

LISTE 1 – NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 (Écriture plate). Mettre sous la forme $a + ib$, ($a, b \in \mathbb{R}$), les nombres complexes suivants.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ | 5. $\frac{6 - 4i}{-1 + i}$ |
| 2. $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ | 6. $\frac{i}{-1 + i\sqrt{3}}$ |
| 3. $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ | 7. $\frac{1}{x + iy}$ |
| 4. $e^{ik\pi}$ (où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) | |

Exercice 2 (Écriture polaire). Mettre sous la forme $re^{i\theta}$ (r est le module, θ est l'argument calculé dans l'intervalle $[0, 2\pi[$) et représenter dans le plan complexe les nombres complexes suivants.

1. -1
2. i
3. $1 + i\sqrt{3}$
4. $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
5. $\frac{2 + 2i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$

Exercice 3. Calculer et représenter dans le plan complexe :

1. les deux racines carrées de $-i$
2. les trois racines cubiques de 1
3. les trois racines cubiques de i
4. les quatre racines quatrièmes de -1

Exercice 4. Quelles sont les courbes du plan complexe définies par les équations suivantes ? Représenter ces courbes dans le plan complexe.

1. $Re(z) = 1$
2. $|z + 1| = \sqrt{2}$
3. $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$
4. $|z - i| = |z + i|$
5. $|z - 3i| + |z + 3i| = 10$

6. $|z - (1 + i)| - |z + (1 + i)| = 2$

Exercice 5. Quelles sont les courbes du plan complexe définies par les équations paramétriques suivantes ? Représenter ces courbes dans le plan complexe, et indiquer par une flèche le sens de parcours correspondant aux valeurs croissantes du paramètre t .

1. $z = 1 + it, (t \in \mathbb{R})$

2. $z = e^{-it}, (t \in \mathbb{R})$

3. $z = 2e^{it} - 1, (t \in \mathbb{R})$

4. $z = t + it^2, (t \in \mathbb{R})$

5. $z = 2 \cos t - i \sin t, (t \in \mathbb{R})$

6. $z = e^t + ie^{-t}, (t \in \mathbb{R})$

Exercice 6. Quelles sont les régions du plan complexe définies par les inégalités suivantes ? Représenter ces régions dans le plan complexe.

1. $\text{Im}(z) > 2$

2. $|z - 2| > \sqrt{5}$

3. $1 \leq |z - 2i| \leq 2$

4. $0 < \text{Arg}(z^2) < \frac{\pi}{2}$

5. $|z + 2i| \leq |z + 4i|$

6. $|z - 1| + |z + 1| < 4$