Orthogonal matrices

Exercice 1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, combien y a-t-il d'isométries appliquant $(1,0,0)$ sur $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ et $(0,1,0)$ sur $(0,0,1)$? Écrire la matrice de chacune de ces isométries dans la base canonique.

Exercice 2. Que représentent géométriquement les matrices orthogonales suivantes ?

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

Exercice 3. La matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

est-elle orthogonale ? Calculer sa matrice inverse, son déterminant, ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 4. Prouver que

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

est la matrice d'une rotation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Quel est son axe ? Quel est son angle ?

Exercice 5. Les matrices suivantes sont-elles unitaires ?

$$a = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}} \\ \frac{i}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. La matrice

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

est-elle la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^4$? Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. Soit $a \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Prouver que

(a) si $\operatorname{tr}(a) > 1$, alors $\det(a) = 1$ et a est une rotation de $\mathbb{R}^3$;

(b) si $\operatorname{tr}(a) < -1$, alors $\det(a) = -1$ et a est une *antirotation* de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une rotation composée avec une réflexion par rapport à un plan.

Exercice 8. Pour chacune des matrices symétriques q ci-dessous, trouver une matrice orthogonale a telle que $a^T qa$ soit diagonale, et calculer la signature de q.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$