Titulaire : Paul Godin
Assistants : Julie Distexhe et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2013/2014

Séance 4 - Fonctions définies par des intégrales

Exercice 1. Étudier la convergence uniforme des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(xt)}{t^2}\,dt$;

b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-xt}\,dt$ pour $x \in [0,1]$;

c) $\displaystyle\int_0^1 (\ln(xt))^{1/3}\,dt$ pour $x \in [1,3]$;

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,dt$;

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$;

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$;

Exercice 2. Sur l'intervalle $]0,1[$ la fonction

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{(\sin(xt))^{1/3}}\,dt$$

est-elle continue ? Est-elle C^1 ? Justifier.

Exercice 3. Sachant que pour $x > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

montrer que pour $x > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{4x^3}.$$

Exercice 4. La fonction

$$F(x) = \int_\pi^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{(t-\pi)^{1/2}}\,dt$$

est-elle continue sur $]0,1[$?