ULB Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Thibaut Grouy et Robson Nascimento

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2016/2017

Séance 11 - Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

a) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, exprimer

$$\int_0^{2\pi} f(t + a)e^{-int}dt$$

en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$.

b) En déduire l'existence de $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{n^\alpha}.$$

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t.$$

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 3. a) Soient $f, g \in \mathcal{C}^{1,m}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)g'(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f'(t)^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g'(t)^2\mathrm{d}t.$$

b) Soit γ un lacet simple dans $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ et de longueur 2π. Montrer que l'aire qu'il délimite est au plus π.

Exercice 4. Montrer que l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y'' + y = |\sin(x)|$$

admet une unique solution π-périodique.

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) + k^2 y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2},$$

pour n'importe quel $k \in \mathbb{R}$.