Bacheliers en Sciences Mathématiques et Physiques, bloc 1
MATHF102: Séance 23

1. Soit $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F := \{f_1, f_2, f_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $f_1 := (1, 0, 2)$, $f_2 := (0, 2, 3)$ et $f_3 := (1, 0, 0)$. Donner les bases duales E^* et F^* de $(\mathbb{R}^3)^*$.

2. Si V est l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si f_0 est un élément de V, l'application $\alpha : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\alpha(f) := \int_a^b f_0(x) f(x) dx \qquad \text{pour tout } f \in V$$

est-elle une forme linéaire sur V? Même question pour l'application $\beta : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta(f) := f(x_0) \qquad \text{pour tout } f \in V,$$

où x_0 est un point donné de $[a, b]$. Dans le cas où la réponse serait affirmative pour l'une de ces applications, la forme linéaire qu'elle définit est-elle dégénérée (c'est-à-dire constante)?

3. Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f((1, -1, 0)) = 1, \; f((-1, 0, 1)) = 2 \; \text{ et } \; f((0, 1, 0)) = 0,$$

que vaut $f((x, y, z))$?

4. Étant données les formes linéaires f, g et h sur $\mathbb{R}^3$ définies pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &:= x + 2y - z, \\ g((x, y, z)) &:= 2x - 8z, \text{ et} \\ h((x, y, z)) &:= 2x + 6y + z, \end{aligned}$$

calculer $(f + g)((x, y, z))$, $(3h)((x, y, z))$ et $(6f - g - 2h)((x, y, z))$. $\{f, g, h\}$ est-il une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$? De plus, donner les coordonnées de f, g et h dans les bases E^* et F^* de l'exercice 1.

5. Dans chacun des espaces vectoriels V à 3 dimensions décrits ci-dessous, on donne une base $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ et on demande de déterminer la base duale $E^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ (ce qui revient à calculer $e_1^*(v)$, $e_2^*(v)$ et $e_3^*(v)$ pour tout $v \in V$):

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ et $E = \{(1, 2, -4), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$;

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ et $E = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;

   (c) $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ et $E = \{1, (1 - x), (1 - x)^2\}$.