ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

Liste 7 – Les intégrales de Riemann et Lebesgue

Rappel et notation :

- Etant donné un intervalle borné et fermé $[a, b]$, *une partition* P de $[a, b]$ est une liste finie de points $(x_i)_{i=0}^n$ qui satisfont $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour chaque partition P, on définit

$$U(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{et} \quad L(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

où $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ et $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. On dit que f est *Riemann intégrable* si

$$\sup_P L(f; P) = \inf_P U(f; P).$$

Dans ce cas, cette valeur commune se note

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

- On pose, pour tout $x \in [a, b]$,

$$H(x) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|y-x| \leq \delta} f(y) \quad \text{et} \quad h(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(y).$$

Exercice 1. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Montrer les affirmations suivantes :

a) Si f est Riemann intégrable, alors f est Lebesgue intégrable et

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = (L) \int_{[a,b]} f(x)\ dm(x).$$

b) Les fonctions H et h sont bien définies et $h(x) \leq f(x) \leq H(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

c) La fonction f est continue en x si, et seulement si $H(x) = h(x)$.

d) Les fonctions H et h sont Lebesgue mesurables avec

$$(L) \int_{[a,b]} H(x)\ dm(x) = \inf_P U(f; P) \quad \text{et} \quad (L) \int_{[a,b]} h(x)\ dm(x) = \sup_P L(f; P).$$

e) En déduire que f est Riemann intégrable si, et seulement si $\{x \in [a, b] : f \text{ est discontinue en } x\}$ est négligeable.

Exercice 2. Montrer les affirmations suivantes :

a) Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable et bornée sur $[a, b]$ pour tout $b > a$, alors

$$(L) \int_{[a,\infty[} f(x)\, dm(x) = (R) \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Suggestion : Utiliser l'exercice précédent.

b) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable et bornée sur $[c, b]$ pour tout $c \in]a, b[$, alors

$$(L) \int_{[a,b]} f(x)\, dm(x) = (R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exercice 3. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ l'est aussi. On a alors $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k définie sur $[0, 1]$ par

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{q_0, q_1, \cdots, q_k\}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que chaque f_k est Riemann intégrable et calculer

$$\int_0^1 f_k(x)\, dx.$$

b) Montrer que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$. Que peut-on déduire ?

c) Montrer que f est Lebesgue intégrable et vérifier qu'on peut appliquer le théorème de la convergence dominée.