Bacheliers en Sciences Mathématiques et Physiques, bloc 1
MATHF102: Séance 22, lundi 13 et mardi 14 février 2017

1. Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'opérateur linéaire défini par
$$A((1,0)) = (4,2) \quad \text{et} \quad A((0,1)) = (-1,1).$$
Écrire la matrice de A dans les bases suivantes, ainsi que les matrices de changement de bases:
   (a) $E := \{(1,0),(0,1)\}$
   (b) $F := \{(1,2),(1,1)\}$.

   Les calculs effectués permettent-ils de donner une représentation géométrique simple de l'opérateur A? A est-il un opérateur linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$?

2. On considère l'opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par
$$A((x,y,z)) := (x-y+2z, 3x+2y-z, 4x+y+z) \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Écrire la matrice de A dans la base canonique et dans la base $F := \{f_1, f_2, f_3\}$, ainsi que les matrices de changement de bases, où $f_1 := (1,1,0), f_2 := (2,-3,0), f_3 := (1,2,3)$.

3. Trouver deux matrices a et b à coefficients réels telles que
$$2a+b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad 3a-5b = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Trouver deux matrices $a, b \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telles que
   (a) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, $ab \neq 0$, $ba \neq 0$ et $ab \neq ba$;
   (b) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, et $ab = ba \neq 0$;
   (c) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, et $ab \neq 0$ et $ba = 0$;
   (d) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, et $ab = ba = 0$.

5. La matrice réelle
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
est-elle inversible? Si oui, quelle est sa matrice inverse?

6. Si une matrice $a \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vérifie l'équation
$$a^2 + a + I = 0$$
où I est la matrice identité de taille $n\times n$, prouver que a est inversible. Que vaut a^{-1}?

7. Calculer l'inverse des matrices réelles suivantes en utilisant la méthode de Gauss:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -1 \\ -\beta & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$