ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

LISTE 12 – THÉORÈME DE RADON-NIKODYM

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $g : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable non négative. Définissons ν sur $(X, \mathcal{A})$ par $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$ pour $A \in \mathcal{A}$. Montrer que pour $f \geq 0$ mesurable,

$$\int_X f \, d\nu = \int_X fg \, d\mu.$$

En conclure que le résultat est valable pour $f \in L^1(\nu)$.

Exercice 2 (Dérivées de Radon-Nikodym)**.** Soient μ, ν et m mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$. Montrer les affirmations suivantes :

a) Si $\mu \ll m$ et $\nu \ll m$, alors $\mu + \nu \ll m$ et

$$\left[\frac{d(\mu+\nu)}{dm}\right] = \left[\frac{d\mu}{dm}\right] + \left[\frac{d\nu}{dm}\right] \quad m\text{-p.p.}$$

b) Si $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll m$, alors $\mu \ll m$ et

$$\left[\frac{d\mu}{dm}\right] = \left[\frac{d\mu}{d\nu}\right] \left[\frac{d\nu}{dm}\right] \quad m\text{-p.p.}$$

c) Si $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$, alors

$$\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] = \left[\frac{d\mu}{d\nu}\right]^{-1}.$$

d) Si $\nu \ll \mu$ et f est ν-intégrable, alors

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] \, d\mu.$$

Exercice 3. Soient μ_i, ν_i des mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ avec $\mu_i \ll \nu_i$ pour $i = 1, 2$. Posons $\nu = \nu_1 \times \nu_2$ et $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ les mesures produits sur $(X \times X, \mathcal{A} \times \mathcal{A})$. Montrer les affirmations suivantes :

a) $\mu \ll \nu$.

b)

$$\left[\frac{d\mu}{d\nu}(x,y)\right] = \left[\frac{d\mu_1}{d\nu_1}(x)\right] \left[\frac{d\mu_2}{d\nu_2}(y)\right] \quad \nu\text{-p.p.}$$