4) schreiben als $F(z) \leq 0$, wobei

$$F(z) = z - az^{2\beta} - b.$$

Nun kommen wir zu den drei verschiedenen Fällen.

- i) Sei $\beta < 1/2$. Dann folgt aus Lemma 3.4, dass $F(z) \leq 0$ für $z = (\sigma^2 + \Gamma(t^*)) \leq U_0$ gilt, wobei

$$U_0 := \max \left\{ (2a)^{\frac{1}{1-2\beta}}, 2b \right\} = \max \left\{ \left(\frac{16\Lambda_0}{(\nu K)^2} \right)^{\frac{1}{1-2\beta}}, 2(2\Gamma_0 + \sigma^2) \right\}.$$

Aus $(\sigma^2 + \Gamma(t^*)) \leq U_0$ folgt, dass $\Gamma(t^*) \leq B_0 := U_0 - \sigma^2$. Da B_0 unabhängig von der Zeit t ist, folgern wir, dass $\Gamma(t) \leq B_0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist. Das wiederum impliziert für alle $t \in \mathbb{R}_+$ mit (3.2)

$$\phi_t \geq \Phi_t \geq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta},$$

und mit Proposition 3.1

$$\Lambda(t) \leq \Lambda_0 e^{-\frac{\nu K}{(\sigma^2 + B_0)^\beta} t}. \quad (3.5)$$

Nun sehen wir, dass $\Lambda(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, da $\Lambda(t) \leq \Lambda_0 \underbrace{e^{-\frac{\nu K}{(\sigma^2 + B_0)^\beta} t}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Letztlich gilt für alle $T > t$

$$\begin{aligned} \|x(T) - x(t)\| &\stackrel{(2.6)}{=} \left\| \int_t^T v \right\| \leq \int_t^T \|v\| \stackrel{(2.7)}{\leq} \int_t^T \frac{1}{\nu} \Lambda^{1/2} \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} \int_t^T \frac{1}{\nu} \Lambda_0^{1/2} e^{-\frac{\nu K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} s} ds \\ &= \frac{1}{\nu} \Lambda_0^{1/2} \left(-\frac{2(\sigma^2 + B_0)^\beta}{\nu K} e^{-\frac{\nu K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} s} \right) \Big|_t^T \\ &= \frac{2\Lambda_0^{1/2}(\sigma^2 + B_0)^\beta}{\nu K} \left(e^{-\frac{\nu K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} t} - \underbrace{e^{-\frac{\nu K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} T}}_{\leq 0} \right) \\ &\leq \frac{2\Lambda_0^{1/2}(\sigma^2 + B_0)^\beta}{\nu K} \underbrace{e^{-\frac{\nu K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} t}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Daraus schließen wir, dass $\|x(T) - x(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und unabhängig von T ist. Somit existiert ein $\hat{x} \in X$, sodass $x \rightarrow \hat{x}$.

ii) Sei $\beta = 1/2$. Dann können wir (3.4) schreiben als

$$(\sigma^2 + \Gamma(t^*)) \left(1 - \frac{8\Lambda_0}{(\nu K)^2} \right) - (2\Gamma_0 + \sigma^2) \leq 0$$

woraus folgt, dass

$$\Gamma(t^*) \leq B_0 := \frac{2\Gamma_0 + \sigma^2}{\underbrace{1 - \frac{8\Lambda_0}{(\nu K)^2}}_{\in (0,1)}} - \sigma^2.$$

Es gilt, dass $B_0 > 0$, da per Annahme $\Lambda_0 < \frac{(\nu K)^2}{8}$ und

$$B_0 = \frac{2\Gamma_0 + \sigma^2}{1 - \frac{8\Lambda_0}{(\nu K)^2}} - \sigma^2 > \frac{2\Gamma_0 + \sigma^2}{1} - \sigma^2 = 2\Gamma_0 > 0.$$

Von hier an können wir analog zum Fall i) vorgehen.

- iii) Sei $\beta > 1/2$ und $\gamma = 2\beta$, sodass $F(z) = z - az^\gamma - b$. Dann hat die Ableitung $F'(z) = 1 - \gamma az^{\gamma-1}$ genau eine Nullstelle, welche größer null ist, $z_* = (1/\gamma a)^{1/\gamma-1}$ und

$$\begin{aligned} F(z_*) &= \left(\frac{1}{\gamma a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - a\left(\frac{1}{\gamma a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - b \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - b \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] - b \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

weil per Annahme $\left[\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}} \right] \left(\frac{(\nu K)^2}{8\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} > 2\Gamma_0 + \sigma^2$ gilt. Da $F(0) = -b < 0$ und $F(z) \rightarrow -\infty$ für $z \rightarrow \infty$, folgern wir, dass sich F wie folgt skizzieren lässt.

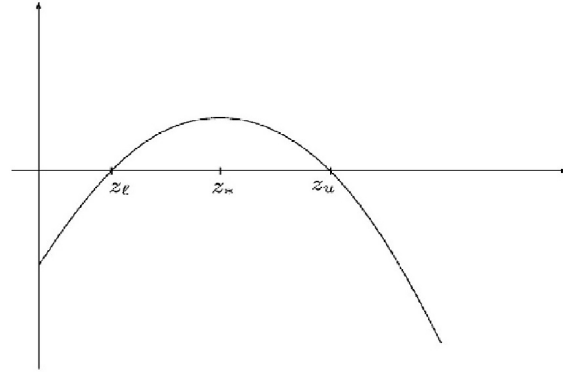


Abbildung 3.1: Graph von F

Obwohl $t \mapsto t^*$ keine stetige Abbildung ist, ist die Abbildung $t \mapsto \Gamma(t^*) + \sigma^2$ stetig und somit ist die Abbildung $t \mapsto F(\Gamma(t^*) + \sigma^2)$ stetig, da die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen wieder stetig ist.

Zusammen mit (3.4) erhalten wir für alle $t \geq 0$, $F(\Gamma(t^*) + \sigma^2) \leq 0$. Für $t = 0$ ist ebenfalls $t^* = 0$ und

$$\begin{aligned}
\underbrace{\Gamma_0}_{\geq 0} + \sigma^2 &\leq 2\Gamma_0 + \sigma^2 = b \\
&< \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}_{<0} \right] \\
&< \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
&= z_*
\end{aligned}$$

Da $\Gamma_0 + \sigma^2 < z_*$ und $F(\Gamma_0 + \sigma^2) \leq 0$ folgt, dass $\Gamma_0 + \sigma^2 \leq z_l$, wobei z_l die kleinste Nullstelle von F ist. Die Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \Gamma(t^*) + \sigma^2$ impliziert für alle $t \geq 0$

$$\Gamma(t^*) + \sigma^2 \leq z_l \leq z_* = \left(\frac{1}{\gamma a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Also können wir B_0 folgendermaßen wählen

$$\Gamma(t^*) \leq B_0 := \left(\frac{1}{\gamma a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \sigma^2 = \left(\frac{(\nu K)^2}{8\gamma\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \sigma^2.$$

Von hier an können wir analog zu Fall i) vorgehen.

□

Bemerkung 3.6. In Theorem 3.5 können wir die Bedingung $a_{ij} = K/(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta$ auch auf $a_{ij} > K/(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ ausdehnen.

4 Schwarm aus zwei Vögeln

In diesem Kapitel wird der Fall analysiert, in welchem zwei Vögel auf einer Linie fliegen (d.h. wir betrachten die Positionen und Geschwindigkeiten in \mathbb{R}).

Wir definieren $\mathbf{x} = x_1 - x_2$ und $\mathbf{v} = v_1 - v_2$ und nehmen an, dass das Paar (\mathbf{x}, \mathbf{v}) folgende Differentialgleichung löst

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' &= -\frac{\mathbf{v}}{(1 + \mathbf{x})^\alpha}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dieses entspricht zwar nicht (2.6), aber wir werden unten sehen, dass (2.6) eng begrenzt zwischen zwei Versionen von (4.1) liegt.

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass für $\alpha < 1$ ($2\beta = \alpha$) \mathbf{x} beschränkt ist und $\mathbf{v} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt, ohne jegliche Anfangsbedingungen aufzustellen. Die nächste Proposition gibt Bedingungen für \mathbf{x}_0 und \mathbf{v}_0 für $\alpha > 1$.

Bemerkung 4.1. *Die folgende Proposition wurde selbstständig erarbeitet, basiert aber auf der Idee von [1], da dort falsch integriert wurde und sich somit falsche Abschätzungen ergaben.*

Proposition 4.2. *Sei $\alpha > 1$. Wir nehmen an, dass $\mathbf{x}_0 > 0$, $\mathbf{v}_0 > 0$ und*

$$\mathbf{x}_0 < \hat{\mathbf{x}}_0 := \left(\frac{1}{(\alpha - 1)\mathbf{v}_0} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Dann ist \mathbf{x} beschränkt und wachsend und für $t \rightarrow \infty$ gilt $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$ und

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \left(\frac{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}}{1 - \mathbf{v}_0(\alpha - 1)(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1$$

Beweis. Seien $\alpha > 1$, $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 > 0$ und $\mathbf{x}_0 < \hat{\mathbf{x}}_0$. Mit (4.1) folgt für alle $t \geq 0$

$$\mathbf{v}\Big|_0^t = \int_0^t \mathbf{v}' = - \int_0^t \frac{\mathbf{x}'}{(1 + \mathbf{x})^\alpha}.\tag{4.2}$$

Integriert man nun die rechte Seite erhält man

$$\begin{aligned}- \int_0^t \frac{\mathbf{x}'}{(1 + \mathbf{x})^\alpha} &= \frac{1}{(\alpha - 1)(1 + \mathbf{x})^{\alpha-1}} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(1 + \mathbf{x}(t))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} \right).\end{aligned}$$

Mit (4.2) und mittels Integration der linken Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 &= \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(1 + \mathbf{x}(t))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} \right) \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}(t) &= \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(1 + \mathbf{x}(t))^{\alpha-1}} - \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} - \mathbf{v}_0 \right)}_{=:\gamma_0}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Es gilt $\gamma_0 > 0$, da

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} - \mathbf{v}_0 > \frac{1}{(\alpha - 1) \left(1 + \left(\frac{1}{(\alpha-1)\mathbf{v}_0} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \right)^{\alpha-1}} - \mathbf{v}_0 \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} (\alpha - 1) \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 = 0. \end{aligned}$$

Falls es ein $t_* \geq 0$ gibt, sodass $\mathbf{v}(t_*) = 0$, dann ist $\mathbf{v}'(t_*) = -\mathbf{v}(t_*)/(1 + \mathbf{x}(t_*))^\alpha = 0$ und $\mathbf{x}'(t_*) = 0$. Dann ist das Paar (\tilde{x}, \tilde{v}) , definiert als $\tilde{x}_1(t) = x_1(t_*)$, $\tilde{x}_2(t) = x_2(t_*)$ und $\tilde{v}(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, eine Lösung von (4.1) und erfüllt die Bedingungen $\tilde{\mathbf{x}}(t_*) = \mathbf{x}(t_*)$ und $\tilde{\mathbf{v}} = 0$. Mit der Eindeutlichkeit der Lösungen von (4.1) folgt, dass $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ und somit auch $\tilde{\mathbf{v}}_0 = 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme, dass $\mathbf{v}_0 > 0$. Wir schließen also, dass $\mathbf{v}(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 < \mathbf{v}(t) &= \frac{1}{(\alpha - 1)(1 + \mathbf{x}(t))^{\alpha-1}} - \gamma_0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &< \left(\frac{1}{\gamma_0(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 =: \mathbf{x}_*. \end{aligned}$$

Somit bleibt \mathbf{x} beschränkt auf \mathbb{R}_+ , da

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma_0(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 &= \left(\frac{1}{(\alpha - 1) \left(\frac{1}{(\alpha-1)(1+\mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} - \mathbf{v}_0 \right)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{\frac{1}{(1+\mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} - \mathbf{v}_0(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \\ &= \left(\frac{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}}{1 - \mathbf{v}_0(\alpha - 1)(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \left(\frac{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}}{1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 = \mathbf{x}_0 \\ &> 0 \quad (\text{per Annahme}) \end{aligned}$$

Zu (*): Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $0 < \mathbf{v}_0(\alpha - 1)(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1} < 1$.

$$\begin{aligned} 0 < \underbrace{\mathbf{v}_0}_{>0} \underbrace{(\alpha - 1)}_{>0} \underbrace{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}}_{>0} < \mathbf{v}_0(\alpha - 1) \left(1 + \left(\frac{1}{\mathbf{v}_0(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \right)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\mathbf{v}_0(\alpha - 1)}{\mathbf{v}_0(\alpha - 1)} = 1 \end{aligned}$$

Des weiteren ist \mathbf{x} steigend, da $\mathbf{v} > 0$ und $\mathbf{x}' = \mathbf{v}$. Da \mathbf{x} beschränkt und steigend ist, existiert ein $\mathbf{x}_* > 0$, sodass $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_*$ und $\mathbf{x}'(t) \rightarrow 0$, also auch $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Mit $\mathbf{x}' = \mathbf{v}$ und (4.3) folgt, dass für $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_* = \left(\frac{(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}}{1 - \mathbf{v}_0(\alpha - 1)(1 + \mathbf{x}_0)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1$$

und somit unsere Behauptung. □

Bemerkung 4.3. Aus dem Beweis von Proposition 4.2 folgt, dass für alle $\alpha > 1$, \mathbf{v} nicht konvergiert, falls $\mathbf{x} \geq \hat{\mathbf{x}}_0$. Außerdem folgt mit $(a^2 + b^2) \geq 1/2(a + b)^2$ für $\beta = \alpha/2$, dass

$$\frac{1}{(1 + \mathbf{x})^\alpha} = \frac{1}{(1 + \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x})^\beta} \leq \frac{1}{(1 + \mathbf{x}^2)^\beta} \leq \frac{2}{(1 + \mathbf{x})^{2\beta}} = \frac{2}{(1 + \mathbf{x})^\alpha}.$$

Somit liegt das System (2.6) eng zwischen zwei Varianten von (4.1), welche sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

5 Konvergenz in diskreter Zeit

In diesem Kapitel betrachten wir das Modell in diskreter Zeit, also die Differentialgleichungen aus (2.5) für $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + \Delta t v(t) \\v(t+1) &= (Id - L_x)v(t).\end{aligned}$$

Die Motivation dieses Modell in diskreter Zeit zu betrachten ist, dass sich Mechanismen, beispielsweise die Lerntheorie, welche auf dem Austausch von Signalen beruhen, besser in diskreter Zeit beschreiben lassen.

Dazu nehmen wir erneut an, dass es Konstanten $K, \sigma > 0$ und $\beta \geq 0$ gibt, sodass für alle $1 \leq i, j \leq k$

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta}.$$

Mit Proposition 3.3 gilt dann $\phi_x > 0$ für alle $x \in X$. Des Weiteren folgt mit der Beziehung $L_x y = \lambda y \neq 0$ für alle $y \in X$, dass L_x nicht den Eigenwert 0 im Raum X besitzt. Somit ist L_x positiv definit auf X , wobei der kleinste Eigenwert von L_x , eingeschränkt auf X , der Fiedler Zahl $\phi_x > 0$ entspricht.

Im folgenden fixieren wir eine Lösung (x, v) von (2.5). Zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ gilt $x(t) \in X$ und $v(t) \in V$. Die Notationen von ϕ_t , L_t , $\Lambda(t)$ und $\Gamma(t)$ sind wie in Kapitel 3 beschrieben.

5.1 Hilfsmittel

Lemma 5.1. *Für alle $x \in X$*

$$\|L_x\| \leq \mathcal{L} := \frac{2(k-1)\sqrt{k}K}{\sigma^{2\beta}}.$$

Und falls $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$, dann ist $\|L_x\| < 2$.

Beweis. Sei $x \in X$. Für alle $1 \leq i, j \leq k$ ist

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \underbrace{\|x_i - x_j\|^2}_{\geq 0})^\beta} \leq \frac{K}{\sigma^{2\beta}}.$$

Daher folgt mit $\max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |(L_x)_{ij}| = \sum_{j=1}^k |(L_x)_{i_*j}|$

$$\begin{aligned} \|L_x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |(L_x)_{ij}| = \sum_{j=1}^k |(L_x)_{i_*j}| \\ &= \underbrace{|(L_x)_{i_*1}|}_{\leq \frac{K}{\sigma^{2\beta}}} + \underbrace{|(L_x)_{i_*2}|}_{\leq \frac{K}{\sigma^{2\beta}}} + \dots + \underbrace{|(L_x)_{i_*i_*}|}_{=\sum_{j \neq i_*} a_{i_*j} \leq (k-1) \frac{K}{\sigma^{2\beta}}} + \dots + \underbrace{|(L_x)_{i_*k}|}_{\leq \frac{K}{\sigma^{2\beta}}} \\ &\leq 2(k-1) \frac{K}{\sigma^{2\beta}}. \end{aligned}$$

Des weiteren gilt

$$\|L_x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |(L_x)_{ij}|^2} \leq \sqrt{k \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |(L_x)_{ij}|^2} \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |(L_x)_{ij}| = \sqrt{k} \|L_x\|_\infty.$$

Demnach folgt

$$\|L_x\| \leq \sqrt{k} \|L_x\|_\infty \leq \frac{2(k-1)\sqrt{k}K}{\sigma^{2\beta}}.$$

Und für $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$ ist

$$\|L_x\| \leq \mathcal{L} = \frac{2(k-1)\sqrt{k}K}{\sigma^{2\beta}} < 2.$$

□

Bemerkung 5.2. Wir werden im folgenden annehmen, dass $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$ und somit $\mathcal{L} < 2$. Anschließend werden wir anhand eines Beispiels sehen, dass diese Einschränkung durchaus sinnvoll ist.

Proposition 5.3. Für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|v(t+1)\| \leq (1 - \mu(t))\|v(t)\|,$$

wobei

$$\mu(t) = \min\{2 - \mathcal{L}, \phi_t\}.$$

Insbesondere folgt dann, dass $\|v\|$ als Funktion von t fallend ist.

Beweis. Sei $t \in \mathbb{N}$. Die lineare Abbildung $Id - L_t$ ist selbstadjungiert und sie besitzt Eigenwerte im Intervall $(-1, 1)$. Da die Eigenwerte von L_t größer null sind (positive Definitheit) und für den größten Eigenwert von L_t $\lambda_k = \|L_t\| < 2$ gilt, ergibt sich somit für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k = \|L_t\|$) der Abbildung $Id - L_t$

$$\det(Id - L_t - \lambda Id) = (-1)^k \det(L_t - \underbrace{(1 - \lambda)}_{=:\tilde{\lambda}} Id) = (-1)^k \det(L_t - \tilde{\lambda} Id) = 0,$$

dass $\tilde{\lambda} = 1 - \lambda < 2$ und $\tilde{\lambda} = 1 - \lambda > 0$, d.h. alle Eigenwerte von $Id - L_t$ liegen im Intervall $(-1, 1)$. Der größte Eigenwert (im Absolutbetrag) ist $1 - \mu(t)$ und daher

$$\|v(t+1)\| = \|(Id - L_t)v(t)\| \leq \|Id - L_t\| \|v(t)\| = (1 - \mu(t)) \|v(t)\|.$$

□

Bemerkung 5.4. Der größte Eigenwert $1 - \mu(t)$ von $Id - L_t$ für $t \in \mathbb{N}$ wird noch von größerer Bedeutung sein. Es ist wichtig, dass wir diesen Eigenwert als stets größer gleich null betrachten, das heißt, dass $0 < \mu(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

Korollar 5.5. Für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|v(t)\| \leq \|v(0)\| \prod_{i=0}^{t-1} (1 - \mu(i)).$$

Beweis. Der Beweis folgt mittels einfacher Induktion.

Induktionsanfang: Sei $t = 1$:

$$\|v(1)\| \leq (1 - \mu(0)) \|v(0)\| \quad \text{mit Proposition 5.3.}$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für $t \in \mathbb{N}$:

$$\|v(t)\| \leq \|v(0)\| \prod_{i=0}^{t-1} (1 - \mu(i))$$

Induktionsschritt: $t \rightsquigarrow t + 1 \in \mathbb{N}$

$$\|v(t+1)\| \underbrace{\leq}_{\text{Prop. 5.3}} (1 - \mu(t)) \|v(t)\| \underbrace{\leq}_{\text{IV}} (1 - \mu(t)) \|v(0)\| \prod_{i=0}^{t-1} (1 - \mu(i)) = \|v(0)\| \prod_{i=0}^t (1 - \mu(i))$$

□

5.2 Theorem für diskrete Zeit

Satz 5.6. Sei für $\sigma > 0$, $\beta \geq 0$ und $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$, sodass für alle $1 \leq i, j \leq k$

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta}.$$

Wir nehmen an, dass einer der folgenden drei Fälle gilt.

i) $\beta < 1/2$.

ii) $\beta = 1/2$ und $\|v(0)\| < (\nu K / 2\nu^{1/2} \Delta t)$.

iii) $\beta > 1/2$ und¹

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right] > \bar{\nu} \left(V_0^2 + 2V_0 \left((\gamma a)^{-\frac{2}{\gamma-1}} - \sigma^2 \right)^{1/2} \bar{\nu}^{-1/2} \right) + \left(\frac{1}{\gamma a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} b,$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma &:= 2\beta, \\ V_0 &:= \Delta t \|v(0)\|, \\ a &:= \frac{2\bar{\nu}^{1/2}}{\nu K} V_0, \\ b &:= \bar{\nu}^{1/2} \|x(0)\| + \sigma. \end{aligned}$$

Dann existiert eine Konstante B_0 , welche unabhängig von dem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ ist und für jeden der drei Fälle explizit angegeben wird, sodass $\|x(t)\| \leq B_0$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $\|v(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und es gibt ein $\hat{x} \in X$, sodass $x(t) \rightarrow \hat{x}$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis. Seien $\sigma > 0$, $\beta \geq 0$ und $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$, sodass für alle $1 \leq i, j \leq k$ $a_{ij} = K/(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta$.

Wir teilen den Beweis in 2 Fälle auf.

Fall 1: Es existiert ein $t \in \mathbb{N}$, sodass $\mu(t) = \min\{2 - \mathcal{L}, \phi_t\} = \phi_t$.

Sei t_\dagger das erste $t \in \mathbb{N}$, für welches $\mu(t) = \phi_t$ gilt. Für $t \in \mathbb{N}$ mit $t \geq t_\dagger$, sei t^* der Zeitpunkt, welcher $\|x\|$ in $\{0, 1, \dots, t\}$ maximiert. Dann folgt mit Proposition 3.3 und mit $\|x\|_Q^2 \leq \bar{\nu} \|x\|^2$ für $i \in \{0, 1, \dots, t\}$

$$\begin{aligned} \phi_i &\geq \frac{1}{2} \nu \eta(\Gamma(i)) \\ &= \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \|x(i)\|_Q^2)^\beta} \\ &\geq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(i)\|^2)^\beta} \\ &\geq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(t^*)\|^2)^\beta} =: H(t^*). \end{aligned}$$

Also gilt $1 \geq 2 - \mathcal{L} \geq \phi_{t_\dagger} \geq H(t^*) > 0$, d.h. $H(t^*) \in (0, 1]$, und somit

$$\mu(i) = \min\{2 - \mathcal{L}, \phi(i)\} \geq \min\{2 - \mathcal{L}, H(t^*)\} = H(t^*).$$

¹Es wurde im Vergleich zu [1] eine kleine Änderung an der Voraussetzung getroffen.

Mit Korollar 5.5 folgt für alle $\tau \in \mathbb{N}$ mit $\tau \leq t$

$$\begin{aligned}
\|x(\tau)\| &= \left\| \sum_{j=0}^{\tau-1} x(j+1) - x(j) + x(0) \right\| \underbrace{\leq}_{\Delta\text{-Ungl.}} \|x(0)\| + \sum_{j=0}^{\tau-1} \|x(j+1) - x(j)\| \\
&\stackrel{(2.5)}{=} \underbrace{\|x(0)\|}_{(2.5)} + \sum_{j=0}^{\tau-1} \|x(j) + \Delta j v(j) - x(j)\| \\
&\leq \|x(0)\| + \Delta t \sum_{j=0}^{\tau-1} \|v(j)\| \\
&= \|x(0)\| + \Delta t \left(\|v(0)\| + \sum_{j=1}^{\tau-1} \|v(j)\| \right) \\
&\leq \|x(0)\| + \Delta t \left(\|v(0)\| + \sum_{j=1}^{\tau-1} \|v(0)\| \prod_{i=0}^{j-1} (1 - \mu(i)) \right) \\
&= \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \left(1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \prod_{i=0}^{j-1} (1 - \mu(i)) \right) \\
&\leq \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \left(1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \prod_{i=0}^{j-1} (1 - H(t^*)) \right) \\
&= \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} (1 - H(t^*))^j \right).
\end{aligned}$$

Mit Bemerkung 5.4 gilt $(1 - H(t^*)) \in [0, 1)$ und somit gilt folgende Ungleichung

$$\|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} (1 - H(t^*))^j \right) \leq \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1 - H(t^*))^j \right).$$

Nun sehen wir, dass die Einschränkung in Bemerkung 5.4 notwendig ist, da die Ungleichung nicht für $1 < H(t^*) \leq \mu(t) < 2$ gelten würde (dann müsste $\tau \in \mathbb{N}$ gerade sein). Also erhalten wir mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\|x(\tau)\| &\leq \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1 - H(t^*))^j \right) \\
&= \|x(0)\| + \Delta t \frac{1}{H(t^*)} \|v(0)\| \\
&= \|x(0)\| + \Delta t \frac{2(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(t^*)\|^2)^\beta}{\nu K} \|v(0)\|. \tag{5.1}
\end{aligned}$$

Für $\tau = t^*$ nimmt die Ungleichung (5.1) durch das multiplizieren beider Seiten mit $\bar{\nu}^{1/2}$ und durch das addieren von σ auf beiden Seiten folgende Form an

$$\sigma + \bar{\nu}^{1/2} \|x(t^*)\| \leq (\bar{\nu}^{1/2} \|x(0)\| + \sigma) + \bar{\nu}^{1/2} \Delta t \frac{2(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(t^*)\|^2)^\beta}{\nu K} \|v(0)\|,$$

was wiederum mit $(a^2 + b^2)^{1/2} \leq a + b$ folgendes impliziert

$$(\sigma^2 + \bar{\nu}\|x(t^*)\|^2)^{1/2} \leq (\bar{\nu}^{1/2}\|x(0)\| + \sigma) + \bar{\nu}^{1/2}\Delta t \frac{2(\sigma^2 + \bar{\nu}\|x(t^*)\|^2)^\beta}{\nu K} \|v(0)\|. \quad (5.2)$$

Seien nun

$$\begin{aligned} z &:= (\sigma^2 + \bar{\nu}\|x(t^*)\|^2)^{1/2} \\ a &:= \frac{2\bar{\nu}^{1/2}\Delta t}{\nu K} \|v(0)\| \\ b &:= \bar{\nu}^{1/2}\|x(0)\| + \sigma. \end{aligned}$$

Dann können wir (5.2) schreiben als $F(z) \leq 0$, wobei

$$F(z) = z - az^{2\beta} - b.$$

Nun kommen wir zu den drei verschiedenen Fällen

i) Sei $\beta < 1/2$.

Mit Lemma 3.4 folgt, dass $F(z) \leq 0$ für alle $0 \leq z \leq U_0$, also $(\sigma^2 + \bar{\nu}\|x(t^*)\|^2) \leq U_0^2$, wobei

$$U_0 = \max \left\{ \left(\frac{4\bar{\nu}^{1/2}\Delta t}{\nu K} \|v(0)\| \right)^{\frac{1}{1-2\beta}}, 2(\bar{\nu}^{1/2}\|x(0)\| + \sigma) \right\}.$$

Da U_0 unabhängig vom Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ ist, schließen wir für alle $t \geq t_\dagger$

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(t^*)\|^2 \leq B_0^2 := \frac{U_0^2 - \sigma^2}{\bar{\nu}}$$

und daher folgt wieder mit Proposition 3.3

$$\phi_t \geq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \bar{\nu}\|x(t)\|^2)^\beta} \geq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \bar{\nu}B_0^2)^\beta} =: F_0.$$

Und da $\phi_t \geq \phi_{t_\dagger}$ für $t < t_\dagger$ (da t_\dagger das erste $t \in \mathbb{N}$, sodass $\phi_t \leq 2 - \mathcal{L}$) folgern wir, dass $\phi_t \geq F_0$ für alle $t \in \mathbb{N}$ und schließlich auch $\mu(i) \geq F_0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit Korollar 5.5 erhalten wir nun für alle $t \in \mathbb{N}$

$$\|v(t)\| \leq \|v(0)\| \prod_{i=0}^{t-1} (1 - \mu(i)) \leq (1 - F_0)^t \|v(0)\|$$

und da

$$0 < F_0 = \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \bar{\nu}B_0^2)^\beta} \leq \frac{\nu K}{2(\sigma^2 + \bar{\nu}\|x(t^*)\|^2)^\beta} = H(t^*) \leq 1,$$

gilt $(1 - F_0) \in [0, 1)$ und somit $(1 - F_0)^t \|v(0)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Das heißt, dass $\|v(t)\|$ gegen 0 konvergiert.

Schließlich erhalten wir induktiv mit Proposition 5.3 für $j \in \mathbb{N}$ mit $j > t$

$$\begin{aligned} \|v(j)\| &\leq (1 - \mu(j-1))v(j-1) \leq \underbrace{(1 - \mu(j-1))(1 - \mu(j-2))}_{\leq (1-F_0)^2} v(j-2) \\ &\leq \dots \leq (1 - F_0)^{j-t} v(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

und somit folgt mit der Dreiecksungleichung, der geometrischen Reihe, (5.3) und mit (2.5) wie zuvor für $T \in \mathbb{N}$ mit $T > t$

$$\begin{aligned} \|x(T) - x(t)\| &= \left\| \sum_{j=t}^{T-1} x(j+1) - x(j) \right\| \leq \sum_{j=t}^{T-1} \|x(j+1) - x(j)\| \\ &\leq \Delta t \sum_{j=t}^{T-1} \|v(j)\| \\ &= \Delta t \left(\|v(t)\| + \underbrace{\|v(t+1)\|}_{\leq (1-F_0)\|v(t)\|} + \underbrace{\|v(t+2)\|}_{\leq (1-F_0)^2\|v(t)\|} \dots + \underbrace{\|v(T-1)\|}_{\leq (1-F_0)^{T-1-t}\|v(t)\|} \right) \\ &\leq \Delta t \sum_{j=0}^{T-1-t} \underbrace{(1 - F_0)^j}_{\geq 0} \|v(t)\| \\ &\leq \Delta t \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{(1 - F_0)^j}_{|\cdot| < 1} \|v(t)\| \\ &= \Delta t \frac{1}{F_0} \underbrace{\|v(t)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Da $\|v(t)\|$ gegen 0 konvergiert, folgern wir, dass $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit existiert ein $\hat{x} \in X$, sodass $x(t) \rightarrow \hat{x}$.

ii) Sei nun $\beta = 1/2$. Dann können wir (5.2) schreiben als

$$\left(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(t^*)\|^2 \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2\bar{\nu}^{1/2} \Delta t}{\nu K} \|v(0)\| \right) - \left(\bar{\nu}^{1/2} \|x(0)\| + \sigma \right) \leq 0.$$

Durch umformen erhalten wir

$$\|x(t^*)\|^2 \leq B_0 := \frac{1}{\bar{\nu}} \left(\left(\frac{\bar{\nu}^{1/2} \|x(0)\| + \sigma}{1 - \frac{2\bar{\nu}^{1/2} \Delta t}{\nu K} \|v(0)\|} \right)^2 - \sigma^2 \right),$$

wobei $B_0 > 0$, da per Annahme im Theorem $\|v(0)\| < (\nu K / 2\bar{\nu}^{1/2} \Delta t)$ und somit $0 < 1 - (2\bar{\nu}^{1/2} \Delta t / \nu K) \|v(0)\| < 1$. Von hier an können wir analog zu Fall i) fortfahren.

iii) Sei zuletzt $\beta > 1/2$ und $\gamma = 2\beta$.

Dann hat die Ableitung $F'(z) = 1 - \gamma a z^{\gamma-1}$ wie im Theorem für stetige Zeit genau eine Nullstelle an der Stelle $z_* = (1/\gamma a)^{1/(\gamma-1)}$ und mit der Annahme im Theorem 5.5 gilt dann

$$F(z_*) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] - b \geq 0,$$

da

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right] &> \bar{\nu} \left(V_0^2 + 2V_0 \left((\gamma a)^{-\frac{2}{\gamma-1}} - \sigma^2 \right)^{1/2} \bar{\nu}^{-1/2} \right) + \left(\frac{1}{\gamma a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} b \\ &\Leftrightarrow z_* F(z_*) > \bar{\nu} \left(V_0^2 + 2V_0 \left((\gamma a)^{-\frac{2}{\gamma-1}} - \sigma^2 \right)^{1/2} \bar{\nu}^{-1/2} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

und somit $F(z_*) \geq 0$. Außerdem lässt sich der Graph von F wie in Abbildung 3.1 skizzieren.

Für $t \in \mathbb{N}$ sei $z(t) = (\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(t^*)\|^2)^{1/2}$. Für $t = 0$ ist auch $t^* = 0$ und wir erhalten mit $(a^2 + b^2)^{1/2} \leq a + b$

$$z(0) = (\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(0)\|^2)^{1/2} \leq \bar{\nu}^{1/2} \|x(0)\| + \sigma = b < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = z_*,$$

da $F(z_*) = z_* - a z_*^{2\beta} - b \geq 0$, also $z_* \geq b + a z_*^{2\beta} > b$. Des weiteren ist

$$\begin{aligned} F(z(0)) &= (\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(0)\|^2)^{1/2} - a(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(0)\|^2)^\beta - (\bar{\nu}^{1/2} \|x(0)\| + \sigma) \\ &\leq -a(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(0)\|^2)^\beta < 0 \end{aligned}$$

und daraus folgt, dass $z(0) \leq z_l$ (z_l entspricht der kleinsten Nullstelle von F). Wir nehmen nun an, dass T das erste $t \in \mathbb{N}$ ist, sodass $z(t) \geq z_u$. Dann gilt $T = T^* \geq 1$ und für alle $t < T$

$$(\sigma^2 + \bar{\nu} \|x(t)\|^2)^{1/2} \leq z(T-1) \leq z_l.$$

Für alle $t < T$ erhalten wir

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{z_l^2 - \sigma^2}{\bar{\nu}} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{z_*^2 - \sigma^2}{\bar{\nu}} \right)^{1/2} =: B_0, \quad (5.4)$$

also auch

$$\|x(T-1)\|^2 \leq \frac{z_l^2 - \sigma^2}{\bar{\nu}}.$$

Für T ergibt sich

$$\|x(T)\|^2 \geq \frac{z_u^2 - \sigma^2}{\bar{\nu}},$$

was wiederum folgendes impliziert

$$\|x(T)\|^2 - \|x(T-1)\|^2 \geq \frac{z_u^2 - z_l^2}{\bar{\nu}} \geq \frac{z_*^2 - z_l^2}{\bar{\nu}} \geq \frac{(z_* - z_l)z_*}{\bar{\nu}}. \quad (5.5)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in (z_l, z_*)$, sodass $F(z_*) - F(z_l) = F'(\xi)(z_* - z_l)$, wobei $F(z_l) = 0$. Es gilt aber $0 \leq F'(\xi) = 1 - a\gamma\xi^{\gamma-1} \leq 1$ und daher

$$z_* - z_l \geq F(z_*).$$

Mit (5.5) erhalten wir

$$\|x(T)\|^2 - \|x(T-1)\|^2 \geq \frac{z_* F(z_*)}{\bar{\nu}}. \quad (5.6)$$

Des Weiteren gilt mit der Dreiecksungleichung und (2.5)

$$\begin{aligned} \|x(T)\| - \|x(T-1)\| &\leq \|x(T) - x(T-1)\| = \|x(T-1) + \Delta t v(T-1) - x(T-1)\| \\ &= \Delta t \|v(T-1)\| \leq \Delta t \|v(0)\|, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung daraus folgt, dass $\|v\|$ als Funktion in Abhängigkeit von t fallend ist. Daher gilt wieder mit der Dreiecksungleichung und mit (5.4)

$$\begin{aligned} \|x(T)\|^2 - \|x(T-1)\|^2 &= \|x(T-1) + \Delta t v(T-1)\|^2 - \|x(T-1)\|^2 \\ &= \left(\|x(T-1) + \Delta t v(T-1)\| - \|x(T-1)\| \right) \times \\ &\quad \left(\|x(T-1) + \Delta t v(T-1)\| + \|x(T-1)\| \right) \\ &\leq \Delta t \|v(T-1)\| \left(2\|x(T-1)\| + \Delta t \|v(T-1)\| \right) \\ &= (\Delta t)^2 \|v(T-1)\|^2 + 2\Delta t \|v(T-1)\| \|x(T-1)\| \\ &\leq (\Delta t)^2 \|v(0)\|^2 + 2\Delta t \|v(0)\| \|x(T-1)\| \\ &\leq (\Delta t)^2 \|v(0)\|^2 + 2\Delta t \|v(0)\| B_0. \end{aligned}$$

Mit (5.6) folgt nun

$$\begin{aligned} z_* F(z_*) &\leq \bar{\nu} \left(\|x(T)\|^2 - \|x(T-1)\|^2 \right) \\ &\leq \bar{\nu} \left((\Delta t)^2 \|v(0)\|^2 + 2\Delta t \|v(0)\| B_0 \right), \end{aligned}$$

was sich schreiben lässt als

$$\begin{aligned} z_* F(z_*) &= \left(\frac{1}{a\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] - b \right] \\ &= \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} - \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right] - \left(\frac{1}{\gamma a} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} b \\ &\leq \bar{\nu} \left((\Delta t)^2 \|v(0)\|^2 + 2\Delta t \|v(0)\| B_0 \right) \\ &= \bar{\nu} \left((\Delta t)^2 \|v(0)\|^2 + 2\Delta t \|v(0)\| \left((\gamma a)^{-\frac{2}{\gamma-1}} - \sigma^2 \right)^{1/2} \bar{\nu}^{-1/2} \right), \end{aligned}$$

und dies widerspricht unserer Annahme im Theorem.

Wir schlussfolgern somit für alle $t \in \mathbb{N}$, $z(t) \leq z_l$ und somit $\|x(t)\| \leq B_0$. Von hier an gehen wir analog zum Fall i) vor.

Fall 2: Nun kommen wir zu dem Fall, dass für alle $t \in \mathbb{N}$, $\mu(t) = 2 - \mathcal{L} < \phi_t$. Dann gilt $1 < \mathcal{L} < 2$, da $0 < \mu(t) < 1$. Somit folgt für alle $t \in \mathbb{N}$ mit Korollar 5.5

$$\|v(t)\| \leq \|v(0)\| \prod_{i=0}^{t-1} (1 - \mu(i)) = \|v(0)\| (\mathcal{L} - 1)^t \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

und mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \sum_{j=0}^{t-1} \underbrace{(\mathcal{L} - 1)^j}_{\in (0,1)} \\ &\leq \|x(0)\| + \Delta t \|v(0)\| \frac{1}{2 - \mathcal{L}} =: B_0. \end{aligned}$$

Zuletzt ist für $T > t$ (mit den selben Umformungen wie zuvor im Fall i) und mit (5.3))

$$\begin{aligned} \|x(T) - x(t)\| &\leq \Delta t \sum_{j=0}^{T-1-t} (\mathcal{L} - 1)^j \\ &\leq \Delta t \frac{1}{2 - \mathcal{L}} \underbrace{\|v(t)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}, \end{aligned}$$

was wieder gegen 0 konvergiert und somit ist $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge und es existiert ein \hat{x} , sodass $x(t) \rightarrow \hat{x}$. \square

5.3 Diskussion über Notwendigkeit der Annahme

Wir beenden dieses Kapitel mit einer kurzen Diskussion über unsere Annahme $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$, welche wir aufgestellt haben, um sicher zu stellen, dass $\|L_x\| < 2$ für alle $x \in X$ gilt. Wir bemerken auch, dass wir diese Annahme in dem Modell für stetige Zeit nicht gebraucht haben. Anhand des folgenden Beispiels wollen wir kurz erläutern, weshalb diese Annahme für diskrete Zeit notwendig ist.

Beispiel 5.7. Für $\beta > 0$ sei $K > \sigma^{2\beta}$ beliebig und sei

$$\kappa = \frac{K^{1/\beta} - \sigma^2}{2} > 0,$$

sodass $K/(\sigma^2 + 2\kappa)^\beta = 1$. Für $\beta = 0$ ist $K = \sigma^{2\beta} = 1$ und $\kappa > 0$ beliebig. Sei weiterhin $\Delta t = 1$.

Nun betrachten wir den Fall, dass zwei Vögel auf einer Linie fliegen, demnach ist $k = 2$,

und wir betrachten die Positionen und Geschwindigkeiten in \mathbb{R} , anstelle von \mathbb{E}^3 . Sei $x(0) = (-\kappa, \kappa)$ und $v(0) = (2\kappa, -2\kappa)$. Dann erhalten wir

$$A_{x(0)} = \begin{pmatrix} \frac{K}{\sigma^{2\beta}} & 1 \\ 1 & \frac{K}{\sigma^{2\beta}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_{x(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $L_{x(0)}$ die Eigenwerte 0 und 2 hat, und somit ist $\|L_{x(0)}\| = 2$. Außerdem gilt mit (2.5)

$$x(1) = x(0) + v(0) = \begin{pmatrix} -\kappa \\ \kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\kappa \\ -2\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ -\kappa \end{pmatrix}$$

und

$$v(1) = (Id - L_{x(0)})v(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\kappa \\ -2\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\kappa \\ 2\kappa \end{pmatrix}.$$

Dann sehen wir, dass für alle $r \in \mathbb{N}$, $\|L_{x(r)}\| = 2$, $x(2r) = (-\kappa, \kappa)$ und $v(2r) = (2\kappa, -2\kappa)$, wobei $x(2r+1) = (\kappa, -\kappa)$ und $v(2r+1) = (-2\kappa, 2\kappa)$. Somit bleibt $\|v(r)\| = \sqrt{\langle v(r), v(r) \rangle} = \sqrt{8\kappa^2}$ konstant für alle $r \in \mathbb{N}$ und konvergiert nicht gegen 0. Somit erkennen wir, dass die Annahme $K < (\sigma^{2\beta}/(k-1)\sqrt{k})$ in dem Modell für diskrete Zeit notwendig ist.

6 Ausblick und weitere Anwendungen

Das Cucker-Smale Modell dient als Grundlage für einige interessante Anwendungen. In diesem Kapitel werden zwei dieser Anwendungen und ein modifiziertes Modell vorgestellt.

6.1 Evolution von Sprachen

Cucker und Smale haben selbst eine Anwendung zur Evolution von Sprachen gefunden. Dazu betrachten wir eine Bevölkerung, welche verschiedene Sprachen spricht, mit $k \in \mathbb{N}$ Agenten. Dabei können wir davon ausgehen, dass ein Agent einem Menschen entspricht. Zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist der Zustand der Bevölkerung gegeben durch $(x(t), f(t)) \in (\mathbb{E}^3)^k \times \mathcal{H}^k$, wobei der Raum \mathbb{E}^3 die Positionen und \mathcal{H} den Raum der verschiedenen Sprachen beschreibt. Anders als zuvor sind x und f nicht Elemente aus dem gleichen Raum. Die Evolution der Bevölkerung können wir durch folgende Differentialgleichungen beschreiben

$$\begin{aligned} x' &= -L_f x \\ f' &= -L_x f, \end{aligned}$$

wobei L_x wieder die Laplace Matrix von $A_x = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ bezeichnet, mit gegebenen $a_{ij} = \eta_X(\|x_i - x_j\|^2)$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ und einer Funktion $\eta_X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Das selbe gilt für L_f und eine Funktion $\eta_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Die erste Gleichung kann folgendermaßen beschrieben werden: Agenten bewegen sich eher in Richtung von anderen Agenten, welche eine sehr ähnliche Sprache sprechen, wodurch besser kommuniziert werden kann. Die zweite Gleichung gibt an, dass sich die Sprache eines Agenten an die Sprachen anderer Agenten anpasst. Dieser Einfluss wird mit zunehmenden Abständen beziehungsweise Distanzen schwächer, da Sprachen welche an ganz unterschiedlichen Standorten gesprochen werden nicht oft aufeinander treffen, und somit passen sich diese schwächer an. [1]

Satz 6.1. [1] *Seien $\eta_X, \eta_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ monoton fallende Funktionen. Dann konvergiert der Zustand $(x, f) \in (\mathbb{E}^3)^k \times \mathcal{H}^k$ gegen einen Punkt auf der Diagonalen von $(\mathbb{E}^3 \times \mathcal{H})^k$ für $t \rightarrow \infty$.*

Beweis. [1] Im Beweis werden die selben Notationen wie zuvor in Kapitel 3 verwendet. Wir schreiben $\Lambda(x) = \langle x, x \rangle_Q$ und $\Lambda(f) = \langle f, f \rangle_Q$ und ϕ_x, ϕ_f bezeichnen die Fiedler Zahlen von L_x und L_f . Mit den selben Umformungen wie im Beweis von Proposition 3.1 erhalten wir für alle $t > 0$

$$\Lambda'(f(t)) \leq -2\phi_{x(t)}\Lambda(f(t))$$

und

$$\Lambda'(x(t)) \leq -2\phi_{f(t)}\Lambda(x(t)).$$

Dies wiederum zeigt, dass $\Lambda(f(t))$ und $\Lambda(x(t))$ jeweils fallende Funktionen sind, welche sich abschätzen lassen durch

$$\Lambda(f(t)) \leq \Lambda(f(0))e^{-2\int_0^t \phi_{x(\tau)} d\tau}$$

und

$$\Lambda(x(t)) \leq \Lambda(x(0))e^{-2\int_0^t \phi_{f(\tau)} d\tau}.$$

Da η und $\Lambda(x(t))$ fallende Funktionen sind, gilt mit Proposition 3.3

$$\begin{aligned} \phi_{x(\tau)} &\geq \nu\eta\left(\max_{i \neq j} \|x_i(\tau) - x_j(\tau)\|^2\right) \\ &\geq \nu\eta(\Lambda_{x(\tau)}) \\ &\geq \nu\eta(\Lambda(x(0))). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_0^t \phi_{x(\tau)} d\tau \geq t\nu\eta(\Lambda(x(0)))$$

und

$$\Lambda(f(t)) \leq \Lambda(f(0))e^{-2t\nu\eta(\Lambda(x(0)))}.$$

Dies zeigt, dass $\Lambda(f(t)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Mit der selben Begründung konvergiert $\Lambda(x(t))$ gegen 0. \square

Bemerkung 6.2. Die Konvergenz von $x(t)$ gegen ein $\hat{x} \in \Delta_X$ kann als Formation eines neuen Stammes interpretiert werden, und die Konvergenz von $f(t)$ gegen $\hat{f} \in \Delta_{\mathcal{H}}$ als die Entstehung einer gemeinsamen Sprache. [1]

6.2 Formation von Weltraumfahrzeugen

Außerdem gibt es eine weitere Anwendung im Bereich der Weltraumfahrzeuge, wie zum Beispiel Satelliten, welche sich automatisch in gewisse Formationen einfinden und diese dann auch einhalten. Diese Anwendung basiert vollständig auf den Ideen und Grundlagen des Cucker-Smale Modells in stetiger Zeit. Dazu betrachten wir $k \in \mathbb{N}$ Satelliten, welche in gewisser Formation gehalten werden sollen. Wie zuvor bezeichnen $x_i \in \mathbb{E}^3$ und $v_i \in \mathbb{E}^3$ die

Positionen und Geschwindigkeiten vom i -ten Satelliten für alle $1 \leq i \leq k$. Nun betrachten wir die leicht modifizierten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x' &= v \\v' &= -L_x v + f(x_B, v_B),\end{aligned}$$

wobei $f(x_B, v_B)$ eine Funktion über die Kraft ist und x_B und v_B die Positionen und Geschwindigkeiten des geometrischen Zentrums bezeichnen, das heißt

$$\begin{aligned}x_B &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \\v_B &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\end{aligned}$$

In dieser physikalischen Anwendung wird unter den selben Bedingungen wie im Theorem für stetige Zeit (Satz 3.5) garantiert, dass die Formation der $k \in \mathbb{N}$ Satelliten dazu neigt sich wie ein starrer Körper zu bewegen, welche den Dynamiken seines geometrischen Zentrums folgt. [8] Ein starrer Körper bedeutet, dass alle Satelliten in der Formation unabhängig von äußeren Kräften immer den gleichen Abstand zueinander besitzen. Das heißt, dass die Satelliten die Formation halten und sich schwarmartig zusammen im Weltraum fortbewegen.

6.3 Schwarmverhalten unter Berücksichtigung des zufälligen Austauschs zwischen den Vögeln

Zuletzt wollen wir einen kleinen Ausblick geben, wobei wieder das Cucker-Smale Modell als Grundlage dient. In diesem Modell wird zusätzlich angenommen, dass die Vögel untereinander zufällig kommunizieren, beziehungsweise interagieren. So kann eine noch realistischere Situation modelliert werden.

Wir betrachten einen Schwarm aus $k \in \mathbb{N}$ Vögeln im \mathbb{R}^3 in diskreter Zeit. In diesem Schwarm stellen wir eine Hierarchie auf, sodass die Vögel mit den Nummern $1, \dots, k$ durchnummeriert werden. Dabei ist der Vogel 1 der Leader und Anführer des Schwarms und $1 \leq j \leq k$ ist in der Hierarchie höhergestellt als der Vogel $i \in \{1, \dots, k\}$ (bzw. dem Vogel $i \in \{1, \dots, k\}$ überlegen) für alle $1 \leq j < i \leq k$. Das bedeutet, je kleiner die Nummer eines Vogels, desto höher ist der Einfluss auf die ganze Gruppe. Wir definieren die Mengen $\mathcal{L}(1) = \emptyset$ und $\mathcal{L}(i) \subseteq \{1, 2, \dots, i-1\}$ ist die Menge der überlegenen Vögel oder die Menge der Führer vom Vogel $i = 2, \dots, k$. [9]

Wie zuvor gesehen, macht diese hierarchische Anordnung der Vögel insofern Sinn, dass sich beispielsweise Zugvögel in der V-Formation (Abbildung 1.1) in genau dieser Hierarchie anordnen. Der Vogel mit dem stärksten Flügelschlag fliegt an vorderster Stelle und führt den Schwarm.

Jeder Vogel passt seine Geschwindigkeit nach jedem Zeitschritt gemäß seiner eigenen Geschwindigkeit und einer Linearkombination von zufälligen nicht negativen Koeffizienten der

relativen Geschwindigkeit aller ihm überlegenen Vögel an. Wir bezeichnen mit $h > 0$ einen Zeitschritt, mit $x(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$ und $v(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t))$ die Positionen und Geschwindigkeiten des Schwarms zum Zeitpunkt th ($t = 0, 1, \dots$), wobei $x_i(t)$ und $v_i(t)$ die Position und Geschwindigkeit des Vogels $1 \leq i \leq k$ angeben. Die Positionen und Geschwindigkeiten für alle Vögel $1 \leq i \leq k$ lassen sich bestimmen durch

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + hv_i(t) \\ v_i(t+1) &= v_i(t) + h \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} a_{ij}(v_j(t) - v_i(t)), \end{aligned} \quad (6.1)$$

wobei a_{ij} die Stärke des Austauschs beziehungsweise der Interaktion zwischen den Vögeln i und j für alle $1 \leq i, j \leq k$ angibt. Da dieser Austausch auf vielen Faktoren basiert, nehmen wir an, dass a_{ij} für alle $1 \leq i, j \leq k$ Zufallsvariablen auf einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsraum sind. Aus (6.1) folgt, dass $v_1(t) = v_1(0)$ für alle $t \in \mathbb{N}$, da $\mathcal{L}(1) = \emptyset$ und somit $v_1(t+1) = v_1(t)$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Der führende Vogel fliegt demnach mit konstanter Geschwindigkeit. [9]

Nun sehen wir, dass in diesem Modell die Anpassung der Flugrichtungen und Geschwindigkeiten im Gegensatz zum Cucker-Smale Modell leicht modifiziert wurde.

Das Hauptresultat dieses Modells ist, dass Schwarmbildung garantiert wird, das heißt für alle $1 \leq i, j \leq k$

$$v_i(t) \rightarrow v_0(t) \quad \text{und} \quad x_i(t) - x_1(t) \rightarrow \hat{x}_i$$

für $t \rightarrow \infty$ und $\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^3$. [9]

7 Diskussion

Zunächst sei erwähnt, dass das Cucker-Smale Modell auf den Grundlagen des Vicsek Modells basiert. Daher wollen wir kurz die Unterschiede zwischen beiden Modellen vorstellen. Wieder betrachten wir einen Schwarm aus $k \in \mathbb{N}$ Vögeln. Vicsek geht davon aus, dass der Vogel $1 \leq i \leq k$ eine konstante Geschwindigkeit besitzt, und nur seine Flugrichtung durchschnittlich zu den benachbarten Vögeln anpasst. Im Cucker-Smale Modell hingegen, passen die Vögel die Geschwindigkeit an, indem sie einen gewichteten Durchschnitt (welcher von den Abständen der Vögel zueinander abhängig ist) der Geschwindigkeiten der anderen Vögel hinzufügen. Der Vogel $i \in \{1, \dots, k\}$ passt in Vicsek's Modell die Richtung, in welche er fliegt zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ folgendermaßen an

$$\theta_i(t+1) = \frac{1}{n_i(t)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \theta_j(t), \quad (7.1)$$

wobei $\mathcal{N}_i(t) = \{j \leq k : \|x_i(t) - x_j(t)\| \leq r\}$ und $n_i(t) = \#\mathcal{N}_i(t)$ (die Mächtigkeit von $\mathcal{N}_i(t)$) für alle $1 \leq i, j \leq k$ und ein $r > 0$. Das heißt, dass der Vogel $i \in \{1, \dots, k\}$ seine Flugrichtung durchschnittlich zu den Flugrichtungen derjenigen Vögel mit einem maximalen Abstand von $r > 0$ anpasst. Betrachtet man die Matrix $A_x = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, mit $a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2)$ für alle $1 \leq i, j \leq k$, wobei

$$\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \leq r^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.2)$$

so kann das System (7.1) geschrieben werden als

$$\theta(t+1) = (Id - D_x^{-1} L_x) \theta(t),$$

wobei $D_x = \text{diag}(d_1, \dots, d_k)$ mit $d_i = \sum_{j \leq k} a_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq k$. [1] Nun wird ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Modellen deutlich. Im Gegensatz zum abrupten Verlauf in (7.2) ist die Funktion im Cucker-Smale Modell (2.3) stetig fallend mit zunehmenden Abständen zwischen den Vögeln.

Letztendlich wird in Vicsek's Modell gezeigt, dass alle Vögel dieselbe Flugrichtung annehmen werden.

Somit sind die Grundannahmen über die Anpassung der Geschwindigkeiten oder Flugrichtungen in den Modellen essentiell. Flocking ist ein noch nicht vollständig erforschtes Themengebiet, daher werden immer wieder neue Studien publiziert. 1986 hat Craig Reynold

eine Computersimulation veröffentlicht, welche das Schwarmverhalten von Vögeln simuliert. Dabei bewegen sich die sogenannten „Boids“ (entspricht einem simulierten Vogel) nach drei Regeln: Versuche nicht mit deinen Nachbarn zu kollidieren, versuche mit derselben Geschwindigkeit in dieselbe Richtung zu fliegen wie deine benachbarten Boids und zuletzt versuche nah und eng an den benachbarten Boids zu bleiben.[10] Die US-Air Force beispielsweise nutzt für ihr Drohnensystem einen Algorithmus, welcher auf dem Modell von Craig Reynold basiert. [11]

Aktuell gibt es ein Projekt, STARFLAG, welches das Flugverhalten von einzelnen Vögeln im Schwarm analysiert. Dazu wurden neue stereoskopische Programme verwendet, welche es möglich gemacht haben die Positionen und Geschwindigkeiten von einzelnen Vögeln in großen Schwärmen herauszufiltern. Dabei stellte sich heraus, dass die aufgestellten Regeln von Reynold in der Natur auch so auftreten. Im Laufe des Projekts wurde herausgefunden, dass ein Vogel mit einer fixen Zahl an benachbarten Vögeln interagiert. Diese Zahl beläuft sich auf 6 oder 7 Vögel. Das heißt, dass jeder Vogel seine Geschwindigkeit und Flugrichtung in Abhängigkeit von seinen 6 oder 7 am engsten benachbarten Vögel anpasst. Außerdem bleiben alle Abstände auf maximal 1.5 Flügelspannen zum nächsten Nachbarn beschränkt. [10]

Überträgt man nun dieses Wissen auf das Cucker-Smale Modell oder auf Vicseck's Modell (z.B. mit $n_i(t) = \#\mathcal{N}_i(t) = 6$), indem man die Grundannahmen über die Anpassung der Geschwindigkeiten und Flugrichtungen modifiziert, könnte man das Verhalten von Vögeln in Schwärmen wohl etwas besser modellieren. Das vorgestellte Modell in Kapitel 6.3 berücksichtigt bereits einige aktuelle Forschungsergebnisse, und ist somit etwas genauer modelliert als das Cucker-Smale Modell.

In einem Versuch wurden in einem Schwarm 5% aller Fische von Roboterfischen ersetzt. Dabei wurde beobachtet, dass der ganze Schwarm den Richtungen der Roboterfischen folgt, selbst wenn diese sich feindlichen Fischen annäherten.[12] Somit folgt, dass in Schwärmen wohl gewisse Hierarchien existieren, wobei es anführende Fische und stets in die selbe Richtung folgende Fische gibt. Also tritt das Modell aus Kapitel 6.3 tatsächlich so in der Natur auf.

Nichtsdestotrotz war das Modell, welches von Cucker und Smale bereitgestellt wurde, bereits bahnbrechend und Grundlage aller weiteren Modelle im Gebiet der Schwarmtheorie.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Cucker and S. Smale. Emergent behavior in flocks. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(5):852–862, May 2007.
- [2] Thomas Trösch. Warum fliegen vögel gern in v-formation. Handelsblatt, 2014. <https://www.handelsblatt.com/technik/forschung-innovation/schneller-schlau/schneller-schlau-warum-fliegen-voegel-gern-in-v-formation/9342894.html?ticket=ST-34755316-4Usa4vTa22gLIPFb0dXq-ap3> abgerufen am 13. Jan. 2020.
- [3] Susanne Decker. Keilformation. ARD Planet Wissen, 2019. <https://www.planet-wissen.de/natur/voegel/zugvoegel/pwiekeilformation100.html> abgerufen am 13. Jan. 2020.
- [4] Lauren Young. Watch a massive swirling tornado of tuna, 2017. <https://www.atlasobscura.com/articles/watch-a-massive-swirling-tornado-of-tuna> abgerufen am 13. Jan. 2020.
- [5] Patrick W. Colgan Mark V. Abrahams. Risk of predation, hydrodynamic efficiency and their influence on school structure. Springer Verlag, 1985.
- [6] Wikipedia. Schwarmfisch, vorteile der schwarmbildung. https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarmfisch#Vorteile_der_Schwarmbildung abgerufen am 13. Jan. 2020.
- [7] Lucas Marco Gisi Eva Horn. Schwärme - Kollektive ohne Zentrum, Eine Wissensgeschichte zwischen Leben und Information. Transcript, 2009.
- [8] Laura Perea, Gerard Gómez, and Pedro Elosegui. Extension of the cucker-smale control law to space flight formations. JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS, 32(526-536), 2009.
- [9] Federico Dalmao and Ernsto Mordecki. Cucker-smale flocking under hierarchical leadership and random interactions. Siam J. Appl. Math., 71(4):1307–1316, 2011.
- [10] Brian Hayes. Flights of fancy. <https://www.americanscientist.org/article/flights-of-fancy> abgerufen am 13. Jan. 2020.
- [11] Wikipedia. Schwarmverhalten. <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarmverhalten> abgerufen am 13. Jan. 2020.

- [12] Alexandra Stober. Schwarmintelligenz: Von den fischen lernen. ARD Planet Wissen, 2019. https://www.planet-wissen.de/technik/verkehr/logistik_waren_unterwegs/pwieschwarmintelligenzvondenfischenlernen100.html abgerufen am 13. Jan. 2020.

8 Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfasst habe. Alle Passagen die ich wörtlich oder sinngemäß aus der Literatur oder aus anderen Quellen, wie z.B. Internetseiten übernommen habe, habe ich deutlich als Zitat mit Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Darüber hinaus versichere ich, dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist.

Ort, Datum

Unterschrift