ULB **2018/2019**

MATHF214 - Compléments de mathématiques

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paolo Roselli

Liste 5 – Opérateurs Linéaires

Exercice 1. Montrer que la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x+\frac{i}{2})^2}$$

est fonction propre de l'opérateur A défini par

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + ix$$

avec la valeur propre $\frac{5}{4}$.

Exercice 2. Dans l'espace $\mathcal{X} = \{f \in C^\infty([0,\pi]),\ f(0) = f(\pi) = 0\}$, on considère l'opérateur

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

a) Cet opérateur est-il hermitien ?

b) Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 3. Dans l'espace $\mathcal{Y} = \{f \in C^\infty([-\pi,\pi]),\ f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi) = f'(\pi)\}$, on considère l'opérateur

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

a) Cet opérateur est-il hermitien ?

b) Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 4. Dans l'espace $\mathcal{Z} = \{f \in C^\infty([0,\pi]),\ f(0) = f(\pi) = 0\}$, on considère l'opérateur

$$A = 2ix\frac{d}{dx} + i.$$

Cet opérateur est-il hermitien ?

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{V} = \{f \in C^\infty([-\pi,\pi]),\ f(-\pi) + f(\pi) = 0\}$, muni de l'application $\langle .,. \rangle_{x^2} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\langle f,g \rangle_{x^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}x^2 dx$$

et l'opérateur

$$A = i\frac{d}{dx} + \frac{i}{x}.$$

a) Montrer que $\langle .,. \rangle_{x^2}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{V}$.

b) L'opérateur A est-il hermitien ?

c) Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 6. Dans l'espace $\mathcal{W} = \{f \in C^\infty([-\pi, \pi]),\ f(-\pi) = f(\pi) = 0\}$, on considère l'opérateur

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + 2i\frac{d}{dx} + 1.$$

a) Cet opérateur est-il hermitien ?

b) Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel

$$\mathcal{E} = \{f \in C^\infty([-\pi/2, \pi/2]),\ f(-\pi/2) = f(\pi/2)\},$$

muni de l'application $\langle .,. \rangle_* : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\langle f, g \rangle_* = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\overline{g(x)}(3 - x^2)^2 dx$$

et l'opérateur

$$A = -\frac{d}{dx} + \frac{2x}{3 - x^2}.$$

a) Montrer que $\langle .,. \rangle_*$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

b) L'opérateur A est-il hermitien ?

c) Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.