Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Thibaut Grouy et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2016/2017

Séance 16 - Théorème des résidus

Exercice 1. Soit $a > 1$.

1. Justifier que la fonction $f(t) := \frac{1}{a+\sin t}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. On note alors :
$$I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t} dt.$$
2. Montrer que
$$I = \int_\gamma \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1} dz,$$
où γ est le cercle unité, centré en l'origine et parcouru une fois dans le sens positif.
3. Déterminer les racines complexes du polynôme $z^2 + 2iaz - 1$. Montrer que les deux racines sont distinctes, l'une (notée z_0) étant à l'intérieur du disque unité, centré en l'origine, l'autre (notée z_1) à l'extérieur.
4. Déterminer le résidu de la fonction $g(z) := \frac{2}{z^2+2iaz-1}$ en z_0.
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 2. Soit $R > 1$. On considère γ_R le chemin fermé constitué du segment réel reliant $-R$ à R et de l'arc de cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le demi-plan supérieur.

1. Justifier que la fonction $(x \mapsto 1/(x^2 + 1))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1} dz$ en utilisant le théorème des résidus.
3. Déterminer la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x + i)(x^2 + 1)} dx,$$
en utilisant le théorème des résidus.

Exercice 4. Soit $a > 0$ fixé. On considère la fonction f d'une variable complexe définie par

$$f(z) := \frac{e^{iaz}}{1 + z^4}.$$

Pour $R > 1$, on considère γ_R le chemin fermé constitué du segment réel reliant $-R$ à R et de l'arc de cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le demi-plan supérieur. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^4} dx.$$