ULB **2018/2019**

MATHF3001 - Théorie de la mesure

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Céline Esser

Liste 4 – Fonctions mesurables

Exercice 1. Soit f une fonction réelle sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Montrer que si l'ensemble $\{x \in X \,:\, f(x) > r\}$ est mesurable pour tout $r \in \mathbb{Q}$, alors f est mesurable.

Exercice 2. Dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{ailleurs}\,; \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que f et g sont mesurables.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Pour une suite $f_k : X \to \mathbb{R}$ de fonctions mesurables où $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$A = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$$

est mesurable.

Exercice 4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash D$, où D est un ensemble au plus dénombrable. Montrer que g est borélienne.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A})$ une espace mesurable. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est une fonction mesurable si, et seulement si, $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{A})$ une espace mesurable. Montrer que les parties positives et négatives d'une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

Remarque : $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$.

Exercice 7. Soit f définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable au sens de Lebesgue et que

$$m(f^{-1}(E)) = m(E)$$

pour tout $E \subset [0, 1[$ mesurable.

Exercice 8 (Vrai ou Faux)**.** Justifier les affirmations suivantes :

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est mesurable. Alors f est mesurable.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f|$ est mesurable. Alors f est mesurable.

c) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors, $g \circ f$ est mesurable.

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue presque partout, alors f est mesurable.