Théorème de Sylvester et formes quadratiques

Exercice 1. Calculer la signature des matrices symétriques suivantes au moyen du théorème de Sylvester.

1. $a = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
2. $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
3. $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Si f est une forme bilinéaire symétrique sur V et si q est sa forme quadratique associée, prouver que pour tout $x, y, z \in V$

(a) $q(x+y) - q(x-y) = 4f(x,y)$.
(b) $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$.
(c) $q(x+y+z) = q(x+y) + q(y+z) + q(z+x) - q(x) - q(y) - q(z)$.

Exercice 3. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q la forme quadratique associée. Déterminer la matrice de f dans la base canonique si, lorsque

$$a = (1,2,1), b = (-1,2,0), c = (1,0,1),$$

on a

$$f(a,b) = 0, f(b,c) = 4, f(c,a) = -1, q(a) = 5, q(b) = 1, q(c) = 0.$$

Exercice 4. Pour chacune des formes quadratiques q sur $\mathbb{R}^2$ définies ci-dessous, trouver la forme bilinéaire symétrique f associée et la matrice de q dans la base canonique.
(a) $q(x) = x_1^2 + 9x_2^2$.
(e) $q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$.

Exercice 5. Les formes quadratiques suivantes sont-elles définies positives ? définies négatives ? semidéfinies positives ? semidéfinies négatives ? indéfinies ?
(a) $q(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 11x_2^2 + 24x_1x_2$.
(b) $q(x_1,x_2) = 17x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_1x_2$.
(c) $q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.