ULB **2018/2019**

MATHF214 - Compléments de mathématiques

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paolo Roselli

Liste 2 – Fonctions d'une variable complexe

Exercice 1 (Fonctions holomorphes)**.** Parmi les fonctions suivantes de la variable complexe $z = x + iy$, déterminer quelles sont les fonctions holomorphes et préciser leur domaine.

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+9}$.

b) $f(z) = z|z|^2$.

c) $f(z) = x^2 + iy^2$.

d) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

e) $f(z) = e^y e^{ix}$.

f) $f(z) = e^{-y} e^{ix}$.

Exercice 2 (Fonctions anti-holomorphes)**.** On dira que une fonction f de la variable complexe $z = x + iy$ est *anti-holomorphe* si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (on rappelle que l'opérateur ∂_z est défini par $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$.

1. Prouver que $f(x, y) = (e^x \sin(y), e^x \cos(y))$ est anti-holomorphe.
2. Prouver que f est anti-holomorphe si et seulement si ses parties réelle et imaginaire P et Q satisfont le système suivant d'équations aux dérivées partielles (*anti-équations de Cauchy-Riemann*) :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$
3. On donne la fonction $conj(z) := \bar{z}$. Prouver que $f \circ conj$ est anti-holomorphe si et seulement si f est holomorphe.
4. Prouver que si f est holomorphe ou anti-holomorphe, alors P et Q satisfont *l'équation de Laplace,* i.e.,
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 3 (Calcul d'intégrales)**.** Calculer les inégrales suivantes. Commencez toujours par faire un dessin !

1. $\displaystyle\int_\Gamma z^2\,dz$ où
   a) Γ est la portion de parabole $z = t^2 + it$, où $t \in [-1, 1]$;
   b) Γ est le segment de droite allant du point $1 - i$ au point $1 + i$.
2. $\displaystyle\int_\Gamma (y - x - 3ix^2)\,dz$ où
   a) Γ est la portion de parabole $z = t^2 + it$ où $t \in [0, 1]$;
   b) Γ est constituée du segment de droite allant du point $z = 0$ au point $z = i$ et du segment de droite allant du point $z = i$ au point $z = 1 + i$.
3. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et Γ est le cercle $|z - z_0| = R$ orienté dans le sens trigonométrique.
4. $\displaystyle\int_\Gamma \overline{z}e^z\,dz$ où Γ est le cercle $|z| = r$ orienté dans le sens trigonométrique.
5. $\displaystyle\int_\Gamma |1 + z|\,dz$ où Γ est le cercle $|z| = 1$ orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice 4. Soit

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}},$$

où $\arg(z) \in [0, 2\pi[$, la branche principale de la racine carrée de z. Calculer l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz$$

où

a) C est le cercle $|z| = R$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique ;

b) C est le chemin fermé constitué comme suit :
- — le segment allant du point 1 au point 4 de l'axe réel ;
- — le quart de cercle $|z| = 4$ où $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$;
- — le segment allant du point $4i$ au point i de l'axe imaginaire ;
- — le quart de cercle $|z| = 1$ où $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$.