ULB **2018/2019**

MATHF214 - Compléments de mathématiques

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paolo Roselli

Liste 3 – Séries de Taylor et de Laurent

Exercice 1. Soient
$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

a) Déterminer les développements en série de Taylor et de Laurent des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ autour du point $z_0 = 0$, et préciser leur domaine de validité.

b) Déterminer les développements en série de Taylor et de Laurent de la fonction $f(z)$ autour du point $z_0 = -1$ et préciser leur domaine de validité.

Exercice 2. Soit
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

a) Déterminer les développements en série de Taylor et de Laurent de cette fonction autour du point $z_0 = 0$. Préciser le domaine de validité de ces développements.

b) En déduire la valeur des intégrales

i.
$$\int_C f(z)\, dz,$$
où C est le cercle défini par $|z| = 3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif.

ii.
$$\int_C f(z)\, dz,$$
où C est le cercle défini par $|z| = 3$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif.

Exercice 3. Développer les fonctions suivantes en Série de Laurent autour de la singularité insolée $z_0 = 0$, préciser le domaine de ces développements ; déterminer le type de singularité en $z_0 = 0$ et la valeur du résidu en $z_0 = 0$:

a) $\dfrac{\cos\ z}{z}$;

b) $z \cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$;

c) $\dfrac{1}{z^3(1-z^2)}$;

d) $\dfrac{e^z - 1}{z}$;

e) $\dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$.

Exercice 4. Déterminer le développement en Série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)},$$

autour du point $z_0 = 0$. Préciser le domaine de validité de ce développement.

Exercice 5. Déterminer le développement en Série de Taylor et de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + iz + 2}$$

autour du point $z_0 = -i$. Préciser le domaine de validité de ce développement.