

Calcul Différentiel et Intégral 1

Exercices

Premier semestre

MATH-F-101

Les exercices de ce recueil sont pour la plupart du même niveau que les questions posées aux examens. Il y a cependant des exceptions. La première section intitulée “Introduction au calcul” a pour but de vous driller dans le calcul des dérivées et des intégrales, sans vous demander d’expliquer avec rigueur vos calculs. Ces questions sont donc d’un genre tout à fait différent de celles que vous rencontrerez dans la suite du cours ainsi qu’aux examens. Dans les autres sections, quelques exercices sont légèrement plus faciles que ceux des examens, afin de vous confronter crescendo aux difficultés. Il y a aussi des questions plus avancées ou concernant des sujets qui ne font pas partie de la matière d’examen. Toutes les questions dans les sections marquées du symbole \star ainsi que les questions individuelles avec l’avertissement “*Question plus avancée*” sont de ce type.

Contents

1	Introduction au calcul	3
1.1	Calcul des dérivées	3
1.2	Calcul des intégrales	5
2	Équations différentielles	6
3	Préliminaires sur les nombres réels	8
4	Suites	10
4.1	Questions de base	10
★ 4.2	Questions un peu plus avancées	12
4.3	Suites monotones	13
4.4	Limites supérieurs et inférieurs	14
★ 4.5	Une définition de l'exponentielle par les suites	15
5	Fonctions continues	15
5.1	Limites de fonctions	15
5.2	Continuité	16
5.3	Propriétés des fonctions continues	17
5.4	Continuité uniforme	18
5.5	Fonctions continues à valeurs vectorielles	19
6	Fonctions dérivables	19
6.1	Définition et calculs	19
6.2	Théorème de la moyenne	21
6.3	Approximation polynomiale	21
6.4	Règle de l'Hospital	22
6.5	Dérivées directionnelles, partielles et le gradient	23
7	Fonctions intégrables	24
7.1	Définition	24
7.2	Quelques calculs	26
7.3	Intégrales impropres	26

1 Introduction au calcul

1.1 Calcul des dérivées

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 19x^3 - 8x + 4$

(b) $f(x) = (2 - x)(1 - 5x)$

(c) $f(x) = \frac{2-x}{1-5x}$

(d) $f(x) = e^{-x^2+3x}$

(e) $f(x) = \log(x^2 + 1)$

2. Rappelez-vous que la fonction $\log: \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est la réciproque de la fonction $x \mapsto e^x$.

(a) À partir de la formule $e^{ab} = (e^a)^b$, justifiez l'équation

$$x^p = e^{p \log(x)} \quad (1)$$

(b) Soit $f(x) = x^p$. Démontrez que la formule $f'(x) = px^{p-1}$, bien connue quand la puissance p est un entier positif, reste valable pour tout $p \in \mathbb{R}$.

(c) Trouvez la dérivée des fonctions suivantes

i. $f(x) = (3x + 2)^{1/2}$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$

(d) À partir de l'équation (1), justifiez que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log(a)$$

et donc trouvez la pente du tangent au graphe de a^x en $(0, 1)$.

3. À partir de la formule $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$ justifiez l'équation suivante pour la dérivée de \cos .

$$(\cos)'(x) = -\sin(x)$$

4. Les *fonctions hyperboliques* sont définies par les équations :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

- (a) Démontrez que pour tout x ,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1. \quad (2)$$

- (b) Démontrez que $(\sinh)' = \cosh$ et que $(\cosh)' = \sinh$.

Quelle est la dérivée de \tanh ?

- (c) Faites une esquisse du graphe de \sinh pour vous convaincre qu'elle donne une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sa réciproque est la fonction notée $\operatorname{arcsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrez que

$$(\operatorname{arcsinh})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Conseil : rappelez-vous la formule (2)

5. (a) Expliquez pourquoi la fonction $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède un inverse, $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ (en particulier justifiez le domaine et l'image de \arcsin).

- (b) Démontrez que

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

*Conseil : expliquez que si $\sin(x) = y$ et $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ alors $\cos(x) = \sqrt{1-y^2}$, où nous prenons la racine **positive** ici.*

- (c) Justifiez le fait qu'il existe aussi une fonction $f: [-1, 1] \rightarrow [\pi/2, 3\pi/2]$ telle que $\sin(f(y)) = y$.

Démontrez que

$$f'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

6. Trouvez les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$

Est-ce que vous pouvez faire une esquisse du graphe de ces fonctions ? En particulier, que sont leurs asymptotes (droites verticales et horizontales que le graphe approche à l'infini) ?

1.2 Calcul des intégrales

1. Trouvez une primitive pour chacune des fonctions suivantes

- (a) $f(x) = x^2$
- (b) $f(x) = 3(x^2 + 1)^2$
- (c) $f(x) = x(1 - \sqrt{x})^2$
- (d) $f(x) = xe^x$
- (e) $f(x) = \sin(x) \cos(3x)$
- (f) $f(x) = x^2 \cos(x)$
- (g) $f(x) = x^{-1}(1 + \log(x))^{-1}$
- (h) $f(x) = e^x \sqrt{1 + e^x}$
- (i) $f(x) = \frac{x^3}{4x^4 + b}$ où $b \in \mathbb{R}$.

2. En faisant la substitution $x = \tan(u)$ démontrez que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

où \arctan est la fonction réciproque de \tan .

3. En écrivant

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)}$$

démontrez que

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

4. A partir des deux questions précédentes, trouvez une primitive pour les fonctions suivantes

- (a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$
- (b) $f(x) = \frac{1}{9x^2 - 1}$
- (c) $f(x) = \frac{4}{5x^2 - 7x - 6}$

5. Calculez les intégrales suivantes

- (a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin(x)}{x + \cos(x)} dx$
- (b) $\int_0^{\log 2} 2(1 + e^{2x})^2 e^{2x} dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$

6. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calculez

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

(b) Est-ce que F est une primitive de f ? Sinon, pourquoi le théorème fondamentale de l'analyse ne s'applique pas ?

(c) Est-ce que f possède une primitive ?

7. (a) Démontrez par induction que

$$\sum_{j=1}^m j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

(b) Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^2 x^2 dx$$

Expliquez pourquoi la somme

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} (i-1)^2 \tag{3}$$

donne une bonne approximation de I pour n grand. (Conseil : coupez l'intervalle $[0, 2]$ en les points $x_i = i/n$ pour $i = 0, \dots, 2n$.) Trouvez la limite de S_n quand n tend vers l'infini, et donc la valeur de I , à partir de la formule (3).

Vérifiez votre calcul en trouvant la valeur de I via le théorème fondamentale de l'analyse.

2 Équations différentielles

1. Trouvez la solution aux équations différentielles suivantes :

- (a) $f'(x) + f(x) = e^{-x}$, $f(0) = 1$.
- (b) $f'(x) + f(x) = x$, $f(0) = 0$.
- (c) $xf'(x) + 2f(x) = 10x^2$, $f(1) = 3$.
- (d) $f'(x) - \tan(x)f(x) = -\sec(x)$, $f(0) = 1$.

2. Trouvez la solution aux équations aux différentielles suivantes :

- (a) $f'' - f = 0$, $f(0) = a$, $f'(0) = b$.
- (b) $f'' + f = 0$, $f(0) = a$, $f'(0) = b$.
- (c) $f'' + 6f' + 5f = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 7$.
- (d) $f'' - 4f' + 4f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

3. Dans cette question, vous étudierez l'équation *non-homogène*

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = q(x)$$

où q est une fonction donnée. Nous supposons en plus que l'équation caractéristique $t^2 + at + b = 0$ possède deux racines réelles et distinct λ_1, λ_2 .

- (a) Démontrez que si f_1 et f_2 sont les deux solutions à l'équation non-homogène alors ils existent des constantes c_1, c_2 telles que

$$f_1(x) - f_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- (b) Pour *deviner* une solution à l'équation non-homogène, posons

$$f(x) = g_1(x)e^{\lambda_1 x} + g_2(x)e^{\lambda_2 x}$$

où g_1, g_2 sont deux fonctions à trouver. Nous imposons aussi que les deux fonctions g_1, g_2 satisfont

$$g_1'(x)e^{\lambda_1 x} + g_2'(x)e^{\lambda_2 x} = 0. \quad (4)$$

i. Démontrez que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda_1 g_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 g_2(x)e^{\lambda_2 x} \\ f''(x) &= \lambda_1^2 g_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 g_2(x)e^{\lambda_2 x} \\ &\quad + \lambda_1 g_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 g_2'(x)e^{\lambda_2 x} \end{aligned}$$

ii. Déduisez-en que f est bien une solution à l'équation non-homogène si

$$\lambda_1 g_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 g_2'(x)e^{\lambda_2 x} = q(x) \quad (5)$$

iii. Démontrez que (4) et (5) sont satisfaites si et seulement si

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} q(x), \\ g_2'(x) &= \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} q(x). \end{aligned}$$

Déduisez-en qu'une solution existe toujours à condition que q soit continue.

(c) Trouvez toutes les solutions à l'équation

$$f''(x) - f(x) = e^x.$$

4. L'équation de Duffing est l'équation

$$u'' + u + u^3 = 0 \tag{6}$$

Elle est utilisée pour étudier certains systèmes oscillatoires.

(a) Étant donnée une solution u à l'équation (6), démontrez que son énergie

$$E = \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{4}(u^2 + 1)^2$$

est constante.

(b) Démontrez que pour tout t

$$-\sqrt{2\sqrt{E} - 1} \leq u(t) \leq \sqrt{2\sqrt{E} - 1}$$

où E est la valeur constante de l'énergie de la solution.

3 Préliminaires sur les nombres réels

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En considérant $(x - y)^2$, démontrez que $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

2. Étant donnés $x, y, z \in \mathbb{R}$, démontrez que

$$||x - z| - |y - z|| \leq |x - y|.$$

3. Étant donnés $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, démontrez que

$$|x - z| + |y - t| \geq ||x - y| - |z - t||.$$

4. Rappelez-vous qu'un intervalle est un ensemble de la forme $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$ ou $[a, b[$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On permet aussi le cas $a = -\infty$ pour une extrémité à gauche de la forme $]$ et $b = \infty$ pour une extrémité à droite de la forme $[$.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble avec la propriété que si $\alpha, \beta \in I$ avec $\alpha \leq \beta$ alors $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Démontrez que I est un intervalle (possiblement infini) avec les extrémités $a = \inf I$ et $b = \sup I$. (Ici, pour un ensemble A qui n'est pas majoré, nous écrivons $\sup A = \infty$. Pareillement pour un ensemble A qui n'est pas minoré, nous écrivons $\inf A = -\infty$.)

Conseil : démontrer d'abord que $] \inf I, \sup I[\subseteq I$.

5. Trouvez les supremums et infimums des sous-ensembles de \mathbb{R} suivants. Quels ensembles contiennent leurs supremums et infimums?

(a) $]10, 36]$, $[10, 36[$, $]10, 36[$

(b) $\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}, k > 0\}$.

(c) $\left\{ \frac{(-1)^k k}{k+1} : k \in \mathbb{N}, k > 0 \right\}$.

(d) $\{x : x^2 \leq 2x - 1\}$.

(e) $\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$.

(f) $\{e^x \cos(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(g) $\{\phi(x) : x \in [-1, 1]\}$ où $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 0, \\ x-2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(h) $\{|\phi(x)| : x \in [-1, 1]\}$ où ϕ est la même fonction que pour la question ci-dessus.

6. Soit $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Démontrez que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

(b) Que peut-on dire pour $\inf(A)$ et $\inf(B)$?

(c) Si, en plus, nous savons que $A \neq B$, peut-on conclure que $\sup(A) < \sup(B)$? Si oui donnez une démonstration, sinon donnez un contre-exemple.

7. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in E$.

Soient $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Ecrivons $A = \{f(x) : x \in E\}$ et $B = \{g(x) : x \in E\}$.

- (a) Démontrez que

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in E\} \leq \sup(A) + \sup(B).$$

- (b) Montrez par un exemple que l'égalité n'a pas toujours lieu.

- (c) Donnez un exemple où

$$\sup\{f(x)g(x) : x \in E\} > \sup(A) \sup(B).$$

- (d) Trouvez une condition suffisante sur f et g pour que

$$\sup\{f(x)g(x) : x \in E\} \leq \sup(A) \sup(B).$$

8. Dans cette question vous démontrerez l'algorithme de division, qui dit que pour tout couple d'entiers $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$, ils existent $q, r \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq r < b$ tel que $a = bq + r$.

Etant donnés $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$, soit

$$S = \{n \in \mathbb{N} : bn \leq a\}$$

- (a) Démontrez que S est non-vide.
 (b) Démontrez que S est majoré.
 (c) Ecrivons $q = \sup(S)$. Démontrez que $q \in S$.
 (d) Ecrivons $r = a - bq$. Démontrez que $0 \leq r < b$.
 (e) Démontrez que q et r sont les seuls entiers positifs avec $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

4 Suites

4.1 Questions de base

1. Démontrez à partir de la définition que

- (a) $\frac{n}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
 (b) $\frac{n^2}{5n+1} \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- (c) $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. Soit $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que $x_n \rightarrow l$ et $y_n \rightarrow m$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et de plus que $x_n \leq y_n$ pour tout n .
Démontrez que $l \leq m$.
Si $x_n < y_n$ pour tout n , est-ce qu'il est vrai que $l < m$?
3. Soit $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que $x_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et que $x_n \leq y_n$ pour tout n .
Démontrez que $y_n \rightarrow \infty$.
4. Soit (x_n) une suite bornée et (y_n) une suite qui tend vers ∞ lorsque $n \rightarrow \infty$. Démontrez que la suite (x_n/y_n) tend vers zéro.
5. Parmi les suites suivantes, déterminez lesquelles sont convergentes et pour celles qui convergent, trouvez leur limite.
- (a) $\left(\frac{6n^4+3n^3-12}{2n^4+3n^3+n-15} \right)$.
 - (b) $\left(\frac{(-2)^n n+1}{3n+2} \right)$.
 - (c) $\left(\frac{3n^2+(-1)^n n+3}{2n^2-1} \right)$.
 - (d) $\left(\frac{3n!+3^n}{n!+n^3} \right)$.
 - (e) $\left(\frac{n!}{(n+1)!+(n-1)!} \right)$.
 - (f) $\left(\frac{n!}{n^{100} 4^n} \right)$.
 - (g) $\left(n^{(1+1/n)} \right)$.
6. Donnez quand c'est possible un exemple de suite
- (a) ayant une limite finie.
 - (b) ayant une limite infinie.
 - (c) n'ayant pas de limite.
 - (d) à valeurs entières convergeant vers $\sqrt{2}$.
 - (e) à valeurs rationnelles convergeant vers $\sqrt{2}$.

★ 4.2 Questions un peu plus avancées

Rappel: les questions dans cette section sont un peu plus difficiles que celles que vous trouverez à l'examen.

1. Décidez si la suite $(\sqrt{n(n+1)} - n)$ converge. Si oui, trouvez sa limite.
2. (a) Démontrez que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

- (b) Déduisez-en que $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1$ pour tout $c > 0$.
3. Soient a_1, a_2, \dots, a_r réels positifs. Ecrivons $m = \max\{a_1, \dots, a_r\}$.
- (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m^n \leq a_1^n + \dots + a_r^n \leq rm^n.$$

- (b) Déduisez-en que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_r^n)^{1/n} = m.$$

4. (a) Démontrez que pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$(1+x)^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)x^2.$$

- (b) D'ici, démontrez que pour tout $n \geq 2$,

$$n^{1/n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

- (c) Démontrez que $n^{1/n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (d) Est-ce que la suite $(n^{1-1/n})$ converge?
5. Soient (x_n) une suite convergente et $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une *injection*. Ecrivons $y_n = x_{\sigma(n)}$.
- (a) Démontrez que pour tout N il existe M tel que si $n \geq M$ alors $\sigma(n) \geq N$.
- (b) Déduisez-en que (y_n) converge et que $\lim y_n = \lim x_n$.

4.3 Suites monotones

1. On considère deux suites croissantes, (x_n) et (y_n) . Démontrez ou infirmez à l'aide d'un contre-exemple,
 - (a) la suite $(x_n + y_n)$ est croissante.
 - (b) la suite $(x_n y_n)$ est croissante.
2. Donnez quand c'est possible un exemple de suite
 - (a) croissante et bornée.
 - (b) bornée mais non convergente.
 - (c) bornée, décroissante.
 - (d) bornée, croissante mais non convergente.
 - (e) croissante et n'ayant pas de limite, même infinie.
 - (f) décroissante, divergente, ayant une sous-suite convergente.
3. Soit (x_n) une suite croissante et (x_{n_k}) une sous-suite. Démontrez que
 - (a) Si $x_{n_k} \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$ alors $x_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
 - (b) Si $x_{n_k} \rightarrow l$ lorsque $k \rightarrow \infty$ alors $x_n \rightarrow l$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
4. Une suite (x_n) est définie par
$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$
 - (a) Démontrez par induction que la suite est croissante.
 - (b) Démontrez que $x_n \rightarrow \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
5. Une suite (x_n) est définie par
$$x_0 = \alpha, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + x_n)$$
 - (a) Démontrez que si $\alpha < 1/3$ alors (x_n) est croissante et majorée par 1. Quelle est sa limite?
 - (b) Démontrez que si $\alpha > 1/3$ alors (x_n) est décroissante et minorée par 0. Quelle est sa limite?
 - (c) Qu'est ce qu'il se passe quand $\alpha = 1/3$?
6. Une suite est définie par récurrence, avec $0 < x_0 < 1$ et $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$.
 - (a) Démontrez que (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones, une étant croissante, l'autre décroissante.
 - (b) Déduisez-en que (x_n) converge.

4.4 Limites supérieurs et inférieurs

1. Trouvez les limites inférieures et supérieures des suites suivantes.

(a) $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$.

(b) $(0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$.

(c) $((-1)^n + \frac{1}{n})$.

2. Soient (x_n) et (y_n) deux suites bornées.

(a) Démontrez que $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$.

(b) Donnez un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

(c) Démontrez que si l'une des deux suites est convergente, il y a égalité.

3. Soient (x_n) et (y_n) deux suites bornées.

(a) Donnez un exemple où $\limsup(x_n y_n) > \limsup(x_n) \limsup(y_n)$.

(b) Trouvez une condition suffisante pour que

$$\limsup(x_n y_n) \leq \limsup(x_n) \limsup(y_n).$$

(c) Donnez un exemple où cette dernière inégalité est stricte.

(d) Démontrez que si $x_n, y_n \geq 0$ pour tout n alors dès que l'une des deux suites converge, on a l'égalité.

4. Soit (x_n) une suite qui converge vers x lorsque $n \rightarrow \infty$. Démontrez à partir des définitions (sans appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass) que $\limsup(x_n) = x = \liminf(x_n)$.

5. *Question plus avancée.*

Soient (x_n) une suite et $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une injection. Ecrivons $y_n = x_{\sigma(n)}$.

(a) Démontrez que pour tout N il existe M tel que si $n \geq M$ alors $\sigma(n) \geq N$.

(b) Déduisez-en que $\limsup(y_n) \leq \limsup(x_n)$ et $\liminf(y_n) \geq \liminf(x_n)$.

(c) Déduisez-en de plus que si σ est une bijection alors $\limsup(y_n) = \limsup(x_n)$ et $\liminf(y_n) = \liminf(x_n)$.

(d) Donnez un exemple d'une suite (x_n) et d'une injection σ telles que $\limsup(y_n) < \limsup(x_n)$ et $\liminf(y_n) > \liminf(x_n)$.

★ 4.5 Une définition de l'exponentielle par les suites

Le but des questions suivantes est de définir a^x quand $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Rappelons-nous que l'exponentielle a^q pour $q = m/n \in \mathbb{Q}$ est définie par $a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$ où $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$ est la racine n^{e} de b . (Ici, $m \in \mathbb{Z}$ et n est un entier strictement positif.)

1. Soient $a > 0$ et (q_n) une suite convergente de rationnels. Démontrez que la suite (a^{q_n}) est de Cauchy et donc est aussi convergente.
2. Soient $a > 0$ et $(p_n), (q_n)$ deux suites convergentes de rationnels ayant la même limite. Démontrez que les suites (a^{p_n}) et (a^{q_n}) ont la même limite.
3. Soient $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et (q_n) une suite de rationnels convergeant vers x . Nous définissons a^x comme la limite de (a^{q_n}) .

Démontrez que les règles suivantes s'appliquent encore avec cette définition étendue:

$$\begin{aligned}a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy}\end{aligned}$$

5 Fonctions continues

5.1 Limites de fonctions

1. Démontrez à partir de la définition que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (6x + 3) = 15.$$

2. Soient $f, g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à U .

Démontrez que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ aussi.

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage pointé de a .

Démontrez que f possède une limite en a si et seulement si f possède une limite à gauche en a et une limite à droite en a et ces deux limites sont égales. Démontrez de plus que dans ce cas,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

4. Déterminez si les limites suivantes existent et dans l'affirmative calculez-les.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 10} (x - 10)[x],$ où $[x]$ est l'entier le plus grand avec $[x] \leq x.$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{4x^2 - 1}.$

(d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x - 1}{x^3 - 1}.$

5. Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ et écrivons $t = 1/x$. Démontrez que si une des limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} f(1/t)$ existe alors les deux existent et ont la même valeur.

5.2 Continuité

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Démontrez que f n'est pas continue en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais qu'elle est continue en 0.

2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouvez les points où f est continue.

3. Donnez un exemple d'une fonction qui est continue en $\sqrt{2}$ mais qui n'est pas continue en tout autre point.
4. Soient $a \in \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de a et $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de $f(a)$ qui contient $f(U)$. Supposons que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$. Démontrez à partir de la définition (et pas en utilisant la caractérisation de continuité en termes de suites comme est faite dans le cours) que la fonction composée

$$g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

est continue.

5.3 Propriétés des fonctions continues

1. Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. En appliquant le théorème de la valeur intermédiaire à la fonction $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(x) - x$, démontrez qu'il existe un point fixe $c \in [0, 1]$ de f . (C'est-à-dire tel que $f(c) = c$.)
2. Dans cette question, nous parlons des fonctions \sin , \cos et e^x . Vous pouvez supposer qu'elles sont continues (ce qui sera démontré pendant la deuxième partie du cours).
 - (a) Démontrez que l'équation $2 \sin(x) = x^2 - 1$ possède une solution entre 1 et 2.
 - (b) Démontrez que l'équation $2 \tan(x) = 1 + \cos(x)$ possède une solution entre 0 et $\pi/4$.
(Rappelez-vous que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Où cette fonction est-elle définie ? Où est-elle continue ?)
 - (c)
 - i. Démontrez que l'équation $xe^x = 1$ possède une solution entre 0 et 1.
 - ii. Est-ce qu'il y a une solution dans $]0, 1/2[$ ou $]1/2, 1[$?
 - iii. Est-ce que vous pouvez calculer une solution à deux chiffres significatifs ?
3. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle I .
Démontrez que f est une bijection $I \rightarrow f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone.
4. Soit $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ un polynôme de degré n pair. Supposons que $a_n < 0$. Démontrez que p a au moins deux racines dans \mathbb{R} .
5.
 - (a) Donnez un exemple d'une fonction $f:]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue, bornée et qui atteint son minimum mais pas son maximum.
 - (b) Donnez un exemple d'une fonction $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue, bornée et qui atteint son maximum mais pas son minimum.
 - (c) Donnez un exemple d'une fonction $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est bornée mais qui n'atteint ni son minimum ni son maximum.
 - (d) Donnez un exemple d'une fonction $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'a ni une borne supérieure ni une borne inférieure.

- (e) Expliquez pourquoi les exemples que vous avez donnés ci-dessus ne contredisent pas le théorème des bornes atteintes.
6. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait l'équation

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Ecrivons $f(1) = a$.

- (a) Démontrez, pour tout rationnel strictement positif $q \in \mathbb{Q}$, que $f(q) = aq$.
- (b) Démontrez que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (c) Supposons de plus que f est continue. Démontrez que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. *Question plus avancée.*

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait l'équation

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Démontrez que $f(1) \geq 0$.
- (b) Démontrez que si $f(1) = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout x .
- (c) Démontrez que si $f(1) = a > 0$, alors $f(m) = a^m$ pour tout entier positif $m \in \mathbb{N}$.
- (d) Démontrez que si $f(1) = a > 0$, alors $f(m/n) = a^{m/n}$ pour tout rationnel $m/n \in \mathbb{Q}$.
- (e) Démontrez que si $f(1) = a > 0$ et que de plus f est continue alors $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5.4 Continuité uniforme

1. Rappelez-vous que deux suites (x_n) , (y_n) sont dites *équivalentes* si $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (a) Démontrez que si (x_n) converge vers x alors (y_n) est équivalente à (x_n) si et seulement si (y_n) converge aussi vers x .
- (b) Donnez un exemple de deux suites distinctes qui ne convergent pas mais qui sont équivalentes.

2. Parmi les fonctions suivantes, décidez lesquelles sont uniformément continues
 - (a) $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
 - (b) $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
 - (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = \sin(x)$.
(Vous pouvez supposer que \sin soit continue et qu'elle ait toutes les propriétés connues de la trigonométrie basique.)
 - (d) $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme de degré strictement supérieur à 1.
3. Soient $f_1: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions uniformément continues où $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ et, de plus, avec $f_1(E_1) \subseteq E_2$.
Démontrez que $f_2 \circ f_1: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.

5.5 Fonctions continues à valeurs vectorielles

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Démontrez que la fonction $|f|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $|f|(x) = |f(x)|$ est continue.
2. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Démontrez que la fonction $hf: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $(hf)(x) = h(x)f(x)$ est continue.
3. Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ continues. Démontrez que la fonction $f \times g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ est continue où $u \times v$ est le produit vectoriel de $u, v \in \mathbb{R}^3$.
Nous rappelons que $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ où $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$.
4. Soient $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et $q \in \mathbb{R}^n$ un point quelconque. Démontrez qu'ils existent $p_1, p_2 \in [a, b]$ tels que pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(p_1) - q| \leq |f(x) - q| \leq |f(p_2) - q|$$

6 Fonctions dérivables

6.1 Définition et calculs

1. Soit n un entier positif. Démontrez à partir de la définition que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^n$ est dérivable et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Démontrez que f' est continue mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

3. Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$ où I est un intervalle ouvert. Démontrez que $f + g$ est dérivable en a avec $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

4. Soit $\tan:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- (a) Etant données toutes les propriétés de \sin et \cos déjà connues à l'école (en particulier qu'elles sont dérivables) démontrez que \tan est dérivable et trouvez sa dérivée.
- (b) En supposant que $\tan:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, démontrez que sa réciproque \arctan est dérivable et trouvez sa dérivée.

5. Soit $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $\exp(x) = e^x$. Pour cette question vous pouvez supposer toutes les propriétés de l'exponentielle et sa réciproque le logarithme $\log: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ déjà connues à l'école.

Les fonctions $\sinh, \cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (a) Démontrez que \sinh et \cosh sont dérivables et trouvez leurs dérivées.
- (b) Démontrez que $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\cosh:]0, \infty[\rightarrow]1, \infty[$ sont bijections.
- (c) Démontrez de plus que les réciproques $\operatorname{arcsinh}$ et $\operatorname{arccosh}$ sont dérivables et trouvez leurs dérivées.
- (d) Définissons $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$.
 - i. Démontrez que \tanh est dérivable et trouvez sa dérivée.
 - ii. Démontrez que $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est bijective. Démontrez que sa réciproque est dérivable et trouvez sa dérivée.

6. Soit $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n (n -fois continûment dérivable).

Démontrez par induction que leur produit fg est aussi de classe C^n et que

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

6.2 Théorème de la moyenne

1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Démontrez que si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$.
2. Soit $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Supposons de plus que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.
 - (a) Démontrez que $g(a) \neq g(b)$.
 - (b) Démontrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(Ce résultat s'appelle le théorème de la valeur moyenne comparatif.)

Conseil : considérez la fonction $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ où $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3. Soit $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le polynôme $P(x) = x^3 + ax + b$ où $a > 0$.
Démontrez qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.
Conseil : utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour démontrer l'existence d'une racine et le théorème de Rolle pour démontrer son unicité.
4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Supposons qu'ils existent $a < b < c$ tels que

$$f(a) = f(b) = f(c).$$

Démontrez qu'il existe $\xi \in]a, c[$ tel que $f''(\xi) = 0$.

5. En utilisant le théorème de la valeur moyenne, démontrez que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

6.3 Approximation polynomiale

1. (a) Utilisez la formule du reste de Lagrange pour démontrez que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\left| \exp x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- (b) Sans l'usage d'une calculatrice, calculez $\exp 0,1$ avec une erreur inférieure à $0,001$.
2. (a) En partant du fait que $(\log)'(x) = 1/x$, démontrez que la polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction $f(x) = \log(1 - x)$ autour de 0 est

$$-\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$$

- (b) Utilisez la formule du reste de Lagrange pour démontrez que pour tout $x \in [-1/5, 1/5]$

$$\left| \log(1 - x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}.$$

- (c) Sans l'usage d'une calculatrice, calculez $\log(1,2)$ avec une erreur inférieure à $0,001$.
3. Soit $f(x) = e^x$.
- (a) Déterminez les développements de Taylor d'ordre 1 et 2 de la fonction f autour de 0.
- (b) Esquissez le graphe de f et de ces deux développements de Taylor.
- (c) Calculez $e^{0,1}$ avec une erreur inférieure à $0,001$
4. En utilisant un développement de Taylor de la fonction $[x \rightarrow \ln(x)]$ autour de 1
- (a) Calculez $\ln(1,2)$ avec une erreur inférieure à $0,0001$.
- (b) Estimez l'erreur commise dans le calcul de $\ln(1,2)$ si on remplace $\ln(x)$ par son développement de Taylor d'ordre 384 autour de 1.
5. Donnez le développement de Taylor d'un polynôme autour de $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre k

6.4 Règle de l'Hospital

Trouvez les limites suivantes en appliquant la règle de l'Hospital.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sinh(2x)}{\log(1+x)}.$

(Rappelez-vous que $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$)

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \left(\frac{3x^2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cosh(x)}{x^2}.$$

(Rappelez-vous que $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.)

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (\cosh(x))^{1/x^2}.$$

6.5 Dérivées directionnelles, partielles et le gradient

1. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable dans la direction v en $a \in \mathbb{R}^n$. Démontrez que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f est dérivable dans la direction λv en a et que

$$\partial_{\lambda v} f(a) = \lambda \partial_v f(a)$$

2. Démontrez à partir de la définition que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est différentiable en tout point avec

$$\nabla f(a, b) = (2a, 2b)$$

3. Soient $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en $a \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Démontrez que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est différentiable en a avec $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$.
- (b) Démontrez que le produit fg est différentiable en a avec

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f.$$

4. Pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, démontrez qu'elles sont différentiables (en appliquant par exemple le critère suffisant donné au cours), trouvez leurs gradients et faites une esquisse de leurs "lignes de niveau" $X_c = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ en y indiquant leurs gradients. (Faites attention à la magnitude de ∇f ainsi que sa direction.)

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

- (c) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
- (d) $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$.

5. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Démontrez que f est dérivable en toute direction en $(0, 0)$ avec

$$\partial_v f(0, 0) = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2}$$

où $v = (v_1, v_2)$.

- (b) Démontrez que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

7 Fonctions intégrables

7.1 Définition

1. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Démontrez que quelque soit la partition P de $[0, 1]$, $L(f, P) = 0$.
- (b) Pour une partition $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ quelconque de $[0, 1]$, démontrez que

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i.$$

- (c) Déduisez-en que

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

est minoré par

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

et donc par $1/2$.

- (d) Concluez que f n'est pas intégrable.
2. Démontrez que $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est intégrable à partir de la définition, en suivant les étapes :
- (a) Soit $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ une partition de $[0, 1]$. Démontrez que

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2,$$

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n (j-1)^2.$$

- (b) Démontrez par récurrence que

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- (c) Déduisez-en que

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

et donc que f est intégrable avec $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

3. Le but de cette question est de démontrer que toute fonction monotone $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable.

Soit f croissante (le cas décroissante étant pareil). Ecrivons P_n pour la partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tel que $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$.

- (a) Démontrez que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

- (b) Déduisez-en que f est intégrable.

7.2 Quelques calculs

1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable. En utilisant l'intégration par parties, démontrez que

$$\int_a^b f(x) \cos(nx) dx \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

2. En faisant la substitution $x = 2 \arctan(t)$, démontrez que

$$\int \frac{1}{5 + 3 \cos(x)} dx = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \tan \left(\frac{1}{2} x \right) \right).$$

Conseil : démontrez que si $x = 2 \arctan(t)$ alors $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

7.3 Intégrales impropres

1. Parmi les intégrales impropres suivantes, déterminez lesquelles convergent et pour celles-là trouvez leur valeur.

(a) $\int_0^\infty e^{-2x} dx.$

(b) $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx.$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh x} dx.$

(d) $\int_0^1 \log(x) dx.$

(e) $\int_0^{\pi/2} (\sec(x) - \tan(x)) dx.$

2. (a) Démontrez que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

est convergente si et seulement si $p > 1$.

- (b) Démontrez que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

est convergent si et seulement si $p < 1$.

3. (a) Démontrez par récurrence que pour tout $x \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\log(x)^n \leq n! x$$

- (b) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale suivante est divergente :

$$\int_2^\infty \frac{1}{\log(x)^n} dx.$$

4. Soient $f, g:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui sont intégrables sur $[a + \epsilon, b]$ pour tout $0 < \epsilon < b - a$. Supposons de plus que

- $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in]a, b]$.
- $\int_a^b g(x) dx$ converge.

Démontrez que $\int_a^b f(x) dx$ converge aussi.

5. *Question avancée*

Le but de cette question est de démontrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

est convergente.

- (a) Démontrez que

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx = - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx - \left[\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^b$$

- (b) Démontrez que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\cos(b)}{b} = 0.$$

- (c) En appliquant le test de comparaison pour les intégrales, démontrez que la limite suivante existe

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

- (d) Déduisez-en que $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

- (e) Démontrez que l'intégrale sur $[0, \infty[$ converge aussi.

Conseil : démontrez qu'il existe un prolongement continu de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0.

6. *Question plus avancée*

Le but de cette question est de démontrer que

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

est divergente.

(a) Soit

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

Démontrez que

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t + n\pi} dt$$

(b) Déduisez-en que

$$I_n \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

(c) D'ici, démontrez que

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(d) Concluez que $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ diverge.

Conseil: pour déduire que $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers l'infini, écrivez par exemple

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

où chaque groupe de termes en parenthèse a été remplacé par la borne inférieure $1/2$. D'ici déduisez que $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ et donc que $s_n \rightarrow \infty$.