ULB Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Paul Godin
Assistants : Julie Distexhe et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2013/2014

Séance 6 - Équations différentielles

Exercice 1. Une équation différentielle du type

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

est dite **homogène de degré** n si $f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n f(t, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette condition est satisfaite si et seulement si

$$f(t, y) = t^n F\left(\frac{y}{t}\right)$$

pour une certaine fonction F.

2. Trouver un changement de fonction inconnue permettant de ramener une équation homogène de degré 0 à une équation à variables séparées.
3. Résoudre les équations

$$y' = \frac{y}{y-t}, \quad y' = \frac{y}{t - 2\sqrt{ty}}.$$

Exercice 2. Une **équation de Bernoulli** est une équation différentielle du type

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)y^\alpha,$$

où a et b sont des fonctions de t et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le changement de fonction $u = y^{1-\alpha}$ permet de ramener une équation de Bernoulli à une équation linéaire.
2. Résoudre l'équation

$$y' = \frac{y}{t}(y \ln|t| - 1).$$

Exercice 3. Considérons l'équation différentielle

$$(y - \sin t)' - y(y - \sin t) = 0.$$

1. Trouver une solution particulière y_p de cette équation.

2. Montrer que le changement de fonction

$$u = \frac{1}{y - y_p}$$

permet de se ramener à l'équation différentielle linéaire

$$u' = -u \sin t - 1,$$

et résoudre cette équation.

Exercice 4. Lorsque l'on étudie le mouvement d'un point matériel pesant soumis à une résistance de l'air fonction de la vitesse, on peut montrer que l'équation différentielle de l'hodographe des vitesses est

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta + R(r)}{\cos\theta}$$

où r, θ sont des coordonnées polaires et R est la fonction caractérisant le type de résistance.

Résoudre l'équation différentielle pour $R = kr^{\alpha}$. Quelle est la nature de l'hodographe des vitesses lorsque $R(r) = kr$?

Exercice 5 (Equation d'Euler)**.** Résoudre l'équation différentielle

$$y'' = \frac{(a + b - 1)}{t} y' - \frac{ab}{t^2} y \tag{1}$$

où a, b sont des constantes.
Aide : considérer la nouvelle variable $\tau = \ln t$.