2.7 第二章作业

2.7.1 配餐问题

Q：编程求解本章 ppt 中例 2.2 合理配餐问题，需要的基础数据自拟。
某幼儿园为了保证孩子们的健康成长，要求对每天的膳食进行合理科学的搭配，以保证孩子们对各种营养的需求. 从营养学的角度. 假设共有 5 种食品 $A_j(j=1,2....,6)$ 可供选择, 每种食品都含有加 6 种不同的营养成分 $B_i(i=1,2.,6)$. 而且每单位的食品 A_j 含有营养成分 B_i 的含量如下表所示 (数据为自拟)：

营养成分	食品					最低需求量
	A1	A2	A3	A4	A5	
B1	4.0	0.4	0.8	0.5	0.9	16.0
B2	0.5	4.0	0.5	0.7	0.7	26.0
B3	0.6	0.2	4.0	0.4	0.5	18.0
B4	0.7	0.1	0.3	4.0	0.3	12.0
B5	0.8	0.9	0.2	0.3	4.0	14.0
B6	1.2	1.3	1.4	1.4	1.3	20.0
食品单价	5	6	7	8	9	
摄入量最小值	2.0	3.0	3.0	1.0	3.0	

Table 2.2: 营养数据表

1. 每人每天对营养成分 B_i 的最低需求为 $b_i(i=1,2,\dots,6)$，而且食品 A_j 的单价为 $c_j(j=1,2,\dots,5)$. 问如何合理科学地制定配餐方案，既可以保证孩子们的营养需求，又使每人每天所需的费用最低?
2. 除了如上的要求之外，如果还要求各种食品的合理搭配，即要求每人每天对食品 A_j 的摄入量不少于 $d_j(j=1,2,\dots,5)$，问配餐方案又如何?

A：分析如下。

1. **基础配餐问题（仅考虑营养需求）**
   - **决策变量**：设每天采购食品 A_j 的数量为 x_j（单位：份），其中 $j=1,2,\dots,5$

- **目标函数**：最小化总费用

$$\min z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$

- **约束条件**：

(a) **营养成分需求**（满足最低摄入量）：

$$\begin{cases} 4.0x_1 + 0.4x_2 + 0.8x_3 + 0.5x_4 + 0.9x_5 \geq 16.0 & (\text{营养成分}B_1) \\ 0.5x_1 + 4.0x_2 + 0.5x_3 + 0.7x_4 + 0.7x_5 \geq 26.0 & (\text{营养成分}B_2) \\ 0.6x_1 + 0.2x_2 + 4.0x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 \geq 18.0 & (\text{营养成分}B_3) \\ 0.7x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 4.0x_4 + 0.3x_5 \geq 12.0 & (\text{营养成分}B_4) \\ 0.8x_1 + 0.9x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 4.0x_5 \geq 14.0 & (\text{营养成分}B_5) \\ 1.2x_1 + 1.3x_2 + 1.4x_3 + 1.4x_4 + 1.3x_5 \geq 20.0 & (\text{营养成分}B_6) \end{cases}$$

(b) **非负约束**：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

2. **扩展配餐问题（增加食品摄入量约束）**

- **决策变量**：同上，仍为 x_j
- **目标函数**：同上，仍为最小化总费用

$$\min z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$

- **约束条件**：

(a) **原营养成分需求**：同上

(b) **食品摄入量下限**（表格中“摄入量最值”）：

$$\begin{cases} x_1 \geq 2.0 \\ x_2 \geq 3.0 \\ x_3 \geq 3.0 \\ x_4 \geq 1.0 \\ x_5 \geq 3.0 \end{cases}$$

(c) **非负约束**：同上

Code Snippet 2.7.1 ▸ Matlab 代码

```
% 配餐优化：求解浮点数和整数解
clear; clc;

% 营养含量矩阵 A (6x5, 行: B1-B6, 列: A1-A5)
A = [4.0, 0.4, 0.8, 0.5, 0.9;
     0.5, 4.0, 0.5, 0.7, 0.7;
     0.6, 0.2, 4.0, 0.4, 0.5;
     0.7, 0.1, 0.3, 4.0, 0.3;
     0.8, 0.9, 0.2, 0.3, 4.0;
     1.2, 1.3, 1.4, 1.4, 1.3];

% 最低营养需求 B (6x1)
B = [16.0; 26.0; 18.0; 12.0; 14.0; 20.0];

% 食物单价 c (5x1)
c = [5; 6; 7; 8; 9];

% 约束: A*x >= B => -A*x <= -B
A_ineq = -A;
b_ineq = -B;

% 第一部分: 仅满足营养需求

% 下界
lb1 = zeros(5,1);

% 求解浮点数解
[x1, fval1, exitflag1] = linprog(c, A_ineq, b_ineq, [], [], lb1);

% 输出浮点数结果
fprintf('第一部分（浮点数解）:\n');
if exitflag1 > 0
```

```matlab
    fprintf('摄入量：A1=%.2f，A2=%.2f，A3=%.2f，A4=%.2f，A5=%.2f\n', x1);
    fprintf('成本：%.2f\n', fval1);
else
    fprintf('未找到解\n');
end

% 求解整数解
intcon = 1:5;
[x1_int, fval1_int, exitflag1_int] = intlinprog(c, intcon, A_ineq, b_ineq, [], [], lb1, []);

% 输出整数结果
fprintf('\n 第一部分（整数解）：\n');
if exitflag1_int > 0
    fprintf('摄入量：A1=%d，A2=%d，A3=%d，A4=%d，A5=%d\n', x1_int);
    fprintf('成本：%.2f\n', fval1_int);
    nutrition1_int = A * x1_int;
    fprintf('营养验证:\n');
    for i = 1:6
        fprintf('B%d: %.2f >= %.2f (%s)\n', i, nutrition1_int(i), B(i), ...
                '满足', '不满足');
    end
else
    fprintf('未找到解\n');
end

% 第二部分：增加最低摄入量约束

% 最低摄入量 d（5x1）
d = [2.0; 3.0; 3.0; 1.0; 3.0];

% 下界
lb2 = d;
```

```

% 求解浮点数解
[x2, fval2, exitflag2] = linprog(c, A_ineq, b_ineq, [], [], lb2);

% 输出浮点数结果
fprintf('\n 第二部分（浮点数解）:\n');
if exitflag2 > 0
    fprintf('摄入量: A1=%.2f, A2=%.2f, A3=%.2f, A4=%.2f, A5=%.2f\n', x2);
    fprintf('成本: %.2f\n', fval2);
else
    fprintf('未找到解\n');
end

% 求解整数解
lb2_int = ceil(d);
A_ineq_int = [A_ineq; zeros(1,5)];
A_ineq_int(end,4) = -1;
b_ineq_int = [b_ineq; -2];
[x2_int, fval2_int, exitflag2_int] = intlinprog(c, intcon, A_ineq_int, b_ineq_int, [], [], lb2_int, []);

% 输出整数结果
fprintf('\n 第二部分（整数解）:\n');
if exitflag2_int > 0
    fprintf('摄入量: A1=%d, A2=%d, A3=%d, A4=%d, A5=%d\n', x2_int);
    fprintf('成本: %.2f\n', fval2_int);
    nutrition2_int = A * x2_int;
    fprintf('营养验证:\n');
    for i = 1:6
        fprintf('B%d: %.2f >= %.2f (%s)\n', i, nutrition2_int(i), B(i), ...
                '满足', '不满足');
    end
    fprintf('最低摄入量验证:\n');
```

```
    for j = 1:5
        fprintf('A%d: %d >= %.1f (%s)\n', j, x2_int(j), d(j), ...
                '满足', '不满足');
    end
else
    fprintf('未找到解\n');
end
```

实验通过 MATLAB 代码求解配餐优化问题，得到第一部分（仅满足营养需求）和第二部分（满足营养需求及最低摄入量）的浮点数解与整数解。所有解均经过验证，满足营养需求 B_i（16.0, 26.0, 18.0, 12.0, 14.0, 20.0）及第二部分的最低摄入量 d_j（2.0, 3.0, 3.0, 1.0, 3.0）。结果如下：

Table 2.3: 配餐优化结果

部分	解类型	摄入量 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$	成本
第一部分	浮点数解	3.64, 5.06, 3.35, 1.89, 1.32	99.02
	整数解	3, 5, 4, 2, 2	107.00
第二部分	浮点数解	2.00, 4.94, 3.37, 2.05, 3.00	106.67
	整数解	2, 5, 4, 2, 3	111.00

程序采用 MATLAB 实现配餐优化，思路如下：

- **数据定义**：定义营养含量矩阵 A、最低需求 B、单价 c、最低摄入量 d，构建约束 $A \cdot x \geq B$。
- **浮点数解**：使用 `linprog` 求解线性规划问题，最小化成本 $c^T \cdot x$，满足营养需求和非负约束（第一部分）或最低摄入量约束（第二部分）。
- **整数解**：使用 `intlinprog` 求解整数线性规划，添加整数约束 $x_j \in \mathbb{Z}$，并在第二部分确保 $x_j \geq \lceil d_j \rceil$。额外约束 $x_4 \geq 2$ 保证 B4 满足。
- **验证**：计算 $A \cdot x$ 和 $x_j \geq d_j$，验证所有约束满足情况，确保解的可行性。

2.7.2 战略轰炸问题

Q：某战略轰炸机群奉命摧毁敌人军事目标，已知该目标有四个要害部位，只要摧毁其中之一即可达到目的。为完成此项轰炸任务的汽油消耗量限制为 48000L，重型炸弹 48 枚，轻型炸弹 32 枚。飞机携带重型炸弹时每升汽油可飞行 2km，带轻型炸弹时每升汽油可飞行 3km，空载时每升汽油可飞行 4km。又知每架飞机每次只能装载一枚炸弹，每起飞轰炸一次除来回路途汽油消耗外，起飞和降落每次消耗 100L 汽油，其他相关数据如表所示。为了保证以最大的可能性摧毁敌方军事目标，应该如何确定飞机的轰炸方案。

敌要害部位	距离机场距离（km）	每枚重型炸弹摧毁概率	每枚轻型炸弹摧毁概率
1	450	0.10	0.08
2	480	0.20	0.16
3	540	0.15	0.12
4	600	0.25	0.20

Table 2.4: 轰炸目标数据表

A：分析如下。

问题分析

- 目标：最大化摧毁敌方军事目标（四个要害部位中至少一个）的可能性。
- 资源限制：
  - 总燃油：48000L。
  - 重型炸弹：48 枚。
  - 轻型炸弹：32 枚。
  - 每架飞机每次任务仅携带一枚炸弹（重型或轻型）。
  - 每任务（包括起飞和降落）额外消耗 100L 燃油。
- 燃油效率：
  - 重型炸弹：2 km/L。
  - 轻型炸弹：3 km/L。

  - 空载：4 km/L。
- 数据：
  - 四个要害部位，距离机场分别为450km、480km、540km、600km。
  - 每部位被重型或轻型炸弹摧毁的概率如表所示。

数学模型

决策变量：

- $x_{i,h}$：对第 i 个部位使用重型炸弹的任务数（整数，$i = 1, 2, 3, 4$）。
- $x_{i,l}$：对第 i 个部位使用轻型炸弹的任务数（整数，$i = 1, 2, 3, 4$）。

目标函数：

- 最大化总期望成功数：

$$\max z = 0.10x_{1,h} + 0.08x_{1,l} + 0.20x_{2,h} + 0.16x_{2,l} + 0.15x_{3,h} + 0.12x_{3,l} + 0.25x_{4,h} + 0.20x_{4,l}$$

约束条件：

1. 燃油约束：
   - 对部位 i 使用重型炸弹的任务：去程携带重型炸弹，距离 d_i km，效率 2 km/L，消耗 $\frac{d_i}{2}$ L；回程空载，距离 d_i km，效率 4 km/L，消耗 $\frac{d_i}{4}$ L；总飞行消耗 $\frac{3d_i}{4}$ L；加上起飞降落 100L，总计 $\frac{3d_i}{4} + 100$ L。
   - 对部位 i 使用轻型炸弹的任务：去程携带轻型炸弹，距离 d_i km，效率 3 km/L，消耗 $\frac{d_i}{3}$ L；回程空载，距离 d_i km，效率 4 km/L，消耗 $\frac{d_i}{4}$ L；总飞行消耗 $\frac{7d_i}{12}$ L；加上起飞降落 100L，总计 $\frac{7d_i}{12} + 100$ L。

   具体数值：

$$437.5x_{1,h} + 362.5x_{1,l} + 460x_{2,h} + 380x_{2,l} + 505x_{3,h} + 415x_{3,l} + 550x_{4,h} + 450x_{4,l} \leq 48000$$

2. 重型炸弹约束：

$$x_{1,h} + x_{2,h} + x_{3,h} + x_{4,h} \leq 48$$

3. 轻型炸弹约束：

$$x_{1,l} + x_{2,l} + x_{3,l} + x_{4,l} \leq 32$$

4. **非负性和整数约束：**

$$x_{i,h}, x_{i,l} \geq 0, \quad x_{i,h}, x_{i,l} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

矩阵形式：

- 定义变量向量：

$$\mathbf{x} = [x_{1,h}, x_{1,l}, x_{2,h}, x_{2,l}, x_{3,h}, x_{3,l}, x_{4,h}, x_{4,l}]^T$$

- 目标函数：

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{c} = [0.10, 0.08, 0.20, 0.16, 0.15, 0.12, 0.25, 0.20]^T$$

- 燃油约束：

$$\mathbf{a}_{\text{fuel}}^T \mathbf{x} \leq 48000, \quad \mathbf{a}_{\text{fuel}} = [437.5, 362.5, 460, 380, 505, 415, 550, 450]^T$$

- 炸弹约束：

$$\mathbf{A}_{\text{bomb}} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{\text{bomb}}, \quad \mathbf{A}_{\text{bomb}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\text{bomb}} = [48, 32]^T$$

- 非负性和整数约束：

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^8$$