Bacheliers en Sciences Mathématiques et Physiques, bloc 1
MATHF102: Séance 26

1. Prouver que dans $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, une matrice a commute avec toutes les autres si et seulement si elle commute avec chacun des éléments de la base canonique de l'espace vectoriel réel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les matrices E_{ij} pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$, où E_{ij} a 1 en position (i, j) et 0 ailleurs. En déduire la forme générale de a. L'ensemble des matrice ayant cette propriété est-il un sous-espace de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

2. (i) Si $a \in M_{s\times t}(\mathbb{R})$, la matrice aa^T est-elle toujours symétrique?

   (ii) Si $a \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est symétrique, en est-il de même pour a^2?

   (iii) Si $a, b \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont symétriques, à quelle condition la matrice ab est-elle symétrique?

   (iv) Si $a, b \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont symétriques, que peut-on dire de $ab - ba$?

3. Démontrer que l'ordre d'une permutation dont les cycles ont longueurs $k_1, k_2, \ldots, k_s$ est le plus petit commun multiple de ces nombres.

4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et soit
$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r$$
avec τ_i des tranpositions pour tout $i = 1, 2, \ldots, r$. Démontrer que
$$\sigma^{-1} = \tau_r\tau_{r-1}\cdots\tau_2\tau_1.$$

5. Étant données les permutations
$$\alpha = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)(6,\ 7)(8)(9,\ 10,\ 11)$$
$$\beta = (1,\ 6)(2,\ 7)(3,\ 8,\ 9)(4)(5,\ 10,\ 11)$$
calculer $\beta\circ\alpha$, $\alpha\circ\beta$, α^{-1}, β^{-1}, α^2, α^5, α^{1174}, β^2, β^6, β^{27802}.

6. Démontrer que
$$\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \quad \text{pour tout } \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, \qquad \text{et}$$
$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

7. Montrer que (i, j) avec $1 \le i < j \le n$ est une inversion de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ si et seulement si dans la tresse correspondante à σ les arêtes de i à $\sigma(i)$ et de j à $\sigma(j)$ se croisent.

8. Voici les permutations α, β, γ de $\mathfrak{S}_7$
$$\alpha = (1,\ 2)(3,\ 4,\ 5)(6,\ 7)$$
$$\beta = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$$
$$\gamma = (1,\ 6,\ 7)(2)(3,\ 4)(5).$$
Calculer $inv(\alpha)$, $inv(\beta)$, $inv(\gamma)$, $inv(\gamma\circ\alpha)$ et $inv(\gamma\circ\beta)$.

9. Démontrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a
$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}.$$