

Modélisation du refroidissement de l'eau des calanques par le mistral

Jean-Mallory Rousseau et Robin Schucker

Janvier 2013



Résumé

Nous avons réalisé ce projet dans le cadre du Modal de mécanique sur le thème : écoulements géophysiques. Nous cherchons à modéliser le refroidissement de la mer par le vent, soit les phénomènes thermiques mis en jeu lors de l'interaction de la couche supérieure d'un milieu stratifié avec un écoulement d'air. Vous trouverez rassemblées ici nos études théoriques et nos nombreuses expériences à échelle réduite permettant de modéliser ces phénomènes à partir de notions de mécanique des fluides et de thermodynamique.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Description de l'expérience référence	4
2.1	Préparation de l'expérience	4
2.2	Résultats de l'expérience référence	6
3	Influence des différents facteurs	10
3.1	Suppression du gradient de température (expériences 3 et 8)	10
3.2	Remplacement du gradient de température par le gradient de salinité équivalent (expériences 4 et 10)	11
3.3	Suppression du gradient de salinité (expérience 6)	13
3.4	Augmentation de la vitesse de l'air (expérience 7)	14
3.5	Augmentation de la longueur de la cuve (expérience 9)	14
3.6	Premières interprétations	17
4	Etude théorique	18
4.1	Modèle par forçage mécanique	18
4.1.1	Etude théorique	18
4.1.2	Simulation et application numériques adaptées à notre modèle	20
4.2	Modèle par refroidissement de la surface	21
4.2.1	Etude théorique	21
4.2.2	Simulation et application numériques adaptées à notre modèle	23
5	Bilan	25
5.1	Analyse de l'expérience référence	25
5.2	Analyse de la suppression du gradient de température (expériences 3 et 8)	27
5.3	Analyse du remplacement du gradient de température par le gradient de salinité équivalent (expériences 4 et 10)	28
5.4	Analyse de la suppression du gradient de salinité (expérience 6)	29
5.5	Analyse de l'augmentation de la longueur de la cuve (expérience 9)	30
5.6	Synthèse et améliorations	30
6	Application du modèle à notre problème marin	32
6.1	Le nombre de Richardson	32
6.1.1	Calcul dans le cas de notre expérience	32
6.1.2	Calcul dans le cas réel[2][5]	32
6.1.3	Interprétations	32
6.2	Le nombre de Reynolds	33
6.2.1	Calcul dans le cas de notre expérience référence	33
6.2.2	Calcul dans le cas réel[5]	33
6.2.3	Interprétations	33
7	Conclusion	35

1 Introduction

Tous deux marseillais d'origine, nous n'avons pas manqué de remarquer que même par les étés les plus chauds, la levée du mistral annonce une baisse presque immédiate et significative de la température de l'eau (Par exemple un passage de 21°C à 15°C suite à un mistral de 30knts pendant 24h) . Nous avons donc profité des moyens et de l'encadrement mis à notre disposition pendant ce Modal pour essayer de comprendre comment ce refroidissement s'opère.

Nous avons assez rapidement observé qu'au cours de ce phénomène, une couche mélangée, hôte de cellules de convection, se forme à partir de la surface et grandit jusqu'à atteindre une valeur limite. Deux modélisations nous semblaient pertinentes pour expliquer son expansion à savoir un forçage mécanique directement opéré par le vent (la cellule de convection provoque le refroidissement) ou plutôt le refroidissement d'une fine couche supérieure d'eau qui va se densifier et donc plonger sous la couche inférieure (le refroidissement provoque la cellule de convection). Nous avons donc cherché à savoir laquelle était dominante.

La démarche que nous avons adoptée pour répondre à notre problématique est la suivante : nous avons commencé par réaliser une expérience que nous avons prise pour référence. Ensuite, nous avons fait varier les différents paramètres de notre problème un à un, pour essayer de dégager les facteurs dominants. Nous avons alors posé nos deux modèles théoriques pour prévoir les effets de l'un et de l'autre. Nous avons comparé ces résultats avec ceux de nos expériences. Enfin, nous avons essayé de juger dans quelle mesure nous pouvions appliquer notre modèle à la réalité.

2 Description de l'expérience référence

2.1 Préparation de l'expérience

Pour réaliser notre expérience référence, nous utilisons une cuve transparente de dimension $0,2 \times 0,2 \times 0,3$ m. Celle-ci est surélevée de quelques centimètres en ses quatre sommets inférieurs (pour éviter le chauffage du fond de la cuve par la lampe) (cf. Figure 1). Derrière la cuve, se trouve un fond noir pour améliorer le contraste des acquisitions.

La température extérieure est de $21,5^\circ\text{C}$, alors que nous remplissons notre cuve avec de l'eau à 18°C stratifiée en salinité (donnant avant chauffage $\rho_0 = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ au fond de la cuve et $\rho_H = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ à la surface).

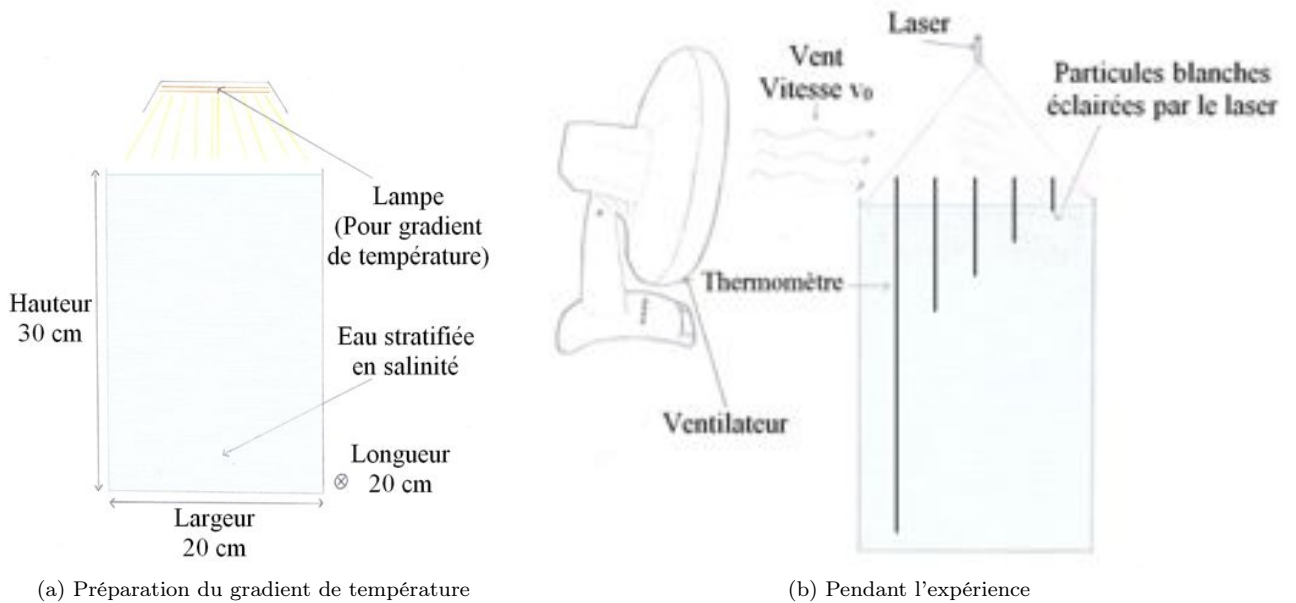


FIGURE 1: Schéma descriptif de l'expérience de référence

Nous créons également un gradient de température en chauffant avec une lampe de puissance 500 W située à 20 cm au-dessus de la cuve pendant une heure.

Au lancement de l'expérience, nous coupons le chauffage et nous plaçons un ventilateur 15 cm sur la gauche de la cuve à hauteur de la surface. Un champ de vitesse horizontale d'air est créé. Il est à peu près uniforme sur la surface, de norme $v_0 = 3 \pm 0,1 \text{ m.s}^{-1}$.

De fines particules d'orgasol (diamètre $50 \mu\text{m}$, densité 1023 kg.m^{-3}) blanches, préalablement mélangées avec de l'eau et du savon sont placées en surface et en deviennent solidaires. Eclairées par un laser

haute puissance, elles ressortent fortement sur les vidéos (cf. Figure 2 et 3) ce qui nous permet de suivre l'évolution au cours du temps d'une couche mélangée dont nous supposons pour le moment l'existence.



FIGURE 2: Moyenne sur une minute d'une acquisition vidéo (*Z project image stacking* avec ImageJ)



FIGURE 3: Photo du dispositif expérimental

Concernant le suivi de l'expérience, nous réalisons des vidéos de 60 s toutes les 120 s à une fréquence de 3 images par seconde. Nous utilisons alors Image J pour superposer les maxima en luminosité de nos 180 images (Z project image stacking). Nous pouvons ainsi facilement estimer la taille en pixels de notre couche mélangée, puis un simple produit en croix nous la donne en centimètres. Pour la première vidéo, nous faisons trois fois le stacking à chaque fois sur 20 secondes pour avoir une idée de la tangente à l'origine.

Enfin, le suivi de température est assuré d'une part par quatre thermomètres situés à 0, 3, 6 et 9 cm de profondeur dont les données sont enregistrées en temps réel sur l'ordinateur (ce suivi était fait manuellement lors des premières expériences). D'autre part, un thermomètre simple est placé au fond de la cuve pour vérifier que la température n'y varie pas ou peu (ce qu'on verra n'est pas le cas).

2.2 Résultats de l'expérience référence

Caractéristiques des expériences 2 et 11 :

- Gradient de température : de $27,5^{\circ}\text{C}$ en surface à $17,5^{\circ}\text{C}$ à 10 cm de profondeur puis constant sur toute la profondeur

- Gradient de salinité : donnant avant chauffage de $\rho_0 = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ au fond à $\rho_H = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ en surface
- Vitesse de l'air : 3 m.s^{-1}
- Longueur de la cuve : standard 20 cm

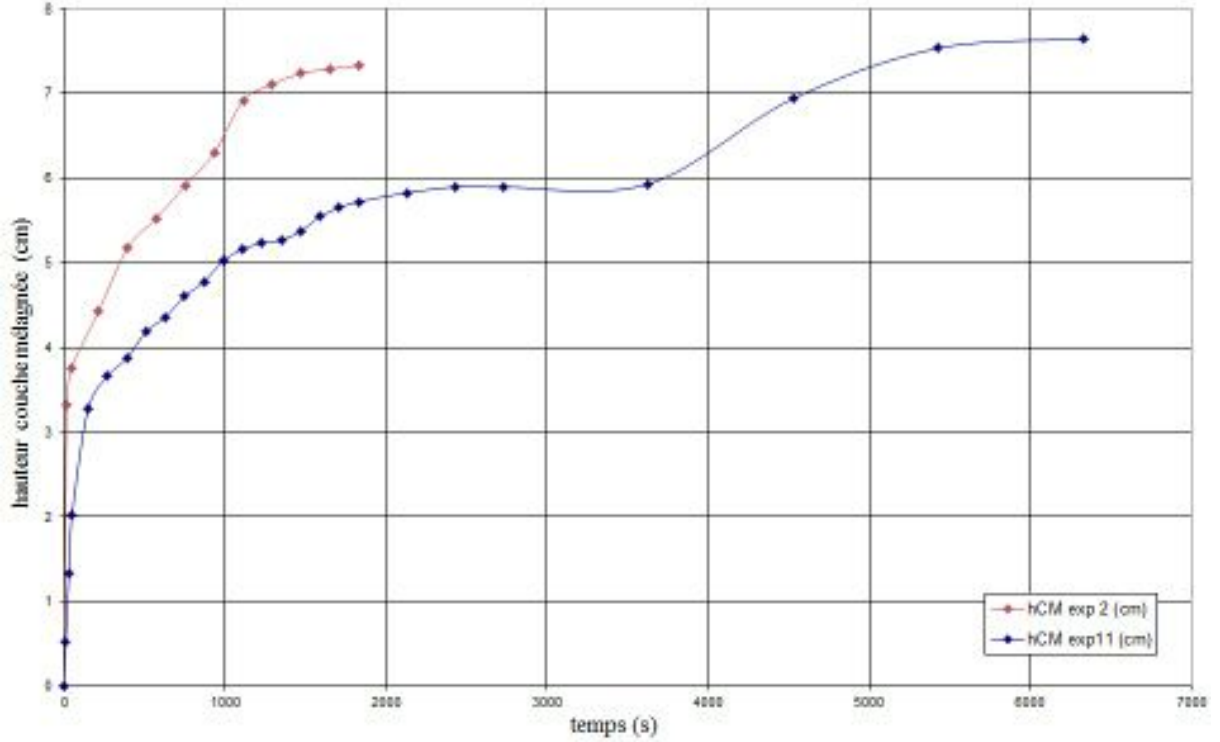


FIGURE 4: Evolution de la hauteur de la couche mélangée $z_{lim}(t)$ pour les expériences 2 et 11

Nous avons réalisé notre expérience référence à deux reprises, une fois en début de MODAL (expérience 2) et une autre fois lors de la dernière séance, après avoir écrit nos équations théoriques (expérience 11). Celle-ci dure beaucoup plus longtemps et les relevés de température y sont automatiques donc beaucoup plus précis.

La première courbe (cf. Figure 4) donne les profils de hauteur de la couche mélangée (là où il y a des particules) au cours du temps. Notre première observation est que les deux expériences ont le même profil mais avec une amplitude différente. Les seules conditions différentes entre ces deux expériences sont les températures de l'extérieur et de l'eau avant l'expérience. On peut donc rationnellement penser que ces facteurs jouent un rôle important.

Notre seconde observation est qu'après approximativement 2000 secondes, la couche mélangée semble atteindre une taille limite. Le redémarrage du grandissement de l'expérience 11 entre 3500 et 4500

secondes reste encore un petit peu flou. Mais on voit qu'après ce qui semble avoir été un choc, la couche mélangée tend de nouveau vers une valeur limite.

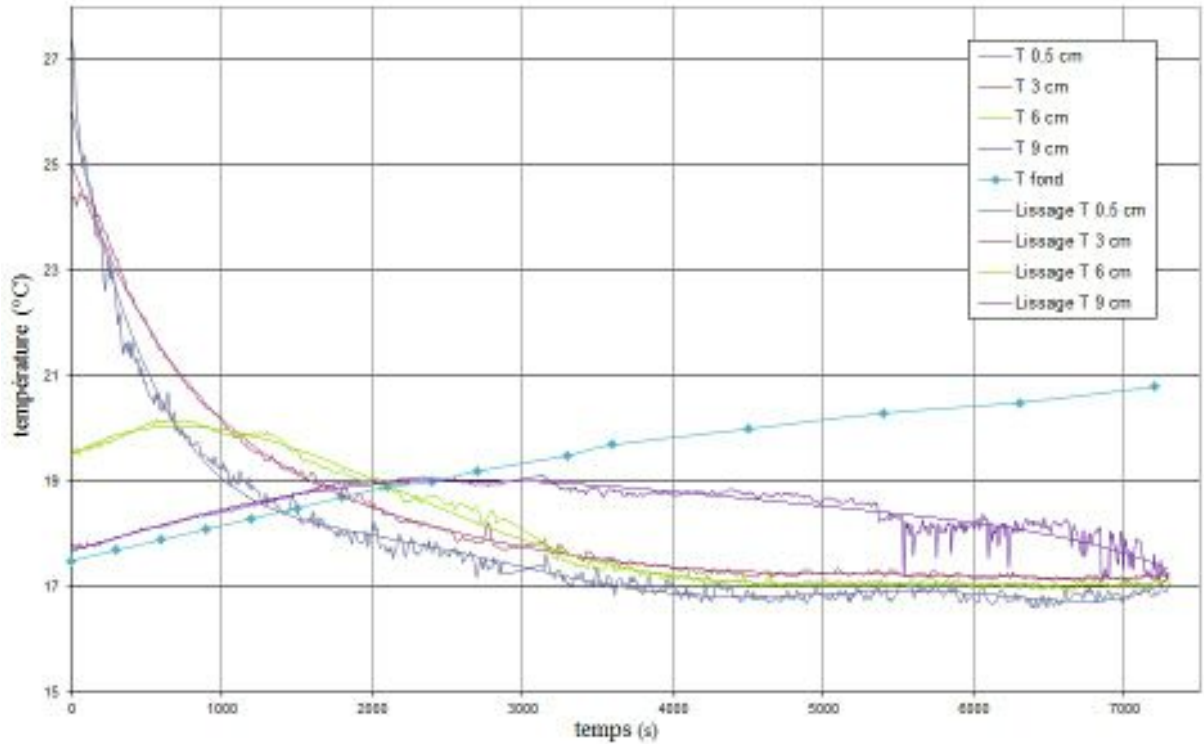


FIGURE 5: Evolution des températures pour l'expérience 11

Notre troisième observation est que la vitesse de grandissement de la couche mélangée présente une tangente verticale à l'origine puis décroît très vite.

La seconde courbe (cf. Figure 5) donne le profil de température dans la cuve au cours du temps pour l'expérience 11. Nous avons lissé les courbes car les thermomètres nous donnent des signaux qui oscillent beaucoup. Notre première observation est que la température de surface ($T_{0,5\text{ cm}}$) coupe les courbes de température $T_{3\text{ cm}}$, $T_{6\text{ cm}}$ et $T_{9\text{ cm}}$ à chaque fois avant que la couche mélangée n'atteigne ces hauteurs.

Notre seconde observation est qu'une fois que la couche mélangée a atteint les valeurs successives 3 cm, 6 cm puis 9 cm, la température à la surface et la température à la hauteur correspondante sont assez proches. On peut donc raisonnablement penser que la température est à peu près homogène dans la couche mélangée.

Notre troisième observation est que la température du fond de la cuve augmente de façon non négligeable au cours de l'expérience, très vraisemblablement à cause des effets de conduction thermique par les parois (par la loi de Newton). Ceci montre bien que ces effets ne sont pas non plus négligeables. D'autant plus que le parallélisme avec $T_{3\text{ cm}}$ et $T_{6\text{ cm}}$ avant que ceux-ci ne soient coupés par $T_{0,5\text{ cm}}$ suggère que la croissance initiale de ces températures est due aux mêmes effets.

3 Influence des différents facteurs

Avant de commencer nos expériences, nous avons supposé l'existence d'une couche mélangée qui allait grandir dans notre cuve. Les résultats de notre expérience référence ont confirmé l'existence de cette couche. En effet, les acquisitions vidéo montrent très clairement (avec les fines particules qui sont solidaires de la couche initiale en surface) qu'il y a un mélange. Par ailleurs, l'étude de température confirme que la température y est plutôt homogène. La salinité et la masse volumique y sont homogènes aussi.

Après notre expérience référence, nous avons effectué un certain nombre d'expériences en faisant évoluer à chaque fois un seul paramètre. Le but est de déterminer quels sont les facteurs dominants pour le phénomène que l'on étudie. Pour les déterminer, nous allons donc suivre les températures, la valeur limite de la hauteur de la couche mélangée et sa vitesse d'accroissement.

3.1 Suppression du gradient de température (expériences 3 et 8)

Caractéristiques des expériences 3 et 8 :

- Gradient de température : aucun
- Gradient de salinité : donnant avant chauffage de $\rho_0 = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ au fond à $\rho_H = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ en surface
- Vitesse de l'air : 3 m.s^{-1}
- Longueur de la cuve : standard 20 cm

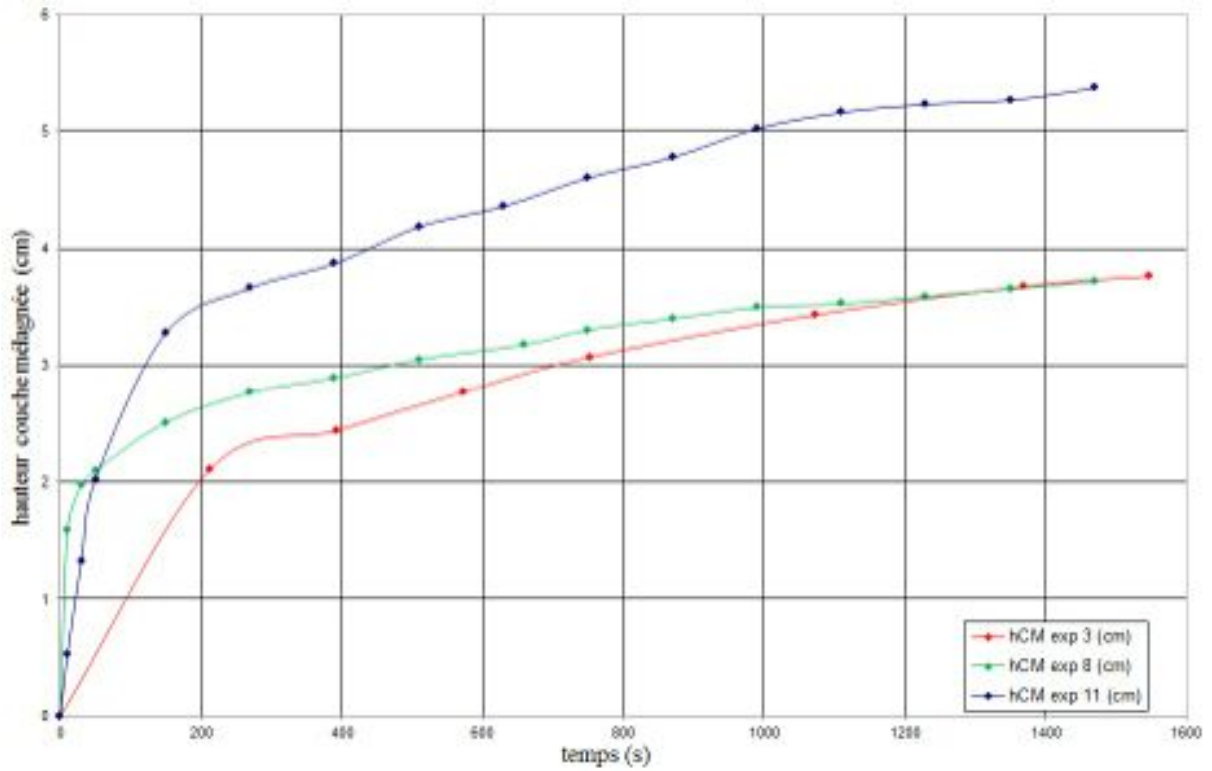


FIGURE 6: Evolution de la hauteur de la couche mélangée $z_{lim}(t)$ pour les expériences 3 et 8

On observe qu'en l'absence de gradient de température, les expériences 3 et 8 tendent toutes deux vers la même hauteur limite de couche mélangée (cf. Figure 6). De plus, celle-ci est nettement inférieure à la hauteur limite de l'expérience référence.

Pourquoi avons-nous fait deux fois cette expérience ? Parce qu'il ne nous semblait pas évident qu'alors qu'on enlevait le gradient de température (et donc que l'on diminuait le gradient de masse volumique), la couche mélangée rétrécissait. Surtout à la vue de l'expérience 4 qui suit.

3.2 Remplacement du gradient de température par le gradient de salinité équivalent (expériences 4 et 10)

Caractéristiques des expériences 4 et 10 :

- Gradient de température : aucun
- Gradient de salinité : donnant sans chauffage de $\rho_0 = 1031 \text{ kg.m}^{-3}$ au fond à $\rho_H = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ en surface
- Vitesse de l'air : 3 m.s^{-1}
- Longueur de la cuve : standard 20 cm

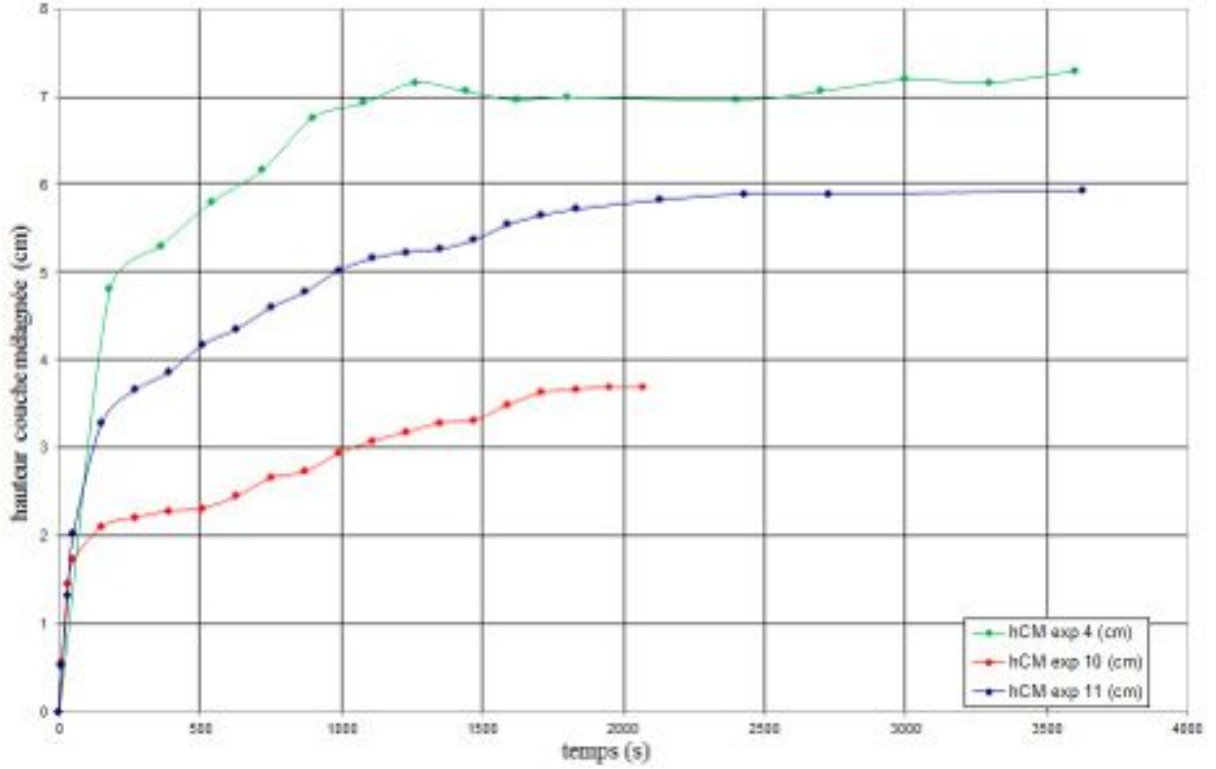


FIGURE 7: Evolution de la hauteur de la couche mélangée $z_{lim}(t)$ pour les expériences 4 et 10

Le but est de garder le même gradient de masse volumique mais sans le gradient de température. En utilisant la formule $\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta T + \beta\Delta S)$ avec $\alpha = 0,2 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ et $\beta = 0,8 \cdot 10^{-1} PSU^{-1}$, on trouve que la masse volumique de l'eau chauffée dans les expériences 2 et 11 variait de $1031 kg.m^{-3}$ au fond à $1021 kg.m^{-3}$ en surface ce que l'on établit maintenant seulement avec de la salinité.

Cette fois, les résultats sont beaucoup plus mitigés (cf. Figure 7). En effet, les expériences 4 et 10 qui sont censées avoir été réalisées dans les mêmes conditions donnent des hauteurs limites de couche mélangée qui passent du simple au double. C'est d'ailleurs pour cela que nous avons refait l'expérience 4, car ses résultats nous semblaient contre-intuitifs.

En effet, considérant les expériences précédentes (3 et 8), nous n'avons fait qu'augmenter encore le gradient de masse volumique, ce qui devrait freiner d'autant plus l'expansion de la couche mélangée par rapport au cas précédent. C'est bien ce que l'on observe avec l'expérience 10.

Pour l'expérience 4, nous n'avons à ce moment-là pas pris suffisamment de données sur notamment les températures de l'eau et de l'extérieur pour juger si nous n'étions pas tout à fait dans les mêmes conditions ou si nous avons fait une erreur dans notre manipulation. En tout état de cause nous ne nous prononçons pas sur sa fiabilité.

Néanmoins les résultats des expériences 3, 8 et 10 nous permettent déjà d'affirmer que le rôle du gradient de température est bien plus important qu'un simple rôle de stratificateur.

3.3 Suppression du gradient de salinité (expérience 6)

Caractéristiques de l'expérience 6 :

- Gradient de température : de $28,5^{\circ}\text{C}$ en surface à $18,5^{\circ}\text{C}$ à 10 cm de profondeur puis constant sur toute la profondeur
- Gradient de salinité : aucun
- Vitesse de l'air : 3 m.s^{-1}
- Longueur de la cuve : standard 20 cm

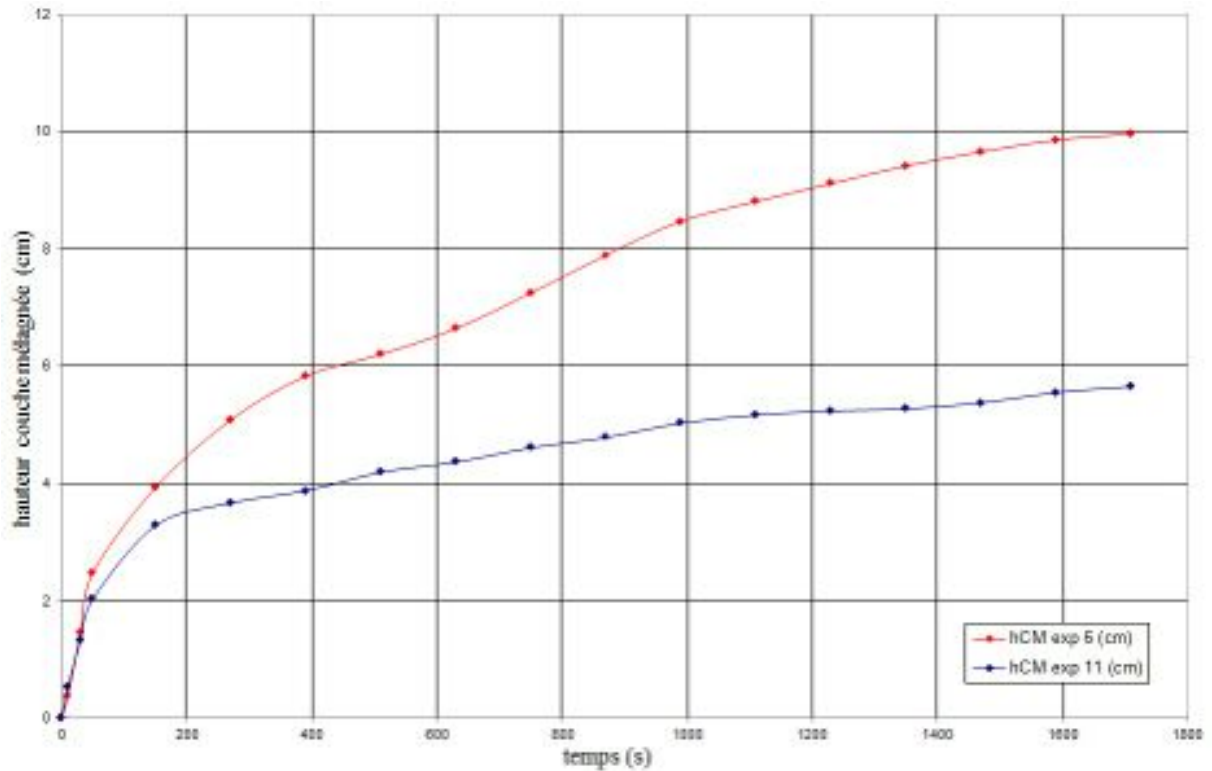


FIGURE 8: Evolution de la hauteur de la couche mélangée $z_{lim}(t)$ pour le expérience 6

On observe (cf. Figure 8) qu'en supprimant le gradient de salinité, la hauteur limite de couche mélangée est maintenant plus importante que dans notre expérience référence. Ceci est bien en accord avec nos interprétations des expériences précédentes selon lesquelles un plus fort gradient de masse volumique, lorsqu'il est induit par des changements de salinité (et non par des changements de température qui ont d'autres effets non négligeables) freine l'expansion de la couche mélangée. En effet, dans ce cas-ci le gradient de salinité est nul et la hauteur limite est plus grande.

3.4 Augmentation de la vitesse de l'air (expérience 7)

Caractéristiques de l'expérience 7 :

- Gradient de température : de $28,5^{\circ}\text{C}$ en surface à $18,5^{\circ}\text{C}$ à 10 cm de profondeur puis constant sur toute la profondeur
- Gradient de salinité : donnant avant chauffage de $\rho_0 = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ au fond à $\rho_H = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ en surface
- Vitesse de l'air : 6 m.s^{-1}
- Longueur de la cuve : standard 20 cm

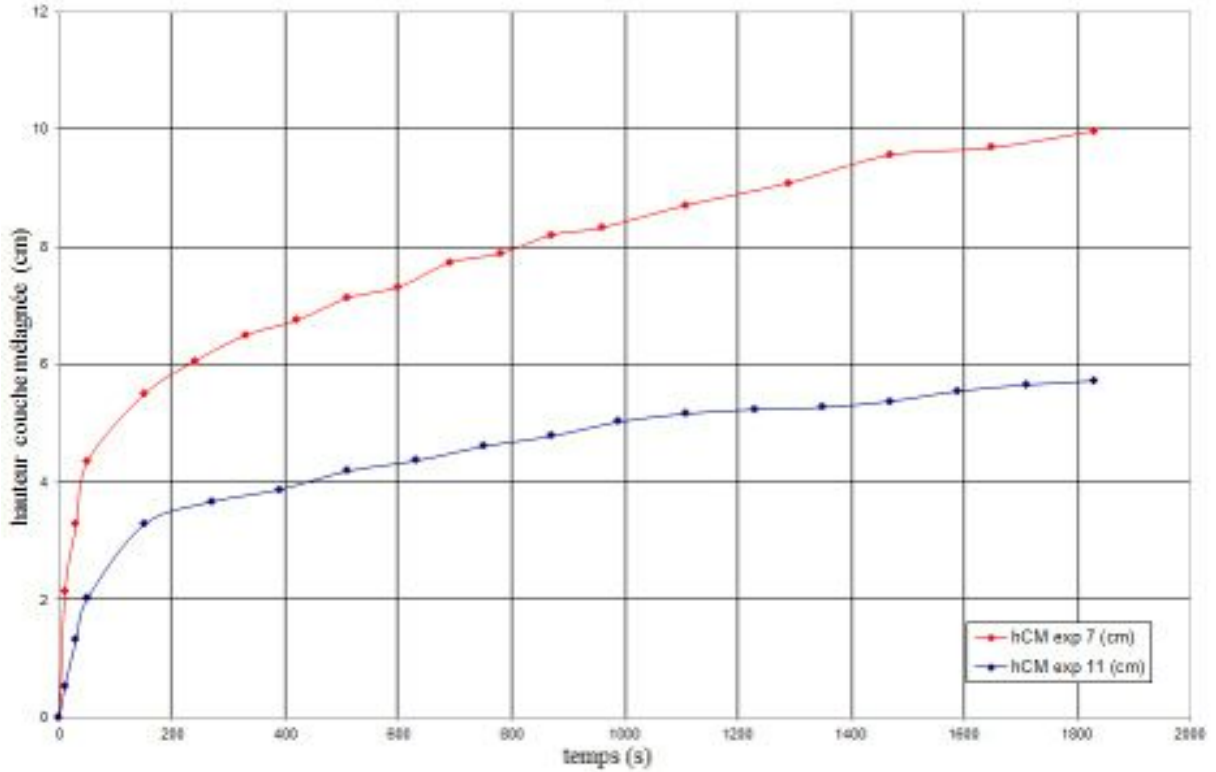


FIGURE 9: Evolution de la hauteur de la couche mélangée $z_{lim}(t)$ pour l'expérience 7

On observe ici (Figure 9) que lorsque la vitesse de l'air au-dessus de la cuve augmente, la hauteur limite de la couche mélangée est plus importante. Rien qui nous semble extraordinaire ici, sachant qu'on étudie le refroidissement de la mer par le vent, il est plutôt rassurant que le refroidissement augmente avec la force du vent.

3.5 Augmentation de la longueur de la cuve (expérience 9)

Caractéristiques de l'expérience 9 :

- Gradient de température : de $33,5^{\circ}\text{C}$ en surface à $21,5^{\circ}\text{C}$ à 10 cm de profondeur puis constant sur toute la profondeur
- Gradient de salinité : donnant avant chauffage de $\rho_0 = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ au fond à $\rho_H = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ en surface
- Vitesse de l'air : 3 m.s^{-1}
- Longueur de la cuve : 50 cm

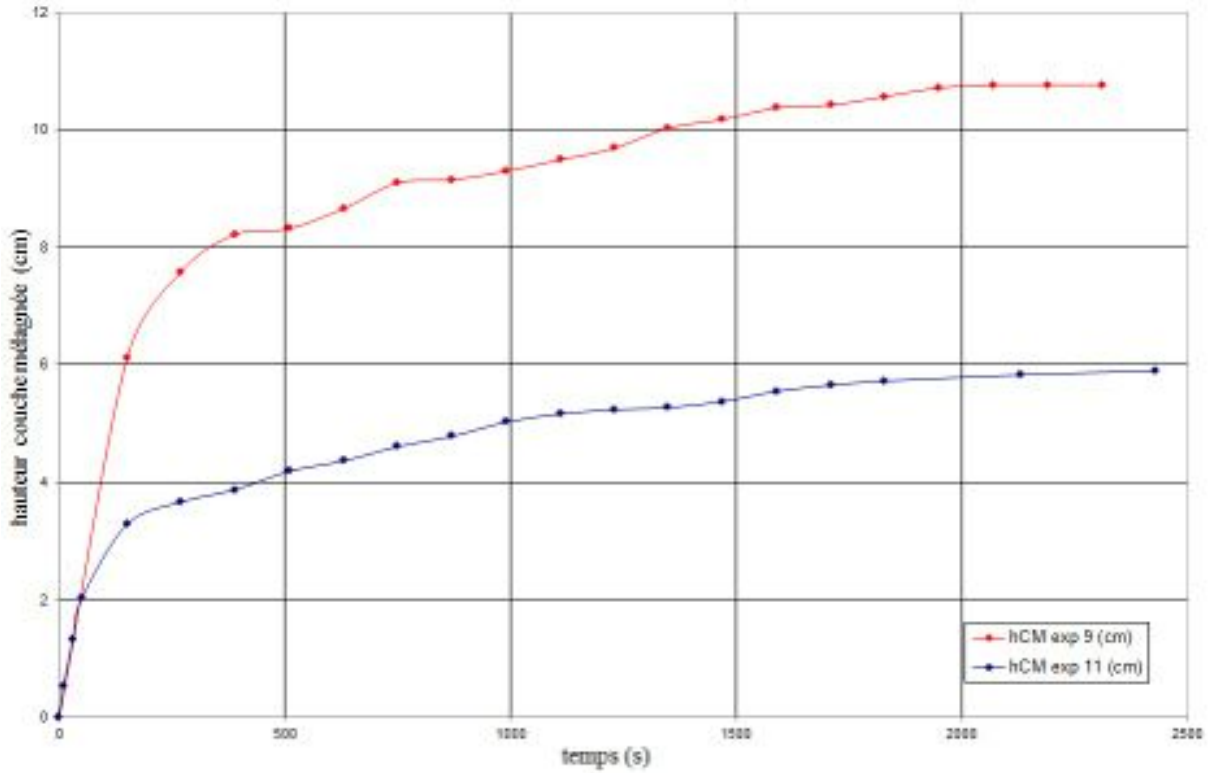


FIGURE 10: Evolution de la hauteur de la couche mélangée $z_{lim}(t)$ pour l'expérience 9

On observe (cf. Figure 10) dans cette dernière expérience que lorsque l'on allonge la cuve dans une direction, la hauteur limite de couche mélangée semble augmenter aussi. Cette fois-ci, c'est beaucoup moins intuitif voire contre-intuitif. Nous allons donc étudier un petit peu plus en détail les différents paramètres que nous avons mesurés.

On pourrait tout d'abord se dire qu'avec une longueur de cuve trop courte, la couche de fluide supérieure n'aurait peut-être pas le temps d'atteindre sa vitesse maximale et donc de plonger fortement lorsqu'elle rencontre la paroi. Néanmoins, nous avons calculé la vitesse de surface dans les deux cas et elle est identique (un petit peu plus de 2 cm.s^{-1}).

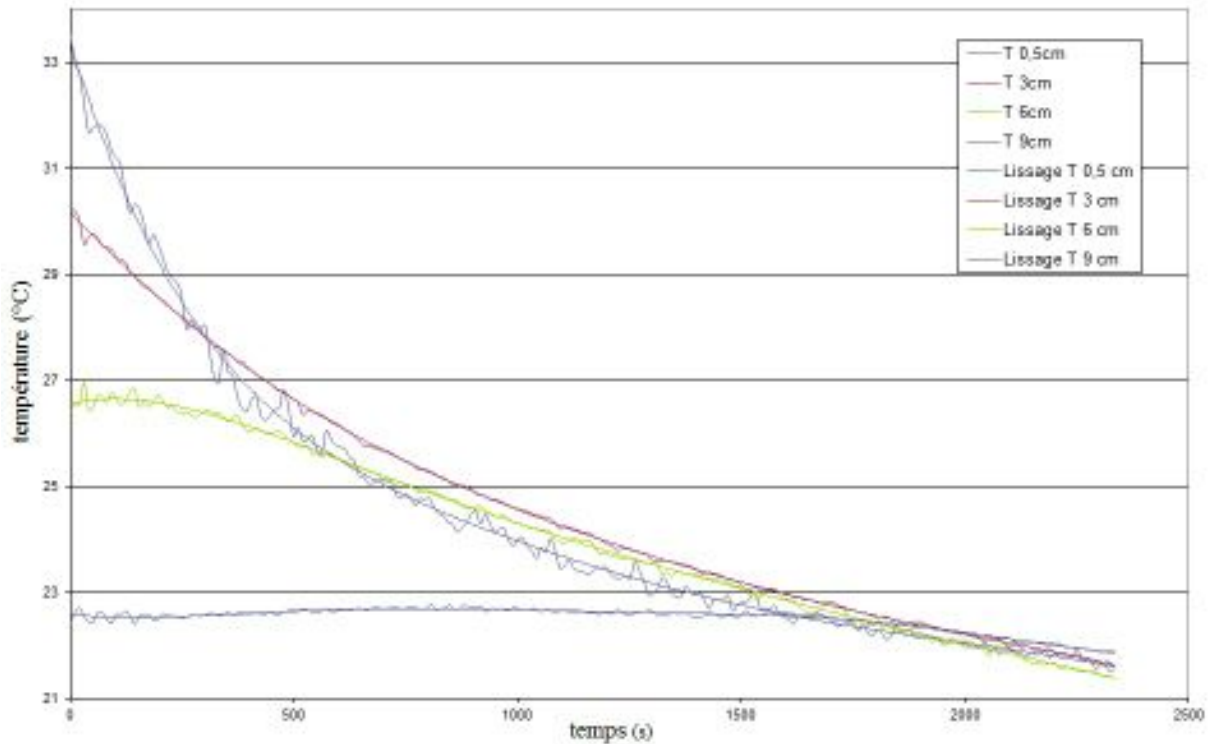


FIGURE 11: Evolution des températures pour l'expérience 9

Comme le chauffage n'a cette fois-ci pas été effectué avec les mêmes lampes, nous pouvons regarder un petit peu plus précisément les températures de la cuve.

Ce graphique nous permet d'observer (cf. Figure 11) que la température de surface initiale est de 33,5°C. En prolongeant les valeurs initiales de T 3cm, T 6cm et T 9cm, on peut également estimer la température à 10 cm à 21,5°C. Par ailleurs, on sait que la température au fond de la cuve est initialement de 20,5°C (nous l'avons mesuré avec un autre thermomètre à acquisition non automatique pendant l'expérience). On a donc approximativement le profil de gradient de température suivant : une température qui varie de 33,5°C en surface à 21,5°C à 10 cm de profondeur puis constante sur toute la profondeur.

Ainsi, déjà au niveau des températures, deux éléments importants diffèrent de notre expérience référence :

- Le gradient de température est plus fort : 12°C sur 10 cm au lieu de 10°C sur 10 cm
- La température de fond de cuve est d'environ 3°C plus importante

Sans que nous puissions en être certains, il se pourrait très bien que ces variations de température aient pu induire de telles différences de hauteur limite de couche mélangée et que ce ne soit pas lié à la longueur de la cuve. En effet, les expériences 3 et 8 nous ont déjà permis de voir qu'il semblait y avoir

une corrélation positive entre la taille de la couche limite et l'importance du gradient de température ; et nous ne connaissons pas les effets d'une augmentation globale de la température de la cuve. Il faudrait donc refaire l'expérience.

3.6 Premières interprétations

En récapitulant les observations de nos différentes expériences, nous pouvons déjà avancer les résultats suivants quant à ses différents paramètres :

- La taille de la couche mélangée augmente avec la vitesse du vent
- La taille de la couche mélangée diminue avec l'importance du gradient de salinité
- La taille de la couche mélangée semble augmenter sensiblement avec l'importance du gradient de température
- Les variations de température extérieure et de fond de cuve semblent influencer assez sensiblement les résultats.

4 Etude théorique

Maintenant que nous avons effectué un certain nombre de mesures, nous aimerions apporter un modèle théorique. Deux modélisations nous ont semblé pouvoir expliquer les phénomènes : un modèle par forçage mécanique (où la cellule de convection est à l'origine du refroidissement) et un modèle de refroidissement de surface (où le refroidissement est à l'origine des cellules de convection). Nous avons pour chacun commencé par en décrire les effets, puis effectué des simulations numériques pour en voir les points forts et points faibles.

4.1 Modèle par forçage mécanique

4.1.1 Etude théorique

Le vent fournit au système de l'énergie mécanique, par les forces de cisaillement dues à la viscosité. Ce forçage mécanique entraîne la création d'une cellule de convection dans laquelle l'eau se mélange. On y obtient une couche homogène en température et en salinité. Le fait de mélanger cette couche supérieur induit un gain en énergie potentielle. Le seul facteur déterminant est la masse volumique de l'eau qui est fonction de la hauteur.

Hypothèses du modèle (cf. Figure 12) :

- Toutes les grandeurs (température, salinité, masse volumique) sont des fonctions linéaires de la hauteur au début de l'expérience¹
- La cuve est isolée de l'environnement, le seul apport en énergie est un apport d'énergie mécanique par le vent
- La couche mélangée (cellules de convection) est homogène et a donc des grandeurs uniformes T_{CM} et S_{CM} et donc ρ_{CM}

1. En pratique la température n'a pas un profil rigoureusement linéaire et un gradient n'est présent que sur les 10 premiers centimètres mais comme la couche mélangée ne dépasse jamais cette valeur nous pouvons prendre un gradient linéaire sur toute la cuve sans que cela affecte les prédictions du modèle.

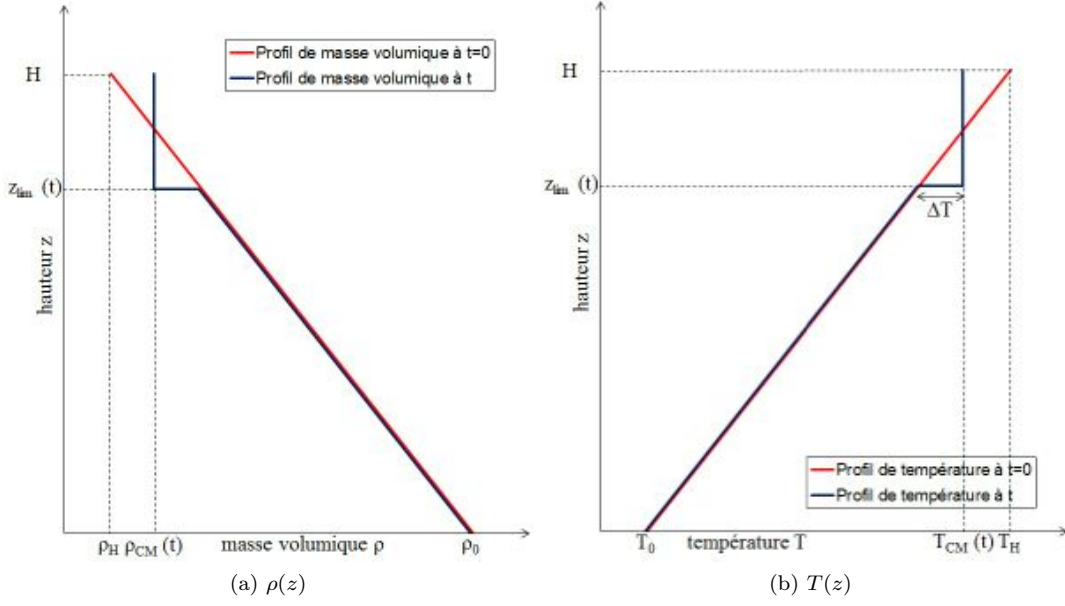


FIGURE 12: Modèle par forçage mécanique : $\rho(z)$ et $T(z)$

En début d'expérience nous avons :

$$\rho_{ini}(z) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho_H}{H}z, \quad \text{avec } \rho_H = \rho_0(1 - \alpha(T_H - T_0) + \beta(S_H - S_0))$$

Après mélange nous avons dans la couche mélangée :

$$\rho_{CM}(z_{lim}) = \rho_{ini}\left(z = z_{lim} + \frac{(H - z_{lim})}{2}\right) = \frac{\rho_H + \rho(z_{lim})}{2}$$

Le fait de mélanger conduit à un gain d'énergie potentielle :

$$E_{gagnée} = \Delta E_p = \int_{z_{lim}}^H gS [\rho_{CM}(z_{lim}) - \rho_{ini}(z)] dz$$

$$E_{gagnée} = gS \frac{(H - z_{lim})^3}{12} \frac{\rho_0 - \rho_H}{H}$$

Cette énergie croît grâce à la force que le vent exerce sur la surface de l'eau et est limitée par un terme de "frottement", dû à la viscosité de l'eau et proportionnel à la taille de la couche mélangée ($H - z_{lim}$) :

$$\frac{\partial E_{gagnée}}{\partial t} = \tau_{vent} S_{surface} - b_1(H - z_{lim}) = C_D \rho_{air} v_{vent}^2 S_{surface} - b_1(H - z_{lim})$$

Donc :

$$-3gS \frac{\rho_0 - \rho_H}{H} \frac{(H - z_{lim})^2}{12} \frac{\partial z_{lim}}{\partial t} = C_D \rho_{air} v_{vent}^2 S_{surface} - b_1(H - z_{lim})$$

Soit,

$$\frac{\partial z_{lim}}{\partial t} = -\frac{a_1 - b_1(H - z_{lim})}{\lambda_1(H - z_{lim})^2}, \quad \text{avec} \begin{cases} a_1 = C_D \rho_{air} v_{vent}^2 S_{surface} \\ \lambda_1 = g S \frac{\rho_0 - \rho_H}{4H} \end{cases}$$

4.1.2 Simulation et application numériques adaptées à notre modèle

Les différents coefficients apparaissant dans la loi ont été mesurés ou sont des valeurs tabulées mis à part le coefficient b_1 sur lequel on ne dispose d'aucune information. Ainsi, pour déterminer b_1 expérimentalement nous avons attendu la fin de l'expérience (ici la 11) de façon à avoir $\frac{\partial E_{gagnée}}{\partial t} = 0$ et nous avons mesuré z_{lim} de façon à adapter le modèle à notre expérience.

Pour les expériences 2 et 11 nous avons donc [1, 2] :²

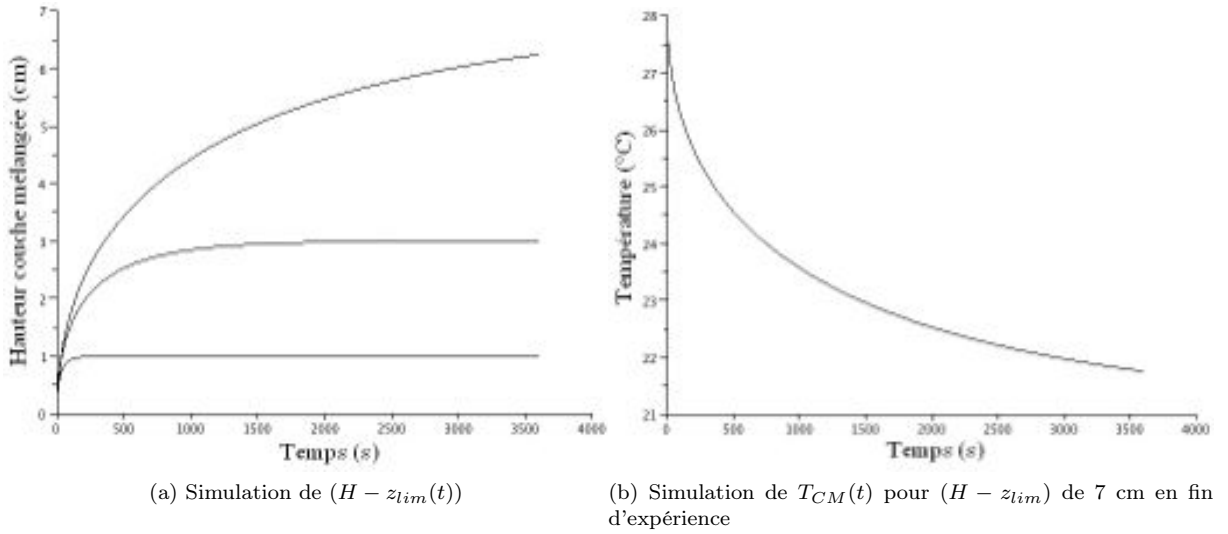


FIGURE 13: Simulation avec le modèle par forçage mécanique pour différents $(H - z_{lim})$ (1,3 et 7 cm) en fin d'expérience

$$\begin{array}{lll} S = 0,04 m^2 & C_D = 1,5 \cdot 10^{-3} & v_{vent} = 3 m s^{-1} \\ \rho_{air} = 1,23 kg.m^{-3} & H = 0,3 m & v_{surface} = 10^{-2} m s^{-1} \\ T_0 = -2^\circ C & T_H = 28^\circ C & g = 9,8 m s^{-2} \\ \beta(S_0 - S_H) = 5 \cdot 10^{-3} & T_{ext} = 21,5^\circ C & \alpha = 2 \cdot 10^{-4} K^{-1} \end{array}$$

La résolution de l'équation différentielle numériquement donne des résultats visibles en Figure 13.

2. La température $T_0 = -2^\circ C$ en fond de cuve n'est que l'extrapolation du gradient de température présent sur les 10 premiers centimètres.

4.2 Modèle par refroidissement de la surface

4.2.1 Etude théorique

Pour ce second modèle, nous nous sommes de nouveau basés sur un raisonnement énergétique, mais cette fois-ci d'échanges thermiques en considérant le refroidissement de la surface par le vent. Dès lors que la couche d'eau en surface se refroidit, elle gagne en masse volumique et plonge, créant ainsi un mouvement et l'établissement d'une cellule de convection et donc d'une couche mélangée. La taille de cette couche ($H - z_{lm}$) est gouvernée par la continuité de la masse volumique.

Hypothèses du modèle (cf. Figure 14 et 15) :

- Toutes les grandeurs (température, salinité, masse volumique) sont des fonctions linéaires de la hauteur au début de l'expérience³
- La cuve est isolée thermiquement, les seuls échanges thermiques se font à la surface de l'eau
- La couche mélangée est homogène et a donc des grandeurs uniformes T_{CM} et S_{CM} et donc ρ_{CM}
- La capacité volumique de l'eau est supposée constante (c'est-à-dire indépendante de la salinité et de la température) ce qui est vérifié dans notre cas (cf. [1])

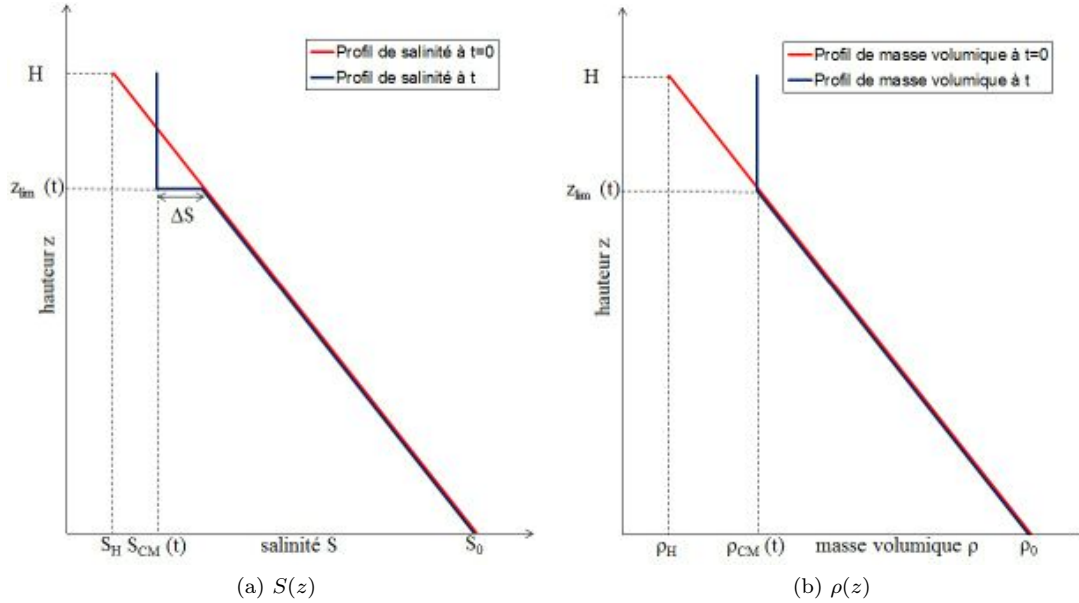


FIGURE 14: Modèle par refroidissement de la surface : $\rho(z)$ et $S(z)$

3. En pratique la température n'a pas un profil rigoureusement linéaire et un gradient n'est présent que sur les 10 premiers centimètres mais comme la couche mélangée ne dépasse jamais cette valeur nous pouvons prendre un gradient linéaire sur toute la cuve sans que cela affecte les prédictions du modèle.

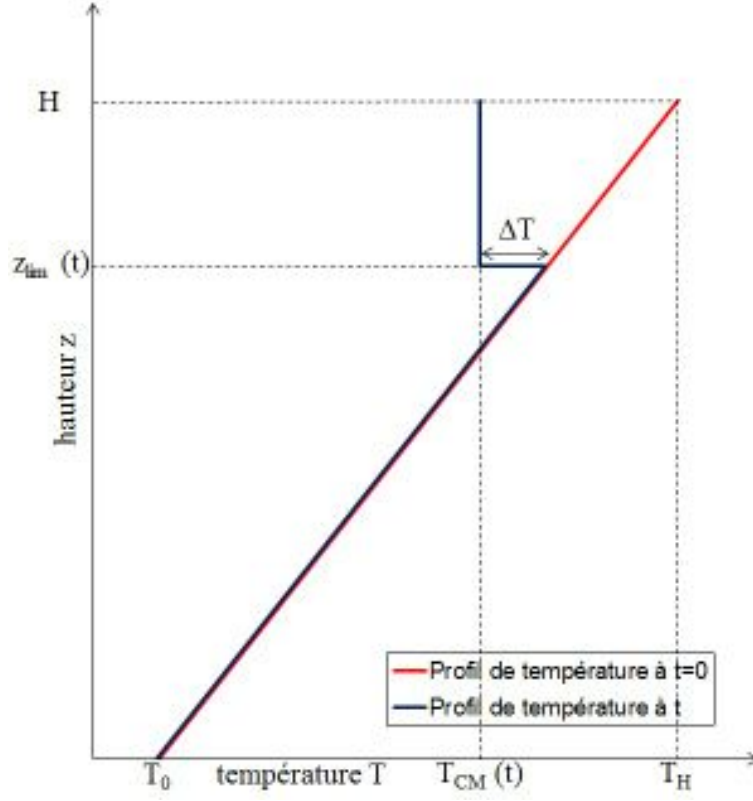


FIGURE 15: Modèle par refroidissement de la surface : $T(z)$

En début d'expérience nous avons :

$$T_{ini}(z) = T_0 + \frac{T_H - T_0}{H} z$$

$$S_{ini}(z) = S_0 - \frac{S_0 - S_H}{H} z$$

$$\rho_{ini}(z) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho_H}{H} z$$

Par conservation de la salinité dans la couche mélangée nous avons : $S_{CM}(z_{lim}) = \frac{S_H + S_{ini}(z=z_{lim})}{2}$ ce qui induit un saut de salinité $\Delta S = \frac{H - z_{lim}}{2} \frac{S_0 - S_H}{H} > 0$ qui (pour avoir continuité de $\rho(z)$ en z_{lim}) implique un saut de température $\Delta T = \frac{\beta}{\alpha} \Delta S$. Ainsi $T_{CM}(z_{lim}) = T_{ini}(z = z_{lim}) - \Delta T$.

En faisant un bilan énergétique, le système perd de l'énergie thermique (par le refroidissement de la surface) et gagne de l'énergie potentielle (comme dans le modèle de forçage mécanique), d'où :

$$E_{perdue} = C_p h_{lim} S \left(\frac{T_H + T_{ini}(z = z_{lim})}{2} - T_{CM}(z_{lim}) \right) - \int_{z_{lim}}^H (\rho_{ini}(z_{lim}) - \rho_{ini}(z)) g S z dz$$

$$E_{perdue} = S \left(\frac{T_H - T_0}{H} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{S_0 - S_H}{H} \right) \frac{H - z_{lim}}{2} [C_p z_{lim} - 2g\rho_0\alpha(H - z_{lim})(2H + z_{lim})]$$

On montrera (en partie 4.2.2) que le terme en énergie potentielle est largement négligeable devant le terme d'énergie thermique.

Nous modélisons cette perte d'énergie par une perte par échange thermique par convection (Loi de Newton en thermodynamique) et une perte constante due au vent (évaporation ou autres phénomènes physiques), soit :

$$\frac{\partial E_{perdue}}{\partial t} = a_2 + b_2 S(T_{CM}(z_{lim}) - T_{ext}) = \lambda_2 + \mu_2 z_{lim}$$

d'autre part en dérivant l'équation du bilan d'énergie,

$$\frac{\partial E_{perdue}}{\partial t} = A_2(H - 2z_{lim}) \frac{\partial z_{lim}}{\partial t}$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_2 = a_2 + b_2 S \left(T_0 - T_{ext} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{S_0 - S_H}{H} \frac{H}{2} \right) \\ \mu_2 = b_2 S \left(\frac{T_H - T_0}{H} + \frac{\beta}{2\alpha} \frac{S_0 - S_H}{H} \right) \\ A_2 = \frac{SC_p}{2} \left(\frac{T_H - T_0}{H} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{S_0 - S_H}{H} \right) \end{cases}$$

Ce modèle est donc régi par la loi :

$$\frac{\partial z_{lim}}{\partial t} = \frac{\lambda_2 + \mu_2 z_{lim}}{A_2(H - 2z_{lim})}$$

4.2.2 Simulation et application numériques adaptées à notre modèle

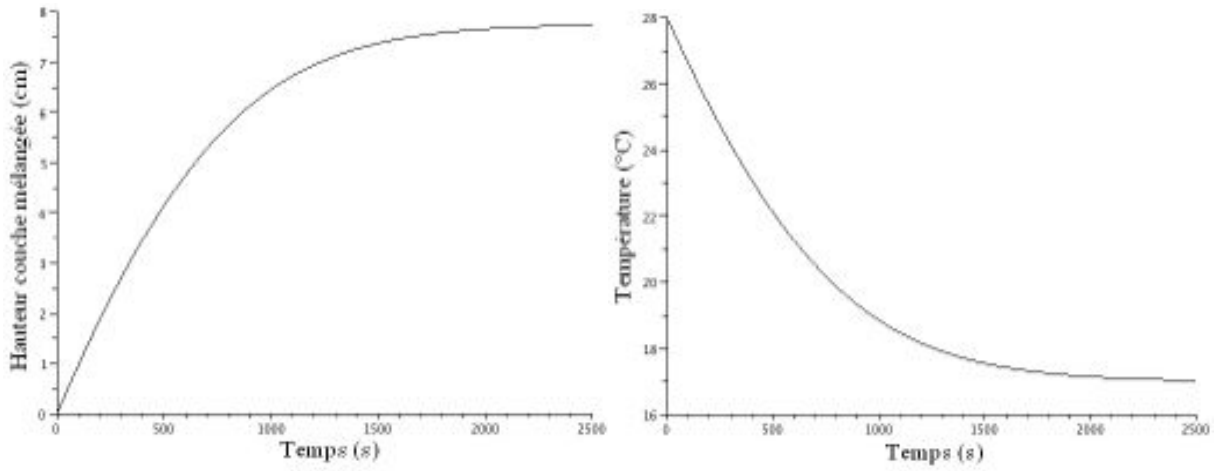
Les différents coefficients apparaissant dans la loi ont été mesurés ou sont des valeurs tabulées mis à part les coefficients a_2 sur lequel on ne dispose d'aucune information et b_2 sur lequel on ne dispose que d'un ordre de grandeur. (cf. [2]). Ainsi pour trouver une relation entre a_2 et b_2 expérimentalement nous attendons la fin de l'expérience (ici la 11) de façon à avoir $\frac{\partial E_{perdue}}{\partial t} = 0$ et on mesure l'écart de température entre la surface de l'eau et l'extérieur.

Pour les expériences 2 et 11 nous avons donc [1, 2] :⁴

$$\begin{array}{lll} S = 0,04 \, m^2 & \alpha = 2.10^{-4} \, K^{-1} & b_2 = 1.10^3 \, W K^{-1} m^{-2} \\ C_p = 4.10^6 \, JK^{-1} m^{-3} & H = 0,3 \, m & a_2 = 1.10^{-1} \, W \\ T_0 = -2^\circ C & T_H = 28^\circ C & g = 9,8 \, ms^{-2} \\ \beta(S_0 - S_H) = 5.10^{-3} & T_{ext} = 21,5^\circ C & \end{array}$$

Avec ces données on a : $\frac{2g\rho_0\alpha(H-z_{lim})(2H+z_{lim})}{C_p z_{lim}} \approx 10^{-6}$ ce qui justifie bien l'approximation faite en partie 4.2.1.

4. La température $T_0 = -2^\circ C$ en fond de cuve n'est que l'extrapolation du gradient de température présent sur les 10 premiers centimètres.



(a) Simulation de $(H - z_{lim}(t))$

(b) Simulation de $T_{CM}(t)$

FIGURE 16: Simulation du modèle par refroidissement de la surface

La résolution de l'équation différentielle numériquement donne des résultats assez proche des expériences (cf. Figure 16).

5 Bilan

En vue des deux modèles théoriques que nous avons développés précédemment, nous allons essayer d’expliquer les différentes observations faites en parties 2 et 3 pour essayer de déterminer lequel des deux modèles est prépondérant. Nous rappelons que nous avons développé un premier modèle qui se base sur un forçage mécanique par le vent qui provoque la création d’une cellule de convection. C’est cette cellule de convection qui cause la baisse de la température de surface par le mélange de l’eau en surface avec l’eau du fond qui est plus froide. Notre deuxième modèle se base directement sur un refroidissement de la surface qui ensuite entraîne une cellule de convection.

5.1 Analyse de l’expérience référence

D’après nos résultats de l’expérience de référence nous pouvons d’ores et déjà observer que la température de la couche limite simulée avec le modèle de refroidissement de la surface est beaucoup plus proche de ce qui se passe réellement (cf. Figure 16, 13 et 5)⁵. Ce phénomène semble donc être prépondérant en ce qui concerne l’évolution de la température, la variable clé de notre modèle. Cependant le modèle par refroidissement de la surface n’explique pas la tangente verticale de $z_{lim}(t)$ en $t = 0$ alors que le modèle par forçage mécanique oui. Nous ne pouvons donc pas totalement exclure ce dernier.

D’autre part, dans le modèle par forçage mécanique nos simulations ont été faites en émettant l’hypothèse que ce modèle était exclusivement responsable d’une couche mélangée de hauteur z_{lim} à un temps infiniment long de façon à estimer le coefficient de “frottement” inconnu. Les courbes de la figure 13) sont donc à apprécier de la manière suivante : “Si le modèle par forçage mécanique était responsable pour une hauteur de couche mélangée d’une certaine hauteur en fin d’expérience, alors l’évolution de $(H - z_{lim}(t))$ serait...”. Alors que dans le modèle par refroidissement de la surface, les coefficients ont été estimés à partir de données réelles (différence de température mesurée en fin d’expérience et ordre de grandeur tabulé).

5. T 0,5cm est la courbe qui représente au mieux la température de la couche mélangée

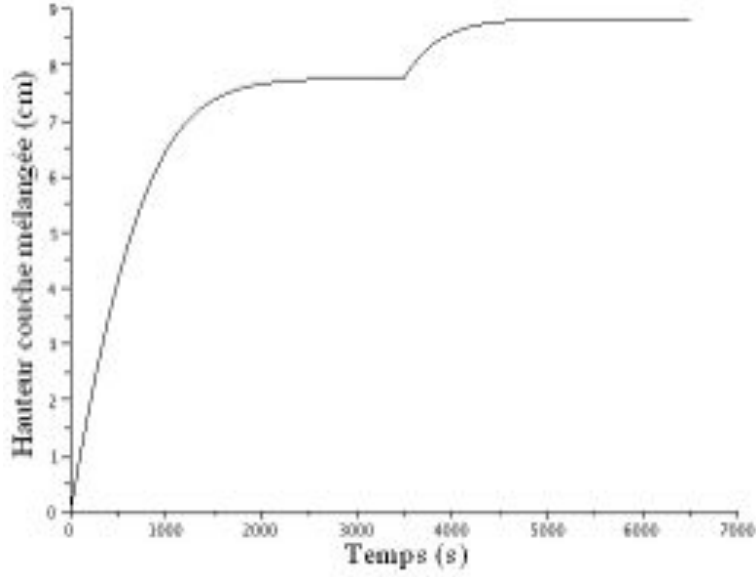


FIGURE 17: Simulation de $(H - z_{lim}(t))$ avec le modèle par refroidissement de la surface avec une baisse de la température extérieure de $\Delta T_{ext} = -1,5^\circ\text{C}$ à $t = 3500\text{ s}$

De plus, le redémarrage étrange à $t \approx 3500\text{ s}$ de la hauteur de couche mélangée pour l'expérience 11 (cf. Figure 5), peut être simulé (cf. Figure 17) par un changement brusque de la température extérieure (paramètre que nous n'avons malheureusement pas suivi au cours du temps, et uniquement mesuré en début d'expérience). Avec un écart de seulement $1,5^\circ\text{C}$ de la température extérieure nous observons un redémarrage significatif, ceci est donc une explication plausible de ce phénomène.

5.2 Analyse de la suppression du gradient de température (expériences 3 et 8)

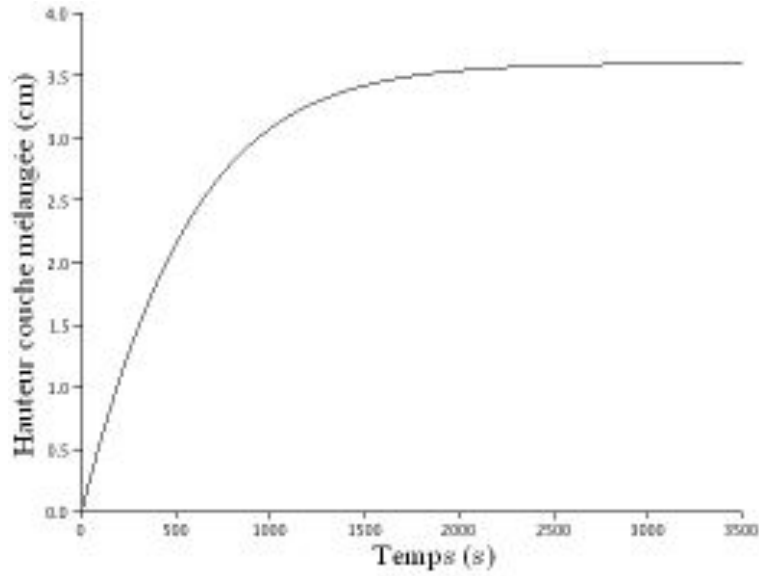


FIGURE 18: Simulation de $(H - z_{lim}(t))$ dans les conditions des expériences 3 et 8 avec le modèle par refroidissement de la surface avec $T_0 = 18,5^\circ\text{C}$ et $T_{ext} = 21,5^\circ\text{C}$

Nous remarquons que la simulation avec le modèle par refroidissement de la surface dans les conditions des expériences 3 et 8 donne une évolution de la hauteur de couche mélangée similaire à nos observations (cf. Figure 18).

5.3 Analyse du remplacement du gradient de température par le gradient de salinité équivalent (expériences 4 et 10)

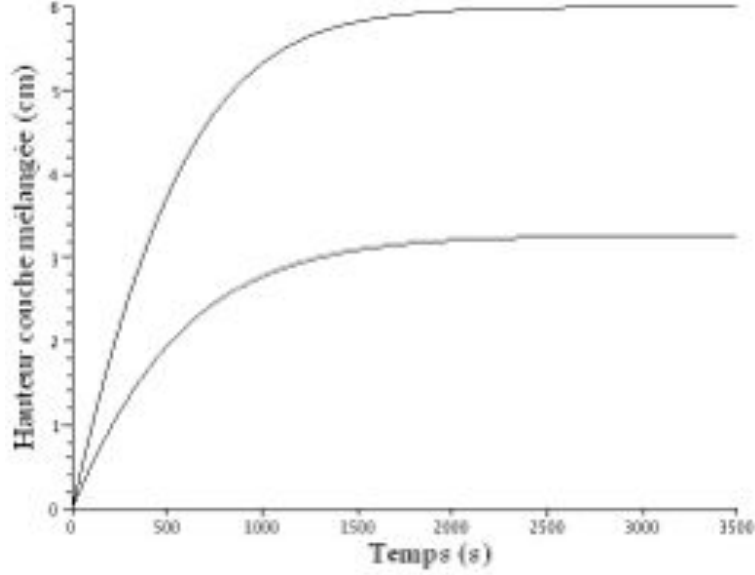


FIGURE 19: Simulation de $(H - z_{lim}(t))$ dans les conditions des expériences 4 et 10 avec le modèle par refroidissement de la surface avec $T_0 = 19,5^\circ\text{C}$ et $T_{ext} = 21^\circ\text{C}$ (courbe du bas) et $T_0 = 20^\circ\text{C}$ et $T_{ext} = 19^\circ\text{C}$ (courbe du haut)

En pensant que sans chauffage les températures de l'eau et de l'extérieur ne jouent pas un rôle déterminant, nous avons omis de les mesurer précisément. Ainsi comme nous le voyons en figure 19 des températures sensiblement différentes permettent de recréer ce que nous observons lors de nos expériences. Le modèle par refroidissement de la surface est une bonne piste pour expliquer les résultats contre-intuitifs que nous avons observés sur les expériences sans gradient de température.

5.4 Analyse de la suppression du gradient de salinité (expérience 6)

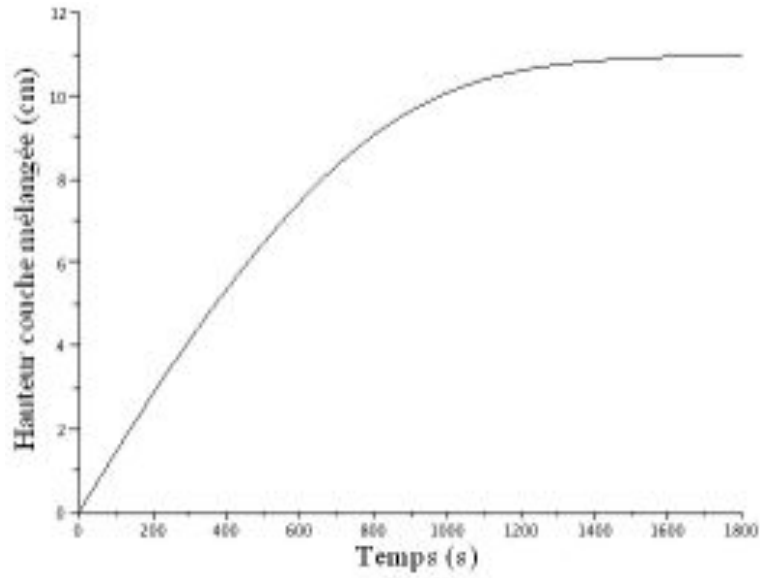


FIGURE 20: Simulation de $(H - z_{lim}(t))$ dans les conditions de l'expérience 6 avec le modèle par refroidissement de la surface

La simulation avec le modèle par refroidissement de la surface des conditions de l'expérience 6 donne là aussi un résultat comparable avec nos observations (cf. Figure 20).

5.5 Analyse de l'augmentation de la longueur de la cuve (expérience 9)

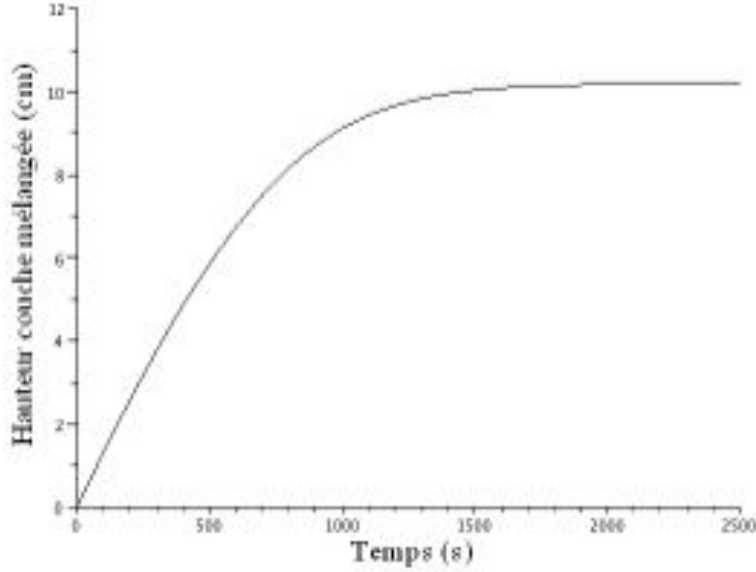


FIGURE 21: Simulation de $(H - z_{lim}(t))$ dans les conditions de l'expérience 9 avec le modèle par refroidissement de la surface

Dans nos modèles théoriques, l'augmentation de la surface de la cuve n'a aucune influence mais nous avons remarqué que dans l'expérience 9 nous avons un gradient de température plus important, ainsi que des températures absolues plus grandes. La simulation avec le modèle par refroidissement (cf. Figure 21) des conditions de l'expérience (gradient de température et températures absolues plus importants) donnent bien des résultats comparables avec nos observations. Le fait de chauffer plus nous donne bien une hauteur de la couche mélangée plus importante que pour notre expérience référence.

5.6 Synthèse et améliorations

En fin de compte, le modèle par forçage mécanique ne reliant pas z_{lim} à la température, ne peut pas expliquer les différents résultats de nos expériences. Il permet uniquement d'expliquer la tangente verticale de hauteur de couche mélangée en début d'expérience que ne prévoit pas le modèle par refroidissement de la surface. En revanche le modèle par refroidissement de la surface est largement validé car il tient compte de l'influence de tous les facteurs et reproduit même plutôt bien les différentes évolutions de $z_{lim}(t)$ de nos différentes expériences. Il permet même d'émettre des hypothèses sur la cause des anomalies observées (comme le redémarrage lors de l'expérience 11 et les incohérences entre les expériences 3, 4, 8 et 10) et met en valeur l'importance de la température sur l'évolution de la couche mélangée. En effet, un écart de l'ordre du degré change considérablement la taille de la couche mélangée.

Malheureusement, la température est la variable que nous avons eu le plus de mal à mesurer (les thermomètres disponibles montrant des fluctuations aléatoires de l'ordre du demi degré et n'étant pas

tous calibrés de la même façon) et à contrôler. De plus, à la vue de l'évolution de la température en fond de cuve (cf. T_{fond} sur la figure 5), nous ne pouvons pas négliger les échanges thermiques non provoqués par le vent (comme par exemple les parois de la cuve au contact de l'air extérieur).

Pour améliorer notre dispositif expérimental, nous pensons qu'il faut essentiellement se focaliser sur les températures. En effet, nous avons vu aussi bien dans nos expériences que dans notre modélisation à quel point la hauteur de notre couche mélangée est sensible à des modifications de la température extérieure, de la température du fond de la cuve ou même du gradient de température.

6 Application du modèle à notre problème marin

Maintenant que nous sommes arrivés à nos premières conclusions sur le phénomène de refroidissement dans notre modèle, nous aimerions savoir s'il est possible de les appliquer au cas réel que nous étudions, à savoir le refroidissement des calanques par le mistral. Pour cela nous allons comparer les deux nombre adimensionnés caractéristiques de notre problème à savoir les nombres de Richardson et de Reynolds.

6.1 Le nombre de Richardson

Le nombre de Richardson, R_i , compare la stabilité statique à l'instabilité dynamique dans une colonne d'eau. Il est particulièrement important dans notre modèle car il va nous permettre de juger de la stabilité relative de nos différentes couches. Il s'exprime en fonction de la fréquence de Brunt-Väisälä, N , qui correspond à la fréquence d'oscillation d'une particule d'eau déplacée verticalement hors de sa position d'équilibre dans un milieu stratifié.

Il s'exprime de la manière suivante :

$$R_i = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}, \quad \text{avec } N^2 = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

6.1.1 Calcul dans le cas de notre expérience

En utilisant comme données :

$$\rho = 1020 \text{ kg.m}^{-3} \quad g = 9,8 \text{ ms}^{-2} \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 37 \text{ kg.m}^{-4} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,6 \text{ s}^{-1}$$

Nous trouvons :

$$N^2 = 0,36 \text{ s}^{-2} \quad \text{et} \quad R_i = 1,0$$

6.1.2 Calcul dans le cas réel[2][5]

$$N^2 = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} \quad \text{et} \quad R_i = 1,6$$

6.1.3 Interprétations

Ainsi, nos deux nombres de Richardson sont très proches. Au niveau de la stabilité relative des couches, le modèle que nous avons produit est donc relativement proche de ce qui se passe dans l'océan.

Par ailleurs, on sait que :

- Si $R_i < 0,25$, le milieu est instable
- Si $R_i > 0,25$, le milieu est stable

En effet, c'est bien ce que nous observons dans notre modèle : au bout d'un temps assez court, le milieu devient stable, les couches de fluides n'interagissent plus que très peu et ne sont plus perturbées par l'écoulement d'air.

6.2 Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds, R_e , représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il est également assez important dans notre modèle car il va nous permettre de savoir comment les couches interagissent entre elles.

Il s'exprime de la manière suivante :

$$R_e = \frac{UL}{\nu_{eau}}$$

6.2.1 Calcul dans le cas de notre expérience référence

En utilisant comme données :

$$\nu_{eau} = 10^{-6} m^2 s^{-1} \quad U = 10^{-2} m s^{-1} \quad L = 0,1 m$$

Nous trouvons :

$$R_e = 10^3$$

6.2.2 Calcul dans le cas réel[5]

$$\nu_{eau} = 10^{-6} m^2 s^{-1} \quad U = 5.10^{-2} m s^{-1} \quad L = 40 m$$

Donc,

$$R_e = 10^5$$

6.2.3 Interprétations

Cette fois-ci, nos deux nombres de Reynolds sont assez éloignés. Par ailleurs, on sait que :

- Si $Re < 2000$, l'écoulement est laminaire
- Si $Re > 2000$, l'écoulement est turbulent

Ainsi, dans notre modèle l'écoulement est plutôt laminaire alors qu'il est plutôt turbulent dans l'océan. On peut donc s'attendre à ce qu'il y ait un petit peu plus d'interactions entre les couches au niveau de leurs limites. Néanmoins, le calcul du nombre de Richardson dans l'océan nous permet de dire que les couches resteront relativement stables. En bref, les différentes couches devraient être présentes de la même façon que dans notre modèle ; seulement la limite entre les deux devrait être un petit peu moins bien marquée.

En tout état de cause, il est assez dur de rapprocher les deux nombres de Reynolds sans affecter nos nombres de Richardson qui sont notre priorité. Nous ne pensons donc pas que l'on doive modifier notre expérience référence au niveau des paramètres que nous avons utilisés.

7 Conclusion

A l'issue de ce projet et à la vue de tous nos résultats, nous pensons que le phénomène de refroidissement de notre modèle s'approche du suivant : durant un temps initial de l'ordre de grandeur d'une minute, un forçage mécanique s'opère créant une couche mélangée de faible épaisseur. Ensuite, l'expansion de cette couche mélangée est assurée par le refroidissement de la surface qui se densifie et donc plonge. Cette fois-ci, la valeur limite de la couche est atteinte pour un temps de l'ordre de grandeur d'une heure.

Si les travaux que nous avons menés devaient être poursuivis, nous nous attacherions en priorité à améliorer nos conditions de température. En effet, nos expériences nous ont bien montrées à quel point il est important de travailler toujours avec le même gradient de température et les mêmes températures de cuve et extérieure. Nous travaillerions donc dans une pièce isotherme avec des thermomètres qui se calibrent automatiquement entre eux et surtout qui permettent des acquisitions beaucoup plus précises (nous ne pouvons pas avoir des incertitudes de l'ordre du degré sur nos températures). Concernant nos modèles théoriques, nous essayerions également de faire des expériences de détermination des coefficients qui nous manquent. Nous pensons ainsi pouvoir obtenir très vite des résultats assez proches de la réalité. Nous essayerions aussi de travailler dans une cuve de plus grande surface pour que les effets de bord interviennent moins.

Concernant la modélisation de l'expérience par rapport au cas réel, nous ne pensons pas pouvoir apporter beaucoup d'améliorations. En effet, les nombres de Reynolds sont certes un petit peu différent, mais les rapprocher nous conduirait à apporter des écarts entre les nombres de Richardson qui nous semble-t-il sont la priorité.

En bref, nous avons au moins eu l'impression de comprendre un peu mieux les phénomènes qui régissent le refroidissement de nos calanques et nous serons ravis de rapporter nos résultats à tous les amoureux de la mer dès notre retour à Marseille.

Annexe A : Programme SciLab pour le modèle par forçage mécanique

```
S=0.04;// surface en m^2
H = 0.3; // hauteur en m
g = 9.81; // constante de gravité en m.s^-2
rho0 = 1020;//masse volumique en kg.m^-3
gT = 100; // gradient de température en K/m
gS = 5*10^(-3)/H; //beta*(-gradient de salinité) en m^-1
alpha = 2*10^(-4); //coef de dilatation thermique en K^-1
rhoair = 1.23; // masse volumique de l'air en kg.m^-3
Cd = 1.5*10^(-3);//coeff sans dimension
Vvent = 3; // vitesse du vent au dessus de l'eau en m.s^-1
Vsurface =0.01;// vitesse de l'eau en surface en m.s^-1
Text = 21.5; // temperature exterieure en °C
T0 = -2; //temperature fond de cuve (avec un gradient constant sur toute la cuve)
Zinfini = 0.07; //taille de la couche limite en fin d'expérience en m
a=Cd*rhoair*Vvent^2*S*Vsurface;
lambda = g*S*rho0*(alpha*gT+gS)/4;
b = a/Zinfini;
disp(a);
disp(b);
disp(lambda);
function [ydot]=f(t,y) , ydot=(a-b*y)/(lambda*y), endfunction
y0=0.0001;t0=0;t=0:5:3600; //y représente (H-Zlim)
y=ode(y0,t0,t,f);
plot2d(t,y*100); // en cm
plot2d(t,gT*(H-y)+T0); //trace la température
```

Annexe B : Programme SciLab pour le modèle par refroidissement de la surface

```
S=0.04; // surface en m^2
alpha = 2*10^(-4); //coef de dilatation thermique en K^-1
Cp= 4*10^(6); //capa thermique volumique de l'eau en J.K^-1.m^-3
gT = 100; // gradient de température en K/m
H = 0.3; // hauteur en m
gS = 5*10^(-3)/H; //beta*(-gradient de salinité) en m^-1
A = Cp*S*(gT+gS/alpha)/2;
g = 9.81; // constante de gravité en m.s^-2
rho0 = 1020; //masse volumique en kg.m^-3
//B = 2*g*rho0*alpha/Cp;
b=1000; //coef de la loi de newton en W.K^-1.m^-2
a= 4.5*(b*S); //coef constant flux de chaleur (évaporation)
Text = 21.5; // temperature exterieure en °C
T0 = -2; //temperature fond de cuve (avec un gradient constant sur toute la cuve)
lambda = a + b*S*(T0-Text - H*gS/(2*alpha));
mu = b*S*(gT +gS/(2*alpha));
disp(lambda);
disp(mu);
disp(A);
disp((H+lambda/mu)*100); //affiche la taille de la couche mélangé en fin d'exp
function [ydot]=f(t,y) , ydot=(lambda + mu*y)/(A*(H - 2*y)), endfunction
y0=0.2999;t0=0;t=t0:1:2500;
%ODEOPTIONS = [1, 0, 0, %inf, 0, 2, 10000, 12, 5, 0, -1, -1];
y=ode(y0,t0,t,f);
plot2d(t,(H-y)*100); //en cm
plot2d(t,T0+gT*y - gS*(H-y)/(2*alpha)); //trace la température de la couche mélangée
```

Références

- [1] *COPIN_MONTEGUT_Proprietes physiques de l'eau de mer.pdf* Tab-4 p.14 (à multiplier par la masse volumique correspondant à la salinité)
- [2] *Les Coefficientbt d'échange, son importance dans les transferts thermiques* (www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/C2cond.ENSTA.pdf p.3)
- [3] *Journal of Geophysical Research*, vol. 91, no. C7, p. 8412
- [4] *Océanographie Physique* par Nathalie DANIAULT - Université de Bretagne Occidentale p. 13 ([http ://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf](http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf))
- [5] *Journal of Geophysical Research*, vol. 91, no. C7, p. 8419