Bacheliers en Sciences Mathématiques et Physiques, bloc 1
MATHF102: Séance 25

1. Étant donnée la matrice
$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$
trouver toutes les matrices $b \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ qui commutent avec a, c'est-à-dire telles que $ab = ba$.

2. Soit V l'espace vectoriel réel des polynômes en x à coefficients réels de degré $\leq n$ et soit A l'opérateur linéaire de V qui applique tout polynôme sur son polynôme dérivé. Calculer la matrice des opérateurs $A, A^2, A^3, \ldots, A^n, A^{n+1}, \ldots$ dans la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de V.

3. Calculer le rang de chacune des matrice réelles suivantes:
$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$
$$e = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -15 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$
$$g = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Si a et b sont deux matrices quelconques de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, une seule des affirmation suivantes est toujours vrai. Laquelle et pourquoi?
$$rang(ab) = \min\{rang(a), rang(b)\}$$
$$rang(ab) = \max\{rang(a), rang(b)\}$$
$$rang(ab) \leq \min\{rang(a), rang(b)\}$$
$$rang(ab) \geq \max\{rang(a), rang(b)\}.$$

   Peut-on généraliser ce résultat au cas où a est une matrice $s \times t$ et b est une matrice $t \times u$?

5. Prouver qu'une matrice réelle
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
est inversible si et seulement si son "déterminant" $ad - bc$ est différent de 0.

6. Dans l'espace vectoriel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$, on désigne par W_{sym}, W_{anti}, W_{tri}, W_{diag} et W_{scal} les sous-ensembles formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques (c'est-à-dire $a^T = -a$), triangulaires, diagonales et scalaires (c'est-à-dire $a = \lambda I$). Étudier les relations d'inclusion entre ces sous-ensembles. Certains d'entre eux sont-ils des sous-espaces de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$? Dans l'affirmative, trouver leur dimension et en décrire explicitement une base.