MATHF411-Analyse Fonctionnelle

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paul Godin

Espaces de Sobolev-partie I

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables au sens faible dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$? Si oui, quelle est leur dérivée ?

(i) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ où $\Omega = \mathbb{R}$;

(ii) la fonction de Heaviside, c'est-à-dire la fonction caractéristique de $[0, \infty[$;

(iii) On considère $\Omega = (0,2)$ et $u : (0,2) \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = x\chi_{(0,1]} + \chi_{[1,2)};$$

(iv) une fonction continue sur Ω continuément dérivable par morceaux ;

(v) Considérez $\Omega = (0,2)$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par

$$u(x) = x\chi_{(0,1]} + 2\chi_{[1,2)}.$$

Exercice 2 Soient $B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

(i) pour $\alpha > 0$, on a $|x|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B)$ si et seulement si $0 < \alpha < (N-p)/p$;

(ii) $\ln|x| \in W^{1,p}(B)$ lorsque $p < N$;

(iii) $(\ln|x|)^\alpha \in W^{1,N}(B)$ si $0 < \alpha < 1 - 1/N$. En déduire que $H^1(B) \nsubseteq C(\overline{\Omega})$.

Exercice 3 Soient (a,b) un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $f \in L^1(a,b)$ et $x_0 \in (a,b)$ fixé. Posons

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Prouver que $g \in L^1(a,b)$, que $g' = f$ au sens faible et que g est continue sur $[a,b]$.

Exercice 4 (Dérivation d'un produit) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

a) Démontrer que si $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$uv \in W^{1,p}(I) \quad \text{et} \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Indice : Rappeler le résultat de densité des espaces $W^{1,p}(I)$.

Exercice 5 Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$. Montrer que $\min(u, v)$ et $\max(u, v)$ appartiennent à $W^{1,p}(I)$, avec de plus

$$\|\min(u,v)\|_{1,p} \leq \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p} \quad \text{et} \quad \|\max(u,v)\|_{1,p} \leq \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}.$$

Exercice 6 Montrer que l'injection $W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ est continue mais pas compacte.

Indice : Considérer la suite $u_n(x) = x^{1/n}$.

Exercice 7 À l'aide d'un exemple bien choisi, montrer que l'injection $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte.

Exercice 8 (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega);$$

Ce résultat est-il vrai dans les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$? C'est-à-dire,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Et dans les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$?

Exercice 9 L'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est jamais compacte même sur un domaine borné.