TP10 : Équations Différentielles

1. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

   a) $y' = e^{5x}$, $y(0) = 1$.

   b) $y'' = 3x - 4$, $y(0) = 2$, $y(1) = 1$.

   c) $y''' = x + \cos(x)$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$, $y''(\pi) = 0$.

   d) $y' + y = 0$, $y(2) = 1$.

   e) $(1 + x^2)y' + xy = 0$, $y(0) = 1$.

   f) $y' = x + xy^2$, $y(0) = 0$.

   g) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$, $y(0) = 0$.

2. Quelle est la solution de l'équation différentielle
$$\frac{dy}{dx} = e^{y-x}$$
passant par le point $(1, 2)$?

3. Montrer que toute fonction de la forme
$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$
est solution de l'équation différentielle
$$y'' + y = 0.$$

4. Montrer que toute fonction de la forme
$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$
est solution de l'équation différentielle
$$y'' - y = 0.$$

5. Déterminer les valeurs des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que
$$y(x) = ax^2 + bx + c$$
soit solution de l'équation différentielle
$$2y'' + y' - y = x^2 + 1.$$

6. Une population N évolue selon la loi
$$\frac{dN}{dt} = 0,02N$$
le temps t étant exprimé en années. Au bout de combien d'années cette population va-t-elle doubler ?

7. L'*équation de la chaleur* est une équation aux dérivées partielles qui s'écrit
$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
avec a^2 un paramètre réel. Cette équation intervient dans l'étude de la propagation de la chaleur en physique. Vérifier que la fonction
$$f(x, y) = e^{-a^2 t}\sin(x)$$
est solution de cette équation.