ULB Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Thibaut Grouy et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2016/2017

Séance 13 - Analyse complexe

Exercice 1.

a) Soit D un sous-ensemble convexe de $\mathbb{C}$, soient γ_1, γ_2 deux lacets dans D. Montrer que γ_1 et γ_2 sont homotopes en tant que lacets.

b) Montrer que tout domaine étoilé de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

c) Montrer que l'anneau $A := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ n'est pas simplement connexe.

Indication : utiliser un des corollaires du théorème de Cauchy.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_\gamma z dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma \bar{z} dz$$

lorsque

(i) $\gamma(t) := t + it^2$ pour $t \in [0, 1]$,

(ii) γ paramétrise le segment allant de 0 à $1 + i$.

Exercice 3. Calculer l'intégrale le long de γ parcourant une fois le cercle de centre 0 et de rayon $R > 0$, dans le sens positif,

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

lorsque

(i) $f(z) := \ln(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$,

(ii) $f(z) := \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}}$.

Exercice 4. On considère la fonction suivante

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{(z-i)^2},$$

ainsi que le lacet γ correspondant au cercle de centre i et de rayon 1, parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

de deux manières différentes (en calculant directement et en utilisant un résultat du cours).

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}dz, \quad I_2 = \int_\gamma \frac{e^{az}}{z^2+1}dz \quad (a \in \mathbb{R}), \quad I_3 = \int_\gamma \frac{2z^2+z-2}{z^2(z-1)}dz,$$

lorsque γ parcourt une fois le cercle de centre 0 et de rayon 2, dans le sens positif.

Indication : utiliser la formule de Cauchy.