

UNIDAD 1 “Funciones”

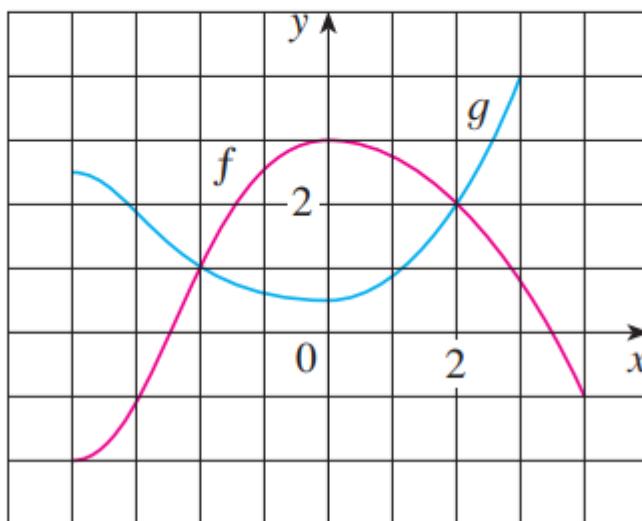
2. Si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

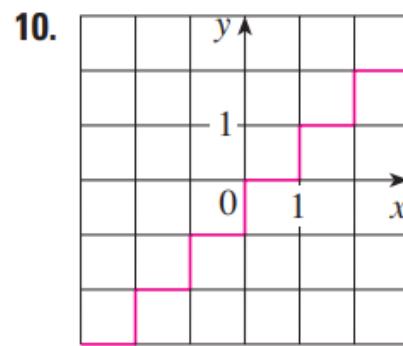
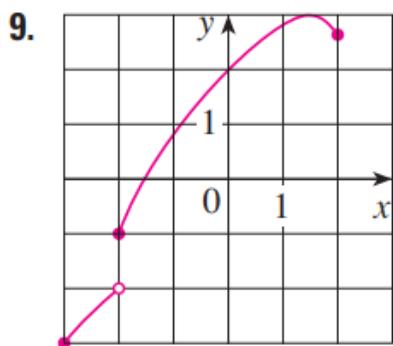
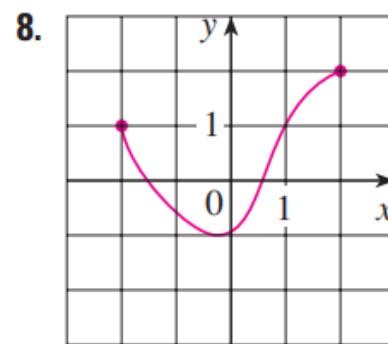
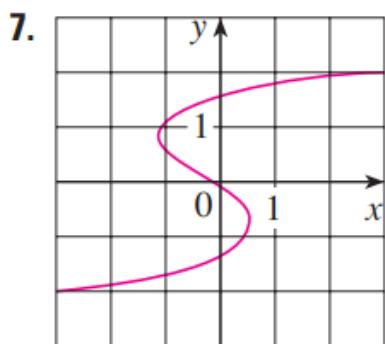
¿es verdad que $f = g$?

4. Las gráficas de f y g están dadas.

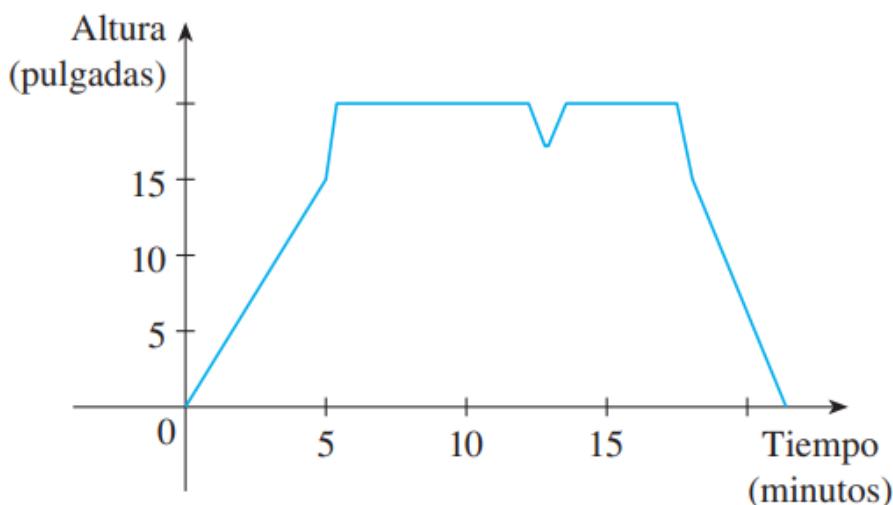
- Establezca los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
- ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
- Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
- ¿Sobre qué intervalo es decreciente f ?
- Establezca el dominio y el rango de f
- Establezca el dominio y el rango de g .



7-10 Determine si la curva es la gráfica de una función de x . Si lo es, establezca el dominio y el rango de la función.

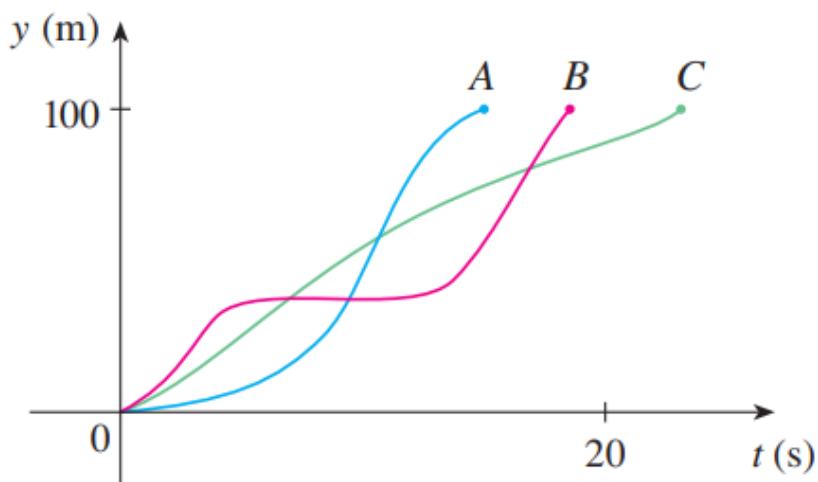


- 12.** La gráfica muestra la altura del agua en una bañera en función del tiempo. Proporcione una descripción verbal de lo que cree que sucedió.



- 13.** Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego esboce una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.
- 14.** Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del

tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?



- 21.** El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Esboce una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un periodo de cuatro semanas.
- 23.** En la tabla se muestra el número N (en millones) de usuarios de telefonía celular en EU. (Se dan estimaciones semestrales.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

- a) Utilice los datos para esbozar una gráfica de N en función de t .
- b) Utilice su gráfica para estimar el número de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 2001 y en 2005.
- 25.** Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(a + 1), 2f(a), f(2a), f(a^2), [f(a)]^2$ y $f(a + h)$.

- 26.** Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de r pulgadas a un radio $r + 1$ pulgadas.

27-30 Evalúe el cociente de diferencias de cada una de las siguientes funciones. Simplifique su respuesta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3$, $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

31-37 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

31. $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \frac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

39-50 Encuentre el dominio y grafique cada una de las siguientes funciones:

39. $f(x) = 2 - 0.4x$

40. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

41. $f(t) = 2t + t^2$

42. $H(t) = \frac{4 - t^2}{2 - t}$

43. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

44. $F(x) = |2x + 1|$

45. $G(x) = \frac{3x + |x|}{x}$

46. $g(x) = |x| - x$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

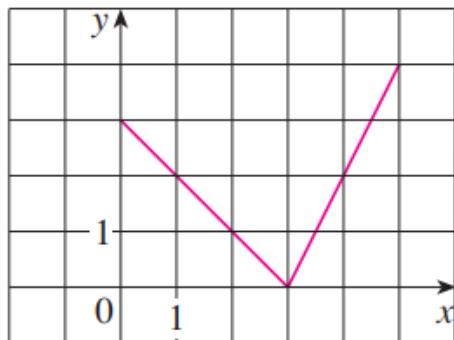
49. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leq 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

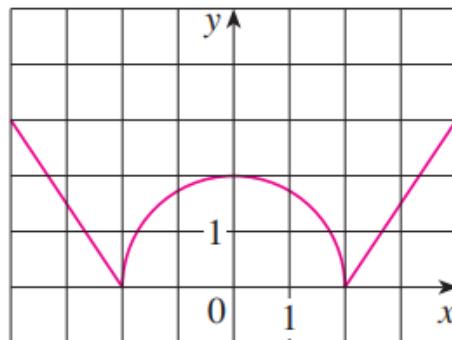
51-56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$.
52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$.
53. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.
54. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

55.



56.



57-61 Encuentre una fórmula y su dominio para cada una de las siguientes funciones descritas.

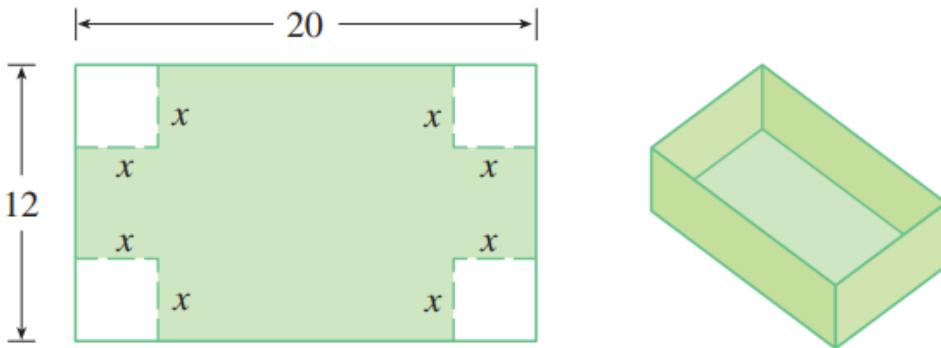
57. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
59. Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

- 61.** Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

-
- 62.** Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.



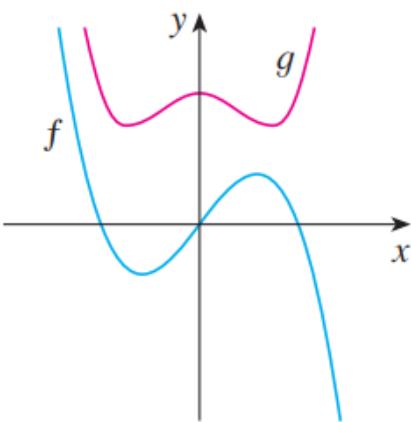
- 63.** Debe construirse una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y plegando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x .



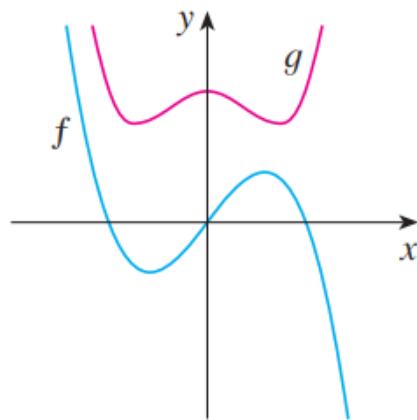
- 64.** Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C , como una función del número x de minutos utilizados, y grafique C como una función para $0 \leq x \leq 600$.
- 65.** En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es 65 mi/h y la velocidad mínima es de 40 mi/h. La multa para los conductores que violan estos límites es \$15 por cada milla por hora por encima de la velocidad máxima o por debajo de la velocidad mínima. Exprese el monto de la multa F como una función de la velocidad de conducción x y grafique $F(x)$ para $0 \leq x \leq 100$.

69-70 Se muestran las gráficas de f y g . Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69.



70.



73-78 Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

$$75. \quad f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

- 79.** Si f y g son funciones pares, ¿es $f + g$ par? Si f y g son funciones impares, ¿es $f + g$ impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

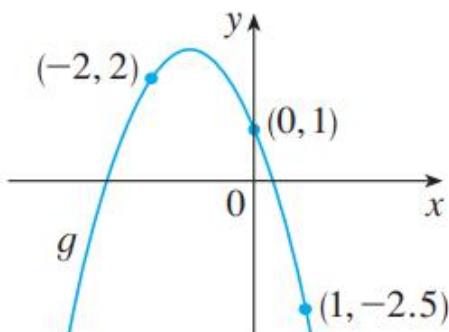
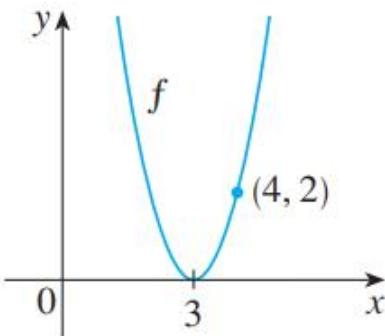
1-2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

- 1.** a) $f(x) = \log_2 x$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$
 c) $h(x) = \frac{2x^3}{1 - x^2}$ d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$
 e) $v(t) = 5^t$ f) $w(\theta) = \sin \theta \cos^2 \theta$

2. a) $y = \pi^x$ b) $y = x^\pi$
 c) $y = x^2(2 - x^3)$ d) $y = \tan t - \cos t$
 e) $y = \frac{s}{1 + s}$ f) $y = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

5. a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y esboce varios miembros de la familia.
 b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y esboce varios miembros de la familia.
 c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Esboce varios miembros de la familia.
8. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.

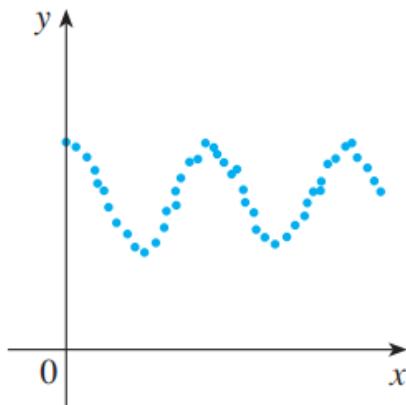


9. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.
10. Estudios recientes indican que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra ha estado aumentando. Algunos científicos han modelado la temperatura con la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en °C y t representa años desde 1900.
- ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T ?
 - Utilice la ecuación para predecir la temperatura promedio de la superficie global en 2100.
11. Si D (en mg) es la dosis de un medicamento recomendada para adultos, entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a , el farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Supongamos que la dosis para un adulto es de 200 mg.
- Encuentre la pendiente de la gráfica de c . ¿Qué representa?
 - ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

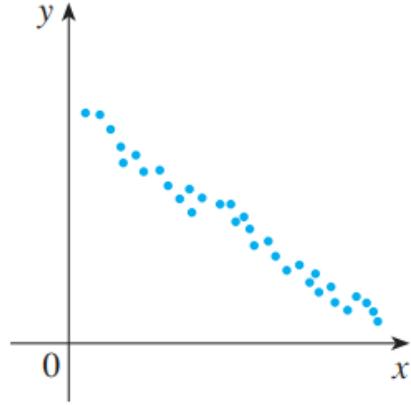
- 16.** El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta \$2 200 fabricar 100 sillas en un día y \$4 800 producir 300 sillas en un solo día.
- Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.
 - ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
 - ¿Cuál es la intersección en y de la gráfica y qué representa?
- 17.** En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 15 lb/pulg^2 . Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de descenso.
- Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.
 - A qué profundidad la presión es de 100 lb/pulg^2 ?

19-20 Para cada una de las siguientes gráficas de dispersión, ¿qué tipo de función elegiría como un modelo para los datos? Explique sus elecciones.

19. a)

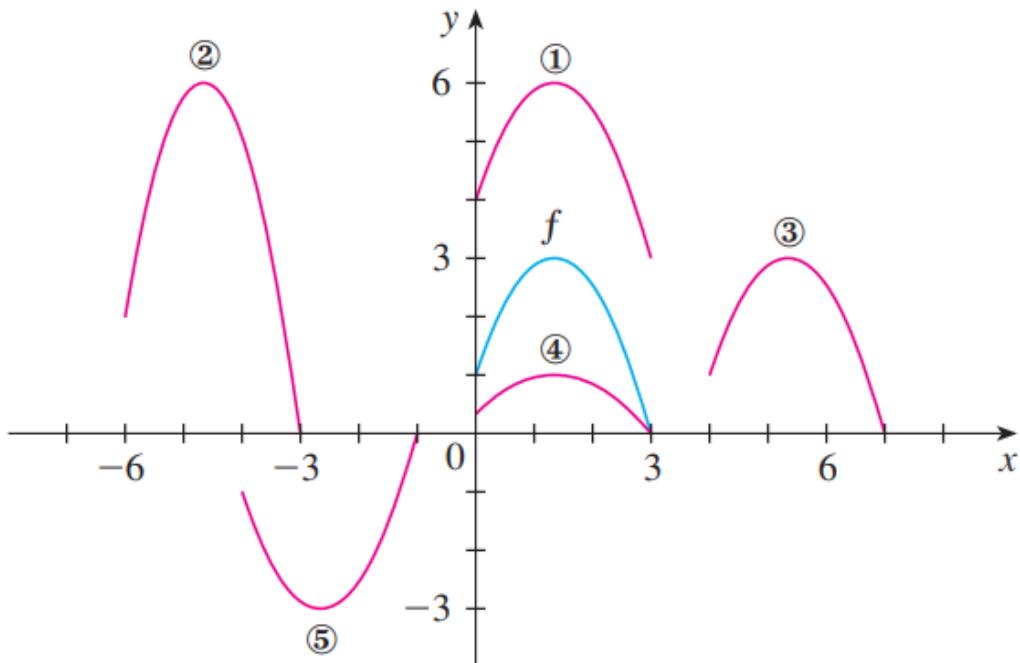


b)



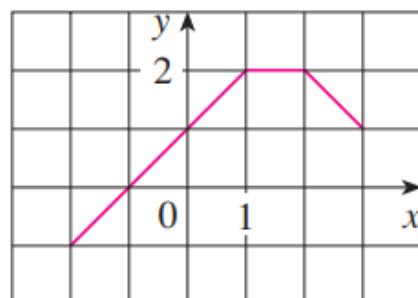
3. La gráfica de $y = f(x)$ está dada. Relacione cada ecuación con su gráfica y argumente sus elecciones.

- a) $y = f(x - 4)$
- b) $y = f(x) + 3$
- c) $y = \frac{1}{3}f(x)$
- d) $y = -f(x + 4)$
- e) $y = 2f(x + 6)$



4. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las siguientes funciones.

- a) $y = f(x) - 2$
- b) $y = f(x - 2)$
- c) $y = -2f(x)$
- d) $y = f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$



5. La gráfica de f está dada. Utilícela para graficar las siguientes funciones.

a) $y = f(2x)$

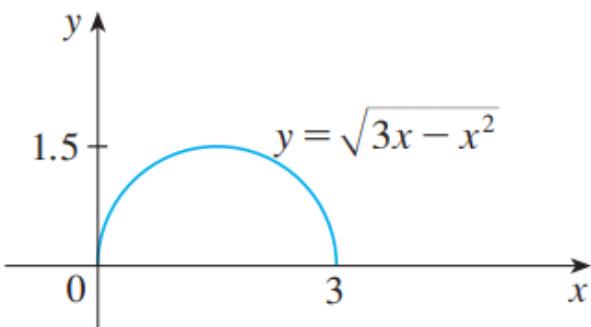
b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $y = f(-x)$

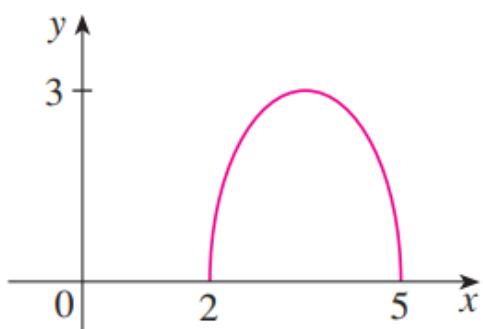
d) $y = -f(-x)$



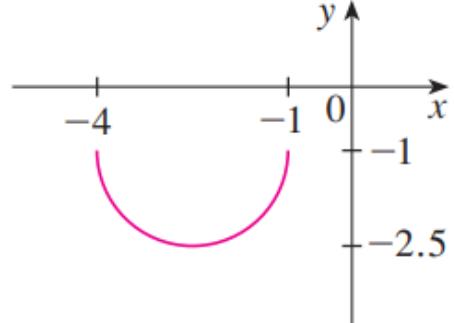
6-7 La gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$ está dada. Utilice transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



6.



7.



9-24 Grafique la función a mano, sin trazar puntos, sino empezando con la gráfica de una de las funciones esenciales de la sección 1.2 y después aplicando las transformaciones apropiadas.

9. $y = \frac{1}{x + 2}$

10. $y = (x - 1)^3$

13. $y = \sqrt{x - 2} - 1$

12. $y = x^2 + 6x + 4$ **15.** $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$

19. $y = 1 - 2x - x^2$ **20.** $y = |x| - 2$

23. $y = |\sqrt{x} - 1|$

24. $y = |\cos \pi x|$

- 27.** a) ¿Cómo es la gráfica de $y = f(|x|)$ en relación con la gráfica de f ?
b) Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen}|x|$.
c) Trace la gráfica de $y = \sqrt{|x|}$.

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31-36 Encuentre las funciones a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $f \circ f$, y d) $g \circ g$ y sus dominios.

35. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$

37-40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

38. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

40. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \frac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41-46 Exprese la función en la forma $f \circ g$

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. F

43. $F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. G

47-49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

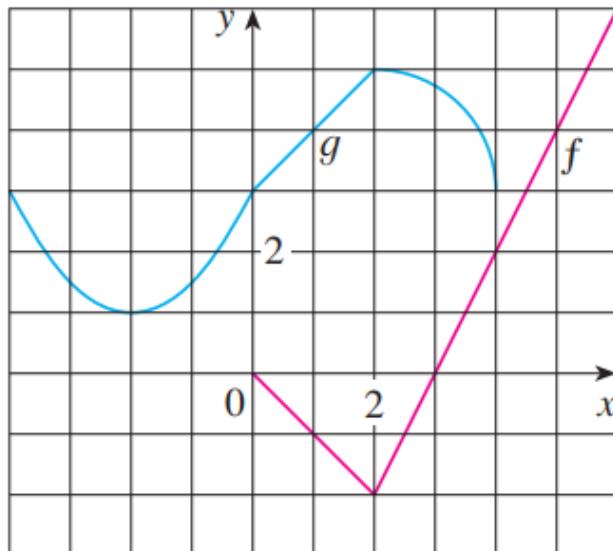
50. Utilice la tabla para evaluar cada una de las siguientes expresiones:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$
d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

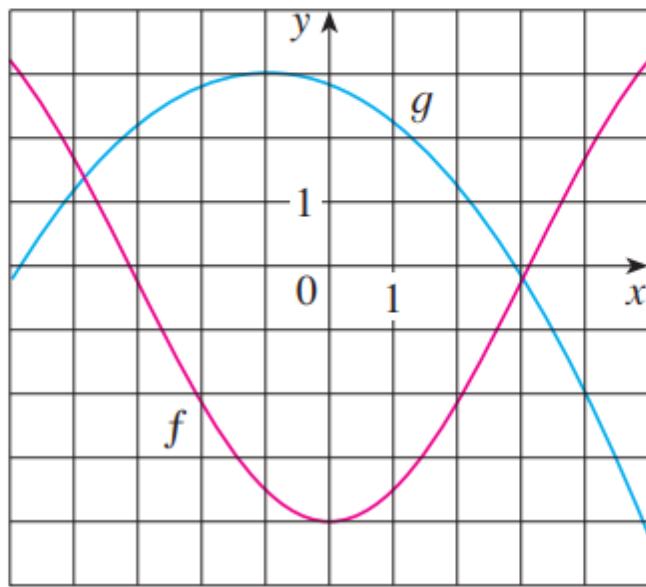
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51. Utilice las gráficas dadas de f y g para evaluar cada una de las siguientes expresiones, o explique por qué no están definidas:

a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$
d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$



52. Utilice las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \dots, 5$. Utilice estas estimaciones para hacer un esbozo de $f \circ g$.



59. Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿Es $f \circ g$ también una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

- 61.** a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que realizar en la fórmula para g a fin de determinar la fórmula para h .)
 b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.
- 62.** Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.
- 63.** Supongamos que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?
- 64.** Supongamos que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1-4 Utilice las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

3. a) $b^8(2b)^4$ b) $\frac{(6y^3)^4}{2y^5}$

 **7-10** Grafique cada una de las siguientes funciones en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

- 7.** $y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 5^x, \quad y = 20^x$
9. $y = 3^x, \quad y = 10^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

11-16 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo utilice las gráficas en las figuras 3 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

11. $y = 10^{x+2}$

12. $y = (0.5)^x - 2$

14. $y = e^{|x|}$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^x)$

18. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica resultante al

- reflejarla sobre la recta $y = 4$
- reflejarla sobre la recta $x = 2$

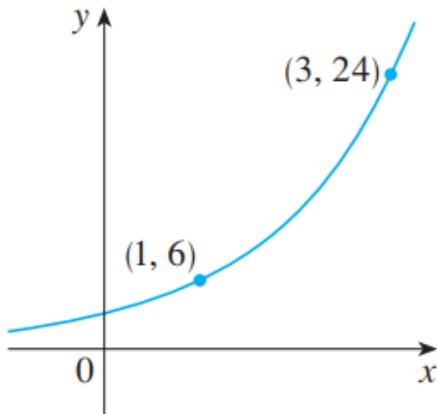
19-20 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones

19. a) $f(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ b) $f(x) = \frac{1 + x}{e^{\cos x}}$

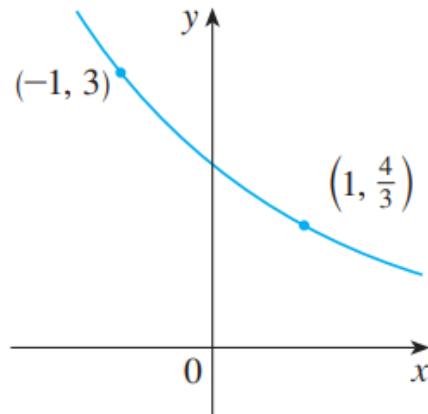
20. a) $g(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$ b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

21-22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ correspondiente a cada una de las siguientes gráficas:

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x \left(\frac{5^h - 1}{h} \right)$$

- 29.** Bajo condiciones ideales se sabe con certeza que una población de bacterias se duplica cada tres horas. Supongamos que inicialmente hay 100 bacterias.
- ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
 - ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
 - Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
 - Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 50 000.



- 30.** Un cultivo bacteriano se inicia con 500 bacterias y duplica su tamaño cada media hora.



- ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?
- ¿Cuántas hay después de t horas?
- ¿Cuántas hay después de 40 minutos?
- Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 100 000.



- 33.** Si graficamos la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

veremos que f parece ser una función impar; demuéstrelo.

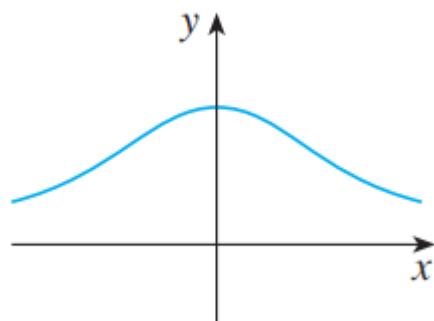
- 2.** a) Supongamos que f es una función uno a uno con dominio A y rango B . ¿Cómo se define la función inversa f^{-1} ? ¿Cuál es el dominio de f^{-1} ? ¿Cuál es el rango de f^{-1} ?
- b) Si se le da una fórmula para f , ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1} ?
- c) Si se le da la gráfica para f , ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1} ?

3-14 Una función viene dada por una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es uno a uno.

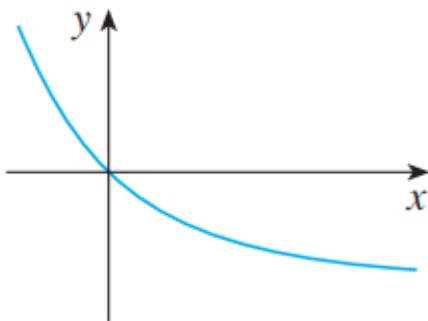
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

5.



7.



11. $g(x) = 1/x$

- 13.** $f(t)$ es la altura de un balón de fútbol t segundos después de la patada inicial.

- 15.** Suponga que f es una función uno a uno.
- Si $f(6) = 17$, ¿qué es $f^{-1}(17)$?
 - Si $f^{-1}(3) = 2$, ¿qué es $f(2)$?
- 16.** Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encuentre $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.
- 17.** Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.
- 19.** La fórmula $C = 5/9(F - 32)$, donde $F \geq -459.67$, expresa la temperatura Celsius C , en función de la temperatura Fahrenheit F . Halle una fórmula para la función inversa e interprétila. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?
- 20.** En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21-26 Halle una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

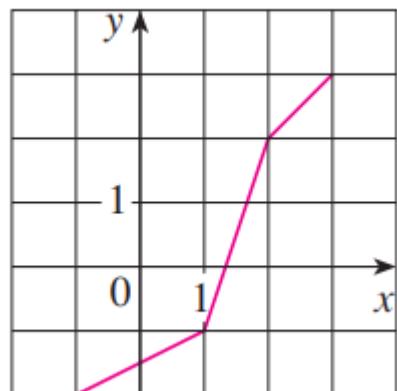
24. $y = x^2 - x$, $x \geq \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$

29-30 Use la gráfica dada de f , para trazar la gráfica de f^{-1} .

29.



35-38 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

35. a) $\log_5 125$

b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

37. a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. a) $e^{-2 \ln 5}$

b) $\ln(\ln e^{e^{10}})$

39-41 Exprese cada una de las siguientes cantidades dadas como un solo logaritmo.

39. $\ln 5 + 5 \ln 3$

40. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2 \ln c$

41. $\frac{1}{3} \ln(x+2)^3 + \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

47-48 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo tiene que usar las gráficas de las figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

47. a) $y = \log_{10}(x + 5)$

b) $y = -\ln x$

48. a) $y = \ln(-x)$

b) $y = \ln |x|$

49-50 a) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f ?

b) ¿Cuál es la intersección en x de la gráfica?

c) Trace la gráfica de f .

49. $f(x) = \ln x + 2$

50. $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51-54 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para x .

52. a) $\ln(x^2 - 1) = 3$

b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

53. a) $2^{x-5} = 3$

b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. a) $\ln(\ln x) = 1$

b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, $a \neq b$

55-56 Resuelva cada una de las siguientes desigualdades para x .

56. a) $1 < e^{3x-1} < 2$

b) $1 - 2 \ln x < 3$

57. a) Encuentre el dominio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.

b) Halle f^{-1} y su dominio.

63-68 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

63. a) $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$

b) $\cos^{-1}(-1)$

65. a) $\arctan 1$ b) $\sin^{-1}(1/\sqrt{2})$

67. a) $\tan(\arctan 10)$ b) $\sin^{-1}(\sin(7\pi/3))$

68. a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ b) $\sin(2 \sin^{-1}(\frac{3}{5}))$

69. Pruebe que $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

70-72 Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

70. $\tan(\sin^{-1} x)$

71. $\sin(\tan^{-1} x)$

72. $\cos(2 \tan^{-1} x)$

1-6 Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones.

4. a) $\cosh 3$ b) $\cosh(\ln 3)$

5. a) $\operatorname{sech} 0$ b) $\cosh^{-1} 1$

6. a) $\operatorname{senh} 1$ b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

7-19 Demuestre las siguientes identidades.

7. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

(Esto demuestra que $\operatorname{senh} x$ es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$

(Esto demuestra que $\cosh x$ es una función par.)

10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

$$13. \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$14. \tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x .

UNIDAD 2 “LIMITES Y CONTINUIDAD”

1. Un tanque contiene 1 000 galones de agua que se drenan por la parte inferior del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua que queda en el tanque (en galones) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

- Si P es el punto $(15, 250)$ sobre la gráfica de V , encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto sobre la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y 30 .
- Estime la pendiente de la recta tangente en P por medio del promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
- Utilice una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P . (Esta pendiente representa la rapidez a la que fluye el agua del tanque después de 15 minutos.)

- 2.** Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El aparato compila el número de latidos del corazón después de t minutos y se registran en una tabla. Cuando los datos de la tabla se representan gráficamente, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

$t(\text{min})$	36	38	40	42	44
Latidos del corazón	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Utilice los datos para estimar el ritmo cardiaco del paciente después de 42 minutos, utilizando la recta secante entre los puntos con los valores dados de t .

- a) $t = 36$ y $t = 42$ b) $t = 38$ y $t = 42$
 c) $t = 40$ y $t = 42$ d) $t = 42$ y $t = 44$

¿Cuáles son sus conclusiones?

- 4.** El punto $P(0.5, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \cos \pi x$.
- a) Si Q es el punto $(x, \cos \pi x)$, utilice la calculadora para hallar la pendiente de la secante PQ (con una precisión de seis decimales) para los siguientes valores de x :
- | | | | |
|------|---------|-----------|-------------|
| i) 0 | ii) 0.4 | iii) 0.49 | iv) 0.499 |
| v) 1 | vi) 0.6 | vii) 0.51 | viii) 0.501 |
- b) Utilice los resultados del inciso a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
- c) Utilice la pendiente del inciso b), para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
- d) Dibuje la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

- 5.** Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$.

a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que comienza cuando $t = 2$ y permanece

- i) 0.5 segundos
- ii) 0.1 segundos
- iii) 0.05 segundos
- iv) 0.01 segundos

b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

- 7.** La tabla muestra la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Encuentre la velocidad promedio para cada periodo:

- i) $[1, 3]$
- ii) $[2, 3]$
- iii) $[3, 5]$
- iv) $[3, 4]$

b) Utilice la gráfica de s en función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

- 2.** Explique qué significa decir que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista? Explique.

5. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

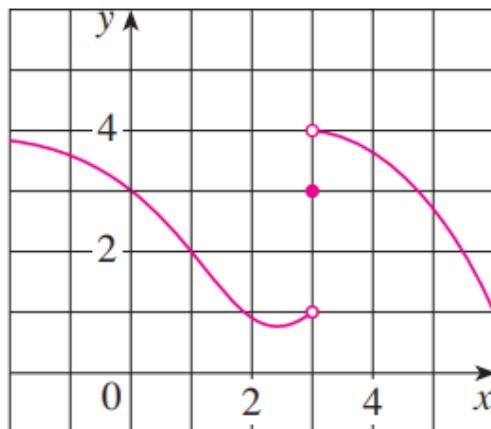
a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

e) $f(3)$



7. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades si existe. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$

b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$

c) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$

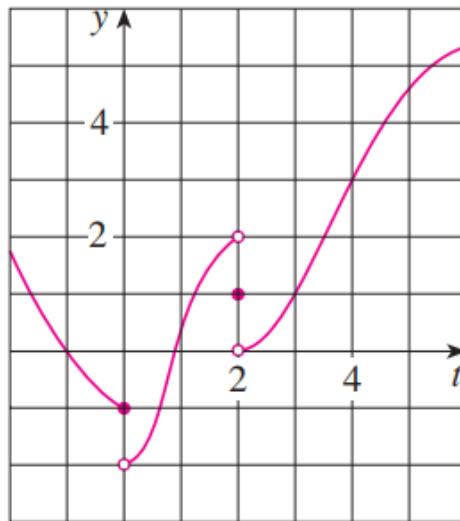
d) $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$

e) $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$

f) $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$

g) $g(2)$

h) $\lim_{t \rightarrow 4} g(t)$

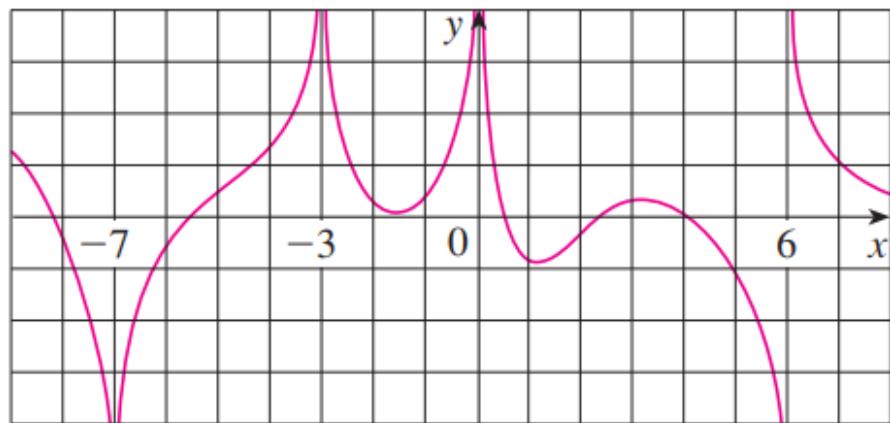


9. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

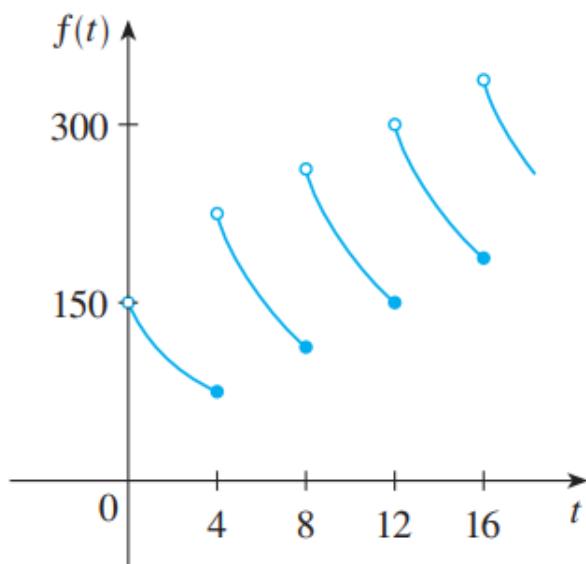
f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t \rightarrow 12^-} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11-12 Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

$$11. f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

15-18 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

$$17. \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \\ f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$$

19-22 Conjeture el valor de cada uno de los siguientes límites (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales).

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \\ x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, \\ 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$$

$$21. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{5t} - 1}{t}, \quad t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$$

23-26 Utilice una tabla de valores para estimar el valor de cada uno de los siguientes límites. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado.

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 5^x}{x}$$

 **28.** a) Estime el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin \pi x}$$

graficando la función $f(x) = (\sin x)/(\sin \pi x)$. Exprese su respuesta con una precisión de dos decimales.

b) Verifique su respuesta del inciso a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

29-37 Determine cada uno de los siguientes límites infinitos.

$$29. \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 2}{x + 3}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x + 2}{x + 3}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$$

37. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

38. a) Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

46. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \rightarrow c^-$?

1. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3$

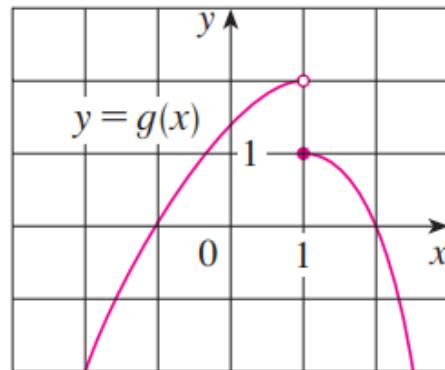
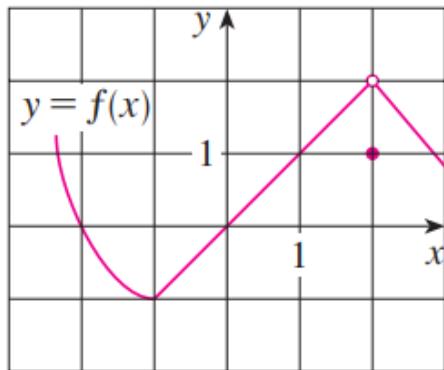
c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.



a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} [x^3 f(x)]$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

8. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Considerando el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

es correcta.

11-32 Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen.

15. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

$$17. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$$

$$18. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$$

$$20. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$$

$$22. \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$$

$$25. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$$

$$29. \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right)$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$$

$$31. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

$$32. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x + h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

37. Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

38. Si $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para toda x , evalúe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encuentre cada uno de los siguientes límites si éstos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x \rightarrow 0.5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

45. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

47. La función signo, denotada por sgn , está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Trace la gráfica de esta función
b) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.
- i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x$
iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Encuentre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
b) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?
c) Trace la gráfica de f .

49. Sea $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

- a) Encuentre
- i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$
b) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$?
c) Trace la gráfica de g .

50. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Evalúe cada una de los siguientes límites si es que existen.
- i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ iii) $g(1)$
iv) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ v) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ vi) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
- b) Trace la gráfica de g .

57. Si $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

58. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$, encuentre cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

62. Evalúe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$

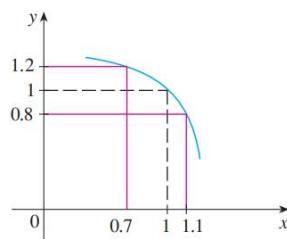
63. ¿Existe un número a tal que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

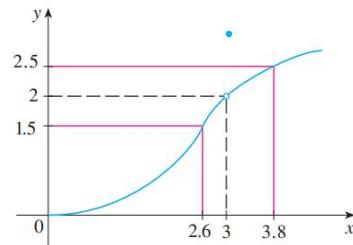
1. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

$$\text{si } |x - 1| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - 1| < 0.2$$



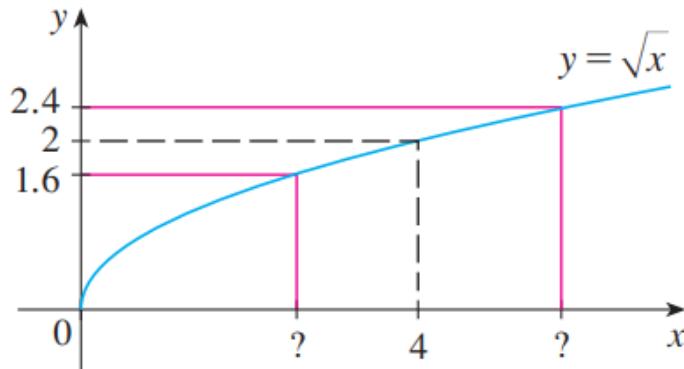
2. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

$$\text{si } 0 < |x - 3| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - 2| < 0.5$$



3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si } |x - 4| < \delta, \text{ entonces } |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm^2 de área.

a) ¿Qué radio produce tal disco?

b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de $\pm 5 \text{ cm}^2$ en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso a) debe el tornero mantener el radio?

c) En términos de la definición ε - δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, ¿Qué es x ? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a ? ¿Qué es L ? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ ?

- 13.** a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.
 b) Repita el inciso a) con $\varepsilon = 0.01$.
- 14.** Dado que $\lim_{x \rightarrow 2}(5x - 7) = 3$, ilustre la definición 2 encontrando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15-18 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε - δ de límite e ilústrela con un diagrama como el de la figura 9.

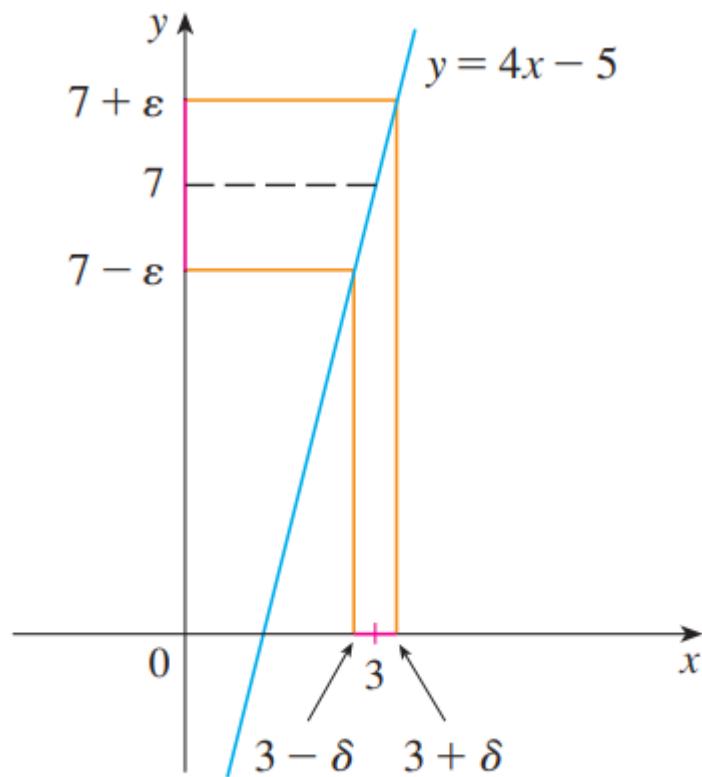


FIGURA 9

16. $\lim_{x \rightarrow 4}(2x - 5) = 3$ **17.** $\lim_{x \rightarrow -3}(1 - 4x) = 13$

19-32 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε - δ de límite.

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \rightarrow 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

22. $\lim_{x \rightarrow -1.5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

24. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

28. $\lim_{x \rightarrow -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$ **29.** $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

31. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = 3$

34. Verifique con argumentos geométricos que la mayor posible elección de δ para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

36. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

37. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

Sugerencia: utilice $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$.

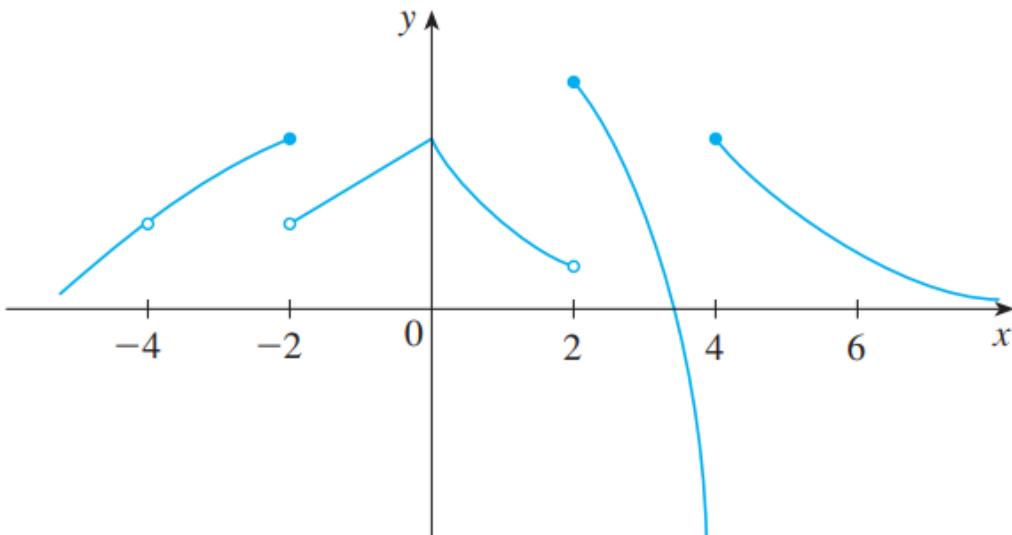
41. ¿Qué tan cerca a -3 tiene que tomar x de manera que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10000?$$

42. Demuestre, utilizando la definición 6, que $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

- 3.** a) A partir de la grafica de f , establezca el número en el cual f es discontinua y explique por qué.
b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



5-8 Dibuje la gráfica de una función f que es continua, a excepción de la discontinuidad señalada.

- 6.** Discontinuidades en $x = -1$ y $x = 4$, pero continuas por la izquierda en $x = -1$ y por la derecha en $x = 4$.
- 7.** Discontinuidad removable en $x = 3$, discontinuidad de salto en $x = 5$.
- 9.** El peaje T que se cobra por conducir en un determinado tramo de una carretera es de \$5, excepto durante las horas pico (entre las 7 y las 10 y entre las 16 y 19 horas) cuando el peaje es de \$7.
- Esboce una gráfica de T como una función del tiempo t , medido en horas pasada la medianoche.
 - Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que utiliza la carretera.
- 11.** Si f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$, encuentre $f(2)$.
- 12-14** Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua en el número dado $x = a$.

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

14. $h(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

15-16 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua sobre el intervalo dado.

15. $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

17-22 Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

17. $f(x) = \frac{1}{x + 2} \quad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad a = 0$

23-24 ¿Cómo podría “remover la discontinuidad” en cada una de las siguientes funciones? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ a fin de que sean continuas en $x = 2$?

23. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25-32 Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9, explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

27. $Q(x) = \frac{\sqrt[3]{x - 2}}{x^3 - 2}$

29. $A(t) = \arcsen(1 + 2t)$

26. $G(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

 **33-34** Identifique las discontinuidades de cada una de las siguientes funciones e ilústrelas con una gráfica.

33. $y = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

35-38 Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los siguientes límites.

37. $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x}$

39-40 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

$$39. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

41-43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f .

$$41. f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$42. f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$43. f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 45.** ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- 46.** Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para toda x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- 47.** ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

c) $f(x) = [\lfloor \sin x \rfloor], \quad a = \pi$

- 49.** Si $f(x) = x^2 + 10 \sin x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 1000$.

51-54 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz en cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$

53. $e^x = 3 - 2x$, $(0, 1)$

- 55-56** a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.
b) Utilice su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

55. $\cos x = x^3$

-  **57-58** a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.
b) Utilice un dispositivo de graficación para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

57. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

65. ¿Existe un número que es exactamente 1 más que su cubo?

67. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre $(-\infty, \infty)$

3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente:

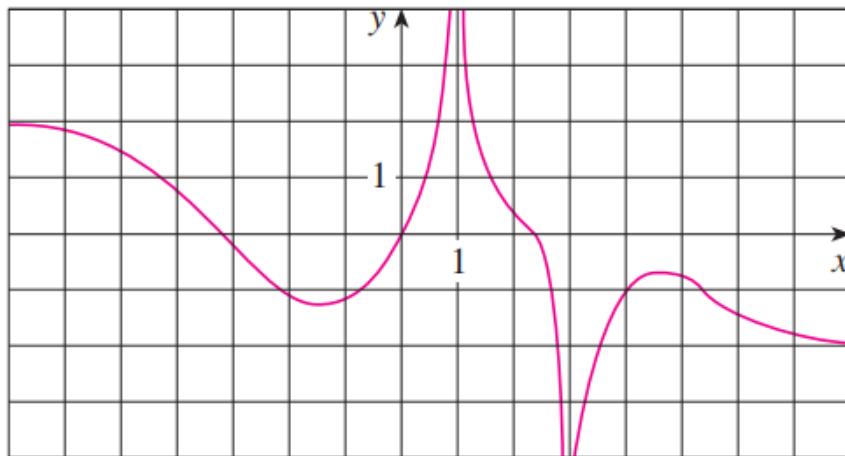
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas



5-10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas

7. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

10. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

-  **11.** Conjeture el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100 . Después, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

- 13-14** Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

- 15-38** Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$

19. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad 31. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5)$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(e^x)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} \cos x)$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$$

41-46 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

$$43. y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

- 49.** Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$$

- 50.** Proponga una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

52-56 Determine los límites cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para esbozar la gráfica como en el ejemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$

53. $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

59. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es a) menor que el grado de Q y b) mayor que el grado de Q .

61. Determine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

62. a) Un depósito contiene 5 000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito con una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $x \rightarrow \infty$?

- 69.** a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
 b) Al hacer $r = 2$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

39-48 Determine cada uno de los siguientes límites.

39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x}$

43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x^3 - 4x}$

45. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta + \tan \theta}$

41. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 6t}{\sin 2t}$

47. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$