

TP3 : COMBINATOIRE

1. De combien de manières peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier dans un comité de dix membres (les fonctions ne peuvent pas être cumulées) ?
2. Si un numéro de plaque d'automobile doit toujours comporter 3 lettres suivies de 3 chiffres et si le premier des 3 chiffres ne peut jamais être zéro, combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?
3. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres *différentes* qui commencent par une consonne et qui alternent ensuite consonne-voyelle ?
4. Combien y a-t-il de nombres impairs à 4 chiffres n'ayant aucun chiffre qui se répète ?
5. Combien y a-t-il de nombres pairs à 4 chiffres n'ayant aucun chiffre qui se répète ?
6. De combien de manières peut-on aligner dix délégués de dix pays différents (incluant l'Angleterre, l'Irlande, la Grèce et l'Allemagne)
 - a) sans contrainte supplémentaire ;
 - b) si l'anglais et l'irlandais exigent d'être côte à côte ;
 - c) si l'anglais, l'irlandais et le grec exigent d'être côte à côte ;
 - d) si le grec et l'allemand refusent d'être côte à côte.
7. De combien de manières peut-on former une équipe de 3 garçons et 3 filles à partir d'un ensemble de 55 garçons et 62 filles ?
8. Chacun des "mots" du code génétique est formé de 3 des symboles A (adénine) C (cytosine) G (guanine) et T (thymine), un même symbole pouvant être répété plusieurs fois. Combien l'alphabet génétique comprend-il de mots ?
9. De combien de manières différentes peut-on disposer un groupe de 5 garçons et 5 filles pour une photographie si les garçons doivent s'asseoir côte à côte, les 5 filles se tenant debout derrière eux ?
10. Lister tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
11. Justifier les deux identités suivantes :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ si } 1 \leq k \leq n-1.$$

12. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Développer le produit $(x + y)^5$.
13. Dans le développement de $(2x - 1)^{10}$, que vaut le coefficient du terme en x^8 ?
14. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$