ULB **Liste 02** **2016/2017**

MATHF411-Analyse Fonctionnelle

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paul Godin

Compacité et Théorie Spectrale

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel normé.

a) Pour tout sous-espace linéaire fermé $F \subsetneq E$, montrez qu'il existe un vecteur de norme 1 distance plus grande que $1/2$ de F.

b) Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

c) La dimension de E est finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

d) Si la dimension de E est infinie, alors l'application identité $\mathrm{Id} : E \to E$ n'est pas compacte.

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert et $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction faiblement semi-continue inférieurement. Si φ est coercive, alors φ atteint son infimum dans H.

Exercice 3 Montrez que :

a) Si $C \subset H$ est un convexe, fermé, borné, alors il est compact pour la convergence faible.

b) La sphère unité est fermée, bornée, mais n'est pas compacte pour la topologie faible dès que la dimension est infinie.

Exercice 4 Soient E et F deux espaces de Banach. Prouvez que l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F, noté $\mathcal{K}(E, F)$, est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$ pour la norme opérateur

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

En déduire que l'opérateur $T : l^2 \to l^2$ défini par

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right)$$

est compact.

Exercice 5 Prouvez que l'ensemble défini par

$$M := \{u \in C^1([a, b]) : \int_a^b (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2)\, dx \leq k\},$$

où $k > 0$ est une constante, est rélativement compact.

Indice : Utiliser le Théorème d'Arzelà-Ascoli.

Exercice 6 Montrez que l'opérateur

$$\begin{aligned} T : C([a,b]) &\longrightarrow C([a,b]) \\ u(x) &\longmapsto (Tu)(x) = \int_a^b K(x,s)u(s)ds \end{aligned}$$

avec $K : C([a,b]^2) \to \mathbb{R}$, est compact.

Exercice 7 Soient H un espace de Hilbert et $S, T : H \to H$ linéaires. Démontrez les affirmations suivantes.

a) Si S est continu et T est compact, alors $S \circ T$ et $T \circ S$ sont compacts.

b) Si T est compact, alors son adjoint T^* est compact.

c) Si T est auto-adjoint et si $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T \equiv 0$.

Exercice 8 Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire et compact. Supposons que $(x_n)_n \subset X$ soit une suite qui converge faiblement vers x, écrivons $x_n \rightharpoonup x$. Alors $(Tx_n)_n$ converge fortement dans Y et il possède la limite $y = Tx$.

Exercice 9 Soient $S_g, S_d : l^2 \to l^2$ des opérateurs définis par

$$S_g(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots) \quad \text{et} \quad S_d(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots).$$

Trouvez le spectre ponctuel de S_d et S_g.

Exercice 10 Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ une application linéaire de rang fini. Alors T est compact.

Exercice 11 Soient H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire sur H. Alors $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Remarque : Notons que si T est symétrique, alors $\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle T(u), u\rangle|$.

Exercice 12 Soient H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire et symétrique sur H. Alors -$\|T\|$ ou $\|T\|$ est une valeur propre de T.

Exercice 13 Si T est un opérateur linéaire borné bijectif sur un espace de Hilbert, son inverse est borné.