Permutations

Exercice 1. Démontrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est donnée comme produit de cycles (disjoints)

$$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_r)(b_1, b_2, \ldots, b_s) \cdots$$

et si $\tau \in \mathfrak{S}_n$, alors la *conjuguée* $\tau\sigma\tau^{-1}$ de σ avec τ^{-1} est donnée par

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \ldots, \tau(a_r))\,(\tau(b_1), \tau(b_2), \ldots, \tau(b_s)) \cdots .$$

Exercice 2. Voici les permutations α, β, γ de $\mathfrak{S}_9$

$$\begin{aligned}\alpha &= (1,\ 2)(3,\ 4,\ 5)(6)(7,\ 8)(9)\\ \beta &= (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9)\\ \gamma &= (1,\ 9,\ 7)(2)(3,\ 4)(5,\ 8)(6).\end{aligned}$$

(a) Calculer $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\beta^{-1}\alpha \circ \beta$ et $\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha$.

(b) Existe-t-il une permutation η telle que $\eta^{-1} \circ \alpha \circ \eta = \beta$? Si oui, donner une telle permutation.

(c) Existe-t-il une permutation ρ telle que $\rho^{-1} \circ \alpha \circ \rho = \gamma$? Si oui, donner une telle permutation.

Exercice 3. (a) Combien d'éléments y a-t-il dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{12}$?

(b) Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_{12}$?

(c) Combien de cycles de longueur 5 y a-t-il dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{12}$?

(d) Combien de cycles de longueur k y a-t-il dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$?

(e) Combien d'éléments d'ordre 35 y a-t-il dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{12}$?

Déterminants

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice suivante (1) avec la définition du déterminant et (2) par la méthode de Gauss :

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$