ULB **2018/2019**

MATHF214 - Compléments de mathématiques

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paolo Roselli

Liste 7 – Équations différentielles

Exercice 1. Construire par développement en série de Taylor autour de $x_0 = 0$, la solution générale de l'équation differentielle :

a) $y'' + y = 0$.

b) $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$.

c) $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$.

d) $\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) y'' + 4xy' - 10y = 0$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - \lambda y = 0.$$

a) Montrer que les coefficients c_k des solutions $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ satisfont à la relation de récurrence

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} c_k$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

b) i) Montrer que pour $c_1 = 0$ et $\lambda = n(n + 1)$, $n \in 2\mathbb{N}$, la solution se réduit à un polynôme de degré n.

ii) Sous ces conditions, écrire les polynômes $P_n(x)$, de degré $0, 2$ et 4, tels que $P_n(1) = 1$ (avec $n = 0, 2, 4$).

c) i) Montrer que pour $c_0 = 0$ et $\lambda = n(n+1)$, $n \in 2\mathbb{N}+1$, la solution se réduit à un polynôme de degré n.

ii) Sous ces conditions, écrire les polynômes $P_n(x)$, de degré $1, 3$ et 5, tels que $P_n(1) = 1$ (avec $n = 1, 3, 5$).

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$xy'' + (1 - x)y' - \lambda y = 0.$$

a) Montrer que les coefficients c_k des solutions $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ satisfont à la relation de récurrence

$$c_{k+2} = \frac{k + \lambda}{(k+1)^2} c_k$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

b) i) Montrer que pour $\lambda = -n, n \in \mathbb{N}$, la solution se réduit à un polynôme de degré n.

ii) Sous ces conditions, écrire les polynômes $L_n(x)$, de degré $0, 1, 2, 3$ et 4, tels que $L_n(0) = n!$ (avec $n = 0, 1, 2, 3, 4$).

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$$

où $a \in \mathbb{N}$ et $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

a) Déterminer la relation de récurrence satisfaite par les c_k des solutions $y(x)$ développables en série de Taylor autour de $x_0 = 0$.

b) On fait le choix $c_0 = 0$ lorsque a est impair et $c_1 = 0$ lorsque a est pair. En déduire que la solution y qui correspond à ce choix est un polynôme dont on indiquera le degré et la parité.

c) Déterminer le polynôme dans le cas $a = 3$.

d) Montrer que $y(x) = \cos(\gamma \arccos x)$, pour $\gamma \geq 0$ est solution de l'équation différentielle avec une valeur de γ que l'on déterminera.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

a) Obtenir la relation de récurrence qui régit les coefficients c_k des solutions $y(x)$ développables en série de Taylor autour de $x_0 = 0$.

b) i) Construire les solutions développables en série de Taylor autour de $x_0 = 0$.

   ii) Parmi ces solutions, déterminer celle qui satisfait aux conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0. \end{cases}$$