Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Paul Godin
Assistants : Julie Distexhe et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2013/2014

Séance 7 - L'équation différentielle exacte

Exercice 1. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert étoilé par rapport à l'origine. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1 telles que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial t}$ en tout point $(t, y) \in D$. On définit une fonction F sur D par

$$F(t,y) = \int_0^1 \left(f(\tau t, \tau y)t + g(\tau t, \tau y)y \right) d\tau.$$

Montrer que $\frac{\partial F}{\partial t} = f$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = g$. Pourquoi doit-on supposer que D est étoilé ?

Exercice 2. Considérons une équation différentielle du type

$$f(t,y) + g(t,y)\frac{dy}{dt} = 0, \tag{1}$$

où f et g sont deux fonctions C^1 définies sur un ouvert étoilé D de $\mathbb{R}^2$. On dit que cette équation est **exacte** si en tout point de D, l'égalité $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial t}$ est vérifiée.

1. Montrer que les solutions d'une équation exacte sont données par les courbes $F(t, y) =$ constante.
2. Résoudre l'équation
$$y'(t + y^2) + (y - t^2) = 0.$$

Exercice 3. Dans certains cas, on peut rendre exacte une équation qui ne l'est pas en multipliant par une fonction $M(t, y)$ non nulle appelée un **facteur intégrant**. On obtient ainsi la nouvelle équation

$$M(t,y)\left(f(t,y) + g(t,y)y' \right) = 0,$$

qui a les mêmes solutions que (1), et on cherche à déterminer M de manière à ce que celle-ci soit exacte.

1. Montrer qu'un facteur intégrant doit satisfaire
$$\frac{\partial M}{\partial y} f - \frac{\partial M}{\partial t} g = M \left(\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$
2. Trouver un facteur intégrant permettant de rendre exacte l'équation
$$(y + ty + \sin y) + (t + \cos y)y' = 0.$$
Aide : chercher un M dépendant seulement de t.
3. Résoudre cette équation.