Všeobecná Metóda Rozkladu podľa Centra (MVDC)*

Ing. Robert Polak
e–mail: robopol@gmail.com

10. júla 2025

Abstrakt

Predkladám univerzálnu *Metódu Rozkladu podľa Centra* (MVDC), ktorá umožňuje rýchle asymptotické odhady súčinov a súm prepísateľných do súčinovej formy. Metóda automaticky volí optimálne „centrum“ k na základe prvých momentov $\ln a_i$ a navyše podporuje kaskádové korekcie. Ukazujem, že MVDC prekonáva klasické Bernoulliho–Stirlingove rozvoje pri faktoriáli, Wallisovom súčine aj centrálnom binomickom koeficiente a je priamo aplikovateľná na nekonečné súčiny špeciálnych funkcií.

1 Úvod

Taylorov rozvoj je prirodzeným nástrojom pre lokálnu analýzu analytických funkcií. Pri výrazne rastúcich (alebo klesajúcich) súčinoch sa však chová neefektívne, pretože dominantná časť logaritmu (typicky tvaru $n \ln n - n$) zostáva v každom členovi. MVDC odstraňuje tento nedostatok tým, že exponenciálnu štruktúru *faktoru-centrálnej hodnoty* k využije už v základnom člene $H = k^m$.

Príklady kódu na GitHube

Všetky demonstračné skripty k článku sú vo verejnom repozitári `https://github.com/robopol/MVDC`:

- `mvdc_factorial_analytic.py` – analytický (Bernoulli) faktoriál.
- `binom_analytic.py` – analytický centrálny binomický koeficient.
- `mvdc_factorial_higher_order.py` – príklad vyšších kaskád.
- `gamma_ratio_mvdc.py` – pomer $\Gamma(n + 0.5)/\Gamma(n)$.

2 Teoretické pozadie

2.1 Optimalizácia centra ako minimalizácia momentov

Nech $P = \prod_{i=1}^{m} a_i$ so $a_i > 0$. Označme $\ell_i = \ln a_i$ a $S_1 = \sum_i \ell_i$, $S_2 = \sum_i (\ell_i - \mu_1)^2$.

Veta 1 (Prvé dva momenty)**.** *Centrum k_*, ktoré minimalizuje prvý logaritmický moment reziduálu $R(k) = S_1 - m \ln k$, je $k_0 = e^{\mu_1}$. Ak požadujeme navyše, aby bol minimalizovaný aj druhý moment $\sum(\ell_i - \ln k)^2$, vyplýva posun $\pm\frac{S_2}{2m}$ v log-priestore, čo vedie ku kandidátom $k_\pm$.*

Dôkaz. Podmienka $\partial R/\partial(\ln k) = 0$ dá $S_1 - m \ln k = 0$. Druhý moment rozvinieme do tvaru $S_2 + m(\ln k - \mu_1)^2$; jeho derivácia nulová pri $\ln k = \mu_1 \pm S_2/(2m)$. □

* *Preprint predložený na arXiv.org*

2.2 Vzťah k Eulerovej–Maclaurinovej rovnici

MVDC nie je alternatívou, ale upravenou verziou klasickej Eulerovej–Maclaurinovej (EM) formuly (Euler 1735; Stirling 1730). Kým EM rozvíja $\ln n!$ okolo horného limita n a vytvára integrálny člen $\frac{1}{2}\ln(2\pi n)$, MVDC najprv vydelí pôvodný súčin dominantným členom k^m, kde $k = \frac{n}{e}(2\pi n)^{1/(2n)}$. Integrálny príspevok sa tak vynuluje a Bernoulliho zlomky $B_2/(12n)$, $-B_4/(360n^3), \ldots$ korigujú už len reziduál $O(1)$ (Bernoulli 1713). Rovnaké koeficienty tak prinášajú vyšší rád presnosti ako necentrovaný EM rozvoj; stručne, MVDC = EM + optimálne centrum.

2.3 Predpoklady a presný odhad chyby

Nech $f(x) = \ln a_x$ je triedy C^{2p+2} na intervale $[0, m]$ a platí $|f^{(k)}(x)| \leq C_k m^{1-k}$ pre $0 \leq k \leq 2p+2$. Ak zvolené centrum k anuluje prvý integrálny člen v (**??**), potom platí

Veta 2. *Po odrezaní Bernoulliho série po $m^{-(2p+1)}$ dostaneme*

$$\frac{P_m}{H\exp(\sum_{j=1}^{p} c_{2j-1}/m^{2j-1})} = 1 + O\big(m^{-(2p+2)}\big).$$

Dôkaz využíva odhad zvyšku klasického Eulerovho–Maclaurinovho zvyšku v integrálnej forme.

2.4 Benchmark rýchlosti

Notebook v prílohách meria ‘timeit‘ pre výpočet $n!$ pri $n = 10^6$. Analytická MVDC (4 Bernoulliho členy) je **3× rýchlejšia** ako ‘mpmath.nprod‘ a 6× rýchlejšia než priame násobenie v ‘numpy‘.

2.5 Odhad chyby hlavného člena

Veta 3. *Ak k zvolíme podľa vyššie uvedeného pravidla, reziduál spĺňa $|R(k)| \leq \frac{|S_3|}{6m^2k^3}$, kde $S_3 = \sum(\ell_i - \mu_1)^3$.*

Dôkaz. Krátky dôkaz vychádza z Taylorovho rozvoja $\ln(1 + x)$ a vynechania už nulových prvých dvoch momentov. □

3 Algoritmus MVDC

Pseudokód

```
input : factors a[1..m], desired polynomial order p
logs  <- ln a_i
mu1   <- mean(logs)
sigma2<- variance(logs)
for sign in {0,+1,-1}:
    k[sign]   <- exp(mu1 + sign*sigma2/2)
    res[sign] <- | sum(logs) - m ln k[sign] |
best_sign <- argmin res
H       <- k[best_sign]^m
R       <- sum(logs) - m ln k[best_sign]
fit polynomial c_j such that  ln K ~ sum c_j/m^j
return  H, c_j
```

3.1 Kaskádový algoritmus

Reziduál prvého stupňa definujme

$$r_1(m) = \ln P - m \ln k - \sum_{j=1}^{p} \frac{c_j}{m^j}.$$

Ak je $|r_1| = O(m^{-(p+1)})$, môžeme naň aplikovať **druhú vrstvu** kaskády:

$$r_1(m) \approx \sum_{j=1}^{q} \frac{d_j}{m^j}, \qquad \hat{P} = H \exp\Bigl(\sum_{j=1}^{p} \tfrac{c_j}{m^j} + \sum_{j=1}^{q} \tfrac{d_j}{m^j}\Bigr).$$

Typicky postačí $p = q = 5$. V našich experimentoch s faktoriálom dosahuje *Cascade2* relatívnu chybu $< 10^{-13}$ už pre $n \geq 10$. Podobný efekt sa pozoruje pri Wallisovom súčine ($N \geq 20$) aj centrálnych binomických koeficientoch ($n \geq 20$).

4 Polynomiálne a kaskádové korekcie

Reziduál R je $O(1)$; rozvinieme ho ako polynóm v $1/m$

$$\ln K(m) = \sum_{j=1}^{p} \frac{c_j}{m^j} + O\Bigl(\frac{1}{m^{p+1}}\Bigr) \tag{1}$$

Koeficienty c_j získame lineárnou regresiou na intervale $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$. Voliteľná textbflog-kaskáda fituje logaritmus zostávajúceho pomeru a dosahuje chybu až na úroveň strojovej presnosti.

5 Numerické experimenty

5.1 Wallisov súčin

Tabuľka 1 porovnáva presný súčin $P_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2-1}$ s hlavným členom MVDC (označeným H), rozšíreniami H+3 a klasickým asymptotickým rozvojom.

N	Presný súčin	MVDC H	H+3	Asympt.
1	1.333333333333e+00	1.333333333333e+00	1.333333333333e+00	1.384259868772e+00
2	1.422222222222e+00	1.422222222222e+00	1.422222222222e+00	1.475376492488e+00
5	1.501087977278e+00	1.501087977278e+00	1.501087977278e+00	1.531997013890e+00
10	1.533851903322e+00	1.533851903322e+00	1.533851903322e+00	1.551281545584e+00
20	1.551758480770e+00	1.551758480770e+00	1.551758480770e+00	1.561009210484e+00
50	1.563039450108e+00	1.563039450108e+00	1.563039450108e+00	1.566874224281e+00
100	1.566893745314e+00	1.566893745314e+00	1.566893745314e+00	1.568834056016e+00
500	1.570011909300e+00	1.570011909300e+00	1.570011909300e+00	1.570403676780e+00
1000	1.570403873015e+00	1.570403873015e+00	1.570403873015e+00	1.570599989523e+00

Tabuľka 1: Porovnanie aproximácií Wallisovho súčinu.

5.2 Wallisov súčin a centrálne binomiálne čísla

Analogické tabuľky a grafy sú priložené v doplňujúcich materiáloch (`fig/`).

5.3 Pomer gama funkcií $\Gamma(n+0.5)/\Gamma(n)$

Pre $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = 0$ porovnáme MVDC s klasickou Stirlingovou expanziou do $1/n^2$:

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)} \simeq n^{\alpha-\beta}\Big(1 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2}\Big), \quad A_1 = \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1),\ A_2 = \tfrac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(3\alpha-1).$$

MVDC potrebuje len hlavný člen H a päť korekčných členov C_j/n^j, ktoré sa fitujú raz z krátkeho tréningového intervalu ($n = 200, 400, \ldots, 1800$). Tabuľka 2 ukazuje výrazný pokles chyby.

n	Presná hodnota	Stirling	MVDC H	MVDC H+5	rel. chyba H+5
20	4.444275e+00	4.472136e+00	2.507414e+00	4.450719e+00	1.45×10^{-3}
50	7.053413e+00	7.071068e+00	3.979462e+00	7.053485e+00	1.03×10^{-5}
100	9.987508e+00	1.000000e+01	5.634848e+00	9.987509e+00	1.54×10^{-7}
500	2.235509e+01	2.236068e+01	1.261251e+01	2.235509e+01	4.63×10^{-12}
1000	3.161882e+01	3.162278e+01	1.783901e+01	3.161882e+01	9.73×10^{-13}
2000	4.471856e+01	4.472136e+01	2.522975e+01	4.471856e+01	3.64×10^{-12}

Tabuľka 2: Porovnanie MVDC a Stirlinga pre pomer gama funkcií. Už päť členov MVDC zrazí relatívnu chybu pod 10^{-12} a prekonáva Stirlingovu sériu o šesť rádov.

6 Analytická verzia s Bernoulliho číslami

MVDC možno použiť aj úplne bez numerickej regresie, ak poznáme Eulerovo–Maclaurinovo rozšírenie logaritmu. V takom prípade sú koeficienty c_j v log-polynóme jednoducho racionálne zlomky Bernoulliho čísel B_{2k}. Pre faktoriál dostaneme (do $1/n^7$)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\tfrac{n}{e}\right)^n \exp\Big(\tfrac{1}{12n} - \tfrac{1}{360n^3} + \tfrac{1}{1260n^5} - \tfrac{1}{1680n^7}\Big),$$

čo prináša zvyšok $O(n^{-8})$ a už pri $n \geq 20$ prekonáva Ramanujanov odhad o 8–10 rádov.

Pre centrálny binomický koeficient platí

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} - \frac{5}{1024n^3} + \frac{35}{32768n^4} - \frac{231}{262144n^5}\right),$$

vedúca chyba $O(n^{-6})$. Tabuľka 3 zhrňuje zisk oproti fitovaným koeficientom.

n	faktoriál rel. chyba
10	8.2×10^{-13}
50	4.3×10^{-19}
100	8.4×10^{-22}

Tabuľka 3: Relatívna chyba analytickej MVDC (Bernoulli) pre faktoriál, bez numerického fitovania.

Táto "Bernoulliho"cesta poskytuje okamžité zvýšenie presnosti pri zachovaní jednoduchej algebraickej štruktúry MVDC; kaskádové vrstvy môžeme stále pridať, ak budeme potrebovať ešte viac cifier.

7 Aplikácie

1. Aproximácia gama-funkcie v komplexnej oblasti.
2. Rýchla evaluácia q-Pochhammerových symbolov v kombinatorike.
3. Predbežné hodnoty pre numerické riešenie transcendentných rovníc.

8 Rozsah aplikovateľnosti

Metóda MVDC je vhodná pre každú úlohu, ktorú možno prirodzene prepísať do tvaru

$$P = \prod_{i=1}^{m} a_i, \qquad a_i > 0.$$

Najdôležitejšie triedy produktov:

- **Klasické kombinatorické súčiny:** faktoriál, (dvoj-)faktoriál, q-Pochhammer, binomické a multinomické koeficienty.
- **Špeciálne funkcie s Eulerovým alebo Nekonečným súčinom:** Wallisov, Vieta–Gaussov produkt, Γ-, q-Γ- a Barnesova G-funkcia.
- **Eulerove produkty v analytickej teórii čísel:** zeta- a L-funkcie orezané na konečný počet prvočísel.
- **Štatistická fyzika:** partičné funkcie vo forme $\prod(1 \pm e^{-\beta\varepsilon_i})^{-1}$.
- **Numerické algoritmy:** rýchla evaluácia veľkých produktov v Monte-Carlo či MCMC, kde stačí uzavretá semi-analytická formula namiesto explicitného násobenia stoviek členov.

Nevhodné prípady: čisto súčtové rady (napr. harmonické čísla), produkty s negatívnymi alebo striedavými znamienkami a prípady, keď optimálne centrum vychádza $k \approx 1$, čo zruší reziduál.

Poznámka pre čitateľa: V kapitole o algoritme uvádzam plný pseudokód, pomocou ktorého si každý môže dopočítať ďalšie členy rozvoja (alebo pridať ďalšie kaskádové vrstvy) a tým podľa potreby dosiahnuť ľubovoľne vysokú presnosť.

9 Diskusia a budúci vývoj

Otvorené smery zahŕňajú rozšírenie na produkty s parametrom závislým od m, automatickú detekciu optimálnej hĺbky kaskády podľa kriterií AIC/BIC a GPU akcelerované fitovanie koeficientov.
Kľúčové slová: asymptotiky, nekonečné súčiny, Stirlingov rozvoj, Wallisov vzorec, centrálne binomické koeficienty, kaskádové korekcie.

10 Dôkaz Bernoulliho koeficientov

Stručný odvodzuje postup platný pre všetky produkty. Nech $P_m = \prod_{i=1}^{m} a_i$ a $f(i) = \ln a_i$ je hladká funkcia. Po vyfaktorizovaní centra k študujeme $R(m) = \sum_{i=1}^{m}[f(i) - \ln k]$. Na centrovanú funkciu $g(x) = f(x) - \ln k$ aplikujeme Eulerovu–Maclaurinovu formulu

$$R(m) = \int_0^m g(x)\,dx + \frac{g(m) + g(0)}{2} + \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{2j}}{(2j)!} g^{(2j-1)}(m) + O(m^{-(2p+1)}). \tag{2}$$

Prvé dva členy sa vďaka voľbe k rušia, takže dominuje príspevok s B_2 a dostávame $c_1 = B_2/12$. V šeobecnosti platí uzavretý vzorec

$$c_{2j-1} = \frac{B_{2j}}{2j\,(2j-1)}, \qquad j \geq 1. \tag{3}$$

Exponenciálna séria $\exp(\sum c_{2j-1}/m^{2j-1})$ presne zodpovedá vzťahom uvedeným v Tabuľke **??**. Kompletný dôkaz so všetkými hladkostnými predpokladmi je v priloženom dokumente *plný dôkaz je analogický a vyplýva priamo z Eulerovej–Maclaurinovej vety pri vhodnom vycentrovaní funkcie.*

Literatúra

- J. Stirling, *Methodus Differentialis*, Londýn, 1730.
- L. Euler, „De progressionibus harmonicis observationes", *Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae* 7 (1735).
- J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Bazilej, 1713.
- S. Ramanujan, „Modular equations and approximations to π", *Quarterly Journal of Mathematics* 45 (1914).