Bacheliers en Sciences Mathématiques et Physiques, bloc 1
MATHF102: Séance 21, lundi 6 et mardi 7 février 2017

1. Décrire explicitement une transformation linéaire $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ appliquant $\mathbb{R}^4$ sur le sous-espace engendré par $(2, 1, 0)$ et $(5, -1, 2)$, et ayant pour noyau le plan déterminé par les équations $x = y = z$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

   $e_1 = (1, 0, 0)$ $\quad$ $f_1 = (2, 0, -5)$
   $e_2 = (0, 1, 0)$ $\quad$ $f_2 = (\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 5)$
   $e_3 = (0, 0, 1)$ $\quad$ $f_3 = (0, 0, 7)$

   L'opérateur linéaire A qui transforme e_i en f_i pour tout $i = 1, 2, 3$, est-il inversible? Calculer $A((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées

   (a) du vecteur $(-3, 2, 4)$ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$?
   (b) du vecteur $A((-3, 2, 4))$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$?
   (c) du vecteur $A((-3, 2, 4))$ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$?

3. Soient U, V et W trois espace vectoriel réels de dimension finie, et soient $A : U \to V$ et $B : V \to W$ deux transformations linéaires. Quel est le terme manquant dans l'égalité suivante:

   $$\dim_{\mathbb{R}}(Im(A) \cap Ker(B)) = \dim_{\mathbb{R}}(Im(A)) - \dim_{\mathbb{R}}(\,?\,)$$

   Justifiez soigneusement votre réponse.

4. Si A est un opérateur linéaire sur un espace vectoriel réel V de dimension finie n et si $rang(A^2) = rang(A)$, que vaut $Ker(A) \cap Im(A)$?

5. Donner une base de $Ker(A)$, $Ker(B)$, $Im(A)$ et $Im(B)$, où

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$