ULB **2018/2019**

MATHF214 - Compléments de mathématiques

Assistant : Robson Nascimento Titulaire : Paolo Roselli

Liste 4 – Intégrales généralisées et Séries de Fourier

Exercice 1. Calculer les intégrales généralisées suivantes en utilisant la formule des résidus. Faire à chaque fois un dessin du contour choisi et des singularités.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+i}$

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Exercice 2. On définit la fonction f telle que $f(x) = x$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ et f est 2π-périodique. Calculez les coefficients de Fourier de f et utilisez l'idendité de Parseval pour en déduire

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des fonctions de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, continûment dérivables par morceaux. On définit le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$, où $f, g \in \mathcal{X}$. Calculez le produit scalaire des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos(5\pi x)$ et $g(x) = 1$.

b) $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g(x) = \cos(3\pi x)$.

c) $f(x) = \cos(k\pi x)$ et $g(x) = \cos(l\pi x)$, $(k, l \in \mathbb{N})$.

d) $f(x) = \sin(k\pi x)$ et $g(x) = \sin(l\pi x)$, $(k, l \in \mathbb{N})$.

e) $f(x) = e^{i2\pi x}$ et $g(x) = e^{-i5\pi x}$.

f) $f(x) = e^{i7\pi x}$ et $g(x) = e^{i7\pi x}$.

g) $f(x) = e^{ik\pi x}$ et $g(x) = e^{il\pi x}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$.

Exercice 4. Déterminer la série de Fourier des fonctions suivantes, définies sur $[-\pi, \pi]$ par

a) $f(x) = x$.

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pour } -\pi \le x < 0, \\ 1, & \text{pour } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } -\pi \le x < 0, \\ x, & \text{pour } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{pour } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{pour } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi + x}{2}, & \text{pour } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi - x}{2}, & \text{pour } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{pour } -\pi \le x < 0, \\ x, & \text{pour } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Exercice 5. On considère les polynômes

$$f_0(x) = a_{00}, \qquad f_1(x) = a_{10} + a_{11}x, \qquad f_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2$$

Déterminer les coefficients $a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}$ de manière à ce que ces fonctions soient orthonormées par rapport au produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.