1.2. Bileşik Faiz

Faiz ödenen her dönemden sonra tahakkuk eden (elde edilen) faizin anaparaya eklenmesiyle hesaplanan faiz türüne **Bileşik Faiz** denir. Bileşik faiz işlemlerinde faiz işleyen periyot: yıl, yarıyıl (6 ayda bir), çeyrek yıl (3 ayda bir), ay, hafta, gün veya sürekli olabilir.

P: Anapara, S'nin şimdiki değeri, S'nin iskontolu değeri,
S: Toplam değer, birikmiş değer, P'nin bileşik değeri,
t: Yıl cinsinden zaman,
m: Bir yılda faiz ödenen dönem sayısı,
n: Toplam faiz ödenen dönem sayısı, $n = m.t$ ile hesaplanır,
j_m: Yılda m kez işleyecek olan yıllık faiz oranı,
i: Dönem başına işleyen faiz oranı, $i = \frac{j_m}{m}$ ile hesaplanır.

Örnek 1.12. $j_{12} = \%24 \Rightarrow i = ?$
$m = 12$ *dönem (ay) var, aylık (dönemlik) faiz oranı:* $i = \frac{j_{12}}{12} = \frac{0,24}{12} = 0,02 = \%2$

Bir P anaparası, 1.dönemin başında dönem başına i faiz oranı ile yatırıldığında n.dönemin sonunda S birikmiş değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

1. dönem sonunda faiz: $I = P.i$ ve birikmiş değer: $S = P + P.i = P(1+i)$,
2. dönem sonunda faiz: $I = P(1+i).i$ ve birikmiş değer: $S = P(1+i) + P(1+i).i = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$,
3. dönem sonunda faiz: $I = P(1+i)^2.i$ ve birikmiş değer: $S = P(1+i)^2 + P(1+i)^2.i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$,

$\vdots$

n. dönem sonunda tümevarım ile birikmiş değer: $\boxed{S = P(1+i)^n}$ ya da daha açık bir ifade ile aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\boxed{S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m.t}}$$

Böylece S birikmiş değerinin şimdiki değeri $P = S(1+i)^{-n}$ ya da daha açık bir ifade ile

$$\boxed{P = S\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-m.t}}$$

fomülü ile bulunur.

$m \to \infty$ halinde faiz ödenen dönem kesikli olmaktan çıkıp sürekli hale geldiğinden bu durumda kullanılan bileşik faiz oranı sürekli bileşik faiz oranı olarak adlandırılır ve j_∞ ile ifade edilir. Sürekli bileşik faizde S birikmiş değeri $\lim\limits_{m\to\infty}(1 + \frac{x}{m})^m = e^x$ bilgisi yardımıyla aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m.t} = P.\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m}\right]^t = P.e^{j_\infty .t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{S = P.e^{j_\infty .t}}$$

Örnek 1.13. *a) 1000 TL'nin %12'den 2 yıllık basit faizini bulunuz.*

b) 1000 TL'nin 6 aylık faiz ödemeli %12'den 2 yıllık faizini bulunuz.

a) $P = 1000,\ r = 0,12,\ t = 2 \Longrightarrow I = 1000.0,12.2 = 240$ TL

b) Periyot 6 ay olduğundan 1 yıldaki dönem sayısı $m = 2$ ve $t = 2$ olduğundan toplam dönem sayısı $n = m.t = 2.2 = 4$'tür.

$P = 1000,\ j_2 = 0,12\ , i = \frac{0,12}{2} = 0,06 \Longrightarrow S = P(1+i)^n = 1000(1+0,06)^4 = 1262,48$ TL bulunur. Bu durumda faiz de $I = S - P = 1262,48 - 1000 = 262,48$ TL olur.

Örnek 1.14. *Bir kimse emekliliği için tasarruf yapmak üzere Şubat 2010'da bankaya 100000 TL yatırırsa, aylık faiz ödemeli %12 yıllık bileşik faiz oranından Şubat 2030'da kaç parası olur?*

$P = 100000,\ t = 20,\ m = 12,\ \ n = 20.12 = 240,\ \ j_12 = 0,12,\ \ i = \frac{0,12}{12} = 0,01$

$\Longrightarrow S = P(1+i)^n = 100000\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{240} = 1089255,37$ TL.

1.2.1. Eşdeğer Oranlar

Verilen bir P anaparası ve j_m oranı için m değeri arttıkça S birikmiş değeri de artar. Farklı m değerlerine sahip iki j_m oranına, aynı zaman sürecinde aynı S değerini veriyorlarsa **eşdeğer oranlar** denir.

$$P\left(1+\frac{j_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1.t}=P\left(1+\frac{j_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2.t}\implies\left(1+\frac{j_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{j_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2}$$

Örnek 1.15. *10000 TL'nin $j_m=0,12$ oranından $m=1,2,4,12,52,365$ için ayrı ayrı 10 yıl sonra ne kadar olacağını hesaplayınız.*

m	t	n	i	P	$S=P(1+i)^n$
1	10	10	0,12	10000	31058,48
2	10	20	$\frac{0,12}{2}$	10000	32071,36
4	10	40	$\frac{0,12}{4}$	10000	32620,38
12	10	120	$\frac{0,12}{12}$	10000	33003,87
52	10	520	$\frac{0,12}{52}$	10000	33155,30
365	10	3650	$\frac{0,12}{365}$	10000	33194,62

Örnek 1.16. *Aşağıda istenilen denk oranları bulunuz.*

a) $j_1=\%10,08$'e denk gelen $j_{12}=?$

$(1+\frac{j_{12}}{12})^{12}=(1+\frac{j_1}{1})^1\implies(1+\frac{j_{12}}{12})^{12}=1+0,1008$

$\implies(1+\frac{j_{12}}{12})=(1,1008)^{\frac{1}{12}}\implies j_{12}=12[(1,1008)^{\frac{1}{12}}-1]=0,09642251\approx\%9,64$

b) $j_4=\%12$'ye denk olan $j_2=?$

$(1+\frac{j_2}{2})^2=(1+\frac{j_4}{4})^4\implies(1+\frac{j_2}{2})^2=(1+\frac{0,12}{4})^4$

$1+\frac{j_2}{2}=(1,03)^2\implies j_2=2[(1,03)^2-1]=0,1218=\%12,18$

c) $j_\infty=\%9$'a denk olan $j_4=?$

$(1+\frac{j_4}{4})^4=e^{j_\infty}\implies(1+\frac{j_4}{4})^4=e^{0,09}\implies1+\frac{j_4}{4}=e^{\frac{0,09}{4}}$

$\implies j_4=4[e^{\frac{0,09}{4}}-1]=0,0910201\approx\%9,10$

1.2.2. Kesirli Toplam Dönemler

Bileşik faizde faiz uygulanan toplam dönem sayısı tam sayı değil de kesirli olarak verilmiş ise aşağıdaki metodlar kullanılır.

Teorik Metod: n toplam dönem sayısı kesirli olarak işleme katılır.

Pratik Metod: Birikmiş değeri bulurken ilgili tarihi geçmeyen en büyük tam dönem sayısı kadar ileriye doğru bileşik faiz, geriye kalan ve 1 dönem etmeyen kısım için de ileriye doğru basit faiz uygulanır. Geçmişteki değeri bulurken ise ilgili tarihi içeren en küçük dönem kadar geriye doğru bileşik faiz ile ve daha sonra ilgili tarihe kadar ileriye doğru basit faiz uygulanır.

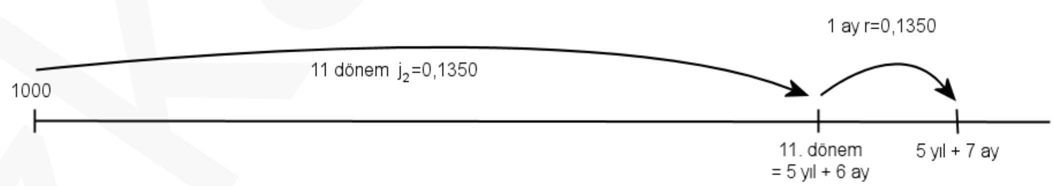
UYARI: Aksi belirtilmedikçe **pratik metod** uygulanır.

Örnek 1.17. *1000 TL'nin 5 yıl 7 ay sonra $j_2 = \%13,50$ oranından değerini*
a) Teorik, b) Pratik Metod uygulayarak bulunuz.

a) $P = 1000,\ j_2 = 0,1350,\ t = 5 + \frac{7}{12} = \frac{67}{12},\ n = 2.\frac{67}{12} = \frac{67}{6}$

$S = 1000(1 + \frac{0,1350}{2})^{\frac{67}{6}} = 2073,84$ **TL**

b) 5 yıl + 7 ay= 11 tane 6 ay + 1 ay



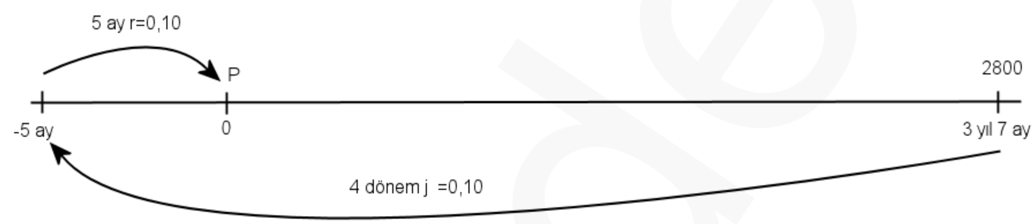
$S = 1000(1 + \frac{0,1350}{2})^{11}.(1 + 0,1350.\frac{1}{12}) = 2051,382851.(1 + \frac{0,1350}{12}) = 2074,46$ **TL**

Örnek 1.18. *$j_1 = \%10$'dan 3 yıl 7 ay sonraki 2800 TL'nin şimdiki değerini a) Teorik, b) Pratik Metod uygulayarak bulunuz.*

a) $S = 2800,\ j_1 = 0,10,\ m = 1,\ i = 0,10,\ t = 3 + \frac{7}{12} = \frac{43}{12},\ n = \frac{43}{12}$

$P = (1+i)^{-n} = 2800(1+0,10)^{-\frac{43}{12}} = 1989,91$ **TL**

b) -3 yıl - 7 ay= -4 tane 1 yıl + 5 ay



$P = 2800(1+0,10)^{-4}.(1+0,10.\frac{5}{12}) = 1992,12$ **TL**

1.2.3. Faiz Oranının Bulunması

Örnek 1.19. *Bir yatırım şirketi paranızı 10 yılda 3 katına çıkaracağını vaadetmektedir. Buna göre aylık ödemeli bileşik faiz oranı nedir?*

$P = X,\ S = 3X,\ t = 10,\ m = 12,\ n = 120, \quad j_{12} = ?$

$S = P(1 + \frac{j_m}{m})^n \Longrightarrow 3X = X(1 + \frac{j_{12}}{12})^{120}$

$\Longrightarrow 3^{\frac{1}{120}} = 1 + \frac{j_{12}}{12} \Longrightarrow j_{12} = 12(3^{\frac{1}{120}} - 1) = 0,1103656 \approx \%11,04$

Örnek 1.20. *3 yılda $\%50$ değer artışı getirecek sürekli bileşik faiz oranı nedir?*

$P = X,\ S = 1,5X,\ t = 3, \quad j_\infty = ?$

$S = P.e^{j_\infty .t} \Longrightarrow 1,5X = X.e^{j_\infty .3}$

$\Longrightarrow \ln 1,5 = 3.j_\infty . \ln e \Longrightarrow j_\infty = \frac{\ln 1,5}{3} \approx \%13,52$

1.2.4. Zamanın Bulunması

Örnek 1.21. *2000 TL nin $j_4 = 0,10$ oranından 800 TL faiz getirmesi için ne kadar zaman geçer?*

$S = P(1+\frac{j_m}{m})^n, \quad P = 2000, \quad j_4 = 0,10, \quad I = 800, \quad m = 4, \quad n = ?$

$S = P + I = 2000 + 800 = 2800$ **TL**

$2800 = 2000(1+\frac{0,10}{4})^n \Longrightarrow \frac{28}{20} = (1+0,025)^n$

$1,4 = 1,025^n \Longrightarrow \log 1,4 = n.\log 1,025$

$n = \frac{\log 1,4}{\log 1,025} = 13,62643323$ **dönem**

$n = mt \Longrightarrow t = \frac{n}{m} = \frac{13,62643323}{4} = 3,406608306$ **yıl**

$0,406608306 \times 12 = 4,879299672$ **ay**

$0,879299672 \times 30 = 26,37899016$ **gün**

$\boxed{\text{3 yıl 4 ay 26 gün}}$

Örnek 1.22. *Bir yatırım aylık ödemeli bir faiz oranıyla 6 yılda 2 katına çıkıyorsa, aynı yatırımın 3 katına çıkması için ne kadar zaman geçer?*

$P = X, \quad S = 2X, \quad t = 6, \quad m = 12, \quad n = 12.6 = 72$

$S = P(1+i)^n \Longrightarrow 2X = X(1+i)^{72}$

$\Longrightarrow 1 + i = 2^{\frac{1}{72}}$

$3X = X(1+i)^{n_1} \Longrightarrow 3 = 2^{\frac{n_1}{72}} \Longrightarrow \log 3 = \dfrac{n_1}{72}\log 2$

$\Longrightarrow n_1 = \frac{72.\log 3}{\log 2} = 114,1173001$ **dönem**

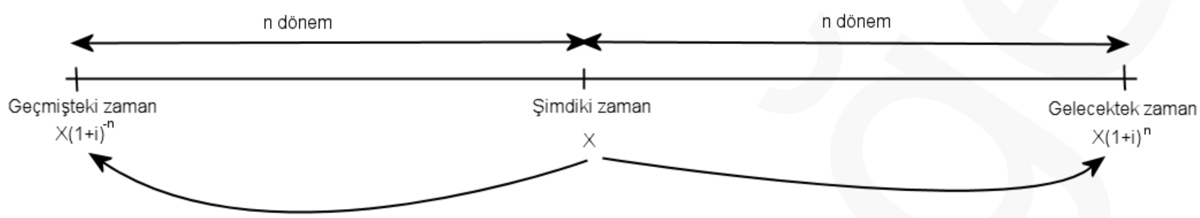
$\frac{114,1173001}{12} = 9,509775004$ **yıl**

$0,509775004 \times 12 = 6,117300048$ **ay**

$0,11730048 \times 30 = 3,51900144$ **gün**

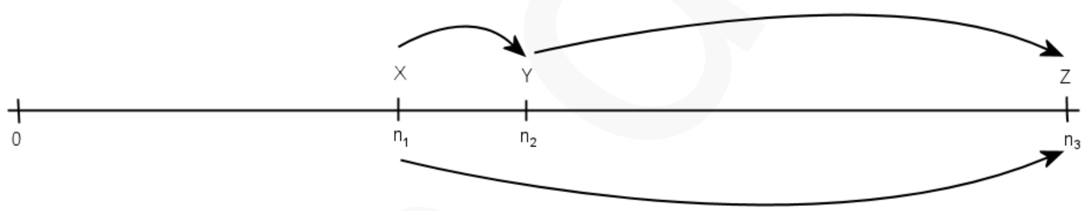
$\boxed{\text{9 yıl 6 ay 4 gün}}$

1.2.5. Bileşik Faizde Paranın Değer Denklikleri



Özellikler

1) X, Y, Z para değerlerini n_1, n_2, n_3 dönemleri göstermek üzere,



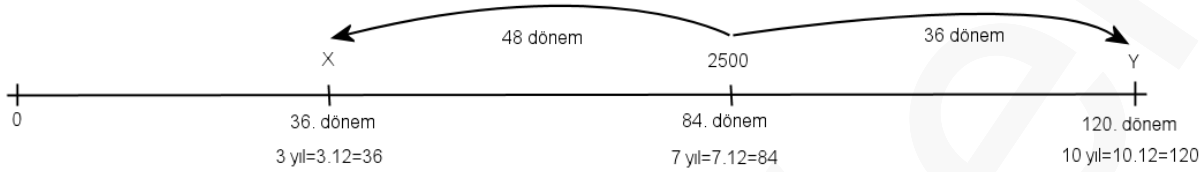
$Y = X(1+i)^{n_2-n_1}, \qquad Z = Y(1+i)^{n_3-n_2}$

$Z = X(1+i)^{n_2-n_1}.(1+i)^{n_3-n_2} = X(1+i)^{n_3-n_1}$

2) İki ayrı ödemeler kümesi aynı bir odak tarihinde birbirine denk iseler, bu iki ödemeler kümesi herhangi bir odak tarihinde de denktir.

Not: Yukarıdaki iki özellik Basit Faiz için geçerli değildir.

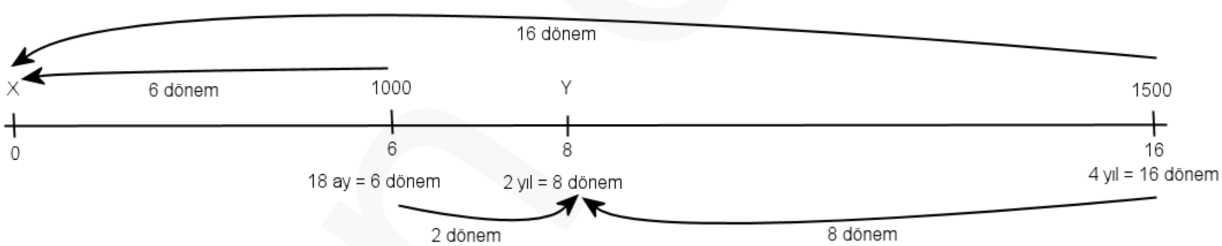
Örnek 1.23. *7 yıl sonra ödenecek 2500 TL'lik bir borç ve paranın değeri* $j_{12} = \%10$ *olsun a) 3 yıl sonundaki, b) 10 yıl sonundaki denk borcu bulunuz.*



a) $X = 2500(1+\frac{0{,}10}{12})^{-48} = 1678,58$ TL

b) $Y = 2500(1+\frac{0{,}10}{12})^{36} = 3370,45$ TL

Örnek 1.24. *Bir kişinin 18 ay sonra ödenmek üzere 1000 TL ve 4 yıl sonra ödenmek üzere 1500 TL borcu vardır. Paranın değeri* $j_4 = \%6$ *ise bu borçları*
a) Şimdi, b) 2 yıl sonra tek seferde ödemek kaç TL ile mümkündür?



$m = 4$ olduğuna göre faiz periyodu 3 aydır. Şu halde 3 aylık periyot 1 dönem yapar.
a) $X = 1000(1+\frac{0{,}06}{4})^{-6} + 1500(1+\frac{0{,}06}{4})^{-16} = 2096,59$ TL

b) $Y = 1000(1+\frac{0{,}06}{4})^{2} + 1500(1+\frac{0{,}06}{4})^{-8} = 2361,79$ TL

1.2.6. Bileşik İskonto

$d^{(m)}$: Yılda m kez yapılan yıllık iskonto oranı,

$\frac{d^{(m)}}{m}$: Dönem başına yapılan iskonto oranı

olmak üzere S üzerinden hesaplanan iskontolu değer $\boxed{P = S\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^n}$ şeklinde bulunur. Bu durumda birikmiş değer $S = P\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-n}$ formülü ile hesaplanır.

Örnek 1.25. *2 yıl sonraki 1000 TL'nin iskontolu değerini*
a) $d^{(12)} = \%12$*, b)* $d^{(365)} = \%7$ *için hesaplayınız.*

a) $P = 1000(1 - \frac{0,12}{12})^{2.12} = 785,68$ TL

b) $P = 1000(1 - \frac{0,07}{365})^{2.365} = 869,35$ TL

1.2.7. Alıştırmalar

1. Bir kişinin şimdi 50000 TL borcu var olsun. Bu borcu $j_1 = 0,09$ oranından 1. ve 2.yıl sonunda X TL eşit taksitlerle ödeyeceğine göre, X nedir? [28423,44 TL]

2. Altı ayda bir ödemeli 0,07 bileşik faiz oranından 200 TL ne kadar zamanda 350 TL olur? [8 yıl 1 ay 18 gün]

3. 0,125 sürekli bileşik faiz oranından 3 yılda 25000 TL biriktirmek için şimdi kaç TL'lik yatırım yapmak gerekir? [17182,23 TL]

4. Aşağıda istenen denk oranları bulunuz.
   a) $d^{(2)} = \%6$'ya denk olan $d^{(12)} =?$ $[\%6,08]$
   b) $j_{12} = \%12$'ye denk olan $d^{(4)} =?$ $[\%11,76]$
   c) $j_{\infty} = \%9$'a denk olan $d^{(1)} =?$ $[\%8,61]$