# Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 1

2016–2017 — Deuxième quadrimestre

# Table des matières

# Chapitre 7

# Continuité des fonctions de plusieurs variables

## 7.1 Limites, normes, adhérence

**Exercice 1.** Déterminez l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants.

1. $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[ \cup [10, 11]$
2. $[2, 3[ \setminus \{e\}$
3. $\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Q}$
5. $\{\frac{1}{i} \mid i \in \mathbb{Z}_0\}$
6. $\cap_{n=1}^{\infty} ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

**Exercice 2.** Représentez dans le plan les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants et déterminez leur adhérence et leur frontière. Précisez si ces ensembles sont connexes par arcs.

1. $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 2\}$
2. $\{(x, y) \mid 1 - xy > 0\}$
3. $\{(x, y) \mid |x| = 1, |y| \neq 1\}$
4. $\{(x, y) \mid (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leq 4\}$
5. $\{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 + 4y - 5 \leq 0\}$
6. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3 \text{ et } -1 \leq y < 1\}$
7. $\{(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$
8. $\{(v \cos(u), v \sin(u)) \mid u \in \mathbb{R} \text{ et } v \in ]-2, 1]\}$

9. $\{(x_0, y_0)(1-t) + t(x_1, y_1) \mid t \in [0,1]\}$
10. $\{(t, \frac{t}{k}) \mid t \in [0,1] \text{ et } k \in \mathbb{N}_0\}$
11. $\{(t, \frac{t}{k}) \mid t \in ]0,1] \text{ et } k \in \mathbb{N}_0\}$
12. $\bigcup_{n\geq 1}\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$

**Exercice 3.** Représentez vous dans l'espace les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants et déterminez leur adhérence et leur frontière.

1. $\{(x,y,z) \mid (x-3)^2 + (y)^2 + z^2 \leq 9\}$
2. $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 7\}$
3. $\{(x,y,z) \mid x^2 \leq 3\}$
4. $\{(x,y,z) \mid x < y\}$
5. $\{(\cos(t), \sin(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

**Exercice 4.** La suite $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy, ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k, \ell \geq K$ alors $|x_k - x_\ell| < \varepsilon$.

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si et seulement si $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$.

**Exercice 6.** Soient $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions définies et continues en tous les points de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Alors $f \circ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^m$.

**Exercice 7.** Pour tout $j = 1, \ldots, n$, la fonction $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$$

est continue.

**Exercice 8.** Donner une preuve de l'Exercice 5 qui se base sur la continuité des projections et sur la continuité de la composée d'applications continues.

**Exercice 9.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - x_0|$ est continue.

**Exercice 10.** Soient $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors $f + g$ et $f.g$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}^n$. De plus, $f/g$ est continue en tous les points $a$ de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels $g(a) \neq 0$.

## 7.2 Limites dans $\mathbb{R}^2$

**Exercice 11.** Déterminez si les limites suivantes existent et dans l'affirmative calculez les.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^6+1}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^5}{x^6+y^6}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy+3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(3x^4+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(3x^3+x^2+y^2-2y+1)}{x^2+y^2-2y+1}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\ln(x^2+y^2+1)}$
7. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\ln(x^2+y^2-1)}$
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

**Exercice 12.** Démontrer que les limites suivantes n'existent pas :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$
2. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \tan(\pi(\frac{xy}{2}))$
3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1}{2x+y^2-2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \cos\left(\frac{1}{|x-1|y}\right)$

**Exercice 13.** Calculer les limites suivantes si elles existent (un changement de variables peut vous simplifier la vie) :

1. $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{\sin((x-1)^4+(x-1)^2+y^2-6y+9)}{(x-1)^2+(y-3)^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x+y)}{x^3+x^2y-y^2x+y^3+2}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2+x^3}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2+x^3}\right]$

# Chapitre 8

# Dérivabilité des fonctions de plusieurs variables

## 8.1 Dérivées partielles et différentiabilité

**Exercice 14.** Supposons que $a_1, a_2, a_3$ et $a_4$ soient des fonctions $C^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour les fonctions suivantes, représentez dans le plan leur domaine de définition(s) et écrivez les limites qu'il faudra étudier pour déterminer leur continuité sur $\mathbb{R}^2$ :

1. $f(x,y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x > 0 \\ a_2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ a_2 & \text{sinon} \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x = y \\ a_2 & \text{sinon} \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x > e^y \\ a_2 & \text{sinon} \end{cases}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ a_2 & \text{si } x \geq 0,\ y \leq 0 \\ a_3 & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ a_4 & \text{sinon} \end{cases}$

6. $f(x,y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } xy > 0 \\ a_2 & \text{si } xy < 0 \\ a_3 & \text{sinon} \end{cases}$

Note : ici et dans ces exercices, lorsque nous écrivons « $a_1$ », nous sous-entendons bien entendu « $a_1(x,y)$ ». Le but de cet exercice est de permettre aux étudiants de cerner rapidement quelles sont les zones à problèmes.

**Exercice 15.** Déterminez l'ensemble des points où les fonctions sont continues et celui où elles sont différentiables.

1. $(x,y) \mapsto 3x^2 + x^3y + x$
2. $(x,y) \mapsto \begin{cases} e & \text{si } xy \neq 0 \\ e^{x+y} & \text{sinon} \end{cases}$
3. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x-y}{\ln(x^2+y^2+1)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
5. $(x,y) \mapsto \begin{cases} x + ay & \text{si } x > 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$
6. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^5}{x^6+y^6} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Exercice 16.** Dessiner les courbes de niveaux des fonctions suivantes. Représenter ensuite leur graphe dans l'espace. Donner l'équation du plan tangent en l'origine.

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
3. $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$.

Les courbes de niveau de l'exercice 3 sont les *ovales de Cassini* ; en particulier, la courbe de niveau 0 est la *lemniscate de Bernouilli*.

**Exercice 17.** Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0 \\ x^2y^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ xy & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} e^{x-y^2} & \text{si } x = y \\ e & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > e^y \\ 1-(x+y) & \text{sinon} \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ (x-1)y & \text{si } x \geq 0,\ y \leq 0 \\ x(y-1) & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ (x-1)(y-1) & \text{sinon} \end{cases}$

**Exercice 18.** La figure 8.1 représente le domaine d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et sur chacune des parties, elle est définie différemment.

Donnez l'expression de cette fonction sous la forme

$$f(x,y) = \begin{cases} \ldots & \text{si } \ldots \\ \ldots & \text{si } \ldots \\ \ldots & \text{si } \ldots \\ \ldots & \text{si } \ldots \end{cases} \tag{8.1}$$

Ensuite, étudier la continuité et la différentiabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 19.** Prouvez que toutes les dérivées directionnelles en $(0,0)$ de la fonction suivante existent mais que cette même fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$

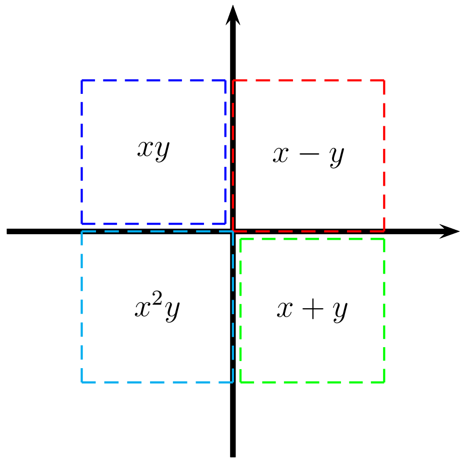


FIGURE 8.1 – La fonction de l'exercice 18.

car elle n'est pas continue en $(0,0)$.

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8.2}$$

**Exercice 20.** Prouvez que la fonction suivante $f$ est continue en $(0,0)$, que toutes les dérivées directionnelles en $(0,0)$ de cette fonction existent mais qu'elle n'est pas différentiable en $(0,0)$ car l'application qui envoie un vecteur $u$ sur la dérivée de la fonction $f$ dans la direction $u$ en $(0,0)$ n'est pas linéaire.

$$f : (x,y) \to \begin{cases} x & xy > 0 \\ y & xy \leq 0 \end{cases}$$

**Exercice 21.** Prouvez que la fonction suivante $f$ est continue en $(0,0)$, que toutes les dérivées directionnelles en $(0,0)$ de cette fonction existent, que l'application qui envoie un vecteur $u$ sur la dérivée de la fonction $f$ dans la direction $u$ en $(0,0)$ est linéaire mais que cette même fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$.

$$(x,y) \to \begin{cases} \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(aide : pour vérifier que $f$ est continue en $(0,0)$ prouvez que $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ est borné ; pour prouver que $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ est borné considérez les courbes de niveaux de $f$)

**Exercice 22.** Calculez les dérivées partielles premières par rapport à la première variable et à la seconde variable des fonctions suivantes

1. $(u,v) \mapsto u^3 + 12u^2v - 5v^3$
2. $(u,v) \mapsto f(u^2)\ln(v)$
3. $(x,y) \mapsto tg(x+y^2)$
4. $(r,\theta) \mapsto r^\theta$
5. $(x,y) \mapsto (x+3)e^x$
6. $(u,v) \mapsto \ln(f(uv))$

où $f$ est une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 23.** Soient

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto e^{x/y}\ln(\frac{x}{y}) \end{aligned} \tag{8.3}$$

et

$$\begin{aligned} g \colon ]0,\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[ &\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{aligned} \tag{8.4}$$

1. Calculez $df(1,1)$ et $dg(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$
2. Calculez $\tilde{f} \overset{def}{=} f \circ g$
3. Calculez $d\tilde{f}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ à partir de $df$ et $dg$.

**Exercice 24.** Calculez les différentielles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(15x^3 + x^2 + (y-2)^2))}{\pi(x^2 + (y-2)^2)} & \text{quand le dénominateur est non-nul} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$
2. $f_2(x,y) = (x+1)^{x+y}$
3. $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto (\ln(\sin^2(u)+1), uv)$
4. $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\ln(\tan^2(u)+1), uv - \pi, \cos(\cos(uv)))$
5. $h = f_1 \circ g_1$

**Exercice 25.** Donner les équations des plans tangents en $(0,0)$ aux graphes des fonctions $f_1, f_2$ et $h$ de l'exercice 24.

## 8.2 Dérivation de fonctions composées – « Chain rule »

**Exercice 26.** Soit $f$ une fonction $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Donnez une expression des dérivées partielles de la fonction $g$, définie ci-dessous, en fonction des dérivées partielles de la fonction $f$.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (u,v) \to f(ue^v, v(1+u^2))$$

**Exercice 27.** Soit $f$ une fonction $C^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Donnez une expression de la fonction suivante en fonction de la dérivée de $f$.

$$(x, y) \to y(\partial_x g)(x, y) + x(\partial_y g)(x, y)$$

si

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to f(x^2 - y^2)$$

**Exercice 28.** Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction de classe $C^2$. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule suivante

$$h(t) \stackrel{def}{=} f(t, g(t^2))$$

Calculez la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction $h$ en fonction des dérivées partielles de la fonction $f$ et des dérivées de la fonction $g$.

**Exercice 29.** Soit $f$ une fonction $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donnez une expression des dérivées partielles de la fonction $h$, définie ci-dessous, en fonction des dérivées partielles de la fonction $f$ et des dérivées de la fonction $g$.

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (u, v) \to f(g(ue^v), g(v)(1 + u^2))^{g(u+v)}$$

**Exercice 30.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 = (h_1, h_2)$. Calculer les gradients (ou matrices Jacobiennes) des fonctions suivantes en termes des dérivées (partielles) de $f, g, h$.

1. $w_1(x, y) = g(x + y, 1 - f(x^y))$.
2. $w_2(t) = f(g(1 + t, 1 - t^t))$.
3. $w_3(x, y) = h(g(x, y), f(x + \ln(xy)), y)$.
4. $w_4(x, y, z) = (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z), f(x + y + z))$.

## 8.3 Approximation polynomiale

**Exercice 31.** Déterminez les développements de Taylor jusqu'à l'ordre 2 des fonctions suivantes.

1. $(x, y) \mapsto (1 + x + y)^2$ autour de $(0, 0)$
2. $(x, y) \mapsto (1 + x + y)^2$ autour de $(-1, 0)$
3. $(u, v) \mapsto (u + v)e^u$ autour de $(0, 1)$
4. $(u, v) \mapsto \cos(uv)$ autour de $(0, 0)$
5. $(u, v) \mapsto \sin(vu^2)v^3$ autour de $(0, 0)$

## 8.4 Exercices récapitulatifs

**Exercice 32.** Soit
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to 4x^2 + y^2$$

1. Calculez les dérivées partielles $(\frac{\partial}{\partial x} f)(a, b)$ et $(\frac{\partial}{\partial y} f)(a, b)$ de la fonction $f$ par rapport à sa première et par rapport à sa seconde variable au point $(a, b)$ Donnez en une interprétation géométrique
2. Calculez l'équation du plan tangent au graphe de $f$ au point $(a, b, f(a, b))$.
3. Calculez la différentielle $(df)(a, b)$ de $f$ au point $(a, b)$. Quel lien y a-t-il entre ce plan tangent et le graphe de $df(a, b)$ ?
4. Calculez la dérivée directionnelle de $f$ au point $(1, 2)$ dans la direction $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
5. Calculez le gradient $\nabla f$ de $f$ au point $(a, b)$. Donnez en une interprétation géométrique.
6. Dessinez quelques ensembles de niveau de la fonction $f$. Calculez $\nabla f(1, 1)$ et écrire l'équation de la tangente à la courbe
$$\{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 5\}$$
au point $(1, 1)$.

**Exercice 33.** Considérons la fonction :
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(\pi(15x^5 + x^2 + (y-2)^2))}{\pi(x^2 + (y-2)^2)} & \text{quand le dénominateur est non-nul} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Cette fonction est-elle différentiable en $(0, 0)$ ? Si oui, calculez $\nabla f(0, 0)$ et $df_{(0,0)}(2, 3)$.
2. Écrivez l'équation du plan tangent au graphe de $f$ en $(0, 0, f(0, 0))$.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (\ln(\sin^2(u)), uv - \pi)$. Calculez $g(\frac{\pi}{2}, 2)$. Calculez $d(f \circ g)_{(\frac{\pi}{2}, 2)}$ à partir de $df$ et $dg$.
4. Étudiez la continuité et la différentiabilité de $f$.

**Exercice 34.** Soit $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, t) \mapsto F(x, t)$ une fonction de classe $C^2$. On dit que $F$ satisfait l'équation des cordes vibrantes (ou équation des ondes), si
$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{8.5}$$
où $c$ représente la vitesse de propagation de l'onde.

1. Prouvez que si $f$ et $g$ sont deux solutions de l'équation et $a$ et $b$ deux réels alors $af + bg$ est encore une solution de l'équation. (l'ensemble des solutions de l'équation est un sous vectoriel du vectoriel des fonctions $C^2$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$)
2. Vérifiez que si $\phi$ et $\psi$ sont deux fonctions de classe $C^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, t) \to \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$
est une solution de l'équation.
3. Soit le changement de variable
$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$
Écrivez l'équation dans ces nouvelles variables et prouvez que les solutions exhibées au point précédent sont les seules possibles.
4. Si vous êtes étudiant en physique, vous devriez être capable d'expliquer pourquoi le paramètre $c$ de l'équation d'onde est la vitesse de l'onde. Si vous êtes étudiant en mathématique, cela ne vous dispense moralement pas de vous poser la question. Remarquez l'analogie entre l'équation d'onde (8.5) et l'équation
$$\Box\psi(\bar{x}, t) = 0 \tag{8.6}$$
où $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. Cette dernière équation est l'équation (10.1.5) de la page 101 du cours d'électromagnétisme de deuxième année :
`http://homepages.ulb.ac.be/~cschomb/CEDtout.pdf`.

**Exercice 35.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de classe $C^2$. On définit le **Laplacien** de $f$ par la formule suivante :
$$\Delta f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

1. Calculez le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire, posant $\tilde{f}(r, \theta) \overset{def}{=} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ prouvez que :
$$(\Delta f)(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (\frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{f})(r, \theta) + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f})(r, \theta) + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\tilde{f})(r, \theta)$$
2. Vérifiez que la fonction suivante $F : (x, y) \to \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ est une solution de l'équation aux dérivée partielles $\Delta f = 0$

# Chapitre 9

# Intégration des fonctions de plusieurs variables

## 9.1 Intégrales multiples

**Exercice 36.** Intégrez les fonctions suivantes sur les domaines spécifiés

1. $4 - x^2 - y^2$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 2\}$
2. $x^2 + y^2$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 2\}$
3. $e^{x+y}$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < sup\{|x|, |y|\} < 2\}$
4. $xyz$ sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x, 0 < y, 0 < z, x + y + z < 1\}$
5. $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sur la région du plan délimitée par les courbes $y = x$ et $x^2 + y^2 = y$.

**Exercice 37.** Intégrez les fonctions suivantes sur les domaines spécifiés. Un changement de variables peut grandement vous simplifier la vie.

1. $y - x \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < y - x < 1, 1 < y + x < 5\}$
2. $e^{a(x^2+y^2)} \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$
3. $z^2 \qquad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
4. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
5. $z \qquad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2, 0 < z < 1\}$

où $a$ est un réel et $R$ un réel positif.

Calculer le volume ou la surface d'un domaine revient à intégrer la fonction constante 1 sur le domaine. Si nous effectuons un changement de variables, le jacobien intervient toutefois.

**Exercice 38.** Calculez l'aire de la région du plan délimitée par les droites $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et l'arc de circonférence $\rho = \cos\theta$ intercepté par ces deux droites.

**Exercice 39.** Calculez l'aire délimitée par la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

**Exercice 40.** Calculez les volumes des domaines suivants

1. Ellipsoïde. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$
2. Tranche d'ellipsoïde. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} < 1, 0 < z < 1\}$
3. Intersection de deux cylindres. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\}$

**Exercice 41.** Calculez le volume du solide limité par $z^2 = x^2 + y^2$ ; $x^2 + y^2 = 2x$ et $z = 0$.

**Exercice 42.** Calculez le volume commun à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et au cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

**Exercice 43.** Calculez le volume délimité par les paraboloïdes $z = x^2 + y^2$ et $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2$.

**Exercice 44.** Calculez les intégrales suivantes. Représenter le domaine et effectuer un changement de variable peut être utile.

1.
$$\int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dy) dx \tag{9.1}$$

2.
$$\int_0^4 (\int_{\sqrt{y}}^2 y e^{x^5} dx) dy \tag{9.2}$$

**Exercice 45.** La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitives parmi les fonctions élémentaires et pourtant on peut évaluer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \tag{9.3}$$

de la façon suivante :

$$\begin{aligned} l^2 &= \lim_{R\to+\infty} \left( (\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx)(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy) \right) \\ &= \lim_{R\to+\infty} \left( \iint_K e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right) \\ &= \lim_{R\to+\infty} \left( \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right) \end{aligned} \tag{9.4}$$

où $K$ est le carré de demi côté $R$ centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes et $C_R$ est le cercle de rayon $R$ centré à l'origine.

1. Calculer la dernière intégrale et déduisez en la valeur de $l$.
2. Justifier les étapes du calcul.

**Exercice 46.** Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Calculer le volume de la région limitée par la surface de révolution obtenue par rotation de la courbe $\{(x, y, z) \in R^3 \mid y = f(x), z = 0\}$ autour de l'axe $Ox$ et par les plans $\{(x, y, z) \mid x = a\}$ et $\{(x, y, z) \mid x = b\}$.

**Exercice 47.** Intégrer la fonction $(x, y, z) \mapsto x + y$ sur le domaine délimité par les surfaces suivantes $\{(x, y, z) \mid y = 1 - x^2\}$, $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$, $\{(x, y, z) \mid z = 2\}$ et $\{(x, y, z) \mid y = 1 - x\}$.

**Exercice 48.** Intégrer les fonctions 1 et $(x, y, z) \to y^2$ sur le domaine délimité par les surfaces suivantes $\{(x, y, z) \mid x^2 - \frac{y^4}{4} + z^2 = 1\}$, $\{(x, y, z) \mid y = 0\}$ et $\{(x, y, z) \mid y = 2\}$.

## 9.2 Intégrales de surface, Théorème de Stokes et de Green

**Exercice 49.** Quelque calculs d'aires.

1. Calculez la surface de la sphère de rayon $R$ centrée à l'origine $(0, 0, 0)$.
2. Calculez $\iint_{S \cap C} 1 d\sigma$ où $S$ est la sphère de rayon $R$ centrée à l'origine $(0, 0, 0)$ et $C$ le cylindre circulaire de diamètre $((0, 0, 0), (R, 0, 0))$ parallèle à $0z$.
3. Calculez $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ où $S$ est la surface latérale du cône $S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, 0 < z < b\}$ et où $b$ est un réel positif.
4. Calculez l'aire de la calotte sphérique découpée par le cône $z^2 = x^2 + y^2$ dans la sphère unité.
5. Calculez l'aire de la portion de surface cylindrique $x^2 + y^2 = 1$ limitée par l'hélice de pas un, la droite $x = 0, y = 1$ et la surface $z = 0$.

**Exercice 50.** Calculer les flux des champs de vecteurs suivants à travers les surfaces suivantes :

1. $G = (x^2, y^2, z^2)$ où $S$ est la surface extérieure du cube $0 \leq x, y, z \leq a$.
2. $G = (x + y, y + z, z + x)$ où $S$ est la surface totale du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ limité par les plans $z = 0$ et $z = 1$.
3. $G = (y^2, x^2, z^2)$ où $S$ est la surface du paraboloïde $x^2 + y^2 = z$ limité par le plan $z = 1$. Indice : la réponse n'est pas $2\pi/3$.

**Exercice 51.** Calculer le flux du champ de vecteurs $G(x, y, z) = (y,\ x\ , yz)$ à travers le cornet de glace limité par l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \tag{9.5}$$

lorsque $y \geq 0$ et par le cône d'équation $x^2 + z^2 = (y + 4)^2$ lorsque $y < 0$. Faire un dessin peut vous aider.

**Exercice 52.** Calculer.

1. $\oint_\gamma 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$ où $\gamma$ est le périmètre du triangle dont les sommets sont les points $a = (1, 1)$, $b = (2, 2)$ et $c = (1, 2)$.
2. $\oint_\gamma xy^2dx - x^2ydy$ où $\gamma$ est la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$.
3. $\oint_\gamma dx + xdy$ où $\gamma$ est le cycle formé par $y = x^2$ et $y^2 = x$.
4. l'aire de l'ellipse $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$.
5. $\oint_\gamma -x^2ydx + xy^2dy$ où $\gamma$ est le cercle de rayon 1 centré en l'origine $(0, 0)$ et parcouru dans le sens horlogique.

**Exercice 53.** Calculer.

1. $\oint_\gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$ où $\gamma$ est le périmètre du triangle de sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$,
2. $\oint_\gamma y^2dx + x^2dy + z^2dz$ où $\gamma$ est la circonférence $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. On prendra comme surfaces successivement le disque dans le plan $z = 0$ et la sphère unité,
3. la circulation du champ de vecteurs $G(-x^3, y^3, 2x + z^2)$ le long du cercle
$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
directement et ensuite par la formule de Stokes.
4. $$\oint_\gamma (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$
où $\gamma$ est le cercle $\gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$ parcouru dans le sens indiqué par le vecteur $(1, 1, -2)$ au point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,
5. $$\oint_\gamma ydx + zdy + xdz \tag{9.6}$$
où $\gamma$ est l'intersection de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et $y = 0$.

**Exercice 54.** Soit $\gamma$ la courbe d'équations $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = y$, $z \geq 0$ où $\gamma$ est parcourue dans le sens indiqué par le vecteur $(1, 0, 0)$ au point $(0, 0, 1)$. Calculez

$$\int_\gamma y^3 dx + (xy + 3xy^2) dy + z^4 dz$$

1. directement
2. en appliquant la formule de Stokes

**Exercice 55.** Même question pour

$$\int_\gamma 2z dx + x dy + y dz$$

où $\gamma$ est la courbe d'équations $x^2 + y^2 = z$, $z = y$ et est parcourue dans le sens indiqué par le vecteur $(1, 0, 0)$ au point $(0, 0, 0)$.

# Chapitre 10

# Séries

## 10.1 Questions de base

**Exercice 56.** 1. Démontrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

*Rappelez-vous que* $k! = 1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k$. *On met* $0! = 1$ *par convention.*

2. D'ici trouvez la $n^{\text{e}}$somme partielle de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ est démontrez que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$$

**Exercice 57.** 1. Démontrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$,

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

2. Démontrez que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ converge et trouvez sa valeur.

**Exercice 58.** Soient $\sum a_k$ et $\sum b_k$ deux séries infinies dont tout terme est strictement positif. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

1. Démontrez que si $\sum b_k$ diverge alors $\sum a_k$ diverge aussi.
2. Donnez un exemple où $\sum b_k$ converge et $\sum a_k$ diverge.

## 10.2 Questions sur les critères de convergence

**Exercice 59.** Démontrez que les séries suivantes sont divergentes en prouvant que la limite du terme général est non-nulle.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! - 3^k}{k^2 + 10k!}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k(k+1)} - k\right)$.

**Exercice 60.** En appliquant le critère de Leibniz, démontrez que les séries suivantes sont convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k^k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k(k+2)}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{100}}{2^k}$.

**Exercice 61.** En appliquant les critères de comparaison, déterminez quelles séries parmi les suivantes sont convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{k}}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^2 + 3k + 7}{4k^3 - k^2 + 6}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{10} + 2^k}{3^k}$.

**Exercice 62.** En appliquant les critères du quotient ou de la racine, déterminez quelles séries parmi les suivantes sont convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)^k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{17}}{k!}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^k}$.
   (Pour (c) vous pouvez supposer que la limite de $(1+1/n)^n$ existe lorsque $n$ tend vers l'infini.)

**Exercice 63.** Revenez aux séries de la question 60 est déterminez lesquelles sont absolument convergentes.

**Exercice 64.** Déterminez quelles séries parmi les suivantes sont absolument convergentes, quelles sont celles qui sont simplement convergentes et lesquelles divergent.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sqrt{k}}}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(k^{1/k}-1\right)$.
   Pour (e) vous pouvez supposer que pour tout $k \geq 3$,
$$k > (1+1/k)^k.$$

**Exercice 65.** Démontrez que pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \;\geq\; \frac{1}{3n}.$$
Déduisez-en que la série suivante est divergente.
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

**Exercice 66.** Donner quand c'est possible un exemple de série ne contenant pas une infinité de termes nuls (sinon c'est facile)

1. absolument convergente,
2. dont la somme vaut deux,
3. de somme infinie mais dont le terme principal tend vers 0,

4. divergente (et pas de somme infinie),
5. qui converge simplement mais pas absolument,
6. convergente mais dont le terme principal ne tend pas vers 0.

**Exercice 67.** Supposer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série convergente à termes positifs. Montrer qu'il existe une série $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ telle que

$$\tilde{a}_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n < \infty. \tag{10.1}$$

(Dans l'ensemble des séries convergentes à termes positifs, il n'y a pas de plus lent)

**Exercice 68.** Déterminez si les séries ci-dessous sont absolument convergentes, convergentes ou divergentes.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$
2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k))^k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-\cos(k)}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-3k}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^a}$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)+i\sin(k)}{k^2}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2})+i\sin(\frac{k\pi}{2})}{k^a}$

où $a$ est un nombre réel.

## 10.3 Opérations sur les séries

**Exercice 69.** Démontrez que la série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, avec somme zéro.

**Exercice 70.** Démontrez que le réarrangement suivant, par contre, est divergent :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \cdots$$

**Exercice 71.** Soit $\sum_k a_k$ absolument convergente et $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Démontrez que $\sum_k a_{\sigma(k)}$ est aussi absolument convergente.

## 10.4 Séries de puissances

**Exercice 72.** Trouvez le rayon de convergence des séries de puissances suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, x^k.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}\, x^k.$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p(k)\, x^k$, où $p$ est un polynôme.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(k)}{q(k)}\, x^k$, où $p$ et $q$ sont polynômes, et $q(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\, x^k.$
   Vous pouvez supposer que
   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Exercice 73.** Démontrez que le produit de Cauchy de $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ avec elle-même est $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$. Déduisez-en que pour tout $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Considérons la série de puissances $\sum a_k x^k$. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existe. Démontrez que les séries de puissances $\sum a_k x^k$ et $\sum k a_k x^{k-1}$ ont le même rayon de convergence.

*Question plus avancée*

Si on ne suppose plus que $\lim |a_n|/|a_{n+1}|$ existe, démontrez que les deux séries ont encore le même rayon de convergence. (Pensez à la formule de Hadamard)

**Exercice 74.** Définissons $\mathrm{e}^x := \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$, et $e := \mathrm{e}^1$. Démontrez que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^x)^{-1} = \mathrm{e}^{-x}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $q \in \mathbb{Q}$, $(\mathrm{e}^x)^q = \mathrm{e}^{qx}$ et donc que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{e}^q = e^q$.

**Exercice 75.** Définissons

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

1. Démontrez que les deux séries convergent absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. *Question plus avancée.*
   En utilisant le produit de Cauchy pour les séries, démontrez que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x$.
3. *Question plus avancée.*
   Démontrez que $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 76.** *Question plus avancée.*
En utilisant la définition de $\sin(x)$ comme une série de puissances comme ci-dessus, démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| < |x|$.

**Exercice 77.** *Question plus avancée.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous définissons

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Le but de cette question est de démontrer que $f_n(x) \to \mathrm{e}^x$ lorsque $n \to \infty$, où $\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^k}{k!}$.

1. Par définition, $f_n(x)$ est un polynôme de dégrée $n$. Écrivons

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

   a) Démontrez que pour tout $k$, $a_k \leq \frac{1}{k!}$.
   b) Etant donné $m \in \mathbb{N}$, démontrez que pour tout $k \leq m$, les coefficients $a_k$ de $f_n(x)$ satisfont

$$a_k \geq \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)^{m-1} \frac{1}{k!}$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixe. Supposons que $x \geq 0$. Démontrez que pour tout $n > m$,

$$\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)^{m-1} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^x$$

   D'ici, démontrez que $f_n(x) \to \mathrm{e}^x$ lorsque $n \to \infty$.
   *Conseil : considérez d'abord la limite de la borne inférieure lorsque $n \to \infty$ avec $m$ fixe, et puis lorsque $m \to \infty$.*

3. Est-ce que vous pouvez traiter le cas $x < 0$ ?

**Exercice 78.** Déterminez et représentez dans le plan de Gauss le domaine de convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(z+i)^k}{k^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^a (z-5+i)^k$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{k+3}(z+1-i)^k}{(k+2)^2}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z+2)^k}{2k+\ln(k)}$

## 10.5 Dérivabilité des séries de puissances et fonctions élémentaires

**Exercice 79.** 1. En prenant la dérivée de la série

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0^\infty} x^k$$

valable pour $|x| < 1$, démontrez que si $|x| < 1$ alors

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

2. Etant donné $m \in \mathbb{N}$, trouvez une série de puissances qui converge pour $|x| < 1$ à

$$\frac{1}{(1-x)^m}.$$

**Exercice 80.** Le but des prochaines questions est de démontrer rigoureusement quelques propriétés des fonctions sin et cos en partant des définitions en termes de séries de puissances.

1. En partant des définitions en termes de séries de puissances, vérifiez que $(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$.
2. En prenant la dérivée, démontrez que pour tout $x$,
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$
3. Démontrez qu'il existe un point *unique* $x \in [0, 2]$ tel que $\cos(x) = 0$.
4. Nous *definissons* $\pi/2$ comme cette unique racine de cos dans $[0, 2]$.
Démontrez que $\sin(\pi/2) = 1$.
5. Etant donné $a, b \in \mathbb{R}$, soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction
$$f(x) = \sin(a + x)\cos(b - x) + \cos(a + x)\sin(b - x)$$
Démontrez que $f$ est constante et donc que
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
6. Démontrez de même que
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
7. Déduisez-en que
$$\begin{aligned} \sin(x + \pi/2) &= \cos(x), \\ \cos(x + \pi/2) &= -\sin(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x), \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos(x). \end{aligned}$$

## 10.6 Théorème de Taylor

**Exercice 81.** 1. Utilisez la formule du reste de Lagrange pour démontrez que pour tout $x \in [-1, 1]$,
$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$
2. Sans l'usage d'une calculatrice, calculez $\mathrm{e}^{0,1}$ avec une erreur inférieure à $0,001$.

**Exercice 82.**

1. En partant du fait que $(\log)'(x) = 1/x$, démontrez que la série de Taylor de la fonction $f(x) = \log(1-x)$ autour de 0 est
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$
2. Utilisez la formule du reste de Lagrange pour démontrez que pour tout $x \in [-1/5, 1/5]$
$$\left|\log(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}.$$
3. Sans l'usage d'une calculatrice, calculez $\log(1,2)$ avec une erreur inférieure à $0,001$.

**Exercice 83.** En partant des séries "standards" pour $\mathrm{e}^x$, $\log(1-x)$ et $(1-x)^{-1}$ autour de 0 trouvez pour chaque fonction suivante la série de Taylor autour de 0 jusqu'au terme avec $x^6$.

1. $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
2. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$.
4. $f(x) = \log(1 + x + x^2)$.
   *Conseil :* $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$.

**Exercice 84.** *Question plus avancée.*

Démontrez que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right)$$
et donc que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}.$$
Déduisez-en que
$$e < \frac{1}{n!n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
D'ici démontrez que $e$ est irrationnel.

*Conseil : supposez que $e = p/q$ pour $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ et prenez $n = q$ ci-dessus afin de trouver une contradiction.*

**Exercice 85.** Soit $f(x) = e^x$.

1. Déterminez les développements de Taylor d'ordre 1 et 2 de la fonction $f$ autour de 0.
2. Esquissez le graphe de $f$ et de ces deux développements de Taylor.
3. Calculez $e^{0,1}$ avec une erreur inférieure à $0,001$

**Exercice 86.** En utilisant un développement de Taylor de la fonction $[x \to \ln(x)]$ autour de 1

1. Calculez $\ln(1,2)$ avec une erreur inférieure à $0,0001$.
2. Estimez l'erreur commise dans le calcul de $\ln(1,2)$ si on remplace $\ln(x)$ par son développement de Taylor d'ordre 384 autour de 1.

**Exercice 87.** Donnez le développement de Taylor d'un polynôme autour de $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre $k$.

**Exercice 88.** Déterminez les séries de Mc Laurin (séries de Taylor autour de 0) des fonctions suivantes

1. $x \mapsto \sin(x)$
2. $y \mapsto \cos(y)$
3. $t \mapsto e^t$
4. $x \mapsto \ln(1+x)$
5. $t \mapsto \sqrt{1+t}$
6. $y \mapsto \frac{1}{1+y}$

**Exercice 89.** Déterminez les développements de Mc Laurin jusqu'à l'ordre 3 des fonctions suivantes (utilisez les résultats de l'exercice 88).

1. $t \mapsto 3t^4 + t^3 + t^2 + t$
2. $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x}$
3. $x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\sin(x)+1}$
4. $y \mapsto \frac{y^2+y}{\cos(y)}$
5. $x \mapsto \sqrt{\cos(2x)}$

# Chapitre 11

# Optimisation sans contraintes

## 11.1 Extrema

1. Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez pour chacun s'il s'agit d'un minimum local, maximum global ou ni des deux.
   a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
   b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4\mathrm{e}^{-x}$.
   c) $f\colon ]0,\infty[ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2\log(x)$.
   d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$.
   e) $f\colon ]{-1},\infty[ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$.
2. Pour chaque fonction de la question précédente, faites une esquisse du graphe de $f$. Marquez les racines, les points critiques et le comportement de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers les extrémités du domaine de $f$.

**Exercice 90.** Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x\cos(x)$
2. $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sin^3(t)$
4. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto (1-\cos(t))^2$
5. $]-3,3[ \to \mathbb{R} : t \mapsto t^3 - 3t + 2$
6. $[-3,3] \to \mathbb{R} : t \mapsto t^3 - 3t + 2$
7. $[-2,5[ \to \mathbb{R} : y \mapsto 3x^5 - 10x^3 - 45x + 7$
8. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{|x+1|}{(2+2x+x^2)}$
9. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

**Exercice 91.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Démontrez que si $f'(b) > 0$ alors $b$ est un maximum local de la fonction $f$.

**Exercice 92.** Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$

2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy + 43$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\} \mapsto \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \mapsto \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

**Exercice 93.** Soit $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq i \leq n\}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminez la droite $D$ pour laquelle la somme des carrés des distances entre les points et leurs projection parallèlement à l'axe $y$ sur la droite $D$ est minimale.
2. Appliquez le point un aux données suivantes $(x_1, y_1) = (1, \frac{1}{2})$, $(x_2, y_2) = (3, 1)$, $(x_2, y_2) = (5, 2)$.

**Exercice 94.** Calculez le volume de la plus spacieuse boîte de forme parallélépipède rectangle dont trois côtés sont sur les axes, dont un coin est l'origine du système d'axes orthonormés $0xyz$ et dont le coin opposé $(x, y, z)$ est dans le morceau de plan $\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1\}$.

**Exercice 95.** Déterminer les extrema (locaux et globaux) et points de selle éventuels de la fonction

$$f(x, y) = (x - 1)y(y - x) \tag{11.1}$$

dans le domaine **fermé** $D \subset \mathbb{R}^2$ limité par les droites $y = x$, $y = 0$ et $x = 1$.

# Chapitre 12

# Théorème de la fonction implicite

**Exercice 96.** Soit $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto z + \ln(z) - xy$

1. Prouver qu'il existe une fonction $Z(x, y)$ dans un voisinage de $(1, 1)$ telle que $F(x, y, Z(x, y)) = 0$. Prouver l'unicité de $Z(x, y)$.
2. Calculer $(\partial_x Z)(x, y)$, $(\partial_y Z)(x, y)$ et $(\partial^2_{xy} Z)(x, y)$ en fonction de $x$, $y$, $Z(x, y)$.

**Exercice 97.** Calculer $Y'$ où $Y : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie implicitement dans un voisinage de 1 par l'équation $y^x = x^y$.

**Exercice 98.** Écrire le développement de Taylor d'ordre 2 en $(0, 0)$ de la fonction $Z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie implicitement par l'équation $ze^z = x+y$. Prouver l'unicité de $Z$.

**Exercice 99.** Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - x)$

1. Prouver qu'il existe 4 fonctions $\varphi = x \to (Y(x), Z(x))$ définie dans un voisinage de $\frac{3}{4}$ telles que $F(x, Y(x), Z(x)) = 0$.
2. Calculer $Y'(x)$, $Z'(x)$ et $Y''(x)$.

**Exercice 100.** Calculez

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\cos(x) - 1}$$

où $y$ est la fonction définie implicitement au voisinage de 0 par la relation $e^{yx} - 1 = x^2 + y$.

**Exercice 101.** Écrire l'équation de la droite tangent à la courbe

$$y^2 + \sin(xy) - 1 = 0$$

au point $(0, 1)$. Donner les coordonnées d'un point où la tangente à cette courbe est horizontale.

**Exercice 102.** Quelles sont les équations des plans tangents à la surface

$$4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1,$$

parallèles au plan $x - 2y + 2z + 7 = 0$ ?

**Exercice 103.** Soit la fonction

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2 - 1). \tag{12.1}$$

On définit $M \subset \mathbb{R}^3$ comme l'ensemble

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } F(x, y, z) = (0, 0)\}. \tag{12.2}$$

1. Montrer que $M$ est compact. Montrer que $M$ est une variété $C^1$ dans $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
2. Prouver qu'il existe des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : y \mapsto (X(y), Z(y))$ définies dans un voisinage $V$ de $y = 0$ telles que $F(X(y), y, Z(y)) = (0, 0)\ \forall y \in V$.
3. Donner une approximation des fonctions $y \to X(y)$ autour de $y = 0$ par un polynôme du premier degré en une indéterminée.

**Exercice 104.** Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t, v) \to \Phi(t, v) =: \varphi_t(v)$ une famille à un paramètre de difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ ($\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \to \varphi_t(v)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour $t \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que si $\varphi_0$ possède un point fixe $v_0$ et que le spectre de $(d\varphi_0)(v_0)$ ne contient pas 1 (le réel 1 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $(d\varphi_0)(v_0)$ de $R^2$) alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ le difféomorphisme $\varphi_t$ possède aussi un point fixe.
2. Montrer en exhibant un exemple que l'hypothèse sur le spectre de $(d\varphi_0)(v_0)$ est essentielle.

## 12.1 Extrema liés

**Exercice 105.** Les ensembles suivants sont ils des variétés ? Si oui déterminer leur dimension et leur espace tangent (en un point arbitraire)

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

6. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
7. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$
8. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
9. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = z\}$
10. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = 1\}$

**Exercice 106.** Trouver les extrema de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 y$ relativement à la sphère $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

**Exercice 107.** Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto xy^2z^3$ relativement à la portion de plan $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 12, x,y,z > 0\}$.

Aide : reconsidérer le même problème relativement à sa fermeture

$$\overline{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 12, x,y,z \geq 0\},$$

qui est compacte mais plus une variété, pour prouver que le point que vous obtenez par la méthode de Lagrange est bien un maximum.

**Exercice 108.** Trouver les extrema de la fonction $d : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R} : (v,v') \mapsto \|v - v'\|^2$, c'est à dire

$$(x,y,z,x',y',z') \mapsto (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \tag{12.3}$$

relativement au plan $S := \{(x,y,z,x',y',z') \in R^6 \mid x = y = z, x' = 1, y' = 0\}$.

Aide : reconsidérer le même problème relativement à l'ensemble $S \cap C$ où

$$C := \{(x,y,z,x',y',z') \in R^6 \mid (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 < 10\} \tag{12.4}$$

qui est borné et à sa fermeture $\overline{S \cap C}$ qui est compact mais n'est plus une variété, pour prouver que le point que vous obtenez par la méthode de Lagrange est bien un minimum.

**Exercice 109.** Trouver les extrema de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \tag{12.5}$$

relativement à la surface $S := \{z^2 = x^2 + y^2 + xy + x + y + z + 1\}$.