Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Thibaut Grouy et Robson Nascimento

**Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2016/2017**

*Séance 10 - Séries de Fourier*

**Exercice 1.** On considère la fonction $2\pi$-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = x^2.$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

b) En déduire la valeur des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

c) Vérifier grâce aux coefficients de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

**Exercice 2.** Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On note $f$ la fonction $2\pi$-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \qquad f(x) = e^{ax}.$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier de $f$.

b) En déduire la valeur de

$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2},$$

puis celle de

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

c) Montrer que $I(a)$ admet une limite quand $a$ tend vers $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

**Exercice 3.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in ]-\pi, \pi], \qquad f(t) = \cos(\alpha t).$$

2. En déduire que
$$\operatorname{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

**Exercice 4.** Soit $a > 0$

a) Réécrire sous forme de série géométrique la fonction d'une variable complexe
$$f(z) := \frac{1}{z + e^a},$$
lorsque $|z| < e^a$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{1}{\cos x + \cosh a} = \frac{1}{\sinh a}\Big(\frac{e^a}{e^{ix} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix} + e^{-a}}\Big).$$

c) En déduire la série de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique $g$ définie par
$$g(x) := \frac{1}{\cos x + \cosh a}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

*Indication.* Écrire $f(e^{ix})$ et $\frac{1}{e^{ix}+e^{-a}} = \frac{e^{-ix}}{1+e^{-ix}e^{-a}}$ sous forme de séries.