

Mathématique MATH-F-112/1112 - Exercices

2017-2018

1 Analyse vectorielle

1.1 Vecteurs et opérateurs différentiels

1.
 - (a) Calculer le gradient de F au point $(2, 1)$ si $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
 - (b) Calculer le gradient de F au point $(1, 2, 3)$ si $F(x, y, z) = xyz$
 - (c) Déterminer le vecteur gradient ∇F au point $(2, -2, 1)$ si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 - (d) Déterminer le gradient du champ scalaire $F = x^3 + y^3 + z^3$ au point $(2, 1, 1)$; déterminer les points en lesquels ce gradient est perpendiculaire à l'axe des z et les points en lesquels il est nul.
2. Calculer le champ gradient des champs scalaires suivants :
 - (a) $F(x, y, z) = xy + yz + zx$
 - (b) $F(x, y, z) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ (\mathbf{c} est un vecteur constant, et $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est le vecteur position)
 - (c) $F(x, y, z) = xy$
3.
 - (a) Déterminer les courbes de niveau du champ scalaire sur $\mathbb{R}^2 : F(x, y) = xy$, et tracer l'allure de ces courbes.
 - (b) Calculer en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$ le gradient de ce champ.
 - (c) Représenter graphiquement ce gradient en quelques points ainsi que les courbes de niveau passant par ces points.
 - (d) Vérifier qu'en tout point, le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau.
4. Calculer le rotationnel et la divergence des champs de vecteurs suivants :
 - (a) $\mathbf{f} = (z^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - x^2)$
 - (b) $\mathbf{r} = (x, y, z)$
 - (c) $\mathbf{v} = (xy, yz, zx)$
 - (d) $\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$
5. Démontrer les identités suivantes (dans ce qui suit, \mathbf{f} et \mathbf{g} sont des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 , et F, G sont des champs scalaires) :
 - (a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$
 - (b) $\nabla(FG) = G\nabla F + F\nabla G$
 - (c) $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$
 - (d) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}$
 - (e) $\nabla \times (F\mathbf{g}) = (\nabla F) \times \mathbf{g} + F(\nabla \times \mathbf{g})$
 - (f) $\nabla \cdot (F\mathbf{g}) = (\nabla F) \cdot \mathbf{g} + F(\nabla \cdot \mathbf{g})$
6. Calculer l'expression du gradient en coordonnées sphériques et cylindriques. En utilisant la notation faisant intervenir l'opérateur nabla, en déduire l'expression du rotationnel et de la divergence dans ces deux systèmes de coordonnées.

7. (a) Déterminer si le champ de vecteurs $\mathbf{f}(x, y, z) = (e^{xy}, e^{x+y})$ est un champ de gradients. Si oui, déterminer le potentiel dont il dérive.
 (b) Même question avec le champ $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$
8. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz))$. Montrer que \mathbf{f} est un champ irrotationnel et trouver un potentiel scalaire pour \mathbf{f} .
9. Calculer le potentiel du champ gravitationnel engendré par un point matériel de masse M concentré à l'origine du système de coordonnées : $\mathbf{g} = -\frac{MG}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
10. Montrer que si une force \mathbf{f} est centrale, c-à-d dirigée vers un point fixe 0, et dépend seulement de la distance r à ce point fixe ($\mathbf{f} = f(r)\mathbf{r}$) alors le champ de forces correspondant dérive d'un potentiel.
11. Déterminer la fonction $\psi(x)$ telle que $\psi(0) = 1$ et telle que le champ de vecteurs $((x^2 + 1)\psi(x), 2xy\psi(x), 0)$ ait une fivergence nulle. Déterminer un champ de vecteur \mathbf{f} tel que $\nabla \times \mathbf{f} = ((x^2 + 1)\psi(x), 2xy\psi(x), 0)$.
12. Montrer que le potentiel U du champ de forces $\mathbf{f} = -\frac{MG}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$, satisfait l'équation de Laplace : $\Delta U = 0$.
13. On donne le champ de vecteurs $\mathbf{v} = (y \cos x, \sin x + F(x, y))$ où F est une fonction scalaire.
 (a) Quelle condition faut-il imposer à la fonction f pour que ce champ de vecteurs soit irrotationnel ?
 (b) Existe-t-il une fonction f nulle en tout point de l'axe des y telle que le champ \mathbf{v} soit solénoïdal ?

1.2 Intégrales curvilignes de champs scalaires

1. Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$\int_{\gamma} (x+y)ds$ où γ est le contour du triangle Oab de sommets $0(0,0)$, $a(1,0)$, $b(=0,1)$

$\int_{\gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ où γ est le segment de droite joignant les points $0(0,0)$ et $a(1,2)$

$\int_{\gamma} \sqrt{y}ds$ où γ est le premier arc de cycloïde $x+t-\sin t$, $y=(1-\cos t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$\int_{\gamma} \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$ où γ est la première spire de l'hélice $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$

$\int_{\gamma} xy ds$ où γ est le contour du carré $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$

$\int_{\gamma} xy ds$ où γ est le quart de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situé dans le premier quart du plan

$\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2}ds$ où γ est la courbe $x=a(\cos t+t \sin t)$, $y=a(\sin t-t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$\int_{\gamma} (2x+y)ds$ où γ est l'arc AB situé sur la circonférence $x^2+y^2=25$; $A(4,3)$, $B(3,4)$

2. Applications :

- (a) Chercher le centre de masse d'un quart de circonférence homogène.
 (b) La température en un point d'une hélice (paramétrée par : $(x=\cos t, y=\sin t, z=t)$) est supposée donnée par $T=x^2+y^2+z^2$. Chercher la température moyenne le long d'une spire :

$$\bar{T} = \frac{\int_{\gamma} T(x, y, z)ds}{\int_{\gamma} ds}$$

où γ correspond à une spire.

- (c) Trouver le centre de masse de la courbe paramétrisée par : $x=t^2, y=t, z=3$, où $t \in [0, 1]$
 (d) Trouver la valeur moyenne de $f(x, y, z) = x+y+z$ le long de la courbe paramétrisée par $(x=\sin t, y=\cos t, z=t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

1.3 Intégrale curvilignes de champs de vecteurs

1. Calculer la circulation $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ des champs de vecteurs \mathbf{f} suivants, sur les courbes γ suivantes :

- (a) $\mathbf{f} = (x, y)$, où γ est un quart de cercle de rayon 5 situé dans le quart de plan de coordonnées positives $x \geq 0, y \geq 0$.
- (b) $\mathbf{f} = (xy, y^2)$, où γ est le carré de sommets $(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)$
- (c) $\mathbf{f} = (x, y)$, où γ est l'arc de cubique déterminé par $y = x^3 + x^2 + x + 1, 0 \leq x \leq 1$
- (d) $\mathbf{f} = (x^2 - 2xy, 2xy + y^2)$, où γ est l'arc de la parabole $y = x^2$ joignant les points $(1, 1)$ et $(2, 4)$
- (e) $\mathbf{f} = (2a - y, x)$, où γ est le premier axe de la cycloïde paramétrée de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

- (f) $\mathbf{f} = (2xy, x^2)$, le long des différents chemins suivants joignant l'origine $O = (0, 0)$ au point $A = (2, 1)$ (vérifier avant tout que ces chemins contiennent bien ces deux points) :
 - i. la droite $y = \frac{x}{2}$
 - ii. la parabole $y = \frac{x^2}{4}$
 - iii. la parabole $y^2 = x/2$
 - iv. la ligne brisée OBA où $B = (2, 0)$
- (g) $\mathbf{f} = (x^2 + y, 2x + y^2)$, où γ est le carré de sommets $(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)$
- (h) $\mathbf{f} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, -y)$, où γ est le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique
- (i) $\mathbf{f} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, y)$, où γ est le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique
- (j) $\mathbf{f} = (xy, x^2)$, où γ est le cercle

$$\begin{cases} x = R + R \cos \theta \\ y = R + R \sin \theta \end{cases}$$

orienté dans le sens trigonométrique

2. Calculer le travail de la force \mathbf{F} le long de l'arc de cercle Γ_1 de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 (dans le plan) situé dans le premier quadrant orienté dans le sens trigonométrique et le long de l'axe des y (portion de l'axe allant de 0 à 1) pour les champs de forces suivants :
 - (a) $\mathbf{F} = (x + y, x - y)$
 - (b) $\mathbf{F} = (xy, x + y)$
 - (c) $\mathbf{F} = \frac{MG}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} (x, y)$ où M est la masse de la Terre et G la constante de la gravitation universelle.
3. Calculer $\int_{\gamma} y \, dx + x \, dy - z^2 \, dz$ où γ est une hélice de pas 1 tracée sur le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.
4. Calculer $\int_{\gamma} z \, dx + x \, dy + y \, dz$ où $\gamma \equiv x - 1 = y = z - 2, x \in [1, 2]$
5. Calculer $\int_{\gamma} x \, dx - y \, dy + z \, dz$ où $\gamma \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 4$
6. Déterminer le travail effectué par une particule se déplaçant dans un champ de forces donné par $\mathbf{F} = (3xy, -5z, 10x)$ le long de la courbe d'équation $x = t + 1, y = 2t^2, z = t^3, t \in [1, 2]$.
7. Montrer qu'en coordonnées polaires (ρ, θ) , l'expression $x \, dy - y \, dx = \rho^2 d\theta$. Interpréter $\frac{1}{2} \int_{\gamma} x \, dy - y \, dx$ le long d'une courbe γ quelconque.

1.4 Formule de Green

1. Calculer en utilisant la formule de Green :

- 1) $\oint_{\Upsilon} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$ où Υ est le périmètre d'un triangle dont les sommets sont les points a(1,1), b(2,2) et c(1,2).
- 2) $\oint_{\Upsilon} xy^2 dx - x^2 y dy$ où Υ est la ciconférence $x^2 + y^2 = R^2$
- 3) $\oint_{\Upsilon} (x + y)dx + (y - x)dy$ où Υ est le cycle constitué par
 - a) la parabole ayant pour axe l'axe des y et passant par a(1,0) et b(2,3)
 - b) la droite joignant a et b
- 4) $\oint_{\Upsilon} dx + xdy$ où Υ est le cycle formé par $y = x^2$ et $y^2 = x$
- 5) $\oint_{\Upsilon} x^3 dy - y^3 dx$ où Υ est la circonférence $x^2 + y^2 = 1$
- 6) l'aire de l'ellipse $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$
- 7) $\oint_{\Upsilon} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy$ où Υ est la circonférence $x^2 + y^2 = 1$
- 8) l'aire du domaine délimité par $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- 9) l'aire de l'ellipse de demi-axes a et b
- 10) $\oint_{\Upsilon} x^2 dy + y^2 dx$ où Υ est le cycle formé par les droites $t = 0, y = 2 - x, y = x$

2. Montrer à l'aide de la formule de Green que la valeur de l'intégrale :

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (6x + 2y)dx + (6y + 2x)dy$$

est indépendante du chemin suivi pour aller du point (0,0) au point (1,1).
 Evaluer l'intégrale en prenant, pour aller de (0,0) à (1,1), successivement la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$. Déterminer la fonction dont $(6x + 2y)dx + (6y + 2x)dy$ est la différentielle.

3. (a) On considère le champ de vecteurs dans le plan :

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + y \right)$$

Ce champ dérive-t-il d'un potentiel ? Si oui, trouver la fonction scalaire dont il dérive.

- (b) Calculer (sans appliquer le théorème de Green) :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{s}$$

où Γ est la circonférence d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

- (c) Les réponses aux sous-questions précédentes vous paraissent-elles contradictoires ? Pourquoi ? Expliquer ?

4. Montrer que les formes différentielles suivantes sont exactes, et déterminer la fonction scalaire dont elles dérivent.

- 1) $w = e^{xy}(y \, dx + x \, dy)$
- 2) $w = (3x^2 + y)dx + (3y^2 + x)dy$
- 3) $w = (e^{-y} + 3x^2y^2)dx + (2x^3y - xe^{-y})dy$
- 4) $w = \cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy$
- 5) $w = (3x^4y^2 - x^2)dy + (4x^3y^3 - 2xy)dx$
- 6) $w = e^{x^2+y^2}(2xdx + 2ydy)$
- 7) $w = (ye^{xy} + y)dx + (xe^{xy} + x)dy$
- 8) $w = (x^4 + y^4)dx + (y^4 + 4xy^3)dy$
- 9) $w = (4x + y)dx + (6y + x)dy$

5. Montrer à l'aide de la formule de Green que la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} y \cos x \, dx + \sin x \, dy$$

est indépendante du chemin suivi pour aller du point $(0,0)$ au point $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Evaluer l'intégrale en prenant pour joindre les deux points successivement

$y = x$ et $y = \frac{2x^2}{\pi}$. Déterminer la fonction dont dérive l'intégrale.

6. (a) La forme différentielle

$$w = (2xy - 2y^2 + y)dx + (x - 2y)dy$$

est-elle exacte ? Justifier votre réponse.

- (b) Si la réponse au point précédent est négative, par quelle fonction $\phi(x)$ faut-il multiplier la forme différentielle w pour que la nouvelle forme différentielle soit exacte ? Déterminer le potentiel correspondant, càd la fonction scalaire F telle que

$$dF(x, y) = \phi(x)w$$

1.5 Intégrales de surface de fonctions scalaires

1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\iint_S (x + y + z) dS$ $S = \{x + y + z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
2. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$
3. $\iint_S (x + y + z) dS$ où S est la surface découpée dans le plan $x + 3y + z = 1$ par les 3 plans de coordonnées.
4. $\iint_S z dS$ $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$
5. $\iint_S x dS$ $S = \{z = x^2 + y^2, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$
6. $\iint_S z^2 dS$ $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
7. $\iint_S x^2 y^2 z dS$ où S est la demi-sphère unité centrée à l'origine et située dans $z \geq 0$.
8. $\iint_S x^2 z dS$ où S est la surface latérale du cône $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$ $1 \leq z \leq 2$.
9. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$ où S est la surface latérale du cône $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $0 \leq z \leq b$.
10. $\iint_S \frac{dS}{u}$ où S est la surface de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et u est la distance de l'origine au plan tangent de l'ellipsoïde.

2. On considère l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Déterminer une paramétrisation de cet ellipsoïde. Quelle est l'orientation canonique résultant de cette paramétrisation ? Représenter le vecteur normal en quelques points de cet ellipsoïde.
3. Calcul d'aires de portions de surface :
Calculer les aires suivantes :
 - (a) L'aire du triangle que découpent les plans de coordonnées dans le plan $x+2y+3z = 1$
 - (b) L'aire latérale du parabolöide $z = x^2 + y^2$ limitée par le plan $z = 1$
 - (c) L'aire de la calotte sphérique découpée par le cône $z^2 = x^2 + y^2$
 - (d) L'aire de la surface cylindrique $x^2 + y^2 = 1$ limitée par les plans $y = 0$ et $y = 1$
 - (e) L'aire de la surface cylindrique $x^2 + y^2 = 1$ limitée par l'hélice $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = \theta/(2\pi)$, la droite $x = 0, y = 1$ et la circonférence $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.
 - (f) L'aire latérale du parabolöide $2z = x^2 + y^2$, limitée par le plan $z = 8$
 - (g) L'aire limitée par une boucle de la courbe de Viviani (intersection de la sphère et du cylindre suivants : $x^2 + y^2 - Ry = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2$)
 - (h) Montrer par intégration que l'aire de la sphère de rayon R vaut $4\pi R^2$.

1.6 Intégrales de surface d'un champ de vecteurs

- Calculer $\iint_S \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ où \mathbf{f} est un champ de vecteurs et S une surface définies comme suit :
 - $\mathbf{f} = (yz, xz, xy)$, S est la surface du triangle découpé par les plans de coordonnées dans le plan $x + y + z = 1$
 - $\mathbf{f} = (1, y^2, z^2)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$
 - $\mathbf{f} = \mathbf{r}$, S est la surface latérale du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ limitée par les plans $z = 0$ et $z = 1$
 - $\mathbf{f} = \mathbf{r}$, S est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
 - $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z)$, $S \equiv x + y + z = 1$ limité au premier octant
 - $\mathbf{f} = \mathbf{r}$, S est la surface du cube unité limité par $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
 - $\mathbf{f} = (4xz, -y^2, yz)$, S est la surface totale du tétraèdre formé par le trièdre coordonné coupé par le plan $x + y + 2z - 2 = 0$
 - $\mathbf{f} = (0, 0, z)$, S est la surface de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Calculer les flux de champs de vecteurs suivant à travers la surface indiquée
 - $\mathbf{f} = (1, 0, z)$, à travers la surface latérale du parabolöide $z = x^2 + y^2$ limitée par le plan $z = 1$
 - $\mathbf{f} = (x, y, z)$, à travers la surface latérale du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ limitée par le plan $z = 1$
 - $\mathbf{f} = (xz^2 + z, yx^2 + x, zy^2 + y)$, à travers la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 - $\mathbf{f} = (4xz, xyz^2, 3z)$ à travers la surface limitée par le demi-cone $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$, et le plan $z = 4$ (entièreté de la surface, pas uniquement la surface latérale du cone)
- Montrer que l'aire d'une portion de surface $z = f(x, y)$ n'est autre que le flux d'un vecteur unitaire normal à la surface à travers cette portion de surface.

1.7 Formule de Stokes

- Calculer, en utilisant la formule de Stokes :
 - $\oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ où $\mathbf{f} = (y^2, z^2, x^2)$ et où γ est le périmètre du triangle de sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
 - $\oint_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy + z^2 dz$ où γ est la circonférence $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. On prendra comme surfaces s'appuyant sur la circonférence successivement le plan $z = 0$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - $\oint_{\gamma} dy + dz - ydx$ où γ est le cycle formé par les paraboles $z = 0, y = x^2; z = 0, y^2 = x$
 - $\oint_{\gamma} ydx + zdy + xdz$ où γ est l'intersection de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et $y = 0$.
- Montrer à l'aide de la formule de Stokes que la valeur de l'intégrale

$$\int_{(\sqrt{2}, 0, 0)}^{(1, 1, 1)} ydx + xdy + z^2 dz$$

est indépendante du chemin suivi pour aller du point $(\sqrt{2}, 0, 0)$ au point $(1, 1, 1)$.

Evaluer l'intégrale en prenant, pour aller de $(\sqrt{2}, 0, 0)$ à $(1, 1, 1)$ successivement la droite $\frac{x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = y = z$, et l'hélice $x = \sqrt{2} \cos \theta, y = \sqrt{2} \sin \theta, z = \frac{4}{\pi} \theta$.

Déterminer la fonction scalaire dont $\mathbf{f} = (y, x, z^2)$ est le gradient.

3. Calculer de deux manières :

- (a) $\int_{\gamma} (0, 0, xyz) \cdot ds$ où γ est la courbe orientée $x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ (t allant de 0 à 2π)
- (b) $\int_{\gamma} (xy, x, 0) \cdot ds$ où γ est le cercle unité situé dans le plan $z = 0$, orienté dans le sens trigonométrique.

4. Calculer la circulation du champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$$

le long du cercle γ :

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$$

- (a) directement (i.e. à partir de la définition de la circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe)
- (b) par la formule de Stokes, en prenant comme surface s'appuyant sur γ la portion de sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ située "en-dessous" du plan $0xy$ (c-à-d dans la zone $z < 0$)

1.8 Théorème de la divergence (formule d'Ostrogradski)

1. Calculer en utilisant le théorème de la divergence les flux de champs de vecteurs suivants à travers les surfaces fermées suivantes :

- (a) $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ où $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$ et S est la surface extérieure du cube $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$
- (b) $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ où $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^2)$ et S est la surface extérieure de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (c) $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ où $\mathbf{F} = (z, x + z^2, z)$, et S est la surface fermée constituée par les 4 faces du tétraèdre défini par les plans $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ (aide : commencer par faire un dessin de ce tétraèdre pour vous représenter géométriquement le problème avant de l'attaquer)
- (d) $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ où $\mathbf{F} = (x + y, y + z, z + x)$ où S est la surface totale du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ limitée par les plans $z = 0$ et $z = 1$ (surface totale veut dire ici : surface latérale du cylindre et ses deux faces situées dans les plans $z = 0$ et $z = 1$)
- (e) $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ où $\mathbf{F} = (y^2, x^2, z^2)$ où S est la surface du parabolöide $z = x^2 + y^2$ limitée par le plan $z = 1$ (base comprise)
- (f) $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ où $\mathbf{F} = (\cos y, x^4 + e^{z^2 + x^5}, \sin(x^2 + y^7))$ et S est la surface extérieure de la pyramide limitée par les plans $x = 0, y = 0, z = 0$ et $x + y + z = 3000$.

1.9 Exercices récapitulatifs

1. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{F} = (x, y, z^2)$ au travers de la surface fermée obtenue en faisant tourner autour de Oz le segment de la droite

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

et le morceau de parabole

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2z = x + 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

2. On considère le flux du champ $\vec{F} = (x, y, z)$ à travers la surface fermée constituée par la surface latérale du cylindre $(x-1)^2 + y^2 = 1$, le plan $z = 0$ et le parabolôide $z - a = x^2 + y^2$. Pour quelle valeur de la constante a le flux vaut-il b ?
3. Etant donné le champ de vecteurs \vec{F} de composantes $X = x^2, Y = y^2, Z = z^2$, le cône (1) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ et le plan (2) $z = c$ où a, b et c sont des constantes:
- a) Calculer le flux de \vec{F} à travers la surface fermée limitée par le cône (1) et le plan (2).
 - b) En déduire la valeur du flux de \vec{F} à travers la surface latérale du cône limitée au domaine $0 \leq z \leq c$.
 - c) Calculer la circulation du champ \vec{F} le long de la courbe intersection du cône (1) et du plan (2).

4. Calculer l'intégrale de surface $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ où \vec{A} est le champ de vecteur $(x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ et S la surface du cône $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ au-dessus du plan $z = 0$.

5. Soit le cercle d'équations:

$$\begin{cases} (z - 2)^2 = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- a) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la révolution du cercle de l'axe $0x$.

- b) Calculer le flux du champ $\vec{F}(ye^z, y - 2ze^x, xe^y + z)$ à travers la surface de révolution engendrée par la rotation du cercle d'équations (1) autour de l'axe $0x$.

6. a) Soit le champ de vecteurs \vec{F} de composantes $X = xy + z, Y = \sqrt{x^2 + y^2} + z, Z = x + y + z^2$. Calculer le rotationnel de ce champ \vec{F} .

- b) On considère le contour Γ défini par :

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ pour } -1 \leq y \leq 1; \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ pour } -1 \leq y \leq 1;$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = \sqrt{1 - x^2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -1 \\ z = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Représenter le contour Γ .

- c) Calculer par une méthode au choix la circulation du champ de vecteur \vec{F} le long de Γ .

7. On donne le champ de vecteurs $\vec{F}(y - z, z - x, x - y)$ et la courbe C intersection des surfaces

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$ en utilisant pour C la représentation paramétrique suiv-

ante:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} - \frac{\cos \Phi}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \Phi}{3} \\ \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{3} - \frac{\cos \Phi}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \Phi}{3} \\ z = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sin \Phi \end{array} \right. \end{aligned}$$

On vérifiera au préalable que cette représentation paramétrique correspond bien à la courbe C .

8. On donne le champ de vecteurs \vec{F} de composantes $X = yz, Y = zf(x) + h(x), Z = yg(x) + h(x)$.
- a) Déterminer les fonctions $f(x), g(x)$ et $h(x)$ de sorte que $\vec{F} \cdot d\vec{S}$ soit une différentielle exacte, compte tenu des conditions suivantes: $f(3) = 3; h(0) = 3$.
- b) Déterminer la fonction Φ dont la différentielle est égale à $\vec{F} \cdot d\vec{S}$.
- c) Calculer la circulation de ce champ \vec{F} le long de l'arc de courbe d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t \\ z = t \end{array} \right.$$

9. a) Calculer le flux du champ $\vec{F}(\frac{\alpha xy}{2}, y^2, \alpha yz)$ (α est un paramètre) à travers la surface fermée, formée du parabolöide $z = x^2 + y^2$ coupé par le plan $z = 4$.
1. directement
 2. en utilisant la formule d'Ostrogradski.
- b) Déterminer la valeur du paramètre α pour laquelle $\text{div } \vec{F} = 0$ et calculer un champ \vec{F} dont la première composante est nulle, tel que $\text{rot } \vec{f} = \vec{F}$.