Bacheliers en Sciences Mathématiques et Physiques, bloc 1
MATHF102: Séance 24

1. Soit V un espace vectoriel réel. Toute homotétie $H : V \to V$, où $H(v) := \lambda v$ pour tout $v \in V$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est-elle un élément du groupe linéaire général $GL(V)$?

2. Dans un espace vectoriel réel V, soit A un opérateur linéaire tel que $A^2 = Id_V$. A est-il inversible? Prouver que $V_1 := \{v \in V \mid A(v) = v\} \subseteq V$ et $V_2 := \{v \in V \mid A(v) = -v\} \subseteq V$ sont des sous-espaces complémentaires de V, c'est-à-dire que $V_1 + V_2 = V$ et $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

   Trouver un opérateur linéaire A de $\mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = Id_{\mathbb{R}^2}$ et $A \neq Id_{\mathbb{R}^2}$.

3. On considère l'application linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

   $$A((x, y, z)) := (x-y+2z, 3x+2y-z, 4x+y+z, 7x+3y) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   Quelle est la matrice de cette application linéaire dans les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$, si

   (a) $e_1 = (1, 0, 0)$ $\quad f_1 = (1, 0, 0, 0)$
   $e_2 = (0, 1, 0)$ $\quad f_2 = (0, 1, 0, 0)$
   $e_3 = (0, 0, 1)$ $\quad f_3 = (0, 0, 1, 0)$
   $f_3 = (0, 0, 0, 1)$;

   (b) $e_1 = (1, 1, 0)$ $\quad f_1 = (0, 1, 1, 2)$
   $e_2 = (2, -3, 0)$ $\quad f_2 = (1, 0, 1, 1)$
   $e_3 = (1, 2, 3)$ $\quad f_3 = (0, 0, 1, 1)$
   $f_3 = (0, 0, 0, 1)$.

4. Toute matrice triangulaire et symétrique est diagonale. Vrai ou faux?

5. Écrire dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ la matrice des opérateurs linéaires suivants: les projections P_x et P_y sur la première bissectrice parallèlement aux axes x et y, les symétries S_x et S_y par rapport aux axes x et y, les symétries S_1 et S_2 par rapport aux première et seconde bissectrices, la symétrie centrée S_c et la rotation R_θ d'angle θ autour de l'origine.

6. Calculer les produits matriciels a^2, $a \cdot b$ et $b \cdot a$ où a et b sont respectivement les matrices des transformations (1) S_1 et S_2, (2) S_x et S_1, (3) R_θ et S_y. Vérifier géométriquement le résultat.