Sous-espaces généralisés et polynôme minimal

Exercice 1. Calculer la décomposition en fractions partielles des fractions suivantes :

1. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$.
2. $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$.
3. $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2}$.
4. $\frac{1}{(x-1)^3(x-2)}$.
5. $\frac{1}{(x-1)^4}$.
6. $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}$.
7. $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)(x+1)}$.

Exercice 2. Calculer be_i pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, et cf_j pour tout $j = 1, 2, 3, 4, 5$, où e_i est le i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{C}^4$, f_j est le j-ème élément de la base canonique de $\mathbb{C}^5$,

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer b, b^2, b^3, b^4, ab, ab^2, ab^3 et ab^4, où

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, trouver deux sous-ensembles N_i et I_i de la base canonique de $\mathbb{C}^4$ tels que N_i est une base du noyau et I_i est une base de l'image de la transformation linéaire associée à b^i.

Exercice 4. Calculer c, c^2, c^3, ac, ac^2 et ac^3, où

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour tout $i = 1, 2, 3$, trouver deux sous-ensembles N_i et I_i de la base canonique de $\mathbb{C}^4$ tels que N_i est une base du noyau et I_i est une base de l'image de la transformation linéaire associée à c^i.