

Approximation des dérivées partielles sur une image discrète

L'image discrète est définie comme un ensemble de points d'échantillonnage dans un espace bidimensionnel. La fonction ainsi décrite n'a de valeur qu'aux points d'échantillonnage et n'est pas définie entre les points d'échantillonnage. Elle n'a donc pas les caractéristiques de la continuité et ne peut être dérivée.

Le calcul de la dérivée dans un espace discret passe par une approximation.

Les principales méthodes sont:

- approximation directe de la fonction à partir de ses points d'échantillonnage
- modélisation locale de la fonction image puis dérivation du modèle
- détermination d'un filtre dérivateur par dérivation d'un filtre lisseur.

Approximation directe

La dérivation est souvent approximée par une simple différence locale. Cette approche donne naissance à des masques de petite dimension, très utilisés dans les applications courantes où le bruit sur l'image est faible.

Considérons la fonction image $f(x, y)$ échantillonnée aux points (mT_x, nT_y) .

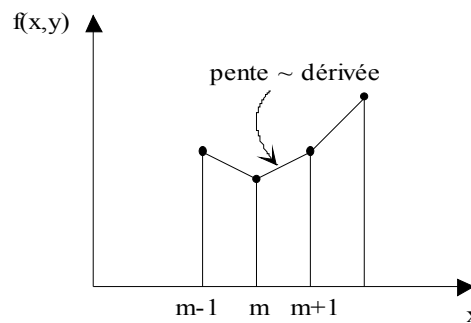


Figure 1 Fonction image discrète

Les dérivées partielles seront données dans l'approximation d'Euler par:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{m,n} \approx \frac{1}{T_x} [f(m, n) - f(m-1, n)]$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{m,n} \approx \frac{1}{T_y} [f(m, n) - f(m, n-1)]$$

Généralement, les pas de discrétisation T_x et T_y sont considérés comme unitaires. Ce calcul peut s'écrire sous forme d'un masque de convolution dit de Roberts:

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1^* \end{bmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1^* \end{bmatrix}$$

Figure 2 Masque de Roberts2

On remarque que l'approximation est valide entre les deux pixels et non au centre de calcul (signalé par * dans le masque). Les deux points de meilleure approximation ne sont pas superposés.

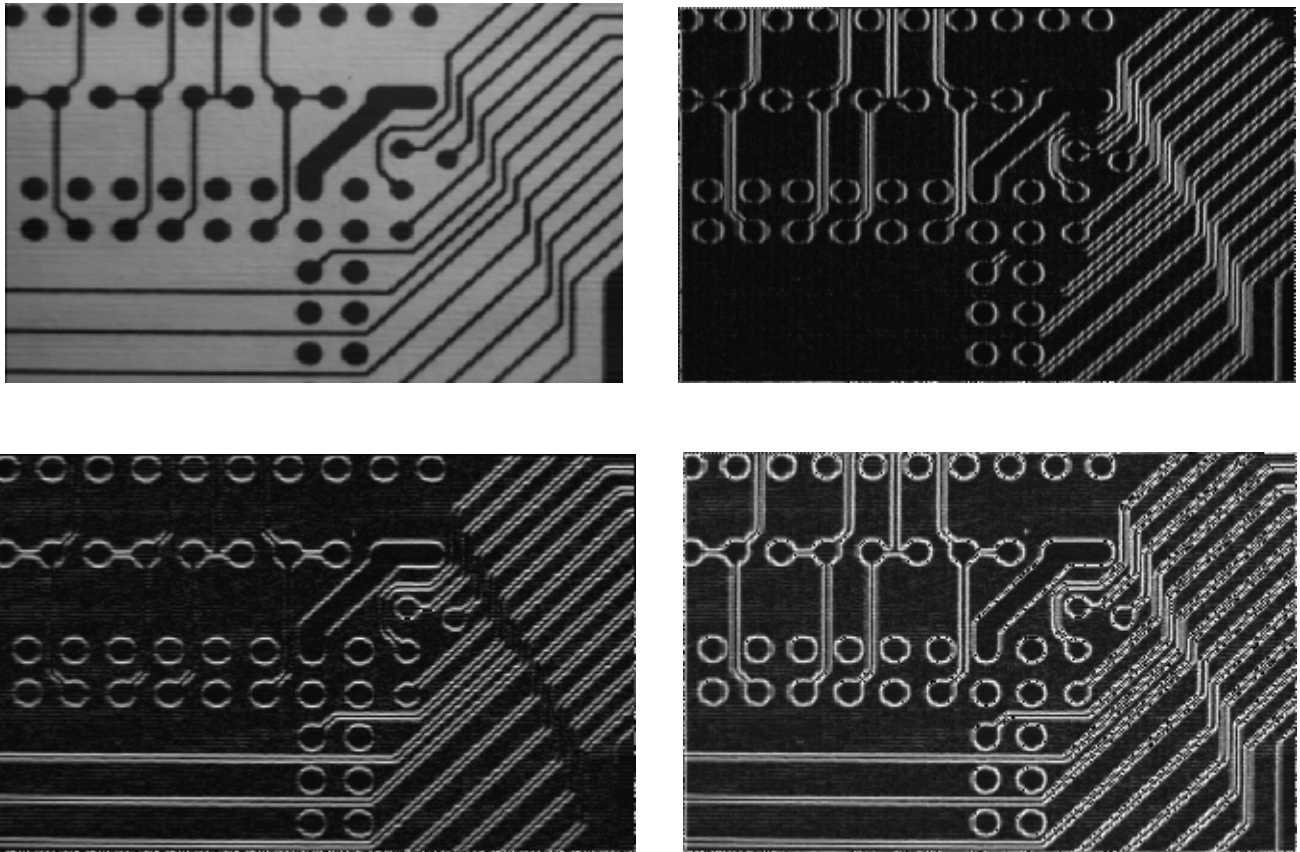


Figure 3 Application du masque de Roberts2

a) original b) dérivation horizontale c) dérivation verticale d) module du vecteur gradient

A la version ci-dessus, on lui préfère la version calculée sur des axes obliques; obtenue par rotation des axes courants. Les nouveaux masques, dont les points de meilleure approximation sont confondus, dits Roberts2 sont:

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \frac{\partial}{\partial X_2} \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 4 Masque de Roberts2

La norme sera $\sqrt{T_x}$ en supposant le maillage carré, le plus souvent négligée.

L'approximation d'Euler peut être fortement améliorée en considérant que la fonction "pente" est discontinue au point d'échantillonnage. Le calcul proposé est le suivant:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0^+} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0^-} \right]$$

d'où en utilisant les valeurs discrètes de la fonction image:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{m,n} &\approx \frac{1}{2T_x} [(f(m+1, n) - f(m, n)) + (f(m, n) - f(m-1, n))] \\ &\approx \frac{1}{2T_x} [f(m+1, n) - f(m-1, n)] \end{aligned}$$

Pour la direction Y , le calcul est le même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{m,n} \approx \frac{1}{2T_y} [f(m, n+1) - f(m, n-1)]$$

Cette approximation donne le masque de convolution dit de Roberts3:

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figure 5 Masques de Roberts2

Le calcul est centré, le centre est le même pour la dérivée horizontale et la verticale.

Les calculs pour la dérivée seconde s'obtiennent en appliquant deux fois l'une des règles de dérivation. Pour que l'approximation soit la meilleure au centre, il convient de choisir une méthode compensant les éventuels décalages introduits par la dérivation (cas de l'opérateur Roberts2).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Par application d'un Roberts2 une première fois centré à droite puis une deuxième fois centré à gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{m,n} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2T_x} [f(m+1, n) - f(m, n)] \right] \\ &\approx \frac{1}{4T_x^2} [(f(m+1, n) - f(m, n)) - (f(m, n) - f(m-1, n))] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{m,n} \approx \frac{1}{4T_x^2} [(f(m+1, n) - 2f(m, n)) + f(m-1, n)]$$

Les masques associés seront:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figure 6 Masques de Roberts3

Le Laplacien sera obtenu en considérant la dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ (ou $\frac{\partial}{\partial y}$) comme un opérateur:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

Il s'obtient en faisant la somme des deux opérateurs de dérivation seconde. En prenant l'opérateur de Roberts2 avec axes tournés par rapport aux axes principaux du maillage, on définit un autre opérateur tout à fait équivalent (sa norme devrait tenir compte du facteur $\sqrt{2}$ intervenant dans le pas du calcul). On obtient les masques suivants:

$$\Delta \quad \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \quad \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 7 Masques du Laplacien

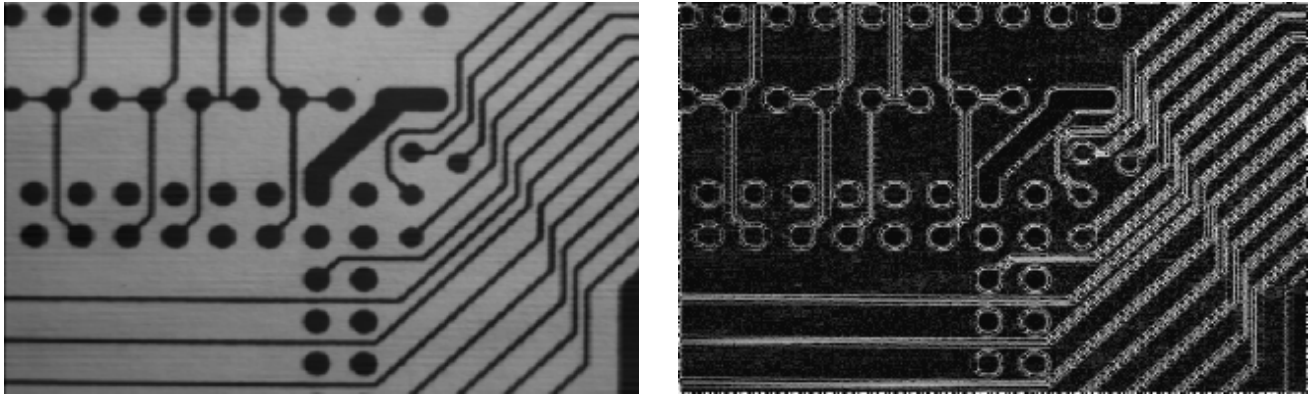


Figure 8 Valeur absolue du Laplacien

Pour le terme de dérivée seconde du type $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, on remarque que le calcul se décompose en deux temps en utilisant les opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} * \frac{\partial}{\partial x} * f = \left(\frac{\partial}{\partial y} * \frac{\partial}{\partial x} \right) * f$$

En utilisant les opérateurs de Roberts, on remarque que le calcul est séparable. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ s'exprime sous la forme d'un produit simple entre les opérateurs de dérivation simple. Le masque résultant est:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 9 Masque de la dérivée seconde mixte

Lissage des opérateurs de dérivation

Pour limiter les effets du bruit, très sensible pour ces opérateurs dont les coefficients de calcul sont de forte valeur, il est souhaitable de lisser le résultat par un filtre du type moyennneur.

Lissage dans la direction du dérivateur

L'idée la plus directe est de lisser la dérivée des lignes par un lisseur horizontal:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{\text{lissé}} = \frac{\partial f}{\partial x} * l_x$$

En considérant que la dérivation est un opérateur, nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{\text{lissé}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} * f \right) * l_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} * l_x \right) * f$$

Cette relation donne un opérateur unique de dérivation lissée. En prenant divers lisseurs de dimension réduite, on obtient les masques suivants :

lisseur	<table><tr><td>1*</td><td>1</td></tr></table>	1*	1	dérivateur	<table><tr><td>-1</td><td>1*</td></tr></table>	-1	1*	dérivateur lissé	<table><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	-1	0	1				
1*	1															
-1	1*															
-1	0	1														
lisseur	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	dérivateur	<table><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	-1	0	1	dérivateur lissé $\frac{1}{4}$	<table><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	-1	-1	0	1	1
1	1	1														
-1	0	1														
-1	-1	0	1	1												

Figure 10 Lissage en ligne du dérivateur horizontal

Lissage dans la direction perpendiculaire à la dérivation

L'idée est de faire une moyenne en colonne de la dérivée obtenue sur les lignes. La règle de calcul règle la même que précédemment, avec un filtre séparable suivant x (le dérivateur) et suivant y (le moyennneur). Avec les filtres usuels, on obtient :

lisseur	$\frac{1}{3}$	<div>1</div>	dérivateur	$\frac{1}{2}$	<div>-1<div>0</div>1</div>	dérivateur de Prewitt	$\frac{1}{3}$	<div>-1</div> <div>0</div> <div>1</div>
		<div>1</div>						<div>-1</div> <div>0</div> <div>1</div>
		<div>1</div>						<div>-1</div> <div>0</div> <div>1</div>
lisseur	$\frac{1}{4}$	<div>1</div>	dérivateur	$\frac{1}{2}$	<div>-1<div>0</div>1</div>	dérivateur de Sobel	$\frac{1}{4}$	<div>-1</div> <div>0</div> <div>1</div>
		<div>2</div>						<div>-2</div> <div>0</div> <div>2</div>
		<div>1</div>						<div>-1</div> <div>0</div> <div>1</div>

Figure 11 Lissage en colonne du dérivateur horizontal

Lissage du Laplacien

Pour des filtres 3x3, le Laplacien possède deux calculs différents selon les axes de dérivation. Il est possible de faire une moyenne des deux résultats et d'appliquer les règles de linéarité des opérateurs.

$$\Delta_m f = \frac{1}{2}(\Delta_1 * f + \Delta_2 * f) = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) * f$$

Le masque obtenu est:

$$\Delta \quad \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{8} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -8 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 12 Laplacien lissé

Dérivée directionnelle

La dérivée directionnelle s'obtient par combinaison linéaire des dérivées sur les axes principaux du repère. Il suffit donc de reprendre un dérivateur donné pour le modifier en dérivateur directionnel.

Généralement, la direction de calcul est limitée à des valeurs multiples de $\pi/4$ pour la maille carrée. On remarque que le résultat s'apparente à une simple rotation du masque classique.

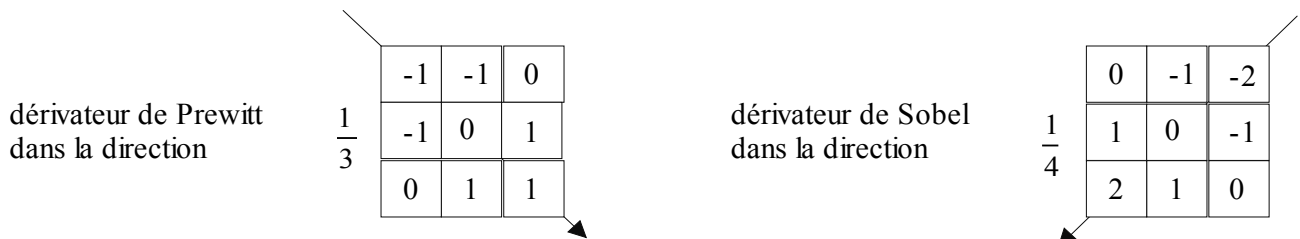


Figure 13 Masques directionnels de Prewitt et Sobel

Autres masques directionnels:

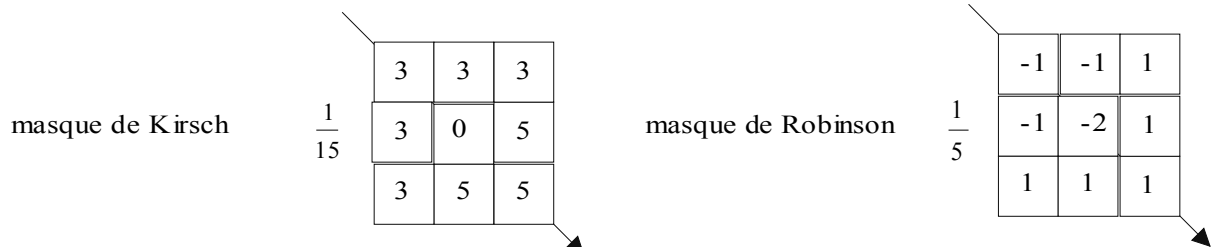


Figure 14 Opérateurs de Kirsch et Robinson

Les masques directionnels servent souvent dans la méthode dite du "compas". Le gradient est calculé avec les 8 rotations possibles du masque. La direction du gradient est celle pour laquelle la réponse est maximale. Le module est le résultat correspondant à cette direction. Cette méthode, plus coûteuse en calcul image, élimine les calculs de module et d'arc-tangente habituellement associés à la détermination du vecteur gradient. De plus, les résultats partiels des calculs de dérivations peuvent être bornés aux valeurs positives, ce qui évite la gestion de valeurs signées (simplification du calcul du maximum).

Dérivation d'un modèle ajusté

Cette approche permet de synthétiser des filtres dérivateurs de plus large dimension que la discrétisation directe. La modèle local donne aussi la valeur lissée de la fonction image, ainsi que les propriétés de courbure si le modèle est d'ordre suffisant. De plus, la même méthodologie est applicable pour créer des filtres interpolateur (calcul *sub-pixel*), extrapolateur/prédicteur (application en *compression d'images*). Elle ouvre donc une large voie de synthèse de filtres.

Dans cette approche, la fonction image (continue ou discrète) est remplacée par un modèle ajusté localement (\sim voisinage) duquel est déduit les informations demandées (valeur lissée, composantes du gradient ou de la dérivée seconde, valeur interpolée). Le modèle est généralement issu d'une fonction continue et dérivable sur le voisinage. Si le modèle choisi est linéaire par rapport à ses paramètres de définition, le résultat final du travail s'écrit sous forme d'un masque de convolution

La méthodologie présentée ici est faite pour dans le cas d'une image discrète; elle est donc directement applicable aux images numériques.

Soit $f(m, n)$ la fonction image et $V(A)$ un voisinage centré sur le point A de coordonnées (m, n) . Le problème étant traité de façon invariante par translation, considérons une origine relative en (m, n) et des indices relatifs (i, j) dans le voisinage. Le point A a pour coordonnées relatives $i=0$ et $j=0$; le voisinage V a est caractérisé par des niveaux de gris $f(i, j)$; la fonction modèle est notée $\tilde{f}(i, j)$.

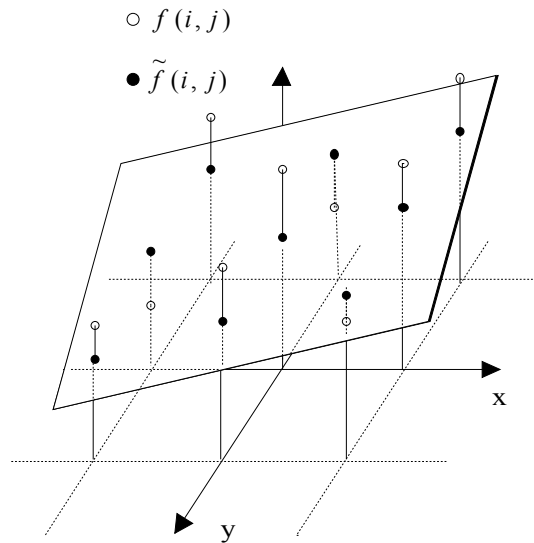


Figure 15 Modèle local plan de la fonction image dans le cas discret

Le modèle le plus classique est de forme polynomiale, avec un ordre de développement plus ou moins étendu. Nous retiendrons les modèles les plus courants en traitement d'image:

$$\tilde{f}(i, j) = a_0 + a_1 i + a_2 j \quad \text{modèle dit linéaire ou plan (lissage, dérivée première)}$$

$$\tilde{f}(i, j) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij \quad \text{modèle dit bilinéaire (lissage, dérivée première)}$$

$$\tilde{f}(i, j) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij + a_4 i^2 + a_5 j^2 \quad \text{modèle quadratique (dérivée seconde)}$$

L'ajustement du modèle sur les valeurs de la fonction image se fait par minimisation du critère quadratique J :

$$J(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i, j \in V(A)} [f(i, j) - \tilde{f}(i, j)]^2$$

L'optimum est obtenu pour :

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = 0 \quad \text{pour } l = 0, 1, \dots, k$$

En adoptant une écriture matricielle du problème, le résultat s'obtient rapidement.

Posons:

$\theta = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})^T$ vecteur des paramètres à optimiser.

$X = [\tilde{f}(0,0), \tilde{f}(-1,0), \dots, \tilde{f}(i,j), \dots]^T$ pour $i, j \in V(A)$ vecteur du modèle

$Y = [f(0,0), f(-1,0), \dots, f(i,j), \dots]^T$ pour $i, j \in V(A)$ vecteur des mesures

Etant que le modèle est linéaire par rapport aux paramètres, le vecteur modèle s'écrit sous forme d'un produit matriciel:

$$X = H \theta$$

Le critère se réécrit en forme quadratique:

$$J = (Y - X)^T (Y - X) = (Y - H\theta)^T (Y - H\theta)$$

La dérivation s'écrit directement dans le domaine matriciel (l'opération de dérivation respecte la linéarité) en remarquant que la dérivée par rapport à chacun des paramètres est un scalaire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} &= -H^T(Y - H\theta) - (Y - H\theta)^T H \\ &= -2 H^T(Y - H\theta) \end{aligned}$$

L'optimum de J est obtenu pour :

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$$

La résolution donne :

$$\hat{\theta} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{k-1})^T = (H^T H)^{-1} H^T Y$$

Il ne reste plus qu'à reconstruire le modèle avec les coefficients optimaux:

$$\tilde{f}(x, y) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 y + \dots \quad \text{pour le modèle polynomial}$$

Ce modèle s'utilise pour le lissage en calculant $\hat{f}(0,0)$, l'interpolation en donnant à x et y des valeurs non entières, le calcul du gradient en dérivant la fonction modèle optimisée en A . Dans le cas du modèle polynomial, on obtient:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}|_A = \hat{a}_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial y}|_A = \hat{a}_2$$

Les termes de dérivée seconde se calculent sur un modèle d'ordre 2 au minimum (sinon utiliser l'approximation d'Euler appliquée à la dérivée première).

Exemple d'application

Considérons le modèle polynomial simple $\tilde{f}(i, j) = a_0 + a_1 i + a_2 j$ à ajuster sur le voisinage 4 ci-dessous:

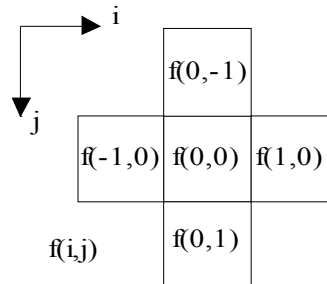


Figure 16 Voisinage de calcul de l'estimateur

Le choix des axes (repérage type *image* et non *tableau*) définit les valeurs prises par le modèle pour les points du voisinage. Le rangement des composantes dans Y est totalement libre.

Soit :

$$Y = \begin{bmatrix} f(0,-1) \\ f(-1,0) \\ f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad X = H\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a \end{bmatrix}$$

Le calcul de la solution optimale donne:

$$H^T H = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad (H^T H)^{-1} H^T = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Le développement des calculs permet d'exprimer chacun des paramètres optimisés en fonction des valeurs mesurées sur la fonction image:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= 1/5 (f(0,-1) + f(-1,0) + f(0,0) + f(1,0) + f(0,1)) \\ \hat{a}_1 &= 1/2 (f(1,0) - f(-1,0)) \\ \hat{a}_2 &= 1/2 (f(0,1) - f(0,-1)) \end{aligned}$$

Ces résultats donnent pour la dérivation de masque de Roberts³, résultat déjà connu.

Un voisinage plus étendu (3x3 par exemple ou davantage) et un modèle plus développé permettent la mise au point d'opérateurs non accessibles par la méthode de discrétisation directe.