$\boxed{2}$

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ DA

b) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

c) $(AB)^{-1} \neq A^{-1} B^{-1}$ NE
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

d) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
$(A^2)^{-1} = (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} A^{-1}$
$(A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1}$
DA

e) AB obrnljiva DA

f) $A+B$ obrnljiva

VEKTORSKI PROSTORI

Primer za uvod:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$:

① $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ komutativnost
$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ distributivnost

② za $\vec{0}$ velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ nevtralni el.

③ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ obstaja $-\vec{x}$, da $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
nasprotni vektor

④ $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

⑤ $\alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$

⑥ $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ distributivnosti
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

če bi vse vektorje v $\mathbb{R}^3$ "zapakirali v škatlo", imajo te lastnosti

množimo samo z realnimi št.

Realni vektorski prostor V je **množica elementov**, ki jih imenujemo **vektorji $v \in V$**, skupaj z dvema **notranjima** operacijama:

- **seštevanje** vektorjev $+$ $\quad (u, v \in V \Rightarrow u + v \in V)$
- **množenje** vektorjev s skalarji (realnimi št.) $\cdot$ $\quad (u \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in V)$

Ti dve operaciji imata **naslednje lastnosti**:

① $u + v = v + u$ komutativnost
$u + (v + w) = (u + v) + w$ asociativnost

② $u + 0 = u$ $\quad$ 0 je ničelni vektor in je en sam

③ za $\forall u \; \exists (-u)$:
$u + (-u) = (-u) + u = 0$ $\quad$ $-u$ je nasprotni vektor vektorja u

④ $1 \cdot u = u$

⑤ $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

⑥ $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

⑦ $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

za $\forall u, v, w \in V$ in $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Primeri vektorskih prostorov

① $\mathbb{R}^n$ $\quad 0 = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ + po komponentah, $\cdot$ po komponentah → vektorji z n komponentami ✓

② $\mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad$ + po elementih, $\cdot$ po elementih → matrike $m \times n$ ✓

③ $\mathcal{C}(a,b)$ ... zvezne fun. $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ $\quad$ za $\forall x \in (a,b)$

- notranji operaciji ✓
- lastnosti 1–7:
  - 1: ✓
  - 2: ničelna fun. $e(x) = 0$ ✓
  - 3: nasprotna fun. $-f = (-1) \cdot f$ ✓
  - 4, 5, 6, 7: ✓

→ množica **zveznih** fun. na $\mathcal{C}(a,b)$ ✓

④ $\mathbb{R}_n[x]$ ... množica **vseh polinomov** največ stopnje n z **realnimi koef.** ✓

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

$(p+q)(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x_1 + (a_0 + b_0)$

$(\alpha p)(x) = (\alpha a_n) x^n + \dots + (\alpha a_1) x_1 + \alpha a_0$

⑤ Množica vseh polinomov stopnje n ✗

b_n je lahko enak $-a_n$, dobimo polinom stopnje, manjše od n, in podobno naprej $\quad$ ni vektorski prostor

⑥ $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ $\quad$ + ✓ $\quad$ ✗

$\cdot$ ✗ ← ni notranja operacija, npr. $(-5) \cdot 5 = -25 \notin \mathbb{R}_0^+$ $\quad$ ni vektorski prostor

$\boxed{4}$

1: ✓

2: ničelni polinom ima vse koef. enake 0

$(p+0)(x) = (a_n + 0) x^n + (a_{n-1} + 0) x_0^{n-1} + \dots + (a_1 + 0) x + (a_0 + 0)$ ✓

3: nasprotni polinom: $(-a_n) x^n + (-a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (-a_1) x + (-a_0)$ ✓

4: ✓

5: ✓

6: ✓

7: ✓

Lastnosti vektorskih prostorov

V vsakem vektorskem prostoru V velja:

① $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\alpha u}_{\in V} + \underbrace{\beta v}_{\in V} \in V$$

→ vsaka lin. kombinacija vektorjev iz V je tudi v V

Za $v_1, \dots, v_n \in V$ imenujemo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ linearna kombinacija vektorjev $v_1, \dots, v_n$.

② $v \in V$, $0 \in \mathbb{R}$ (= realno št. 0) $\rightarrow$ $\underbrace{\overset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot v}_{\in V} = \overset{\in V}{0}$ PAZI!

★ Zakaj?

$$0 \cdot v \overset{0=0+0}{=} (0+0) \cdot v \overset{\text{distr.}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \quad \Big/ + (-0 \cdot v) \text{ (naspr. el.)}$$

$$\underbrace{0 \cdot v + (-0 \cdot v)}_{0} = 0 \cdot v + \underbrace{(0 \cdot v + (-0 \cdot v))}_{0} \leftarrow \text{asoc.}$$

$$0 = 0 \cdot v + 0$$
$$0 = 0 \cdot v$$
$$0 \cdot v = 0 \quad \blacksquare$$

③ $0 \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\alpha \cdot \underset{\in V}{0} = \underset{\in V}{0}$ ($\boxed{\text{⚡ 2}}$)

$(0+0)$ ✓

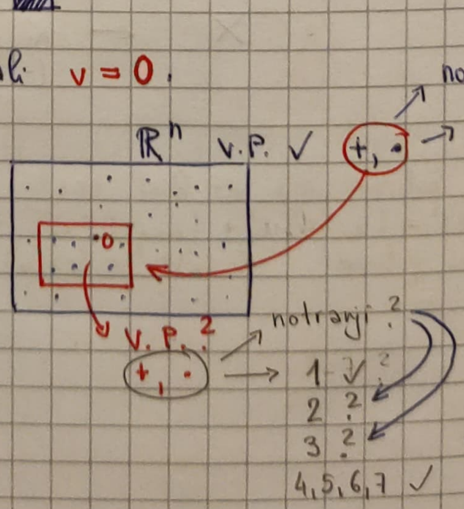
★ $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 \quad \Big/ + (-\alpha \cdot 0)$

$$\underbrace{\alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0)}_{0} = \alpha \cdot 0 + \underbrace{(\alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0))}_{0}$$

$$0 = \alpha \cdot 0 + 0$$
$$0 = \alpha \cdot 0$$
$$\alpha \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

④ Če $\alpha v = 0$, potem $\alpha = 0$ ali $v = 0$.

VEKTORSKI PODPROSTORI



$u+v = v+u$ ✓

$0+v = v$

preveriti moramo, če sta $+, \cdot$ notranji
⇒ če sta, imamo last. avtomatično

Naj bo V nek vektorski prostor.

Podmnožica $U \subseteq V$ je vektorski podprostor v V, če:

① $u_1, u_2 \in U \rightarrow u_1 + u_2 \in U$
($+$ je notr. operacija v U)

② $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha u \in U$
($\cdot$ je notr. operacija v U)

Vprašanja?

- Ali vsak vektorski podprostor vsebuje ničelni vektor?

DA. $u \in U \Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot u \in U$ (po 2.)

> !! Če neka množica NE vsebuje ničelnega vektorja, potem ta NI vektorski (pod)prostor.

- Ali ima vsak vektor v vektorskem podprostoru tudi nasprotni element v tem vektorskem podprostoru?

DA. $u \in U \Rightarrow -u = (-1)\,u \in U$

> Vsak vektorski podprostor je tudi vektorski prostor.

P

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{bmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Ali je A vektorski prostor? !

je vektorski prostor

$u, v \in A$ želimo:
- $u + v \in A$
- $\alpha u \in A$

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} z \\ w \\ -w \\ -z \end{bmatrix} \quad u+v = \begin{bmatrix} x+z \\ y+w \\ -y-w \\ -x-z \end{bmatrix} \in A \quad \begin{matrix} \\ \\ \to -(y+w) \checkmark \\ \to -(x+z) \checkmark \end{matrix}$$

+ vsota JE notranja operacija v A ✓

$$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ -\alpha y \\ -\alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ -(\alpha y) \\ -(\alpha x) \end{bmatrix} \in A \quad \checkmark \checkmark$$

- je notranja operacija v A ✓

> A je vektorski (pod)prostor. (v $\mathbb{R}^4$)

> **Trditev:** U podmnožica vektorskega prostora V.
>
> to vemo, da velja
>
> a) U zaprt za seštevanje in množenje s skalarjem ($\Leftrightarrow$ U vektorski podprostor v V)
>
> b) U zaprt za linearne kombinacije
>
> ali velja tudi v to smer?
>
> ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ že vemo, kaj pa ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ?
>
> $u_1, u_2 \in U$. Vemo: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$ za $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
>
> - ali $u_1 + u_2 \in U$? DA. $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1)$
> - ali $\alpha_1 u_1 \in U$? DA. $(\alpha_2 = 0) \rightarrow \alpha_1 u_1 + 0 \cdot u_2 = \alpha_1 u_1 \in U$ ▨

P Pokažite, da je $A \subseteq \mathbb{R}^4$ vekt. prostor s pomočjo trditve:

$u_1, u_2 \in A,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in A$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_1 \\ \alpha_1 b_1 \\ \alpha_1 c_1 \\ \alpha_1 d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 a_2 \\ \alpha_2 b_2 \\ \alpha_2 c_2 \\ \alpha_2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \\ \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 \end{bmatrix} \in A$$

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pravimo, da je **simetrična**, če velja $A^T = A$.

$A = [a_{ij}]: \quad a_{ij} = a_{ji}$ Npr. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow$ 1. stolpec je enak 1. vrstici itd.

P Ali je množ. $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n};\ A^T = A\}$ vektorski prostor?

a) • $A, B \in \mathcal{S}_n \rightarrow$ želimo pokazati $A + B \in \mathcal{S}_n$

$\Updownarrow$

$(A+B)^T = A + B$

$A^T = A$

$B^T = B$

$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ ✓

$\Rightarrow (A+B)^T = A + B$

$\Rightarrow A + B \in \mathcal{S}_n$

• $A \in \mathcal{S}_n \rightarrow$ želimo pokazati, da $\alpha A \in \mathcal{S}_n$

$\Updownarrow$

$(\alpha A)^T = \alpha A$

$A^T = A$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$ ✓

$\Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha A$

$\Rightarrow \alpha A \in \mathcal{S}_n$

b) $A, B \in \mathcal{S}_n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow$ želimo pokazati $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n$

$\Updownarrow$

$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B$

$A^T = A$

$B^T = B$

$(\alpha A + \beta B)^T = (\alpha A)^T + (\beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B$ ✓

$\Rightarrow (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n$

$\Rightarrow \mathcal{S}_n$ vekt. podprostor v $\mathbb{R}^{n \times n}$

Z 3 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $AX = 0$

Ali je množ. vseh X vekt. podprostor v $\mathbb{R}^{n \times p}$?

$X, Y \in N(A)$ Ali $\alpha X + \beta Y \in N(A)$?

$AX = 0,\ AY = 0$

$A(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X) + A(\beta Y) = \alpha \underbrace{AX}_{0} + \beta \underbrace{AY}_{0} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$ ■

V primeru $p = 1$ dobimo, da je za $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ množica:

$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, ki ga imenujemo **ničelni prostor matrike A**. (null space)

$\boxed{P}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Izračunajmo $N(A)$.

= rešujemo homogeni sistem A

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to x + y + 2z + w = 0$$

$II \leftarrow II + I$

$III \leftarrow III + (-2) I$

PROSTE SPREM.

$x = -y - 2z - w$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} ; x + y + 2z + w = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -y - 2z - w \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} ; y, z, w \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\boxed{P}$ $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ NI vek. podprostor v $\mathbb{R}^3$

Zakaj ni? Ker B ne vsebuje ničelnega vektorja → 1. element je fiksiran na 1.

$\boxed{P}$ $C = \{ A \in \mathbb{R}^{m\times n} ; \operatorname{rank}(A) \leq 2) \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ NI vek. podprostor v $\mathbb{R}^{m\times n}$

$C = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} ; \operatorname{rang}(A) \leq 2 \} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$

$C = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} ;$ A ni obrnljiva $\}$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \operatorname{rang} 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \in C$$

(to še ni dovolj)

Ker
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in C,\ \text{rang} = 2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in C,\ \text{rang} = 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\notin C,\ \text{rang} = 3} \notin C$$

$\Rightarrow$ C ni zaprt za +

$\Rightarrow$ C ni vektorski prostor

Naj bo V vektorski prostor in $v_1, \dots, v_k \in V$. Vzamemo množ. vseh lin. komb.:

$$\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \,;\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

To množico imenujemo **LINEARNA OGRINJAČA** vektorjev $v_1, \dots, v_k$.
(ang. linear span)

Linearna ogrinjača je tudi **vektorski podprostor** v V. Izkaže se tudi, da je lin. ogrinjača **NAJMANJŠI vektorski podprostor** v V, ki vsebuje vektorje $v_1, \dots, v_k$.

▶ Pravimo, da $v_1, \dots, v_k$ **razpenjajo/napenjajo lin. ogrinjačo**.

P Kaj je $\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

drugače ne bi vsebovala ničelnega vektorja $\Rightarrow$ ni podprostor

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+4\beta\\2\alpha+5\beta\\3\alpha+6\beta\end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Je pa tudi **ravnina skozi izhodišče**, ki vsebuje dana vektorja.

$$\vec{n} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix} \overset{/:-3}{=} \begin{bmatrix}+1\\-2\\+1\end{bmatrix}$$

ravnina: $x - 2y + z = 0$

P Katere matrike razpenjajo $\overset{\mathcal{S}_3}{S_3} = \{3\times3 \text{ simetrične matrike}\}$?

teh 6 matrik razpenja $\mathcal{S}_3$
ta nabor ni enoličen

$$\mathcal{S}_3 = \left\{\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix}; \; a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{L}\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2}\}$$

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \dots = a\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{E_{1,1}} + b\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{E_{1,2}+E_{2,1}} + c\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}}_{E_{1,3}+E_{3,1}} + d\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{E_{2,2}} +$$

$$+ e\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{E_{2,3}+E_{3,2}} + f\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{E_{3,3}}$$

LIN. KOMB. MATRIK