**ULB** **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

# Liste 9 – Espaces $L^p$ : Partie II

Notation : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note

$$L^p(X, \mu) = L^p(\mu) = L^p(X).$$

**Exercice 1.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(X)$ qui converge $\mu$-presque partout vers une application $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(X)} = 0$.

b) $f \in L^p(X)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)}$.

Suggestion : Pour l'implication *b)* $\Rightarrow$ *a)*, appliquer le lemme de Fatou à la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $g_k = 2^{p-1}(|f_k|^p + |f|^p) - |f_k - f|^p$.

**Exercice 2** (Lemme de Brézis-Lieb)**.** Soient $X$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans $L^p(X)$ et que $u_k(x) \to u(x)$ presque partout dans $X$. On se propose de montrer que $u \in L^p(X)$ et que

$$\lim_{k\to\infty} \left( \|u_k\|^p_{L^p(X)} - \|u_k - u\|^p_{L^p(X)} \right) = \|u\|^p_{L^p(X)}.$$

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon = C(\varepsilon, p) > 0$ tel que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\big| |a+b|^p - |a|^p - |b|^p \big| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p.$$

Suggestion : Montrer que $\lim_{|s|\to\infty} \frac{|s+1|^p - |s|^p - 1}{|s|^p} = 0$.

b) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pose

$$f_k^\varepsilon = \left( \big| |u_k|^p - |u_k - u|^p - |u|^p \big| - \varepsilon |u_k - u|^p \right)^+.$$

Calculer

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k^\varepsilon(x)\, dx.$$

c) Conclure.

Remarque : Comme une conséquence directe de cet exercice on a que si $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(X)$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ avec

$$u_k(x) \to u(x) \text{ p.p. dans } X \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(X)} = \|u\|_{L^p(X)},$$

alors $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^p(X)} = 0$.

**Exercice 3** (Densité dans $L^p(\mathbb{R}^n)$)**.** Soit $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$. Montrer les affirmations suivantes :

a) L'espace de fonctions simples est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

b) L'espace de fonctions en escalier est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

c) L'espace de fonctions continues à support compact $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

d) Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ lorsque } |h| \to 0.$$

Que dire du cas $p = \infty$ ?

Suggestion : Utiliser le point $c$).