# LINEARNA ALGEBRA

**VEKTOR** v $\mathbb{R}^n$ je **n-terica števil.**

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

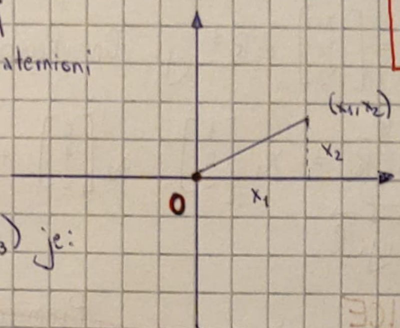
komponente / koordinate

(obstajajo tudi $\mathbb{C}^n$, $\{0,1\}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{H}^n$, ...)

kvaternioni

geometrijsko $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

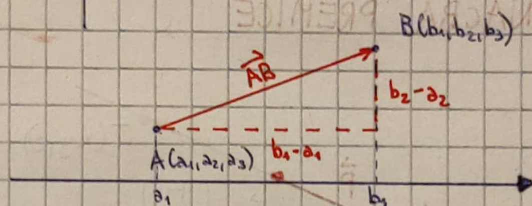
$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$




**KRAJEVNI VEKTOR** točke $A(a_1, a_2, a_3)$ je:

$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

koord. izhodišče $O(0,0,0)$




Vektor $\vec{AB}$ z začetno točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in končno točko $B(b_1, b_2, b_3)$ je:

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

**NIČELNI VEKTOR** $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$

$\|\vec{0}\| = 0 \qquad \vec{a} + 0 = 0 + \vec{a} = \vec{a}$

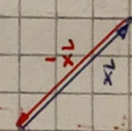
$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

**MNOŽENJE VEKTORJA S SKALARJEM**

Za $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot \vec{x} = \alpha\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

večkratnik vektorja

$0 \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 0x_1 \\ 0x_2 \\ \vdots \\ 0x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ ničelni vektor




$1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \qquad -\vec{x} = (-1)\vec{x}$ nasprotni vektor

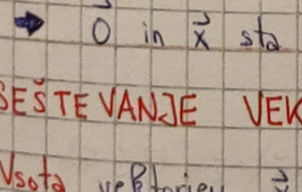
Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta **KOLINEARNA**, če $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ ali $\vec{y} = \beta\vec{x}$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (neka $\alpha, \beta$)

➡ $\vec{0}$ in $\vec{x}$ sta kolinearna za vsak $\vec{x}$

★ $\{\alpha\vec{x};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ je premica, napeta na $\vec{x}$, skozi izhodišče

**SEŠTEVANJE VEKTORJEV**

Vsota vektorjev $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ je $\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$.




LASTNOSTI:

1) komutativnost $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) asociativnost $\quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) distributivnost $\quad k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

(množ. s skal. v pov. z seštevanjem)

**LINEARNA KOMBINACIJA** vektorjev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je vektor, kjer $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

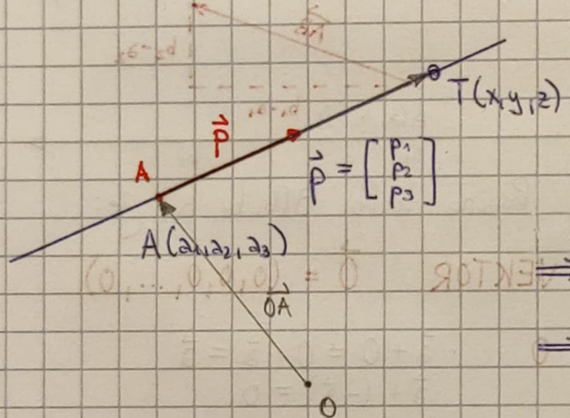
$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k$$

Primer: $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vsak vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ je lin. komb. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\underbrace{x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}}_{\text{lin. komb. } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{x}$$

## ENAČBA PREMICE




Premico $p$ določata:

- $\vec{p} \in p$ smerni vektor
- $A \in p$ točka na premici

**Kako določimo $T(x,y,z) \in p$?**

$\Longrightarrow \vec{OT} = \vec{OA} + t \cdot \vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ po komponentah:

$$\underbrace{p: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}_{\text{1 vektorska enačba}} \qquad p: \underbrace{\begin{aligned} x &= a_1 + t p_1 \\ y &= a_2 + t p_2 \\ z &= a_3 + t p_3 \end{aligned}}_{\text{3 enačbe po komponentah}}$$

Če $p_1, p_2, p_3 \neq 0$, lahko izrazimo $t$ iz vsake od treh enačb:

$$t = \frac{x - a_1}{p_1} = \frac{y - a_2}{p_2} = \frac{z - a_3}{p_3}$$

$$(t =) \frac{x - a_1}{p_1} = \frac{y - a_2}{p_2} = \frac{z - a_3}{p_3}$$

**KANONIČNA OBLIKA PREMICE**

Koef. pred $x, y, z$ je vedno 1

- $x, y, z$ neznanke (3 koordinate točke na premici)
- $p_1, p_2, p_3$ koordinate smernega vektorja
- $a_1, a_2, a_3$ koordinate znane točke na premici

Množenje vektorjev? Previdno!

| | skalarni produkt: $\vec{x} \cdot \vec{y}$ | vektorski produkt $\vec{x} \times \vec{y}$ | mešani produkt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ |
|---|---|---|---|
| za katere vek. obstaja? | v $\mathbb{R}^n$ | samo v $\mathbb{R}^3$ | samo v $\mathbb{R}^3$ |
| rezultat | $\mathbb{R}$ (skalar) | $\mathbb{R}^3$ (vektor) | $\mathbb{R}$ (skalar) |
| kaj merimo? | kote, $\perp$ | ploščine paralelogramov | prostornino paralelopipeda |
| uporaba | dolžine, ... | konstrukcija vektorja, ki je $\perp$ na dana vektorja | • determinante<br>• $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ substitucije |