ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

Liste 11 – Théorèmes de Tonelli et Fubini

Exercice 1. On considère l'espace mesuré $([0,1]\times[0,1], \mathcal{M}, \mu)$, avec $\mu = m \times \sharp$, où m est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\sharp$ est la mesure qui compte les points. Calculer

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\{x=y\}}(x,y)\, dm \right) d\sharp$$

et

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\{x=y\}}(x,y)\, d\sharp \right) dm.$$

Ceci contredit-il le théorème de Tonelli ?

Exercice 2. Soit $f : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Vérifier que f est Lebesgue mesurable.

b) Calculer

$$I = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y)\, dx \right) dy$$

et

$$J = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

c) La fonction f est-elle intégrable sur $[-1,1]\times[-1,1]$?

Exercice 3. Soit $(\mathbb{N}, \mu)$ un espace mesuré où μ est la mesure comptage. On définit f sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ -1, & \text{si } m = n+1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) La fonction f est-elle $\mu \otimes \mu$ intégrable ?

b) Calculer

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(m) \right) d\mu(n) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(n) \right) d\mu(m).$$

c) Le résultat est-il compatible avec le théorème de Fubini ?

Exercice 4. Déterminer la valeur de

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

Remarque : pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}\, dy$.