Déterminants

Exercice 1. Soit K un corps commutatif. Si $a, b, c, d \in M_{n\times n}(K)$, est-il vrai que

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det(a)\det(d) - \det(b)\det(c) \text{ ?}$$

Exercice 2. Soit K un corps commutatif et soit $a \in M_{2\times 2}(K)$, prouver que l'application

$$A : M_{2\times 2}(K) \to M_{2\times 2}(K), \;\; x \mapsto ax$$

est un opérateur linéaire de $M_{2\times 2}(K)$.
Que vaut le déterminant de cet opérateur ?
À quelle condition A est-il inversible ?

Exercice 3. Soit K un corps commutatif, et soit $a \in M_{n\times n}(K)$. On appelle *trace* de a, et on note $\mathrm{tr}(a)$, la somme des éléments diagonaux de a :

$$\mathrm{tr}(a) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Prouver que pour tout $a, b \in M_{n\times n}(K)$,

$$\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba).$$

(b) Montrez que si b est inversible,

$$\mathrm{tr}(b^{-1}ab) = \mathrm{tr}(a).$$

(c) Si A est un opérateur linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur K, la trace de la matrice de A dans une base de V dépend-elle du choix de cette base, autrement dit la trace est-elle un invariant de l'opérateur ?

Corps commutatifs

Exercice 4. Dresser les tables d'addition et de multiplication des corps finis

(a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.