

## Valeurs et vecteurs propres

**Exercice 1.** Si  $\lambda$  est une valeur propre d'une matrice carrée  $a$ ,  $\lambda^n$  est-il une valeur propre de  $a^n$  pour tout entier positif  $n$  ?

**Exercice 2.** Soit  $W$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  engendré par les fonctions  $f(x) = \sin x$  et  $g(x) = \cos x$ . L'opérateur linéaire  $A$  qui applique tout élément de  $W$  sur sa dérivée a-t-il des vecteurs propres non-nuls ?

**Exercice 3.** Dans l'espace vectoriel réel  $V$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on considère l'opérateur linéaire  $A$  appliquant toute fonction  $f \in V$  sur la fonction  $A(f)$  définie par

$$(A(f))(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur  $A$  ?

**Exercice 4.** Dans l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$ , on considère l'opérateur linéaire  $A$  dont la matrice dans la base canonique s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calculer les valeurs propres de  $A$  et la dimension des sous-espaces propres correspondants.
- (b)  $A$  est-il diagonalisable ? Dans l'affirmative, décrire une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice  $A$  est diagonale.
- (c) Que vaut le rang de l'opérateur  $A - 2Id_{\mathbb{R}^3}$  ?  $A$  est-il inversible ? Quelles sont les valeurs propres de l'opérateur  $A^{10}$  ?

**Exercice 5.** Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle

$$a = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En utilisant les résultats obtenus, calculer  $a^n$  aussi simplement que possible.

**Exercice 6.** La matrice triangulaire

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

à coefficients dans un corps commutatif  $K$  est-elle diagonalisable ?