Espaces Euclidiens et Hermitiens

Exercice 1. À tout couple de vecteurs (x_1, x_2) et (y_1, y_2) de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$, on associe le nombre réel $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)$ défini par

(a) $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 x_2 y_1 y_2$

(b) $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$

(c) $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 43(x_1 y_1 + x_2 y_2)$

(d) $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = e^{x_1 y_1 + x_2 y_2}$.

Quelles sont, parmi ces expressions, celles qui définissent un produit scalaire ?

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel V des fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on sait que l'application qui associe à tout couple d'éléments $f, g \in V$ le nombre réel

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

est un produit scalaire. En est-il encore de même si V est

(a) l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

(b) l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels ?

Exercice 3. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^5$, trouver la projection orthogonale du vecteur $(2, -1, 5, 1, 3)$

(a) sur le vecteur $v = (1, 1, 0, 0, 0)$

(b) sur le vecteur $w = (4, 0, 1, -1, 2)$

(c) sur le sous-espace engendré par v et w.

Exercice 4. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$e_1 = (1, -1, 0, 0) \quad e_2 = (1, 1, 1, -1)$$

forment-ils une partie libre orthogonale ? Dans l'affirmative, compléter celle-ci en une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par la méthode de Gram-Schmidt, et calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ dans cette base.

Exercice 5. Soit V l'espace vectoriel réel des polynômes en x de degré ≤ 2, muni du produit scalaire défini par

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

pour tout $f, g \in V$.

(a) Que vaut la norme du vecteur $x^2 - 2x + 5$?

(b) Que vaut le cosinus de l'angle entre les vecteurs x et x^2 ?

(c) En partant de la base de V formée des vecteurs $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ et en appliquant la méthode de Gram-Schmidt, construire une base orthonormale de V.

(d) Trouver une base de l'hyperplan de V orthogonal au vecteur $f = 2x + 1$.

Exercice 6. Dans l'espace hermitien $\mathbb{C}^3$, construire une base orthonormale du sous-espace engendré par les vecteurs $(1, 0, i)$ et $(2, 1, 1 + i)$.

Exercice 7. Soit V l'espace euclidien des fonctions continues de l'intervalle $[-1, 1]$, muni du produit scalaire

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Si W est le sous-espace des *fonctions paires*, c'est-à-dire des fonctions $f \in V$ telles que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, quel est le sous-espace orthogonale $W^{\perp}$?

Exercice 8. Dans un espace euclidien ou hermitien V, prouver que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

pour tout $x, y \in V$ (c'est la *loi du parallélogramme*).

Exercice 9. Soient x et y deux vecteurs d'un espace euclidien V. Prouver que

$$\|x\| = \|y\| \text{ si et seulement si } (x - y) \perp x + y.$$

Cette propriété est-elle encore vraie dans un espace hermitien ?