

历年试题

以下试题来源于 CC98:

【控制天下】梁军 2023-2024 春夏学期运筹学回忆卷 <https://www.cc98.org/topic/5911118> 复制本链接到浏览器或者打开【CC98】微信小程序查看

【控制天下】梁军 2023 夏学期运筹学期末回忆卷 <https://www.cc98.org/topic/5630287> 复制本链接到浏览器或者打开【CC98】微信小程序查看

【控制天下】2022 年夏控院运筹学 lj 老师回忆卷 <https://www.cc98.org/topic/5345089> 复制本链接到浏览器或者打开【CC98】微信小程序查看

以下回答部分参考了:

【控制天下】控院运筹学 lj 班期末小测复习笔记 <https://www.cc98.org/topic/5928374> 复制本链接到浏览器或者打开【CC98】微信小程序查看 在此感谢以上同学的辛苦回忆和分享! 接下来我会按章节将以上题目进行分类, 并尝试给出回答。

10.1 Chapter 2: 线性规划

1. 简述单纯形法的理论依据 (证据链)?

- (a) 线性规划所有可行解构成的集合为凸集, 也可能是无界域;
- (b) 线性规划的可行域有有限个顶点;
- (c) 线性规划的每个基可行解对应可行域的一个顶点;
- (d) 若线性规划有最优解, 必定在某个顶点上达到, 但并非只能在顶点上达到。

2. 单纯形法是怎么确定起始点的?

- (a) 标准化: 第一步, 将线性规划模型化为标准型;
- (b) 解方程: 第二步, 解矩阵方程, 得到基可行解: 从 $m \times n$ 系数矩阵 \mathbf{A} 中总能得到一个 m 阶单位阵 \mathbf{E}_m , 取这一个上 m 阶单位阵为初始可行基, 令非基变量均为 0, 则可以得到一个初始可行解 $\mathbf{x}^{(0)}$, 为 $(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0)^T$ 。

3. 单纯形法怎么从一个点转移到另一个点?

- **基变换法**：当一个基可行解不是最优解或不能判断时，需要过渡到另一个基可行解，即从基可行解，

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, 0, \dots, 0)^T$$

对应的可行基

$$B = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

中替换一个列向量，用来替换的列向量与原向量组未被替换的向量线性无关。

例如，用非基变量 p_{m+t} ($1 \leq t \leq n-m$) (称为换入变量) 替换基变量 p_1 ($1 \leq 1 \leq m$) (称为换出变量)，就可得到一个新的可行基

$$B_1 = (p_1, \dots, p_{1-1}, p_{m+t}, p_{1+1}, \dots, p_m)$$

注意检查新基的奇异性，若不可逆，从而可以求出一个新的基可行解

4. 单纯形法如何在没有遍历完所有顶点的情况下判断当前的顶点是否是最优解？

- 引入一个 σ 作为检验数，假设要检验基可行解 $\mathbf{x}^{(1)}$ ，将 $\mathbf{x}^{(1)}$ 和任意解 \mathbf{x} 分别代入目标函数并化简，就能得到 $z^{(1)} = z^{(0)} + \sum_{j=m+1}^n \sigma_j x_j$ ，进而可以通过 σ 的正/负/等于零来判断目前的基可行解是否为最优解，其中 $\sigma_j = c_j - z_j$ ， $z_j = \sum_{i=1}^m c_i a'_{ij}$ ($j = m+1, \dots, n$)。
 - (a) 如果 $\sigma_j \leq 0$ ($j = m+1, \dots, n$)，则 $\mathbf{x}^{(1)}$ 是问题的最优解，最优值为 $z^{(1)}$ ；
 - (b) 如果 $\sigma_j \leq 0$ ($j = m+1, \dots, n$)，且至少存在一个 $\sigma_{m+k} = 0$ ($0 \leq k \leq n-m$)，则问题有无穷多个最优解， $\mathbf{x}^{(1)}$ 是其中之一，最优值为 $z^{(1)}$ ；
 - (c) 如果 $\sigma_j < 0$ ($j = m+1, \dots, n$)，则 $\mathbf{x}^{(1)}$ 是问题的唯一最优解，最优值为 $z^{(1)}$ ；
 - (d) 如果存在某个检验数 $\sigma_{m+k} > 0$ ($0 \leq k \leq n-m$)，并且对应的系数向量 \mathbf{p}_{m+k} 的各分量 $a_{i,m+k} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$)，则问题具有无界解（即无最优解）。

10.2 Chapter 4: 整数规划

1. 为什么说分支定界法没有直接求解整数规划，但是得到的却是整数规划的解？

- 因为分支定界法率先求解的是整数规划问题失去整数约束后的线性规划问题，求出初始最优解后可以去掉所有的非整数搜索空间，将原问题划分为若干个子问题(分枝)继续求解线性规划问题的最优解，由此不断缩紧最优值的上下界，并通过剪枝不断缩小搜索空间，最终即能得到整数规划问题的解，

2. 简述分支定界法的步骤（可以用流程图说明）？步骤如下：

- (a) 先不考虑整数约束，求解整数规划的松弛问题，可能得到以下情况之一：
- 若松弛问题没有可行解，则整数规划也没有可行解，停止计算；
 - 若松弛问题有最优解，并符合整数规划的整数条件，则线性规划的最优解即为整数规划的最优解，停止计算；
 - 若松弛问题有最优解，但不符合整数规划的整数条件，转入下一步。
- (b) 分支：从不满足整数条件的基本变量中任意选一个 x_i 进行分支，它必须满足 $x_i \leq [x_i]$ 或 $x_i \geq [x_i] + 1$ 中的一个，把这两个约束条件加进原问题中，形成两个互不相容的子问题。
- (c) 定界：把各分支松弛问题 B_i 的最优值中较大的更新为新上界，任取各分支中整数问题 A_i 中的一个可行解对应的目标函数值作为下界，用它来判断分支是保留还是剪枝。
- (d) 剪枝：把那些子问题的最优值与界值比较，低于下界或无可行解的分支全部剪掉，直到每个分支都查清为止。
- (e) 直到最后得到子问题的最优解 z^* 等于下界，停止分支，剪枝。

3. 整数规划分支定界法分枝，定界，剪枝是怎么实现的？

- 分支：从不满足整数条件的基本变量中任意选一个 x_i 进行分支，它必须满足 $x_i \leq [x_i]$ 或 $x_i \geq [x_i] + 1$ 中的一个，把这两个约束条件加进原问题中，形成两个互不相容的子问题。
- 定界：把各分支松弛问题 B_i 的最优值中较大的更新为新上界，任取各分支中整数问题 A_i 中的一个可行解对应的目标函数值作为下界，用它来判断分支是保留还是剪枝。
- 剪枝：把那些子问题的最优值与界值比较，低于下界或无可行解的分支全部剪掉，直到每个分支都查清为止。

10.3 Chapter 5: 非线性规划

1. 解决有约束非线性规划的思路有哪些？分别介绍对应的算法。

求解约束极值问题的三种主要思路：

(a) 将迭代点严格局限于可行域内，将迭代点序列严格控制在可行域内，从而执行的迭代过程实际上为无约束优化过程。例如：

- 数值法中的可行方向法

(b) 约束极值问题化为无约束问题，序列无约束优化方法，简称 SUMT 方法，又称制约函数法。该方法通过将约束项处理成制约函数项加入到目标函数中形成新的广义目标函数，从而将有约束问题化为广义目标函数下的无约束问题，再利用前述的无约束优化迭代算法求解。例如：

- 解析法中的拉格朗日乘子法、K-T 条件
- 数值法中的制约函数法，包括惩罚函数（内点法）和障碍函数（外点法）。

(c) 复杂约束极值问题化为简单约束问题，在迭代点附近的序列线性化或序列二次函数逼近方法，通过运用迭代点附近的台劳展开，将有约束的非线性规划近似为极易求解的线性规划或二次规划以实现迭代求解。例如：

- 数值法中的逐次逼近类方法，包括逐次线性规划法 (SLP) 和逐次二次规划法 (SQP)。

2. 共轭方向法是什么？

- 共轭方向法是指：针对于正定二次函数极小问题（无约束极值问题的一个特殊情况）

$$\min f(X) = \frac{1}{2}X^TAX + B^TX + C,$$

设向量 $P^{(i)}, (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 为 A 共轭，则从任一点 $X^{(0)}$ 出发，相继以 $P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(n-1)}$ 为搜索方向的迭代算法，采用一维搜索步长，经 n 次迭代后就能收敛于正定二次函数最小问题的极值解，

$$\begin{cases} \min f(X^{(k)} + \lambda P^{(k)}) = f(X^{(k)} + \lambda_k P^{(k)}), \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k P^{(k)} \end{cases}$$

3. 共轭方向法用来求解什么样的特殊的非线性问题？

- 正定二次函数极小问题

$$\min f(X) = \frac{1}{2}X^TAX + B^TX + C,$$

其中： A 为 $n \times n$ 对称正定矩阵， B 为系数向量， C 为常数，即无约束极值问题的一个特殊情况

4. 共轭方向法最大的问题是什么？有什么缺点要改进为共轭梯度法？

- (a) A 共轭的搜索方向向量组理论上为

$$P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(n-1)}$$

但实用时如何构造这 n 个向量，它们具有什么形式，没有说明。

- (b) 尽管在理论上只需 n 次迭代就能命中目标，但实际的运算误差的存在，使问题的解具有不定性。

5. 求解共轭梯度法之前要进行怎样的处理？

- 对于一般无约束非线性规划问题，可以通过逼近当前迭代点附近是够小的邻域内进行泰勒级数近似的方式，将一般非线性函数展开成二次函数，而采用具有一定迭代精度的共轭梯度法。

$$f(X^{(k+1)}) = f(X^{(k)} + \lambda_k P^{(k)}),$$

$$\approx f(X^{(k)}) + \lambda_k f^T(X^{(k)})P^{(k)} + \frac{1}{2}\lambda_k^2 (P^{(k)})^T H(X^{(k)})P^{(k)},$$

6. 制约函数法核心是什么？

- 将有约束非线性规划问题转换为无约束非线性规划问题。

7. 罚函数和障碍函数相似与不同？

- 相似: 惩罚函数和障碍函数都是根据非线性规划问题约束条件构造出来的新的无约束目标函数，通过引入它们都有可能把约束极值问题转换为无约束极值问题；
- 不同:
 - 惩罚函数是引入一个惩罚项和一个惩罚因子， X 在可行域 R 内时 $P(X, M)$ 变为无约束非线性规划问题， X 在可行域 R 外时， X 离可行域 R 越远，惩罚

项越大，促使下一步的迭代点拉向 R 内；

- 障碍函数是引入一个障碍项和一个障碍因子使迭代点靠近边界时，障碍项迅速增长，从而阻止迭代点跑到可行域外面。

8. 内点法、外点法分别是什么意思？

- **内点法：**又称障碍函数法，迭代点始终保持在可行域内：初始点选在可行域内，在迭代过程中，通过引入障碍函数来阻止迭代点接近可行域的边界。
- **外点法：**又称惩罚函数法，迭代点可以在可行域内或外：初始点可任意选择，在迭代过程中，通过引入惩罚函数将跑到可行域外的点拉回可行域内，距离越远惩罚项越大，对于在可行域内的点则不理睬。

10.4 Chapter 6: 目标规划

1. 多目标规划一共几种方法？各自的特点是什么？

• 软约束法

- **核心思想：**引入“偏差变量”将目标转化为约束处理，“以各个目标的偏差量尽可能小”为原则，构造一个新的目标函数，继而继续求解这个新目标函数的单目标规划问题：

- 特点：

- * 原来的硬约束(系统约束)是必须满足的。
- * 由原目标函数“下沉”得到的约束条件是软约束(目标约束)，可以不符合，只是尽量满足

• 权重法

- **核心思想：**多个目标函数的加权处理，得到单一目标函数，再进行单目标优化求解

$$\text{Max } Z_1$$

$$\text{Min } Z_2 \longrightarrow \max \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 \quad ; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ 是加权系数}$$

• 主目标函数法

- **核心思想：**在多个目标函数中选择并保留一个主目标函数，其他目标函数处理为“不低于”或“不高于”可接受的约束条件，从而化为单目标函数，

再进行单目标优化求解

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } Z_1 \\
 & \text{Min } Z_2 \longrightarrow \text{max } Z_3 \\
 & \text{s.t. } Z_1 \geq \alpha_1 \\
 & \quad Z_2 \leq \alpha_2 \\
 & \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ 是可接受值}
 \end{aligned}$$

在构建目标规划的数学模型时，首先确定各目标的目标函数，之后对于不同优先级的目标我们赋予不同级别的优先因子 p_i ，相同优先级的目标通过加权系数决定其主次，最后构成目标函数的最小化问题。

2. 为什么说求出来是满意解而往往不是最优解？

- 因为实际中的多目标规划问题往往存在相互矛盾的约束条件，求解多目标规划问题是指尽可能达到或接近一个或多个已给定的指标值，且目标约束是软约束，实际中不一定要求绝对满足，所以多目标规划求出来是满意解而往往不是最优解，甚至不是可行解

10.5 Chapter 7: 动态规划

1. 什么是动态规划问题（多阶段决策问题）？

- 包含若干相互联系阶段（与时间有关）的复杂问题，每个阶段即为一个子问题，包含离散确定性、离散随机性、连续确定性、连续随机性四种

2. 简述动态规划中逆序求解方法流程。

- 逆序求解流程：
 - (a) 阶段划分：将问题按决策顺序划分为 N 个阶段（ $k = N, N-1, \dots, 1$ ）。
 - (b) 边界条件：设定最终阶段 $k = N$ 的状态 $f_N(x_N)$ 的值。
 - (c) 递推方程：从 $k = N-1$ 到 $k = 1$ 逆向计算，逆序方法基本方程：

$$f_k(S_k) = \text{opt}_{u_k \in D_k(S_k)} \{v_k(S_k, u_k(S_k)) + f_{k+1}(u_k(S_k))\}$$

$$k = n, n-1, \dots, 1$$

边界条件为

$$f_{n+1}(S_{n+1}) = 0$$

(d) 最优解: $f_1(x_1)$ 即为全局最优值, 路径通过正向追踪状态转移获得。

3. 动态规划有哪两种解决方法? 区别是什么?

- 逆序方法: 从终点逐段向始点方向寻找最短路线的策略
- 顺序方法: 从始点逐段向终点方向寻找最短路线的策略

10.6 Chapter 9: 图论

1. 什么是最短路问题?

- 给定一个赋权有向(无向)赋权图, 给定每个弧(或边)的权重, 要求寻找一条连接指定起点和终点的最短路线, 即是在所有从指定起点到指定终点的路中, 求一条权(所有弧或边的权之和)最小的路。

2. 请概述 dijkstra 算法, 可以画流程图。

Theorem 10.6.1 ▶ Dijkstra 算法

- 符号定义
 - 用 $P(v_i)$ 、 $T(v_j)$ 分别表示 v_i 点的 P 标号、T 标号
 - S_i 表示第 i 步时具有 P 标号点的集合 (其中有已经确定好的走的那些点)
 - $\lambda(v)$ 表示轨迹标记, 可以回溯父节点, 初值 $\lambda(v) = M$, 其中:
 - * $\lambda(v) = m$: 在 v_s 到 v 的最短路上, v 的前一个点是 v_m
 - * $\lambda(v) = M$: D 中不含从 v_s 到 v 的路 (最开始不知道谁是谁的爹, 所以统一用 M 表示)
 - * $\lambda(v) = 0$: 表示 $v = v_s$ (第一个节点, 父亲竟是我自己)
- 算法流程
 - 步骤 1: 开始 ($i = 0$)
 - 令 P 标号集合 $S_0 = \{v_s\}$
 - P 标号点的权值 $P(v_s) = 0$
 - 路径标记 $\lambda(v_s) = 0$
 - 对每一个 $v \neq v_s$:
 - * 令 T 标号权值 $T(v) = +\infty$

$$* \lambda(v) = M$$

即 T 标号, 即未确定的点, 权值为无穷大, 路径标记为 M

- 令 $k = s$ (k 为当前最新的 P 标号点)

步骤 2: 第一步

- 如果 $S_i = V$ (全部点的集合), 算法终止
 - * 对每个 $v \in S_i$, $d(v_s, v) = P(v)$
- 否则转入” 第二步”

步骤 3: 第二步

- 考查每个使 $(v_k, v_j) \in A$ 且 $v_j \notin S_i$ 的点 v_j (找还没纳入进来的点)
- 即考察所有以 v_k 为始点的弧段 $v_k \rightarrow v_j$ (注意只往前走一步)
- 如果 $T(v_j) > P(v_k) + w_{kj}$, 则:
 - * 把 $T(v_j)$ 修改为 $P(v_k) + w_{kj}$
 - * 把 $\lambda(v_j)$ 修改为 k
- 如果 $T(v_j) \leq P(v_k) + w_{kj}$, 转入” 第三步”

步骤 4: 第三步

- 令 $T(v_{j^*}) = \min_{v_j \notin S_i} \{T(v_j)\}$
- 在所有现有的 T 标号中找出值最小的那一个
- 如果 $T(v_{j^*}) < +\infty$, 则:
 - * 把 v_{j^*} 的 T 标号变为 P 标号 $P(v_{j^*}) = T(v_{j^*})$
 - * 令 $S_{i+1} = S_i \cup \{v_{j^*}\}$
 - * 令 $k = j^*$
 - * 把 i 换成 $i + 1$, 转入” 第一步”
- 否则终止
 - * 对每一个 $v \in S_i$, $d(v_s, v) = P(v)$
 - * 对每一个 $v \notin S_i$, $d(v_s, v) = T(v)$ (即找不到通路)