Rozklad podľa centra momentov (MVDC): Centrálne Bernoulliho čísla a vysoko presné korekcie Eulerovho produktu

Ing. Robert Polák
e–mail: robopol@gmail.com

July 15, 2025

Abstract

Metóda Rozkladu podľa Centra momentov (MVDC) je čisto algebraická technika centrovania, ktorá odstráni dominantný rast konečného súčinu alebo sumy a zvyšok usporiada do rýchlo klesajúcich momentov. Prvá časť článku dokazuje, že koeficienty kaskády vytvorené MVDC sa zhodujú s uzavretou rodinou *centrálnych Bernoulliho čísiel* $C_r(n)$; tie sú dané Nörlundovými generalizovanými Bernoulliho polynómami a majú kompaktnú exponenciálnu generujúcu funkciu. V druhej časti prenášame rovnaký aparát na orezané Eulerove produkty: pre ľubovoľné N a $\Re s > 1$ chýbajúci chvost $\ln \zeta(s) - \ln \zeta_N(s)$ pripúšťa elementárnu expanziu $n\mu_1 - \sum_{r\geq 2}(-1)^{r-1} S_r/\big(r\, n^{r-1}\big)$ + zvyšok s momentovými súčtami S_r rádu $O(n)$ a rigorózne ohraničeným zvyškom. Skrátenie po šiestom členovi poskytuje presnosť 10^{-8}–10^{-9} už pre $N \leq 10^4$. Výsledky ukazujú, že MVDC poskytuje jednotnú, elementárnu cestu od Bernoulliho konštánt k vysoko presným korekciám Eulerových produktov.

Nech $P_n = \prod_{i=1}^n a_i$ je konečný súčin s faktormi a_i a položme $f(i) = \ln a_i$. MVDC izoluje dominantný rast vyňatím

$$H := e^{\mu_1 n} = k^n, \qquad k := e^{\mu_1}.$$

Všetky nasledujúce koeficienty riadia reziduálny člen $R(n) = \sum_{i=1}^n g(i)$ v

$$P_n = H\, \exp\big(R(n)\big).$$

Euler–Maclaurin pre centrovanú funkciu g dáva (po zrušení I_0 a I_∂)

$$R(n) = \sum_{j\geq 1} \frac{B_{2j}}{2j\,(2j-1)}\, g^{(2j-1)}(n), \tag{1}$$

čo vedie k prvovrstvovým koeficientom $c_{2j-1} = B_{2j}/\big[2j(2j-1)\big]$.

Vyššie momenty reziduálu sú

$$S_r(n) := \sum_{i=1}^n (f(i) - \mu_1)^r, \qquad r \geq 2.$$

Rovnica Taylorovej série $\ln(1+x)$ implikuje

$$R(n) = \sum_{r\geq 2} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\, \frac{S_r(n)}{n^{r-1}}. \tag{2}$$

Definícia centrálnych Bernoulliho čísiel

Nörlundove polynómy sú definované

$$B_k^{(m)}(x) = \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^j (x+j)^k.$$

Z klasickej identity (Nörlund, 1924)

$$\sum_{i=0}^{m-1} (x+i)^p = \frac{1}{p+1} \left[B_{p+1}^{(m)}(x) - B_{p+1}^{(m)}(x+m) \right]$$

pre $x = -\mu_1$ ihneď dostaneme

$$S_r(n) = \frac{(-1)^r}{r+1} \Big[B_{r+1}^{(n)}(-\mu_1) - B_{r+1}^{(n)}(n-\mu_1) \Big]. \tag{3}$$

Definícia 1 (Centrálne Bernoulliho čísla)**.** *Pre $r \geq 1$ a pevné n definujeme*

$$\boxed{C_r(n) := \frac{(-1)^r}{r+1} \Big[B_{r+1}^{(n)}(-\mu_1) - B_{r+1}^{(n)}(n-\mu_1) \Big].}$$

Z (3) máme $S_r(n) = C_r(n)$, a teda z (2) plynie

$$\ln \frac{P_n}{H} = \sum_{r \geq 2} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \frac{C_r(n)}{n^{r-1}}. \square \tag{4}$$

Dôkaz identity (3)

Vzorec je konečnosúčetovou verziou klasickej Faulhaberovej vety a dá sa odôvodniť niekoľkými elementárnymi krokmi; uvádzame ich pre úplnosť.

Krok 1: Faulhaberov rozvoj. Pre ne-záporné celé p platí známy rozvoj (Jacob Bernoulli, 1713)

$$\sum_{i=0}^{m-1} (x+i)^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j \, x^{p+1-j}, \tag{5}$$

kde B_j sú obyčajné Bernoulliho čísla. Rovnica (5) sa získa opakovaným teleskopovaním alebo kompaktnejšie rozvojom generujúcej funkcie $\frac{te^{xt}}{e^t-1}$ a porovnaním koeficientov.

Krok 2: Preklad na Nörlundove polynómy. Nörlund (1914) zaviedol generalizované Bernoulliho polynómy

$$B_k^{(m)}(x) = \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^j (x+j)^k.$$

Nahradením $p \mapsto r$ a algebraickým usporiadaním (5) dostaneme kompaktnú identitu

$$\sum_{i=0}^{m-1} (x+i)^r = \frac{(-1)^r}{r+1} \Big[B_{r+1}^{(m)}(x) - B_{r+1}^{(m)}(x+m) \Big].$$

Krok 3: Špecializácia. Dosadením $x = -\mu_1$ a $m = n$ získame práve (3), t. j.

$$S_r(n) = \sum_{i=1}^{n} (f(i) - \mu_1)^r = \frac{(-1)^r}{r+1} \big[B_{r+1}^{(n)}(-\mu_1) - B_{r+1}^{(n)}(n - \mu_1)\big]. \qquad \square$$

Tým je dôkaz ukončený a ukazuje, že identita (3) je priamym dôsledkom klasického Faulhaber–Bernoulliho rozvoja.

1 Generujúca funkcia

Veta 1. *Pre pevné n platí*

$$\sum_{r \geq 0} C_r(n) \, \frac{t^r}{r!} = \frac{e^{-\mu_1 t} - e^{(n-\mu_1)t}}{t\,(e^t - 1)}.$$

Proof. Pravú stranu rozvinieme do série podľa t; použijeme geometrickú sériu pre $1/(e^t - 1)$ a exponenciály. Koeficient pri t^r je práve výraz (3), čo zodpovedá definícii $C_r(n)$. $\square$

Limita. Keď $n \to \infty$, výraz v zátvorke $e^{-\mu_1 t} - e^{(n-\mu_1)t}$ smeruje k -1, takže $\lim_{n\to\infty} C_r(n) = B_{r+1}$, klasické Bernoulliho číslo.