Valeurs et vecteurs propres

Exercice 1. Soit E la base canonique de $\mathbb{R}^6$, et soit A un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^6$ défini par la matrice suivante, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$m_{E,E}(A) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Est-ce que le vecteur $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est un vecteur propre de A ?

(b) Est-ce que le vecteur $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$ est un vecteur propre de A ?

(c) Est-ce que 0 est une valeur propre de A ? Si oui, quel est son sous-espace propre ?

(d) Donnez tous les sous-espaces propres de A en fonction des paramètres α et β.

(e) Discutez dans chaque cas si A est diagonalisable.

Exercice 2. Soit E la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, et soit A un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$, avec $n \geq 2$, défini par la matrice suivante, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$m_{E,E}(A) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \end{bmatrix}.$$

(a) Est-ce que 0 est une valeur propre de A ? Si oui, quel est son sous-espace propre ?

(b) Le vecteur $(1, 1, ..., 1)$ est-il un vecteur propre de A ?

(c) En fonction de α et de β, discutez de toutes les valeurs propres et vecteurs propres.

(d) Discutez dans chaque cas si A est diagonalisable.

Exercice 3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(K)$$

pour $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sur lesquels de ces corps la matrice donnée est-elle diagonalisable ?