ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

Liste 1 – Espaces mesurables

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et Y un sous-ensemble de X. Montrer que

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$$

est une σ-algèbre sur Y.

Exercice 2.

1. Soit X un ensemble infini. Décrire la σ-algèbre engendrée par la classe des parties finies de X. Que peut-on dire si X est fini ?
2. Dans $X = \{0, \cdots, n\}$ on considère $\mathcal{A} = \{0\}$ et $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Décrire la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et celle engendrée par $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Soient X et Y des ensembles et $f : X \mapsto Y$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{A}'$ est une σ-algèbre sur Y, alors $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}'\}$ est une σ-algèbre sur X.
2. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X.
   (a) Montrer que $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une σ-algèbre sur Y.
   (b) Que pouvez-vous dire de l'ensemble $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$?

Exercice 4. Soient $(X, \mathcal{A}_1)$ et $(Y, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. On dit que $f : X \to Y$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ pour chaque $B \in \mathcal{A}_2$. Montrer que si $\mathcal{A}_2$ est la σ-algèbre engendrée par une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ pour chaque $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 5. Soit X un ensemble. Une collection $\mathcal{D}$ de parties de X est une classe de Dynkin si

— $X \in \mathcal{D}$,
— si $A \in \mathcal{D}$, alors $A^c \in \mathcal{D}$,
— si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ deux à deux disjoints, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

1. Montrer que toute intersection non-vide de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.
2. En déduire que pour tout $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) classe de Dynkin contenant $\mathcal{F}$. On la note $\lambda(\mathcal{F})$.
3. Montrer que si $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin stable par intersection finie, alors $\mathcal{D}$ est une σ-algèbre.
4. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est stable par intersection finie, montrer que $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

   Suggestion : Pour $D \in \lambda(\mathcal{F})$, montrer que $\mathcal{D}_D = \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) : Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\}$ est une classe de Dynkin. Ensuite utiliser les points 2 et 3.