未来ロボティクス学科
1526084

ディジタル信号処理

フーリエ変換

中島 崇晴

提出日 2016 年 12 月 19 日

1　目的

与えられたデータ（信号波形）を入力とし，それを離散フーリエ変換（DFT）で処置をしてパワースペクトルを出力する．

また，その持つ意味とその他に関して，信号処理の見地から解説及び考察を加える．

2　理論

DFT とは，離散化されたフーリエ変換，つまり，連続フーリエ変換のディジタル化である．
離散フーリエ変換とは，複素関数 $x(t)$ を複素関数 $X(f)$ に写す写像であって，次の式 (1) で定義されるものを言う．

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathrm{e}^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \tag{1}$$

また，DFT は計算機上で高速フーリエ変換（FFT）を使って高速に計算することができる．

パワースペクトルとは，時間信号 $x(t)$ のパワーを，FFT 分析することによりある周波数バンド幅（すなわち周波数分解能 Δf ）毎のパワーをもとめ，横軸を周波数としてグラフ化しているものである．

パワースペクトル $P(f)$ は,

$$P(f) = |X(f)|^2 = X(f) * X(f) \tag{2}$$

（$*$ は複素共役を表す）

で求められる．

窓関数は，ある有限区間以外で 0 となる関数である．ある関数や信号に窓関数が掛け合わせられると，区間外は 0 になり，有限区間内だけが残るので，数値解析が容易になる．

フーリエ変換では，関数 $f(x)$, も三角関数も，無限区間 $(-\infty, \infty)$ で定義されている．しかし，実データを数値的にフーリエ変換するなら，無限の長さは扱えないので，有限区間 $[a, b]$, でフーリエ変換をおこない，区間外は無視することになる．これは，関数 $f(x)$, を区間外で 0 とみなすことに等しい（「区間内のデータを周期的に繰り返す」という表現をすることもあるが，DFT の場合はこの 2 つは等価である）．

つまり，関数 $f(x)$ と関数

$$w(x) = \begin{cases} 1, if a \leq x \leq b \\ 0, otherwise \end{cases} \tag{3}$$

の積 $(wf)(x) = w(x)f(x),$ を求め，そのフーリエ変換 wf を，f の代わりに得ていることになる．このとき掛け合わせた関数 $w(x),$ が窓関数である．

3　内容及び方法

MATLAB の関数を使い信号波形を FFT で処理し，グラフに出力する．
今回の場合，MATLAB は DFT ではなく DFT の処理を高速化した FFT の関数しかなく，それを使用した．

4　結果

与えられた信号波形をグラフで表したので下の図 1 である．

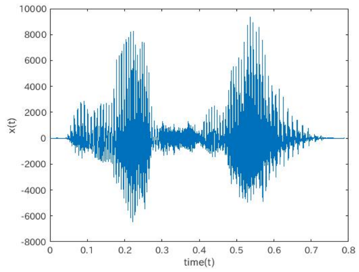

図 1　信号波形

図 1 の信号波形を FFT によって変換し，それをグラフに表したのが下の図 2 である．

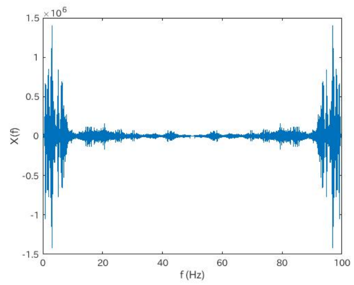

図 2　FFT から出力された複素スペクトル

理論に基づき，図 2 の複素スペクトルをパワースペクトルに変換したのが下の図 3 である．

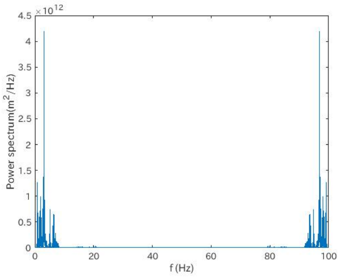

図 3　パワースペクトル

5　考察

今回，求められた結果を見ると時間軸では判別できなかった周波数の分布の違いを検出することができており，複素スペクトルから求めたパワースペクトルは，強さ・エネルギーを表していることがわかる．
例えば，パワースペクトルの形状から，測定領域やその領域上のノイズの多少を確認することができます．図 3 を見ると，$0Hz$ 付近と $100Hz$ 付近 の信号強度が大きくそれ以外，は小さくなっていることがわかる．
また全体のパワースペクトル強度から，この条件では $0Hz$ 付近と $100Hz$ 付近 以内の領域でスペクトルが測定できることも確認できる．