ULB Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Paul Godin
Assistants : Julie Distexhe et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2013/2014

Séances 1 et 2 - Convergence simple et convergence uniforme

Exercice 1. On considère les fonctions

$$f_n(x) = (1 - x^4)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) La suite (f_n) converge-t-elle sur $[-1, 1]$? Si oui, vers quelle fonction ?

b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $]0, 1]$?

Exercice 2. On considère une suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{pour } x = 0, \\ 1 - nx, & \text{pour } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

a) La suite (f_n) converge-t-elle sur $[0, 1]$? Si oui, vers quelle fonction ?

b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$? Et sur $]0, 1]$?

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $]0, 1]$?

Exercice 3. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } n < x < n + 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) La suite (f_n) converge-t-ell sur $\mathbb{R}$?

b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$?

Exercice 4. Etudier la convergence sur $[0, 1]$ de la suite définie par

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

Exercice 5. Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que la suite $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer la fonction limite.
b) La suite (f_n) converge-t-ell sur $\mathbb{R}$?
c) La suite (f_n) converge-t-ell sur $]0, \infty[$?
d) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $]0, \infty[$?

Exercice 6. Etudier la convergence sur $]0, \pi[$ de la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos nx}{nx^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 7. Montrer que la fonction de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

est C^∞ pour $x > 1$.

Exercice 8. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Exercice 9. Sur $[1/2, 1]$, étudier la convergence de la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n.$$

Etudier la convergence de la série dérivée ; en déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$