ULB **Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique**

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Thibaut Grouy et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2016/2017

Séance 14 - Formule de Cauchy - Principe des zéros isolés

Exercice 1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé $D(0,1]$ et f est une fonction holomorphe sur U.

a) Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz,$$

où γ est le cercle unité, centré en 0, parcouru une fois dans le sens positif.

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction entière telle que

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|\leq|P(z)|,$$

où P est un polynôme. Montrer que f est également un polynôme dont le degré est inférieur ou égal à celui de P.
Indication : Montrer que $f^{(k)}$ est identiquement nulle pour un $k\in\mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

a) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U telle que

$$\forall z\in U,\quad f(z)g(z)=0.$$

Montrer que f ou g est identiquement nulle sur U.
Indication : Utiliser le principe des zéros isolés.

b) Soit f une fonction holomorphe sur U. Supposons qu'il existe g_1 et g_2 holomorphes sur U telles que

$$\forall z\in U,\quad g_1(z)^2=f(z)=g_2(z)^2.$$

Montrer que $g_1=g_2$ ou $g_1=-g_2$.

Exercice 4. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction entière telle que

$$|f(z)|\to+\infty\quad\text{lorsque } |z|\to+\infty.$$

Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros.