ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

Liste 3 – Mesure de Lebesgue

Exercice 1. Soient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}$ et m la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x\}$ est un borélien et que $m(\{x\}) = 0$.

b) Montrer que $\mathbb{Q}$ est un ensemble de Borel et que $m(\mathbb{Q}) = 0$.

c) Montrer qu'une union non dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas forcément un ensemble négligeable.

d) Montrer que $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un ensemble négligeable si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U_ε tel que $N \subset U_\varepsilon$ et $m(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Exercice 2. Soit E une droite dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que la mesure de Lebesgue de E est nulle.

Suggestion : Etudier ce qui se passe sur un segment de E. Ensuite, considérer un recouvrement de E par une réunion de rectangles dont la mesure est arbitrairement petite.

Exercice 3. Soient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}^n$ et m la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$, définissons

$$\lambda B = \{\lambda b = (\lambda b_1, \cdots, \lambda b_n) : b = (b_1, \cdots, b_n) \in B\}.$$

a) Montrer que $\lambda B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$.

Suggestion : Considérer $\mathcal{B}_\lambda = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \lambda B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$.

b) Montrer que $m(\lambda B) = \lambda^n m(B)$.

Suggestion : Considérer ν sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\nu(B) = m(\lambda B)$.

Exercice 4 (Vrai ou Faux)**.** Justifier les affirmations suivantes :

a) Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable, alors sa fermeture $\overline{E}$ est aussi négligeable.

b) Il existe un ensemble non mesurable sur $\mathbb{R}^n$ tel que son complémentaire ait la mesure extérieure de Lebesgue nulle.

c) Ils existent des ensembles non mesurables dont l'union est mesurable.

d) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ satisfait $m(\text{int}(A)) = m(\overline{A})$, alors A est mesurable.