TP1 : logique, ensembles et notations

1. Décomposer les phrases suivantes en propositions logiques : propositions simples, quantificateurs et connecteurs logiques.
   (a) Un lapin blanc est toujours gentil. (B, G)
   (b) Un lapin blanc est toujours gentil. (L, B, G)
   (c) Un chien est un véritable ami. (C, V)
   (d) Pour qu'il y ait indépendance du chemin, il suffit que certaines conditions techniques soient satisfaites et que le rotationnel soit nul. (I, T, N)
   (e) L'étudiant vertueux se met toujours à travailler à temps. (E, V, T)
   (f) Un homme peut être un soldat sans être courageux.
   (g) Deux droites sont parallèles dès qu'elles sont orthogonales à un même plan.
   (h) Sauf en cas de vent fort, un tel record est homologué.
   (i) La fonction est intégrable, à moins qu'elle ne soit pas continue.
2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) f est constante.
   (b) f n'est pas constante.
   (c) f s'annule.
   (d) f est périodique.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Enoncer en langage courant les assertions suivantes :
   (a) $\exists B \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) < B$
   (b) $\exists B \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in \mathbb{R},\, |f(x)| < B$
   (c) $\exists T \in \mathbb{R}_0 \,:\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$
   (d) $\forall x < y \in \mathbb{R},\, f(x) < f(y)$
   (e) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$
   (f) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x = f(y)$

   Pour chacune, peut-on trouver une fonction qui la satisfait ? Qui ne la satisfait pas ?
4. Compléter – si possible – les pointillés par le connecteur logique adéquat : $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$:
   (a) $x^2 = 4 \,\ldots\ldots\ldots\, x = 2$
   (b) $z > -3 \,\ldots\ldots\ldots\, z^2 > 9$
   (c) $x < y \,\ldots\ldots\ldots\, x^2 < y^2$
   (d) $x < y \,\ldots\ldots\ldots\, x^3 < y^3$
   (e) $x = y \,\ldots\ldots\ldots\, x^2 = y^2$

   (les quantités x, y et z sont toutes réelles)
5. Considérons les assertions :
   (a) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\, x + y > 0$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R},\, x + y > 0$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\, x + y > 0$
   (d) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\, y^2 \geq x$
   (e) $x \in \mathbb{R}, (x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1)$
   (f) $C \subset A \cup B \Rightarrow C \subset A$ ou $C \subset B$

   Ces assertions sont-elles vraies ou fausses ?
6. Démontrer que l'assertion du point (f) de l'exercice précédent est fausse.

7. Soient A, B, C, et D des propositions logiques. Etablir la table de vérité des propositions composées suivantes.

   (a) $(A$ et $B)$ implique C
   (b) A et $(B$ implique $C)$
   (c) A ou $(B$ et $C)$
   (d) $(A$ ou $B)$ et C
   (e) non$(A$ ou $B)$
   (f) non$A$ ou B
   (g) A ou $(B$ et $(C$ ou $D))$

8. Soient A, B et C des propositions logiques. Etablir les tautologies suivantes.
   (a) $(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C) \iff (A \vee \neg B) \wedge (B \vee C)$
   (b) $((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) \iff (B \vee C) \vee (\neg A)$
9. Nier les assertions suivantes :
   (a) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
   (b) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
   (c) La nuit, tous les chats sont gris.
   (d) Je pense donc je suis.
   (e) L'étudiant vertueux se met toujours à travailler à temps.
   (f) Un chien est un véritable ami.
   (g) Je vais passer mes vacances en Irlande ou en Espagne.
10. Nier les assertions suivantes :

    (a) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
    (b) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
    (c) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
    (d) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$

11. Démontrer les propriétés suivantes par récurrence (pour n un nombre naturel) :
    (a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
    (b) $1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
    (c) $1 + 8 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
    (d) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
    (e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
12. Démontrer les affirmations suivantes :
    (a) La somme de deux entiers pairs est un entier pair.
    (b) Le produit de deux entiers pairs est un entier pair.
    (c) Il n'y a qu'un seul nombre premier pair.
    (d) Un entier est un carré parfait si et seulement si il a un nombre impair de diviseurs.
    (e) La somme de deux nombres est impaire si et seulement si les deux nombres ont une parité différente.
    (f) Si n est un entier impair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8