

Titulaire : Guillaume Dujardin

Assistants : Thibaut Grouy et Robson Nascimento

## Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2016/2017

### *Séance 9 - Séries de Fourier*

**Exercice 1.** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  lorsque :

- a)  $\forall x \in ]-\pi, \pi], \quad f(x) = |x|.$
- b)  $\forall x \in ]-\pi, \pi], \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$
- c)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|^3.$
- d)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \max(0, \sin(x)).$

**Exercice 2.** a) Existe-t-il une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique telle que les coefficients de Fourier soient  $a_n(f) = 1/2^n$  pour tout  $n \geq 0$  et  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  ?

b) À l'aide de l'exponentielle complexe, réécrire la somme de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} - \frac{1}{2}$  et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 - 4 \cos t} dt.$$

**Exercice 3.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ , et  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites réelles. On suppose que la série trigonométrique de terme général  $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  converge uniformément sur  $[a, b]$ . Montrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  tendent vers 0.

**Exercice 4.** On fixe  $a \in ]-1, 1[$  et l'on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1 - a \cos(x)}{1 - 2a \cos(x) + a^2}.$$

- a) Montrer que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et qu'elle est  $2\pi$ -périodique.
- b) Montrer que la série de fonctions de terme général  $u_n : x \mapsto a^n \cos(nx)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .
- c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$