Déterminants

Exercice 1. Calculer le déterminant de chacune des matrices réelles suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer, par induction sur le nombre de lignes, le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer à l'aide des déterminants l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -a & b \\ a & 1 & -1 \\ -b & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4. Démontrer que si $a \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique (c'est-à-dire $a^T = -a$) et si n est impair, alors $\det(a) = 0$. Que se passe-t-il si n est pair ?

Corps commutatifs

Exercice 5. Les ensembles suivants, munis de l'addition et de la multiplication usuelles, sont-ils des corps ?

(a) $\mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$

(c) $\left\{\frac{a}{2^b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$

(d) l'ensemble des nombres décimaux limités

(e) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$

(f) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$

(g) l'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes en x à coefficients réels.

Exercice 6. Existe-t-il un inverse de a dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$, pour $a = 12, 13, 17$ et $n = 34$, et pour $a = 13$ et $n = 31$?