**Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique**

Titulaire : Paul Godin
Assistants : Julie Distexhe et Robson Nascimento

**Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2013/2014**

*Séance 3 - Critères d'existence d'intégrales*

**Exercice 1.** Utiliser les critères des fonctions tests pour étudier l'existence des intégrales suivants ;

(a) $\displaystyle\int_0^\infty (1+2x^2)^{-1/2}\, dx$ ;

(b) $\displaystyle\int_0^\infty P(x)e^{-x^2}\, dx$ où $P(x)$ est un polynôme ;

(c) $\displaystyle\int_2^\infty x^\alpha e^{-x} ln^\beta x\, dx$ (en fonction de $\alpha$ et $\beta$) ;

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{lnx}\, dx$ ;

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$ ;

(f) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{lnx}{(1+x^3)^{1/p}}\, dx$ (en fonction de $p$) ;

(g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$.

**Exercice 2.** Soit
$$I = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\beta}\, dx.$$
Montrer que

(a) $I$ existe si $\beta > 1$ ;

(b) $I$ ne converge pas si $\beta \leq 0$.
AIDE : utiliser le critère de Cauchy pour montrer que la suite $I_n = \int_1^{n\pi} x^{-\beta} \sin x\, dx$ ne converge pas.

(c) $I$ converge mais n'existe pas pour $0 < \beta \leq 1$.

**Exercice 3.** Etudier l'existence de
$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$
où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes sans zéros communs, $Q(a) = 0$, $Q(x) \neq 0$ pour $x \in ]a, b[$.