Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Paul Godin
Assistants : Julie Distexhe et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2013/2014

Séance 5 - Fonctions définies par des intégrales

Exercice 1. Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t)dt,$$

où $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\frac{dF}{dx}$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

telle que $y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0$ peut s'écrire

$$y(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Exercice 3. Soit la **fonction d'Euler**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

a) Montrer que $\Gamma \in C^\infty(]0, \infty[)$.

b) Prouver la relation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

en déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

c) Montrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du.$$

d) Montrer que

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \lim_{R\to\infty} \iint_D e^{-(u^2+v^2)} dudv,$$

où D est un disque de rayon R centré à l'origine. En déduire que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

e) Calculer

$$\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t}dt.$$

f) Montrer que

$$\int_0^1 x(\ln x)^{-1/3} dx = \frac{-2^{1/3}}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$