ULB **- Liste 04 -** **2015/2016**

MATHF412-Méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles

Titulaire: Denis Bonheure

Problèmes non-linéaires

ATTENTION:DANS CETTE LISTE D'EXERCICES NOUS CONSIDÈRONS $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ COMME UN OUVERT BORNÉ ET LISSE.

Exercice 1 Soit

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ et $p \in (2, 2^*)$.

a) Montrer que la fonctionnelle énergie associée n'est ni bornée inférieurement ni bornée supérieurement.

b) Montrer que

$$I = \inf \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \lambda |v|^2\right) \, dx : v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega |v|^p \, dx = 1 \right\}$$

est atteint par une fonction u.

c) Montrer que $\overline{u} = I^{\frac{1}{p-2}} u$ est une solution du problème de départ.

Indice: Utiliser le théorème des multiplicateurs de Lagrange et la formulation faible du problème.

d) Montrer que $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ est une condition nécessaire.

Indice: Prendre la première fonction propre du laplacien comme fonction teste dans la formulation faible.

Exercice 2 (Variété de Nehari) Le but de cet exercice est d'obtenir les mêmes résultats de l'exercice précedent par une méthode différente. Soit J la fonctionnelle énergie associée au problème (P), on définit la *variété de Nehari* associée à J par

$$\mathcal{N} := \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \backslash \{0\} : J'(u)u = 0\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{N}$ est une variété de classe C^1 et qu'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\|u\|_{W_0^{1,2}} \geq \rho > 0 \quad \forall\ u \in \mathcal{N},$$

où $\|u\|_{W_0^{1,2}} = (\int_\Omega(|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2)\,dx)^{1/2}$.

Indice: si $\psi(u) = \|u\|_{W_0^{1,2}} - \|u\|_{L^p}^p$, alors $\mathcal{N} = \psi^{-1}(0)\backslash\{0\}$.

b) Montrer que J est bornée inférieurement sur $\mathcal{N}$.

c) Soit

$$c = \inf_{v\in\mathcal{N}} J(v).$$

Montrer que si $u \in \mathcal{N}$ est tel que $J(u) = c$, alors $J'(u) = 0$.

Indice: Utiliser le théorème de multiplicateurs de Lagrange pour obtenir $J'(u)v = \mu\psi'(u)v$ pour toute $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ensuite montrer que $\mu = 0$.

d) Montrer que l'infimum est atteint sur $\mathcal{N}$. En déduire que (P) possède une solution faible non triviale.

e) Montrer que si $u \in \mathcal{N}$ est un point critique de J tel que $J(u) < 2c$, alors u ne change pas de signe dans Ω. En déduire que le problème (P) possède une solution faible non nulle et non négative.

Indice: Prouver que u^+ et u^- appartiennent à $\mathcal{N}$.

Exercice 3 Soit $1 < p < 2$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u, & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possède au moins une solution $u \not\equiv 0$.

Indice: Soit J la fonctionnelle associée. Etant donnée $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}$ étudier le signe de $J(t\phi)$ pour $t \sim 0$. Ensuite montrer que l'infimum est atteint en $u \in W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}$.

Exercice 4 Soient H un espace de Hilbert et $J \in C^1(H;\mathbb{R})$. Prouver que si J satisfait $(PS)_c$, alors

$$\mathcal{K}_c = \{u \in H : J(u) = c,\ J'(u) = 0\}$$

est un ensemble compact.

Remarque: $(PS)_c$ signifie la condition de Palais-Smale au niveau c.

Exercice 5 Soient H un espace de Hilbert et $J \in C^1(H;\mathbb{R})$ avec

$$J'(u) = \|u\|_H^2 + K(u)$$

où $K : H \to H$ est un opérateur compact. Montrer que J satisfait la condition de Palais-Smale si, et seulement si, chaque suite de Palais-Smale est bornée.

Exercice 6 (Application du théorème du col) Le but de cet exercice est de prouver l'existence d'une solution faible pour le problème (P) par le théorème du col. Soit J la fonctionnelle associée.

a) Montrer que J satisfait les conditions géométriques du théorème du col, c'est-à-dire, ils existent $\rho, \alpha > 0$ tels que

   (i) $J(u) \geq \alpha$ pour $\|u\|_{W_0^{1,2}} = \rho$;

   (ii) Il existe $e \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $\|e\|_{W_0^{1,2}} > \rho$ et $J(e) \leq 0$.

b) Montrer que J satisfait la condition de Palais-Smale pour tout $c \in \mathbb{R}$.

   Indice: Utiliser l'exercice 5 pour vérifer la condition de Palais-Smale.

   Remarque: Ici c signifie le niveau critique de J, c'est-à-dire, il existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ telle que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$.

c) En conclure.