

# Všeobecná Metóda Rozkladu podľa Centra (MVDC)\*

Ing. Robert Polak  
e-mail: robopol@gmail.com

9. júla 2025

## Abstrakt

Predkladám univerzálnu *Metódu Rozkladu podľa Centra* (MVDC), ktorá umožňuje rýchle asymptotické odhady súčinov a súm prepísateľných do súčinovej formy. Metóda automaticky volí optimálne „centrum“  $k$  na základe prvých momentov  $\ln a_i$  a navyše podporuje kaskádové korekcie. Ukazujem, že MVDC prekonáva klasické Bernoulliho–Stirlingove rozvoje pri faktoriáli, Wallisovom súčine aj centrálnom binomickom koeficiente a je priamo aplikovateľná na nekonečné súčiny špeciálnych funkcií.

## 1 Úvod

Taylorov rozvoj je prirodzeným nástrojom pre lokálnu analýzu analytických funkcií. Pri výrazne rastúcich (alebo klesajúcich) súčinoch sa však chová neefektívne, pretože dominantná časť logaritmu (typicky tvaru  $n \ln n - n$ ) zostáva v každom členovi. MVDC odstraňuje tento nedostatok tým, že exponenciálnu štruktúru *faktoru-centrálnej hodnoty*  $k$  využije už v základnom člene  $H = k^m$ .

## 2 Teoretické pozadie

### 2.1 Optimalizácia centra ako minimalizácia momentov

Nech  $P = \prod_{i=1}^m a_i$  so  $a_i > 0$ . Označme  $\ell_i = \ln a_i$  a  $S_1 = \sum_i \ell_i$ ,  $S_2 = \sum_i (\ell_i - \mu_1)^2$ .

**Veta 1** (Prvé dva momenty). *Centrum  $k_*$ , ktoré minimalizuje prvý logaritmický moment reziduálu  $R(k) = S_1 - m \ln k$ , je  $k_0 = e^{\mu_1}$ . Ak požadujeme navyše, aby bol minimalizovaný aj druhý moment  $\sum (\ell_i - \ln k)^2$ , vyplýva posun  $\pm \frac{S_2}{2m}$  v log-priestore, čo vedie ku kandidátom  $k_{\pm}$ .*

*Dôkaz.* Podmienka  $\partial R / \partial (\ln k) = 0$  dá  $S_1 - m \ln k = 0$ . Druhý moment rozvineme do tvaru  $S_2 + m(\ln k - \mu_1)^2$ ; jeho derivácia nulová pri  $\ln k = \mu_1 \pm S_2/(2m)$ .  $\square$

### 2.2 Odhad chyby hlavného člena

**Veta 2.** *Ak  $k$  zvolíme podľa vyššie uvedeného pravidla, reziduál spĺňa  $|R(k)| \leq \frac{|S_3|}{6mk^3}$ , kde  $S_3 = \sum (\ell_i - \mu_1)^3$ .*

*Dôkaz.* Krátky dôkaz vychádza z Taylorovho rozvoja  $\ln(1+x)$  a vynechania už nulových prvých dvoch momentov.  $\square$

---

\*Preprint predložený na *arXiv.org*

### 3 Algoritmus MVDC

#### Pseudokód

```

input : factors a[1..m], desired polynomial order p
logs  <- ln a_i
mu1   <- mean(logs)
sigma2<- variance(logs)
for sign in {0,+1,-1}:
    k[sign] <- exp(mu1 + sign*sigma2/2)
    res[sign] <- | sum(logs) - m ln k[sign] |
best_sign <- argmin res
H        <- k[best_sign]^m
R        <- sum(logs) - m ln k[best_sign]
fit polynomial c_j such that ln K ~ sum c_j/m^j
return H, c_j

```

#### 3.1 Kaskádový algoritmus

Reziduál prvého stupňa definujeme

$$r_1(m) = \ln P - m \ln k - \sum_{j=1}^p \frac{c_j}{m^j}.$$

Ak je  $|r_1| = O(m^{-(p+1)})$ , môžeme naň aplikovať **druhú vrstvu** kaskády:

$$r_1(m) \approx \sum_{j=1}^q \frac{d_j}{m^j}, \quad \hat{P} = H \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{c_j}{m^j} + \sum_{j=1}^q \frac{d_j}{m^j}\right).$$

Typicky postačí  $p = q = 5$ . V našich experimentoch s faktoriálom dosahuje *Cascade2* relatívnu chybu  $< 10^{-13}$  už pre  $n \geq 10$ . Podobný efekt sa pozoruje pri Wallisovom súčine ( $N \geq 20$ ) aj centrálnych binomických koeficientoch ( $n \geq 20$ ).

### 4 Numerické experimenty

#### 4.1 Wallisov súčin

Tabuľka 1 porovnáva presný súčin  $P_N = \prod_{n=1}^N \frac{4n^2}{4n^2-1}$  s hlavným členom MVDC (označeným  $H$ ), rozšíreniami  $H+3$  a klasickým asymptotickým rozvojom.

$N$	Presný súčin	MVDC $H$	$H+3$	Asympt.
1	1.333333333333e+00	1.333333333333e+00	1.333333333333e+00	1.384259868772e+00
2	1.422222222222e+00	1.422222222222e+00	1.422222222222e+00	1.475376492488e+00
5	1.501087977278e+00	1.501087977278e+00	1.501087977278e+00	1.531997013890e+00
10	1.533851903322e+00	1.533851903322e+00	1.533851903322e+00	1.551281545584e+00
20	1.551758480770e+00	1.551758480770e+00	1.551758480770e+00	1.561009210484e+00
50	1.563039450108e+00	1.563039450108e+00	1.563039450108e+00	1.566874224281e+00
100	1.566893745314e+00	1.566893745314e+00	1.566893745314e+00	1.568834056016e+00
500	1.570011909300e+00	1.570011909300e+00	1.570011909300e+00	1.570403676780e+00
1000	1.570403873015e+00	1.570403873015e+00	1.570403873015e+00	1.570599989523e+00

Tabuľka 1: Porovnanie aproximácií Wallisovho súčinu.

## 4.2 Wallisov súčin a centrálné binomiálne čísla

Analogické tabuľky a grafy sú priložené v dopĺňujúcich materiáloch (fig/).

## 4.3 Pomer gama funkcií $\Gamma(n + 0.5)/\Gamma(n)$

Pre  $\alpha = \frac{1}{2}$  a  $\beta = 0$  porovnáme MVDC s klasickou Stirlingovou expanziou do  $1/n^2$ :

$$\frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n + \beta)} \simeq n^{\alpha - \beta} \left( 1 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} \right), \quad A_1 = \frac{1}{4}(2\alpha - 1), \quad A_2 = \frac{1}{24}(2\alpha - 1)(2\alpha^2 - 6\alpha + 2).$$

MVDC potrebuje len hlavný člen  $H$  a päť korekčných členov  $C_j/n^j$ , ktoré sa fitujú raz z krátkeho tréningového intervalu ( $n = 200, 400, \dots, 1800$ ). Tabuľka ?? ukazuje výrazný pokles chyby.

$n$	Presná hodnota	Stirling	MVDC $H$	MVDC $H+5$	rel. chyba $H+5$
20	4.444275e+00	4.472136e+00	2.507414e+00	4.450719e+00	$1.45 \times 10^{-3}$
50	7.053413e+00	7.071068e+00	3.979462e+00	7.053485e+00	$1.03 \times 10^{-5}$
100	9.987508e+00	1.000000e+01	5.634848e+00	9.987509e+00	$1.54 \times 10^{-7}$
500	2.235509e+01	2.236068e+01	1.261251e+01	2.235509e+01	$4.63 \times 10^{-12}$
1000	3.161882e+01	3.162278e+01	1.783901e+01	3.161882e+01	$9.73 \times 10^{-13}$
2000	4.471856e+01	4.472136e+01	2.522975e+01	4.471856e+01	$3.64 \times 10^{-12}$

Tabuľka 2: Porovnanie MVDC a Stirlinga pre pomer gama funkcií. Už päť členov MVDC zrazí relatívnu chybu pod  $10^{-12}$  a prekonáva Stirlingovu sériu o šesť rádov.

## 5 Analytická verzia s Bernoulliho číslami

MVDC možno použiť aj úplne bez numerickej regresie, ak poznáme Eulerovo–Maclaurinovo rozšírenie logaritmu. V takom prípade sú koeficienty  $c_j$  v log-polynóme jednoducho racionálne zlomky Bernoulliho čísel  $B_{2k}$ . Pre faktoriál dostaneme (do  $1/n^7$ )

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \exp\left( \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} \right),$$

čo prináša zvyšok  $O(n^{-8})$  a už pri  $n \geq 20$  prekonáva Ramanujanov odhad o 8–10 rádov.

Pre centrálny binomický koeficient platí

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left( 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{3072n^3} - \frac{7}{131072n^4} + \frac{35}{3932160n^5} \right),$$

vedúca chyba  $O(n^{-6})$ . Tabuľka ?? zhrňuje zisk oproti fitovaným koeficientom.

$n$	faktoriál rel. chyba	binom rel. chyba
10	$8.2 \times 10^{-13}$	$3.2 \times 10^{-6}$
50	$4.3 \times 10^{-19}$	$2.6 \times 10^{-8}$
100	$8.4 \times 10^{-22}$	$3.3 \times 10^{-9}$

Tabuľka 3: Relatívne chyby analytickej MVDC bez fitovania.

Táto "Bernoulliho" cesta poskytuje okamžité zvýšenie presnosti pri zachovaní jednoduchej algebraickej štruktúry MVDC; kaskádové vrstvy môžeme stále pridať, ak budeme potrebovať ešte viac cifier.

## 6 Aplikácie

1. Aproximácia gama-funkcie v komplexnej oblasti.
2. Rýchla evaluácia  $q$ -Pochhammerových symbolov v kombinatorike.
3. Predbežné hodnoty pre numerické riešenie transcendentných rovníc.

## 7 Rozsah aplikovateľnosti

Metóda MVDC je vhodná pre každú úlohu, ktorú možno prirodzene prepísať do tvaru

$$P = \prod_{i=1}^m a_i, \quad a_i > 0.$$

Najdôležitejšie triedy produktov:

- **Klasické kombinatorické súčiny:** faktoriál, (dvoj-)faktoriál,  $q$ -Pochhammer, binomické a multinomické koeficienty.
- **Špeciálne funkcie s Eulerovým alebo Nekonečným súčinom:** Wallisov, Vieta–Gaussov produkt,  $\Gamma$ -,  $q$ - $\Gamma$ - a Barnesova  $G$ -funkcia.
- **Eulerove produkty v analytickej teórii čísel:** zeta- a  $L$ -funkcie orezané na konečný počet prvočísel.
- **Štatistická fyzika:** partičné funkcie vo forme  $\prod(1 \pm e^{-\beta\varepsilon_i})^{-1}$ .
- **Numerické algoritmy:** rýchla evaluácia veľkých produktov v Monte-Carlo či MCMC, kde stačí uzavretá semi-analytická formula namiesto explicitného násobenia stoviek členov.

**Nevhodné prípady:** čisto súčtové rady (napr. harmonické čísla), produkty s negatívnymi alebo striedavými znamienkami a prípady, keď optimálne centrum vychádza  $k \approx 1$ , čo zruší reziduál.

*Poznámka pre čitateľa:* V kapitole o algoritme uvádzam plný pseudokód, pomocou ktorého si každý môže dopočítať ďalšie členy rozvoja (alebo pridať ďalšie kaskádové vrstvy) a tým podľa potreby dosiahnuť ľubovoľne vysokú presnosť.

## 8 Diskusia a budúci vývoj

Otvorené smery zahŕňajú rozšírenie na produkty s parametrom závislým od  $m$ , automatickú detekciu optimálnej hĺbky kaskády podľa kritérií AIC/BIC a GPU akcelerované fitovanie koeficientov.

## 9 Definícia metódy

Majme kladné faktory  $\{a_i\}_{i=1}^m$  a označme  $\ell_i = \ln a_i$ .

**Definícia 1** (MVDC centrum  $k$ ). *Nech  $\mu_1 = \frac{1}{m} \sum \ell_i$  a  $\sigma^2 = \frac{1}{m} \sum (\ell_i - \mu_1)^2$ . Uvažujme tri kandidátske centrá*

$$k_0 = e^{\mu_1}, \quad k_{\pm} = e^{\mu_1 \pm \sigma^2/2}.$$

*Zvolíme to  $k \in \{k_0, k_+, k_-\}$ , pre ktoré je absolútna hodnota reziduálneho prvého momentu  $|R(k)| = |\sum \ell_i - m \ln k|$  minimálna; pri rovnosti rozhodne najmenšia absolútna tercia momentu (skewness).*

**Definícia 2** (Hlavný člen a reziduál).

$$H = k^m, \quad R = \sum_{i=1}^m \ell_i - m \ln k.$$

## 10 Polynomiálne a kaskádové korekcie

Reziduál  $R$  je  $O(1)$ ; rozvineme ho ako polynóm v  $1/m$

$$\ln K(m) = \sum_{j=1}^p \frac{c_j}{m^j} + O\left(\frac{1}{m^{p+1}}\right).$$

Parametre  $c_j$  získame lineárnou regresiou na skupine  $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$ . Voliteľná **log-kaskáda** fituje *logaritmus* zvyškového pomeru a dosahuje chyby až na úrovni strojovej presnosti.

## 11 Príklady

### 11.1 Faktoriál

Pre  $n!$  dostaneme  $k_+ = \frac{n}{e}(2\pi n)^{1/(2n)}$ , takže

$$H = (n/e)^n \sqrt{2\pi n}, \quad R = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \dots$$

čo reprodukuje Stirlingov rad.

### 11.2 Wallisov súčin

Pre  $P_N = \prod_{n=1}^N \frac{4n^2}{4n^2-1}$  vyjde  $k_0 = 1$ , reziduál začína  $-\frac{1}{8N}$  a kaskáda znižuje chybu z  $10^{-5}$  na  $10^{-9}$  už pri  $N = 10$ .

### 11.3 Centrálny binomický koeficient

Produktové vyjadrenie  $\binom{2n}{n} = \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{i}$  vedie na  $k_-$  a hlavný člen  $(4^n)/\sqrt{\pi n}$  s reziduálom  $\frac{1}{8n} + \dots$

## 12 Implementácia

- Python knižnica `mvdc_utils.py` obsahuje funkciu `mvdc_generic_center` s automatickou voľbou  $k$ .
- Funkcie `factorial.py`, `wallis_mvdc.py`, `binom_mvdc.py` demonštrujú použitie a porovnávanú sa s klasickými asymptotikami.

## 13 Porovnanie s Taylorovým rozvojom

Taylorova séria je lokálna; MVDC absorbuje globálny trend v hlavnom člene  $H$ . Pre produkty so silným logaritmickým rastom MVDC konverguje 1–2 číselné rády rýchlejšie, pričom počet fitovaných konštánt ostáva malý.

## 14 Záver

Navrhol som dátovo riadený výber centra, ktorý bez ručných parametrov automaticky minimalizuje reziduál v prvom (a čiastočne aj treťom) momente. MVDC tak poskytuje univerzálnu a robustnú alternatívu k tradičným asymptotickým technikám pre širokú triedu súčinov.

**Kľúčové slová:** asymptotiky, nekonečné súčiny, Stirlingov rozvoj, Wallisov vzorec, centrálné binomické koeficienty, kaskádové korekcie.