**ULB** **- Liste 02 -** **2015/2016**

MATHF412-Méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles

Titulaire: Denis Bonheure

## Méthodes directes dans le calcul de variations

ATTENTION:DANS CETTE LISTE D'EXERCICES NOUS CONSIDÈRONS $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ COMME UN OUVERT BORNÉ ET LISSE.

**Exercice 1** Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. Montrer que le problème

$$I = \inf \left\{ \int_\Omega \left[ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|u|^2 \right] dx - \int_{\partial\Omega} gu \, d\sigma_x - \int_\Omega fu \, dx : u \in W^{1,2}(\Omega) \right\}$$

possède une unique solution $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_\Omega \overline{u}\varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} g\varphi \, d\sigma_x + \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \ \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

**Exercice 2** Soit $p \geq 2$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\text{div}(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) = f(x), & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possède une unique solution faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Indice: Considérer la fonctionnelle associée $J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega f(x)u$ et montrer que $J$ est coercive dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On rappelle que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est une injection compacte.

**Exercice 3** Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons le problème

$$\begin{cases} -u''(t) + u^3(t) = h(t), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonctionnelle énergie est bornée inférieurement. En déduire qu'il existe une solution faible $\overline{u} \in W_0^{1,2}(0,1)$.

(b) Montrer que la solution faible $\overline{u}$ est unique.

Indice: $s \mapsto s^3$ est croissante et du coup $(a^3 - b^3)(a-b) > 0$ pour $a \neq b$.

(c) Remplacer $u^3$ par $-u^3$. Que se passe-t-il?