ULB **2018/2019**

MATHF214 - Compléments de mathématiques

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paolo Roselli

LISTE 6 – TRANSFORMATION DE FOURIER

Exercice 1. Soit

$$\mathcal{F}[f(x)] = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$. Montrer que

a) $\mathcal{F}[f(ax)] = a^{-1}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$, où $a > 0$.

b) $\mathcal{F}[f(x+h)] = e^{2\pi i h\xi}\widehat{f}(\xi)$, où $h \in \mathbb{R}$.

c) $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi)$.

d) $\mathcal{F}[-2\pi i x f(x)] = \dfrac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$.

Exercice 2. Calculer la tranformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ de f lorsque

a) $f(x) = e^{-kx^2}$, où $k > 0$.

b) $f(x) = e^{-a|x|}$, où $a > 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Équation d'onde amortie)**.** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha y = 0,$$

où $c\alpha > 0$, dont on cherche la solution $y(x,t)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, telle que

$$y(x,0) = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée.

a) Déterminer la transformée de Fourier $\widehat{y}(\xi,t)$ par rapport à la variable x de la solution $y(x,t)$ cherchée.

b) En déduire l'expression de la solution $y(x,t)$ en termes de la fonction $f(x)$.

Exercice 4 (Équation de la diffusion, ou équation de la chaleur)**.** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

où $k > 0$, dont on cherche la solution $y(x,t)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, telle que

$$y(x,0) = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée.

a) Déterminer la transformée de Fourier $\widehat{y}(\xi, t)$ par rapport à la variable x de la solution $y(x, t)$ cherchée.

b) En déduire l'expression de la solution $y(x, t)$ en termes de la fonction $f(x)$.

c) Déterminer en particulier cette solution lorsque $f(x) = \delta(x)$, où $\delta(x)$ est la "distribution" de Dirac.

d) Déterminer en particulier cette solution lorsque $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x < 0, \\ 0 \text{ pour } x > 0. \end{cases}$

Exercice 5 (Équation des cordes vibrantes ou équation des ondes)**.** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

où $c > 0$, dont on recherche la solution $y(x, t)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, telle que

$$y(x, 0) = f(x) \ , \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \ ,$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions données.

a) Déterminer la transformée de Fourier $\widehat{y}(\xi, t)$ par rapport à la variable x de la solution $y(x, t)$ cherchée.

b) En déduire l'expression de la solution $y(x, t)$ en termes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

c) Déterminer en particulier cette solution lorsque $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = cxe^{-x^2}$.

Exercice 6 (Équation des télégraphistes)**.** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial y}{\partial t} + k^2 y = 0,$$

où $c, k > 0$, dont on cherche la solution $y(x, t)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, telle que

$$y(x, 0) = f(x) \ , \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = -kf(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée.

a) Déterminer la transformée de Fourier $\widehat{y}(\xi, t)$ par rapport à la variable x de la solution $y(x, t)$ cherchée.

b) En déduire l'expression de la solution $y(x, t)$ en termes de la fonction $f(x)$.