MATRIKE

Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna tabela števil z m vrsticami in n stolpci

$$A = m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{n}\right. = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$\mathbb{R}^{m \times n}$ ... množica vseh matrik z m vrsticami in z n stolpci

Primeri:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}, \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} & & 3. & \end{array} \\ 1. & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & \pi \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

$a_{13} = 4$ ELEMENT

VRSTICA

STOLPEC

$V \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ je stolpec

$W \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vrstica

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

matriko samih ničel imenujemo ničelna matrika

Enakost matrik

Matriki $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ sta enaki, če:

① $m = p$ in $n = q$ (sta enako veliki),

② $a_{ij} = b_{ij}$ za vsak $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ (se ujemata v istoležnih elementih).

OPERACIJE Z MATRIKAMI

① Množenje matrike s skalarjem

Za $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

② Vsota matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+7 & 5+8 \\ 2+0 & 4+9 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 13 \\ 2 & 13 & 16 \end{bmatrix}$$

! Matriki morata biti enako veliki

Za matriki $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo vsoto kot:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

LINEARNA KOMBINACIJA MATRIK

Za $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ je $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k$ linearna kombinacija matrik $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

P

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ali obstajajo α, β, γ, da $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \beta & -\beta \\ -\beta & -2\beta & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 2\gamma & 0 \\ -\gamma & -2\gamma & \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta+\gamma & \alpha+\beta+2\gamma & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta-\gamma & -2\beta-2\gamma & \beta+\gamma \end{bmatrix}$$ 1 matrična enačba

Po komponentah dobimo 6 enačb s 3 neznankami. **LINEARNE ENAČBE**

$\beta+\gamma = 1$
$\alpha+\beta+2\gamma = 2$
$\alpha-\beta = 0$
$\alpha-\beta-\gamma = -3$
$-2\beta-2\gamma = -2 \quad | : (-2) \Rightarrow \beta+\gamma = 1$
$\beta+\gamma = 1$

$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$
$\beta+\gamma = 1$
$\alpha-\beta-\gamma = -3$

$\alpha - \alpha - \gamma = -3$
$\gamma = 3$

$\beta = 1-\gamma = 1-3 = -2 = \alpha$

$\alpha+\beta+2\gamma = -2-2+6 = 2$ ✓

$\alpha = \beta = -2, \ \gamma = 3$ Sistem je rešljiv, zato

$M = -2A - 2B + 3C = (-2)\cdot A + (-2)\cdot B + 3\cdot C$
$\Rightarrow$ M je lin. komb. A, B, C

Lastnosti seštevanja in množenja s skalarjem

① $A+B=B+A$ Komutativnost seštevanja

★ $[A+B]_{ij} = \underset{\uparrow \atop \mathbb{R}}{A_{ij}} + \underset{\uparrow \atop \mathbb{R}}{B_{ij}} = B_{ij} + A_{ij} = [B+A]_{ij}$

$(A+B)+C = A+(B+C)$ asociativnost seštevanja

② $A+0=A=0+A$ nevtralni element za seštevanje

★ $[A+0]_{ij} = A_{ij}+0 = A_{ij}$

③ $A+\underbrace{(-1)A}_{-A}=0$ nasprotni/inverzni element za seštevanje

Komutativna grupa

④ $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A$

⑤ $1\cdot A = A$
$0\cdot A = 0$

⑥ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ distributivnostna zakona

★ $[\alpha(A+B)]_{ij} = \alpha(A_{ij}+B_{ij}) = \alpha A_{ij} + \alpha B_{ij} = [\alpha A + \alpha B]_{ij}$

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

★ $[(\alpha+\beta)A]_{ij} = (\alpha+\beta)A_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta A_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$

Transponiranje matrik

Za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je njena transponiranka A^T:

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T \end{array} = \begin{array}{cc} & 2 \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Če transponiramo stolpec, dobimo vrstico in obratno.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\not{1}}$ $(A^T)^T$ $A=[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A^T=[a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\Rightarrow$ $([a_{ji}])^T = [a_{ij}] = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$A+B = [a_{ij}+b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $[a_{ij}+b_{ij}]^T = [a_{ji}+b_{ji}] = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ $[\alpha a_{ij}]^T = [\alpha a_{ji}] = \alpha \cdot A^T$

MNOŽENJE MATRIK (posplošenje skal. produkta vektorjev)

Vektorji: $\vec{a} = [1, 2, 3]^T$, $\vec{b} = [4, 5, 6]^T$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$

Matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot B = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32 \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\uparrow}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \underset{\uparrow}{\vec{a}^T \vec{b}}$$

skal. prod. $\qquad$ matrični prod.

$$A^T = \begin{array}{c c} & 3 \\ 2 & \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & 1 \\ 3 & \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

skal. prod.

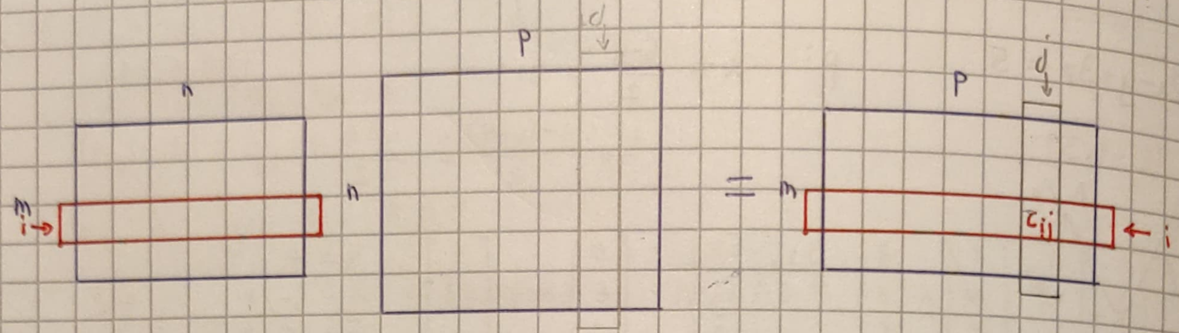
$$A^T \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6} \\ \boxed{-1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6} \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & 1 \\ 2 & \begin{bmatrix} 32 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

skal. prod.

Št. stolpcev A^T mora biti enako št. vrstic B!

Za matriki $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ je njun **produkt**:

$C = A \cdot B = AB = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times p}$ definiran kot *



$$* \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

POGOJ ZA MNOŽ. MATRIK: št. stolpcev prve matrike mora biti enako št. vrstic druge matrike!

P $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB,\ BA,\ A^T B,\ AB^T$

AB: ne moremo izračunati $\qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BA: lahko izračunamo

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + \cancel{0 \cdot 3} & 1 \cdot 2 + \cancel{0 \cdot (-2)} & \cancel{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1} \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & \underbrace{-3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)}_{-6-2} & \cancel{-3 \cdot 0} + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^T B$: lahko izračunamo

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

AB^T: ne moremo izračunati

Z2 ① $A, B \qquad AB = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

② $C, D \qquad CD \neq DC$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad CD = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 & 1 \cdot 9 + 4 \cdot 7 \\ 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 & 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 27 \\ 36 & 39 \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} 6 \cdot 1 + 9 \cdot 2 & 6 \cdot 4 + 9 \cdot 3 \\ 8 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 8 \cdot 4 + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 51 \\ 22 & 53 \end{bmatrix} \qquad CD \neq DC$$

③ $E, F, G \qquad EG = FG, \quad E \neq F$

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$EG = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad FG = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEKTOR NEZNANKA

P Ali obstaja $[x\ y\ z]^T$, da je $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -1\end{bmatrix}$?

MATRIKA SISTEM (KOEFICIENTI) — DESNA STRAN SISTEMA

$\Rightarrow \begin{bmatrix}x+2y\\ 3x-2y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -1\end{bmatrix} \iff \begin{cases} x+2y=8\\ 3x-2y+z=-1\end{cases}$ sistem 2 linearnih enačb s 3 neznankami

REŠEVANJE SISTEMA LINEARNIH ENAČB

Sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1,\dots,x_n$ je:

$$m \text{ enačb}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\ \vdots\\ \underbrace{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m}_{n \text{ neznank}}\end{cases}$$

* ali krajše: $A\vec{x}=\vec{b}$ (matrični sistem)

Sistemu priredimo matriko sistema z n stolpci in m vrsticami:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$ matrika sistema

$\quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$

$$\vec{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$ desna stran sistema

Vrstice lahko menjamo, ker ne spremenijo rešitev sistema.

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$ vektor neznank

Razširjena matrika sistema

$[A \,\vdots\, b]$ $m\times(n+1)$ razširjena matrika sistema

Rešitve sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ se NE spremenijo, če:

1. zamenjamo dve enačbi
2. enačbo pomnožimo z neničelnim številom
3. enačbi prištejemo večkratnik druge enačbe

(2)
$2x+4y=8$ $/:2$
$x+2y=4$ $/\cdot 2$

(3)
$x+2y=4$ $/\cdot 2$
$-2x+6y=-2$ $+$

$0\cdot x+10y=6$
$5y=3$

Če katero izmed teh operacij izvajamo na razširjeni matriki sistema $[A\,\vdots\, b]$, se rešitve $\vec{x}$ sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ NE spremenijo.

E1 menjava dveh vrstic matrike
E2 vrstico pomnožimo z neničelnim številom
E3 vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice

} Gaussove elementarne operacije ⟿ GAUSSOVA ELIMINACIJA

Algoritem

linearni sistem $A\vec{x}=\vec{b} \rightarrow [A \mid \vec{b}]$

GAUSSOVA ELIMINACIJA (zaporedje Gaussovih el. operacij)

CILJ: veliko ničel v matriki, dovoljene operacije E1, E2, E3

$[C \mid \vec{d}]$

$C\vec{x}=\vec{d}$

ista rešitev!

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 0 \quad 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 0 \quad 0 \quad x_3 &= 8 \end{aligned}$$

P

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2y-z&=-3 \\ 2x+y+z&=4 \end{aligned}$$

POMEMBEN PRIMER!

Splošni recept za reševanje

Razširjena matrika:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} = [A \mid \vec{b}]$$

$1 \cdot (-2)$, +

najbolje, če dobimo največ ničel nad/pod diagonalo

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{1\cdot 2,\ +} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

x samo še v prvi enačbi

(E3) $v_3 \leftarrow v_3 + (-2)v_1$

(E1) $v_2 \leftrightarrow v_3$

(E3) $v_3 \leftarrow v_3 + 2v_2$

x v 1. enačbi

y v 1. in 2. enačbi

z v 3. enačbi

PIVOTI

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\text{rang}(A) = 3$

$\text{rang}[A \mid \vec{b}] = 3$

$1 \cdot z = 1 \Rightarrow z = 1$

način 1: z vstavljanjem od spodaj navzgor dobimo rešitev:

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ -y+z&=2 \\ z&=1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z=1$, $-y+1=2 \Rightarrow y=-1$, $x=2$

$x=2,\ y=-1,\ z=1$

način 2: nadaljujemo GE

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ x \quad y \quad z \quad \end{array}$$

same ničle, če pristevamo 3. enačbo se spreminjajo samo 3. el.

$v_2 \leftarrow v_2 + (-1)v_3$

$x=2,\ -y=1,\ z=1$

$\Downarrow$

$x=2,\ y=-1,\ z=1$

P

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2y-2z&=-3 \\ 2x+y+z&=4 \end{aligned}$$

$\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}[A \mid \vec{b}] = 3$

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$v_3 \leftarrow v_3 - 2v_1$ $\quad v_2 \leftrightarrow v_3$ $\quad v_3 \leftarrow v_3 + 2v_2$

same ničle

neničelno št.

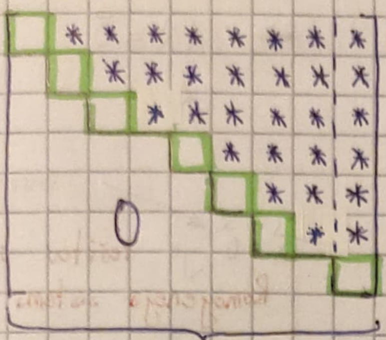
$\rightarrow 0x + 0y + 0z = 1$

$\boxed{0 = 1}$

SISTEM NIMA REŠITEV!

CILJ GAUSSOVE ELIMINACIJE

$[A \mid \vec{b}] \rightarrow$



vrstično stopničasta oblika $[A \mid \vec{b}]$

$*$ ... karkoli

$\square$ ... pivoti, ki jih dobimo po G.E. v vrstično stopničasti obliki

$\Rightarrow$ pivoti $\neq 0$

rang $[A \mid \vec{b}]$ ... št. pivotov v vrstično stopničasti obliki $[A \mid \vec{b}]$

= št. neničelnih vrstic v vrstično stopničasti obliki $[A \mid \vec{b}]$

$A\vec{x} = \vec{b}$

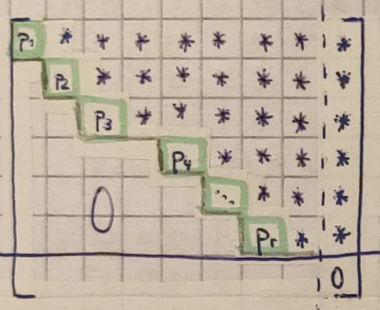
Če rang $(A) <$ rang $[A \mid \vec{b}]$, potem ta sistem nima rešitev.

Če rang $(A) =$ rang $[A \mid \vec{b}]$, potem ta sistem ima rešitev:

a) z vstavljanjem od spodaj navzgor poiščemo rešitev

b) nadaljujemo GE in s pivoti postavimo elemente nad pivoti na 0

$\Rightarrow$ dobimo REDUCIRANO vrstično stopničasto obliko



$r = \text{rang}(A)$

$p_r x_n = *$

$p_{r-1} x_{n-1} = *$

$\vdots$

$p_1 x_1 + * x_4 + * x_n = *$

v stolpcih, kjer nimamo pivotov, ni veznih pogojev med temi neznankami

GLAVNE NEZNANKE (v stolpcih, kjer imamo pivote)

tem neznankam pravimo PROSTE NEZNANKE

št. prostih neznank $= n - \text{rang}(A) = \underline{n - r}$

n: št. neznank (vseh)

$n - r$: toliko parametrov se nam bo pojavilo v končni rešitvi

---

$\boxed{P}$

$$
\begin{aligned}
x + y &= 1 \\
2y - 2z &= -4 \\
2x + y + z &= 4
\end{aligned}
$$

$$
[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 \leftarrow v_3 - 2v_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{v_2 \leftrightarrow v_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 \leftarrow v_3 + 2v_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

glavni neznanki, prosta spremenljivka

rang $A = 2$ = rang $[A \mid \vec{b}]$

$$
\xrightarrow{v_1 \leftarrow v_1 + v_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
x + z &= 3 \Rightarrow \\
-y + z &= 2 \Rightarrow
\end{aligned}
\quad
\boxed{\begin{aligned} x &= 3 - z \\ y &= z - 2, \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}}
$$

glavni, prosta

z je poljuben $\rightarrow$ neskončno rešitev

HOMOGEN SISTEM LIN. ENAČB

Sistem enačb $A\vec{x}=\vec{b}$ je homogen, če $\vec{b}=\vec{0}$. $\Rightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$

$[A \mid \cancel{\vec{0}}]$ razširjena matrika sistema

$\downarrow$ po G.E. ničle se ohranjajo

$[C \mid \cancel{\vec{0}}]$

! opuščali bomo desno stran

$\vec{x}=\vec{0}$ je rešitev vsakega homogenega sistema

TRIVIALNA REŠITEV

Vsak homogen sistem je vedno rešljiv.