Mathématique – MATHF-112/1112

2017-2018

Exercices

3. Algèbre linéaire

1) Vérifier si oui ou non les ensembles suivants sont des espaces vectoriels réels :
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 4y = 0\}$, muni de l'addition et multiplication scalaires usuelles sur $\mathbb{R}^2$
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 4y = 1\}$, muni de l'addition et multiplication scalaires usuelles sur $\mathbb{R}^2$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^3\}$, muni … (idem)
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 4y = 0 \; et \; y - x = 0\}$
   e) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x + 4y = 0 \\ z = x \end{cases}\right\}$, muni de l'addition et multiplication scalaires usuelles sur $\mathbb{R}^3$
   f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$, muni … (idem)
   g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 \; ou \; z = 0 \}$
   h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1 \; ou \; z = 0 \}$
   i) $\{\lambda(1,2,3) + \mu(4,5,6) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = |x| \}$
   k) $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' - 2f' + f = 0\}$, muni de l'addition usuelle sur les fonctions, et de la multiplication par des réels usuelle (si $\lambda \in \mathbb{R} \; et \; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $alors \; \lambda f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \lambda. f(x)$)
   l) $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' - 2f' + f = \sin x\}$
   m) $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \; tel \; que \; f(x) = 2 \sin x + \lambda \cos x\}$
   n) $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' = 2f^2\}$
   o) $\{f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid div \; f = 0\}$
   p) $\{f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid rot \; f = (0,0,0)\}$

2) Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
   a) Dans $\mathbb{R}^3$: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)
   b) Dans $\mathbb{R}^3$: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,2,3)
   c) Dans $\mathbb{R}^2$: (0,1) et (1,1)
   d) Dans $\mathbb{R}^3$: (1,2, 3) et (4,5,6)
   e) Dans $\mathbb{R}^3$: (1,2, 3), (4,5,6) et (-5,-4,-3)
   f) Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \; dans \; \mathbb{R}$, les fonctions : $\sin x$ et $\cos x$

g) Dans ce même espace, les fonctions exp(x) et exp(-x)
h) Dans $\mathbb{R}^4$: (0,0,1,0), (0,1,2,3), (1,0,1,0) et (-1, 2, 4, 6)
i) Dans $\mathbb{R}^4$: (0,0,1,0), (0,1,2,3), (1,0,1,0)

3) Les sous-ensembles suivants forment-ils des parties libres, génératrices, ou des bases de l'espace vectoriel considéré ?
a) $A = \{(0,1),(1,1),(-2,3)\}$, où $V = \mathbb{R}^2$
b) $A = \{(1,1),(1,2)\}, où\ V = \mathbb{R}^2$
c) $A = \{(0,0,0)\}$, où $V = \mathbb{R}^3$
d) $A = \{(1,2,3),(4,5,6)\}$ où $V = \mathbb{R}^3$
e) $A = \{\lambda(0,1,2) + \mu(4,5,6) | \lambda, \backslash mu \in \mathbb{R}\}$, où $V = \mathbb{R}^3$
f) $A = \{\sin x, \cos x\}$ où V=$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
g) $A = \{\exp(x), \exp(-x)\}\ où\ V = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f\ solution\ de\ f'' - f = 0\}$
h) $A = \{(0,0,1),(2,0,1),(1,2,3)\}$ où $V = \mathbb{R}^3$

4) Vérifier que $\{(1,1),(6,7)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Chercher les coordonnées de n'importe quel vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$dans cette base. Vérifier que $\{(2,3),(0,1)\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2, et$ écrire la matrice de changement de base permettant de passer de la première base à celle-ci. Utiliser ensuite ces deux matrices de changement de base pour obtenir les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$ dans cette nouvelle base.

5) Vérifier que $B = \{(0,1,0),(1,0,0),(3,2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Chercher les coordonnées de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$dans cette base à partir de la matrice de changement de base permettant de passer de la base canonique $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ à cette base B.

6) Parmi les applications suivantes, déterminez celles qui sont linéaires :
a) L : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x + 1$
b) L : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \pi x$
c) L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: (x,y) \mapsto (x + 2y, y - x)$
d) L : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x,y,z) \mapsto (x - 3y, z, x + y + z)$
e) L : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x,y,z) \mapsto (x + 2, y + z, x)$
f) L : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: (x,y,z) \mapsto (y - 4z, x + 4y + 2z)$
g) L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto |x| + y$
h) L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: (x,y) \mapsto (x + 3y, e^{x+y}, 4y)$
i) L : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$
j) L : $V \to V: f \mapsto f'' + f'$ où V est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant en tout point une dérivée première et seconde (vérifiez au préalable que V est bien un espace vectoriel)
k) L : $V \to W: f \mapsto div(f)$ où V est l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^1 ($V = \{f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,|\, f = (f_1, f_2, f_3)\ avec\ f_i \in C^1\ pour\ i = 1,2,3\}$), et West l'ensemble des champs scalaires sur $\mathbb{R}^3$

l) L : $V \to W: f \mapsto rot(f)$ où V est l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ ($V = \{f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f = (f_1, f_2, f_3)\ avec\ f_i \in C^1\ pour\ i = 1,2,3\}$), et West l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$

m) L : $W \to V: f \mapsto \nabla f$ où W est l'ensemble des champs scalaires sur $\mathbb{R}^3$de classe C^1 ($W = \{f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad | f \in C^1\}$), et V est l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$

7) Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, voici des opérateurs linéaires. Ecrivez leur matrice.
   a) Rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de l'origine
   b) Homothétie centrée à l'origine et de rapport 3
   c) Symétrie par rapport à l'axe Ox
   d) Symétrie par rapport à l'axe Oy
   e) Symétrie par rapport à la droite d'équation x=y
   f) Symétrie par rapport à la droite d'équation y=-x
   g) La composée des transformations d) et e)
   h) La composée des transformations f) et d)

8) Considérons l'application linéaire :

$$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4: (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x, y - x)$$

   a) Ecrire la matrice de L dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$
   b) On définit les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{b}_1 = (1,1,1,1)$$
$$\vec{b}_2 = (1,0,0,0)$$
$$\vec{b}_3 = (0,1,0,0)$$
$$\vec{b}_4 = (0,0,1,0)$$

   Quelle est la matrice de L dans les bases suivantes considérées sur $\mathbb{R}^3\ et\ \mathbb{R}^4$: base canonique de $\mathbb{R}^3$ et base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$?

9) Dans la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, quelles sont les matrices associées aux transformations linéaires suivantes :
   a) Rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de Ox
   b) Rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de Oy
   c) Symétrie centrale par rapport à l'origine (0,0,0)
   d) Symétrie par rapport au plan Oxy
   e) Symétrie par rapport au plan Oyz
   f) Symétrie par rapport au plan Oxz
   g) Symétrie par rapport au plan $2x + 2y + y = 0$
   h) La composée des transformations f) et g)
   i) La composée des transformations b) et e)

10) Soit L l'application linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$L(1,0,0) = (1,-2,0)$$
$$L(0,1,0) = (-1,1,1)$$
$$L(0,0,1) = (1,0,0)$$

a) Ecrire la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
b) Rechercher les valeurs et vecteurs propres de L
c) Rechercher le noyau et l'image de L

11) Une application linéaire α sur $\mathbb{R}^3$ transforme les vecteurs $(1,0,1), (1,-1,1)$ et $(1,2,-1)$ en les vecteurs $(2,3,-1), (3,0,-2), (-2,7,-1)$ respectivement. Déterminer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de cette application linéaire dans cette base. Chercher ensuite les valeurs et vecteurs propres de cette application linéaire.

12) Un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^3$ a pour matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Quelle est l'image du vecteur $(1,1,1)$ par cet opérateur ?
b) Quel est le vecteur $\vec{c}$ dont l'image est le vecteur $\vec{d} = (8,7,9)$?

13) Déterminer les valeurs et vecteurs propres des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

* Lesquelles de ces matrices sont-elles diagonalisables ?

14) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{100}$

15) Un opérateur linéaire admet 0 comme valeur propre si et seulement si son noyau n'est pas réduit au seul vecteur nul. Vrai ou faux ?

16) Prouver que :

a) Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée A, alors λ^2 est une valeur propre de $A^2 = A * A$
b) Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée inversible A, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}, la matrice inverse de A

17) Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère les transformations suivantes :

a) La symétrie par rapport à la droite $y = 2x$;
b) La rotation d'angle α $(\alpha \neq 0)$ autour de l'origine ;

c) La symétrie centrale par rapport à l'origine ;
d) L'homothétie de centre (0,0) et de rapport 2.

Ecrire la matrice de chacune de ces transformations dans la base canonique, et chercher les valeurs et vecteurs propres de ces transformations. Si possible donner une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle cette matrice est diagonalisable.

18) Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$