Método Tradicional para comprobar la formula general

1. Primero se pone la ecuación polinómica cuadrática general de una sola variable
$$ax^2 + bx + c = 0$$
2. Se divide todo entre el coeficiente del primer término, es decir todo entre a
$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$
$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$
3. Se pasa el termino independiente al miembro derecho de la ecuación
$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$
4. Ahora se suma de ambos lados lo faltante para que se pueda realizar el cuadrado perfecto del miembro izquierdo de la ecuación
$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$
5. Se reconoce el cuadrado perfecto del miembro derecho es decir factorizamos y se desarrollan las operaciones del miembro derecho
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
6. Ahora simplemente se despeja x
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
7. Y listo ya comprobamos la fórmula general y podemos ver el por que la usamos que básicamente es la forma despejada x de un polinomio cuadrado perfecto.

Método Poh-Shen Loh

1. Primero debemos de tener el polinomio cuadrado perfecto en su forma normalizada en donde el coeficiente de x^2 es 1, es decir:
$$x^2 + Bx + C = 0$$
En donde:
$$B = \frac{b}{a} \qquad y \qquad C = \frac{c}{a}$$

2. Por las raíces r_1 y r_2 y las relaciones de viète entones:

$$r_1 + r_2 = -B$$
$$r_1 * r_2 = C$$

3. Ahora se tiene que representar el promedio M y desviación s de r_1 r_2

$$M = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{B}{2}$$

Y se escribe

$$r_1 = M + s$$
$$r_2 = M - s$$

4. Ahora hacemos el producto de las raíces

$$r_1 * r_2 = C$$
$$(M + s)(m - s) = C$$
$$M^2 - s^2 = C$$

5. Se despeja s

$$-s^2 = C - M^2$$
$$s^2 = M^2 - C$$
$$s = \sqrt{M^2 - C}$$

6. Ahora sacamos las raíces en donde

$$r_1 = M + s$$
$$r_1 = M + \sqrt{M^2 - C}$$

Y también

$$r_2 = M - s$$
$$r_2 = M - \sqrt{M^2 - C}$$

Entonces

$$x = M \pm \sqrt{M^2 - C}$$

7. Y esta sería la fórmula de Poh-Shen Loh
8. Ahora comprobaremos que es igual a la formula general sustituyendo los valores de M y C

$$x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
$$x = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. Y como resultado se comprueba que es lo mismo a la formula general entonces si es otro método para deducir la formula general de la ecuación cuadrática

Conclusión

Se pudo ver los origines de la formula general de distintas maneras para tener mas de una forma de saber el por que se usa y su procedimiento que conducen a la formula general.

Cada uno de los enfoques aporta diferentes cosas. El primero resalta la técnica algebraica, y el segundo la interpretación geométrica y simétrica de las soluciones. El comprender ambos métodos me dio una amplía intuición sobre el comportamiento de las raíces de una ecuación cuadrática y me fortaleció la habilidad de la manipulación algebraica.