

קשיים בחשיבה לוגית והנמקה בלימודי מדעי המחשב



אמיר רובינשטיין

קורס הכנה בתכנות

אוני' תל אביב

קיץ 2015

כשל לוגי בהנמקה

טענה א': כל הנוכחים בכיתה זו הם חלק מאוכלוסיית אונ' תל אביב.

טענה ב': חלק מאוכלוסיית אונ' תל אביב אוהב שוקולד.

מסקנה: כל הנוכחים בכיתה זו אוהבים שוקולד.

[אסטרונומיה](#) • [מדעי החיים](#) • [מדעי האדם](#) • [מדעים מדויקים](#) • [תולדות המדע](#) • [מדע וחברה](#)

חובת ההוכחה

הוכחות הן הדבר שמפריד בין המתמטיקה לשאר המדעים. כעת, מחלוקת עזה שניטשת סביב אחד הפרסים היוקרתיים בתחום, מטילה אור על סדק מטריד ביסודותיה - האופן בו מוכיחים משפטים והשערות. המתמטיקאי מרכוס דה סוטוי, מחבר רב המכר "המוזיקה של המספרים הראשוניים", חושף סודות מעולם המספרים

מרכוס דה סוטוי

פורסם: 15.11.06, 12:10

0

 Recommend

לכתבה זו התפרסמו 60 תגובות ב-58 דיונים

1. בשביל מה ההוכחות האלה לעזאזל?!

סטודנט מיואש (15.11.06)

נמאס לי מכל ההוכחות האלה. בשביל מה להוכיח, מה זה נותן לנו? אם אף אחד לא מוצא דוגמא נגדית למשפט מסוים במשך הרבה הרבה זמן, אז כנראה שהוא נכון. לא צריך הוכחות.

[תגובה חדשה](#)



מטרות ההרצאה

1. להסביר מהי חשיבה לוגית, ומה חשיבותה

במדעים המדויקים ובהנדסה

2. להעלות מודעות לקשיים נפוצים של סטודנטים

בחשיבה לוגית ובהנמקת טענות

לוגיקה

- הלוגיקה התחילה את דרכה ביוון העתיקה כענף **בפילוסופיה**. תורה שעסקה ב**חוקי החשיבה הנכונה** : ניתוח **טענות** וקשרי **היסק** ביניהן.
- בהמשך הדרך התפתה בכיוון פורמלי יותר ונחשבת כיום גם לענף **במתמטיקה** (לוגיקה מתמטית / פורמלית).
- כיום גם ענף מרכזי **במדעי המחשב**.
הבסיס התאורטי וההנדסי **למערכות ממוחשבות**.
 - תאורטי : למשל פיתוח אלגוריתמים, אימות תוכנה וחומרה, ניהול בסיסי נתונים, בינה מלאכותית
 - הנדסי : למשל תכנון מעגלים אלקטרוניים, רובוטיקה

לוגיקה במדעי המחשב – דוגמה פשוטה

- הוכחת נכונות של אלגוריתמים

```
def selectsort(lst):
```

```
    out=[] #the output list
```

```
    for i in range(len(lst)):
```

```
        m = min(lst)
```

```
        out.append(m) #add m at the end of the list
```

```
        lst.remove(m) #remove one occurrence of m
```

```
    return out
```

- מה עושה הפונקציה הבאה?

- איך הבנתם זאת?

איך מוכיחים זאת?

- ננסח תכונה ("שמורת לולאה"):

_____ "בסוף המחזור ה- k של הלולאה out מכילה
_____ ואילו lst מכילה _____"

לוגיקה במדעי המחשב – דוגמה פשוטה

- הוכחת נכונות של אלגוריתמים

```
def selectsort(lst):  
    out=[] #the output list  
    for i in range(len(lst)):  
        m = min(lst)  
        out.append(m) #add m at the end of the list  
        lst.remove(m) #remove one occurrence of m  
    return out
```

- מה עושה הפונקציה הבאה?

- איך הבנתם זאת?
איך מוכיחים זאת?

- ננסח תכונה ("שמורת לולאה"):

"בסוף המחזור ה- k של הלולאה out מכילה את k האיברים הקטנים בסדר ממויין ואילו lst מכילה את כל האיברים המקוריים פרט לאיברים אלו"

הטענה נכונה עבור $k=0$ (למה?), ומנכונות עבור k נובעת נכונות עבור $k+1$ (למה?).
מסקנה: בסיום הלולאה out מכילה את כל האיברים בסדר ממוין (למה?).

חשיבה לוגית? הנמקה?

- חשיבה לוגית :

היכולת לנסח טיעונים באופן חד משמעי ומוגדר היטב באמצעות שפת הלוגיקה, ומתוך כך לקבוע אמיתות/שקריות של טיעונים, ולזהות יחסי היסק בין טיעונים.

- הנמקה :

מיומנות (אומנות?) הסקת טיעונים חדשים מטיעונים קיימים באופן תקף

מה בהמשך?

- שלוש דוגמאות לנקודות כשל נפוצות עבור סטודנטים רבים.

1. רב משמעות בשפה טבעית

2. טענות גרירה

3. סיווג טענות והוכחתן

רב משמעות בשפה טבעית

- שפה טבעית מכילה רב משמעות כמעט תמיד

איזו צורה תתקבל אם תפעלו על פי ההנחיות הבאות?

- ציירו קו אנכי באורך 5 ס"מ
- בחציו העליון מימינו ציירו חצי עיגול
- מהקצה התחתון של חצי העיגול ציירו קו אלכסוני ימינה

רב משמעות בשפה טבעית (1)

- שימוש בלוגיקה פורמלית מאפשר להסיר רב משמעות זו

מה ההבדל במשמעות המילה המודגשת בשני המשפטים?

1. למשרה יתקבלו בוגרי מדעי המחשב והנדסה

2. כדי לקבל רישיון נהיגה צריך לעבור מבחן מעשי ומבחן תיאורטי

if $x > 3$ and $y < 4$:

...

if $x > 3$ or $y < 4$:

...

רב משמעות בשפה טבעית (2)

- שימוש בלוגיקה פורמלית מאפשר להסיר רב משמעות זו

מה ההבדל במשמעות המילה המודגשת בשני המשפטים?

1. מה תרצו למנה ראשונה - מרק **או** סלט?

2. תרצו לאכול **או** לשתות משהו?

למנה ראשונה אפשר להזמין
מרק XOR סלט...



רב משמעות בשפה טבעית (3)

- שימוש בלוגיקה פורמלית מאפשר להסיר רב משמעות זו

מה ההבדל במשמעות המילה המודגשת בשני המשפטים?

1. **אם** אקבל חופש מהעבודה אבוא איתך לרומא.

2. **אם** שותים – לא נוהגים.

if-then →

vs.

if and only if (iff) ↔

if $x > 3$:

$a = 2$

...

if $x > 3$:

$a = 2$

else:

$a = 999$

רב משמעות בשפה טבעית (4)

- שימוש בלוגיקה פורמלית מאפשר להסיר רב משמעות זו

מה ההבדל במשמעות המילה המודגשת בשני המשפטים?

1. מבצע!! **כל** הפריטים ב- 10% הנחה עד סוף החודש.

2. **כל** האיברים ששייכים לקבוצה הם ראשוניים.

טענות יכולות להיות נכונות באופן ריק!

```
a = int(input("enter an integer: "))
b = int(input("enter another integer: "))
for i in range(a,b): #what if a>=b?
    print(i)
```

רב משמעות בשפה טבעית (5)

- שימוש בלוגיקה פורמלית מאפשר להסיר רב משמעות זו

מה ההבדל במשמעות המילה המודגשת בשני המשפטים?

1. בחוץ **לא** גשום וסוער

2. בחוץ **לא** גשום ונעים

אי בהירות מבנית. סוגריים!

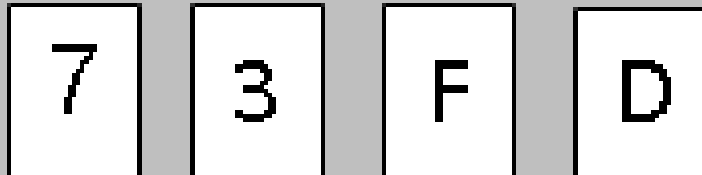
```
if (not (x>3 and y<4)) or z==9 :  
    print("Hey!")
```

גרירה (אס-אז)

- מקור ל"צרות" עבור סטודנטים. הנה כמה דוגמאות.

לפניכם 4 קלפים.

ידוע, שעל כל קלף מופיע **מספר** על צידו האחד, ו**אות** על צידו האחר. אתם רואים רק צד אחד של כל קלף.



טענה:

"אם על קלף מופיע המספר 3 על צד אחד, אז חייבת להופיע האות D על צידו השני."

אילו קלפים חייבים להפוך (ולראות את צידם השני), כדי לבדוק אם הטענה הנ"ל נכונה או לא?

גרירה (2)

- מקור ל"צרות" עבור סטודנטים. הנה כמה דוגמאות.

בישראל מקבלים רישיון נהיגה רק לאחר גיל 17 ובתנאי שלא נכשלים במבחן נהיגה.

נסמן: P – מקבלים רישיון נהיגה

R – עוברים את גיל 17

F – נכשלים במבחן נהיגה

אילו מבין הבאים מהווה ניסוח פורמלי של המשפט?

$$(R \wedge \neg F) \rightarrow P$$

או

$$P \rightarrow (R \wedge \neg F)$$

- שימו לב להבדל בין הסדר בזמן לסדר הגזירה הלוגית

גרירה (3)

- מקור ל"צרות" עבור סטודנטים. הנה כמה דוגמאות.

אם רדיוס המעגל קטן מ- 1 אז נכפיל אותו ב- 2, **וגם** אם רדיוס המעגל שווה בדיוק 2 אז נכפיל אותו ב- 2.

מה מהבאים הוא התרגום הנכון לפייתון?

if r<1 and r==2:
 r = r*2

if r<1 or r==2:
 r = r*2

- שימו לב לשקילות הלוגית:
 $(a \rightarrow c \text{ and } b \rightarrow c) \equiv ((a \text{ or } b) \rightarrow c)$

סיווג טענות

- כיצד ניגשים להוכיח / להפריך טענה?
תלוי בסוג הטענה:

(1) טענות הכללה

“כל הראשונים אי זוגיים”

“מספר זוגי לא בהכרח מתחלק ב-4”

(2) טענות קיום

“יש ראשוני שהוא מכפלת שני ראשוניים”

“יש אינסוף ראשוניים”

מה צריך כדי להוכיח / להפריך טענה?

הוכחה	הפרכה	
<p>טענות הכללה:</p> $\forall x P(x)$ <p>להראות שכל ה- x ב"עולם הדיון" מקיימים את התכונה $P(x)$</p>	<p>להראות שיש x כלשהו מ"עולם הדיון" שלא מקיים את התכונה $P(x)$ (דוגמה נגדית)</p>	
<p>טענת קיום:</p> $\exists x P(x)$ <p>להראות שיש * x כלשהו מ"עולם הדיון" שמקיים את התכונה $P(x)$</p> <p>* או ע"י דוגמה או באופן עקיף</p>	<p>להראות שכל ה- x ב"עולם הדיון" לא מקיימים את התכונה $P(x)$</p>	

- נכונות / אי נכונות טענה תלויה בהקשר שלה ("עולם הדיון" שאליו היא מתייחסת). למשל:
"כל הסטודנטים דוברים צרפתית" היא טענת אמת בסורבון, אבל לא בכיתה הנוכחית (ככל הנראה...).

תרגיל בסיווג טענות

- סווגו את הטענות הבאות לטענות הכללה וקיום:

א- מספרים ראשוניים אינם זוגיים

ב- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ג- אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ אז הוא יחיד

ד- החיתוך של קבוצות $A \cap B$ לא תמיד שווה לאיחוד שלהן $A \cup B$

ה- תהי A מטריצה. אז אם A נורמלית, היא גם ניתנת לליכסון.

ו- לא כל מטריצה ניתנת לליכסון

ז- חלק מהמספרים הזוגיים גם מתחלקים ב-4

ח- אין ראשוני מקסימלי.

כללי היסק

- ה"מנוע" של הוכחות הם **כללי היסק**.
- מאפשרים לגזור טענה חדשה מטענות קיימות.

טענה א': שליש מבין הנרשמים למדעי המחשב הן סטודנטיות.

טענה ב': בכיתה זו התפלגות מגדרית זהה לסטטיסטיקה הכוללת.

מסקנה: שליש מהכיתה הזו הן סטודנטיות

- אבל יש להשתמש בהם בזהירות...

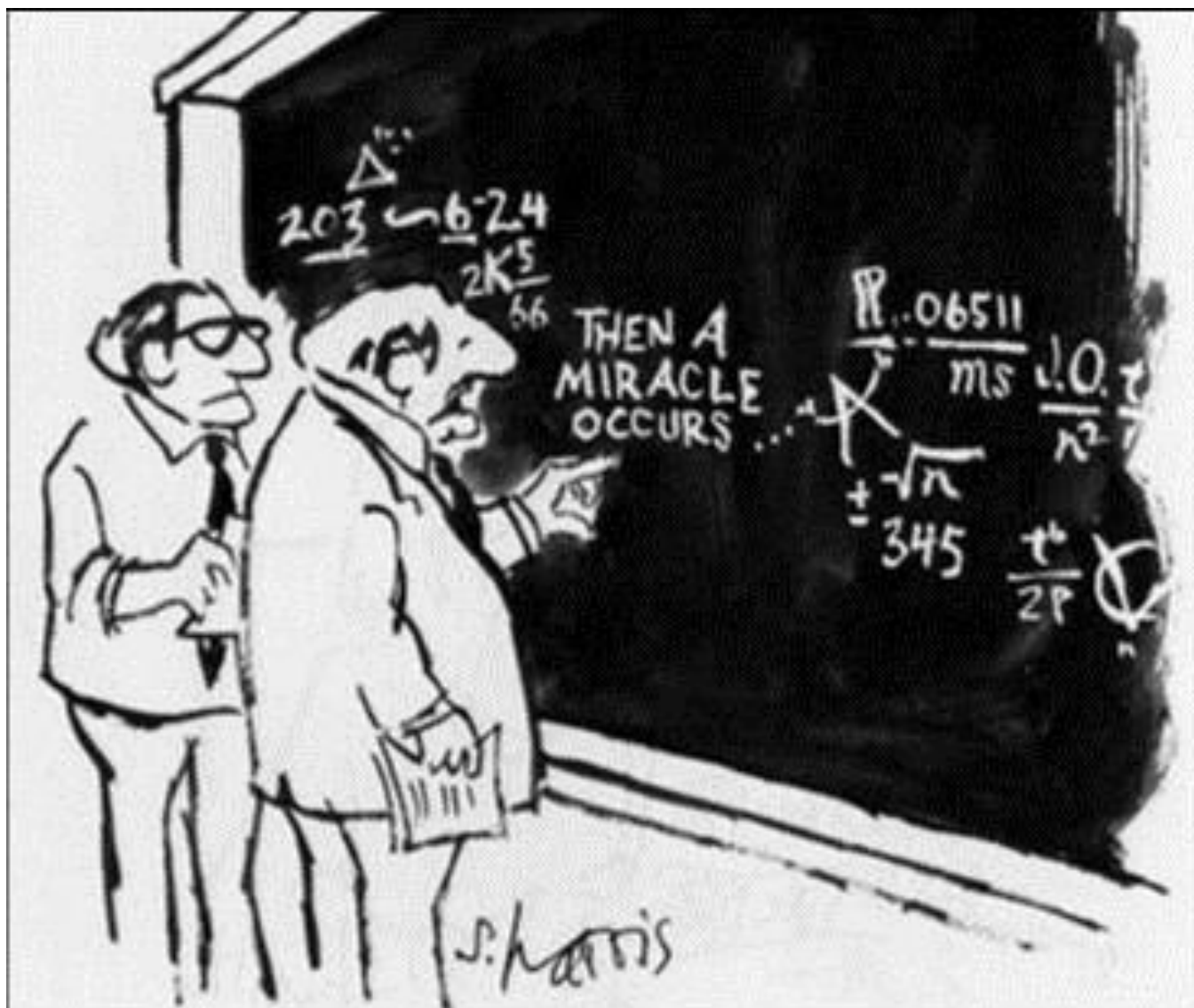
טענה א': כל הנוכחים בכיתה זו הם חלק מאוכלוסיית אונ' תל אביב.

טענה ב': חלק מאוכלוסיית האונ' אוהב שוקולד.

מסקנה: כל הנוכחים בכיתה זו אוהבים שוקולד.

סיכום

- חשיבה לוגית נחוצה לאנשי המדעים המדויקים, ובעיקר מתמטיקאים, מדעני מחשב ומהנדסים.
- לפעמים מבחינים בין **חשיבה לוגית** ל**חשיבה אלגוריתמית**, שגם היא "לחם חוקם" של אנשי מדעי המחשב
- בשנים האחרונות נפוץ המושג חשיבה חישובית (**computational thinking**), המשלב בין השניים.
- על כל אלו ועוד בקורסים "מתמטיקה בדידה" ו"לוגיקה". באופן פחות ישיר גם בשאר הקורסים, בעיקר התאורטיים.



"I think you should be more explicit here in step two."