ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

Liste 2 – Mesures

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ une fonction additive sur l'algèbre $\mathcal{A}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) La fonction μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

b) Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

c) Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Donner un exemple d'un espace mesurable et d'une mesure positive $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui ne satisfait pas le point c). Quelle condition supplémentaire faut-il alors ajouter pour que a) (ou b)) implique c) ?

Exercice 2. Soient X un ensemble non dénombrable et $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles A de X tels que A ou A^c soit au plus dénombrable. On définit $\mu(A) = 0$ dans le premier cas et $\mu(A) = 1$ dans le second. Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre et que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, c'est-à-dire, un espace mesurable où μ est une mesure non négative telle que $\mu(X) = 1$. Définissons $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une σ-algèbre sur X.

Exercice 4. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $g : X \to Y$ une application mesurable. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, on pose

$$\nu(B) = \mu(g^{-1}(B)).$$

Montrer que ν est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Remarque : on dit que ν est la mesure image de μ par l'application g.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $x \in X$.

1. On pose pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   Montrer que δ_x est une mesure.

2. Montrer que si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ telle que $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \notin A$, alors il existe $C \in [0, \infty]$ tel que $\mu = C\delta_x$.

Remarque : on dit que δ_x est la mesure de Dirac.

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$|A| = \begin{cases} \#A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $|\cdot|$ est une mesure.

Remarque : on dit que $|\cdot|$ est la mesure de comptage.

Exercice 7. Soit X un ensemble fini non-vide. Pour tout $A \subseteq X$, on pose

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#X}.$$

Montrer que μ est une mesure de probabilités sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exercice 8.
1. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de mesures, c'est-à-dire telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose
$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A).$$
Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
2. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose
$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A).$$
Est-ce que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$?
3. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$\mu_n(A) = \#\big(A \cap [n, +\infty[\big)$$
pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$.
   — Montrer que μ_n est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   — Pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$, on pose
   $$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A).$$
   Est-ce que μ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$? Déterminer $\mu(\mathbb{N})$ et $\mu(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Caractériser entièrement μ.

Exercice 9 (*). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que
$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} A_n\right) < +\infty$, montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Exercice 10 (*). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On suppose que μ et ν sont deux mesures de probabilité définies sur X telles que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout élément A de $\mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leq \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $\mu = \nu$.
2. Montrer que le résultat est faux si l'on remplace la condition $\mu(A) \leq \frac{1}{2}$ par $\mu(A) < \frac{1}{2}$.

Exercice 11 (*). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une partie stable par intersections finies telle que $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ et ν sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ satisfaisant

$$\mu(X) = \nu(X) \quad \text{et} \quad \mu(A) = \nu(A) \ \ \forall A \in \mathcal{C},$$

alors $\mu = \nu$.

Suggestion : Montrer que $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$ est une classe de Dynkin.