5. Hayat Anüiteleri

Hayat Anüiteleri, toplu veya belirli süreler içinde yapılan primlere karşılık, sigortalının yaşaması halinde hemen veya belli bir süre sonra başlayan, sigortalı, sigorta ettiren veya belirli şartlar dahilinde lehdarlarına ömür boyu veya belirli süreler için yapılan düzenli ödemelerdir. Hesaplamalar için hayat(ölüm) tablosuna ihtiyaç vardır. Büyük bir popülasyondaki gözlenen ölüm sayılarının tutulduğu kayıtlara **hayat tabloları** denir. Derste kullanacağımız hayat tablosu web sayfasında mevcuttur.

Notasyon:

x : yaş

ℓ_x : $x \neq 0$ olmak üzere x yaşına erişenlerin sayısı

d_x : x yaşında ölenlerin sayısı (yani x ile $x+1$ arasında ölenlerin sayısı)

q_x : x yaşındaki birinin 1 yıl içinde ölme olasılığı

${}_nq_x$: x yaşındaki birinin n yıl içinde ölme olasılığı

p_x : x yaşındaki birinin en az 1 yıl yaşama olasılığı

${}_np_x$: x yaşındaki birinin en az n yıl yaşama olasılığı

UYARI! Dersimizde kişilerin 100 yaşına erişemedikleri kabul edilmektedir.

Gerekli Formüller

$$d_x = \ell_x . q_x$$

$$\ell_{x+1} = \ell_x - d_x \Longrightarrow d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

$$_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}$$

$$_nq_x = 1 -_n p_x = 1 - \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

Örnek 5.1. *20 yaşındaki bir kadının*

$a)$ *45 yaşına erişebilmesinin*

$b)$ *60 yaşından önce ölmesinin*

$c)$ *50 ile 65 yaş arasında ölmesinin*

$d)$ *70 yaşında ölmesinin olasılıklarını bulunuz.*

$a)$ ${}_{25}p_{20} = \dfrac{\ell_{20+25}}{\ell_{20}} = \dfrac{9409244}{9820821} = 0,958091385$

$b)$ ${}_{40}q_{20} = \dfrac{\ell_{20} - \ell_{60}}{\ell_{20}} = \dfrac{9820821 - 8603801}{9820821} = 0,123922429$

$c)$ ${}_{30}p_{20} \cdot {}_{15}q_{50} = \dfrac{\ell_{50}}{\ell_{20}} . \dfrac{\ell_{50} - \ell_{65}}{\ell_{50}} = \dfrac{9219130 - 8134022}{9820821} = 0,110490558$

$d)$ ${}_{50}p_{20} \cdot {}_{1}q_{70} = \dfrac{\ell_{70}}{\ell_{20}} . \dfrac{\ell_{70} - \ell_{71}}{\ell_{70}} = \dfrac{d_{70}}{\ell_{20}} = \dfrac{164693}{9820821} = 0,016769779$

5.1. Hayatta olma halinde alınacak tek ödemenin iskontolo beklenen değeri

x yaşındaki birine n yıl sonra eğer hala hayatta ise yapılacak olan 1 TL'lik tek ödemenin iskontolu beklenen değeri (=net tek primi) aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$1 \cdot {}_{n}E_{x} = 1 . \frac{\ell_{x+n}}{\ell_{x}} . (1+i)^{-n} = 1 . (1+i)^{-n} \cdot {}_{n}P_{x}$$

burada $i = \frac{j_1}{1}$ dir.

Örnek 5.2. *Şu an 30 yaşında olan Ahmet Bey'e eğer 65 yaşına erişirse ödenecek olan 50000 TL'nin iskontolu beklenen değerini $j_1 = \%10$'a göre hesaplayınız.*

$50000 . {}_{35}E_{30} = 50000 . \dfrac{\ell_{65}}{\ell_{30}} (1 + 0,10)^{-35} = 50000 . \dfrac{7329740}{9579998} (1,10)^{-35} = 1361,29$ **TL.**

Örnek 5.3. *1993 yılında bir kız kolejinden mezun olanlardan 21 yaşında olanlar 200 kişi, 22 yaşında olanlar 300 kişi ise bu mezunların 50. mezuniyet yıl dönümünde kaç tanesinin hayatta olması beklenir?*

${}_{50}P_{21} = \dfrac{\ell_{71}}{\ell_{21}} = \dfrac{7284123}{9810509} = 0,742481659$

$_{50}P_{22} = \dfrac{\ell_{72}}{\ell_{22}} = \dfrac{7107629}{9800012} = 0,725267377$

$200.(0,742481659) = 148,4963318$

$300.(0,725267377) = 217,5802131$

$148,4963318 + 217,5802131 = 366,0765449 \Longrightarrow 366$ **kişi.**

Örnek 5.4. *Özge Hanım'a 47. doğum gününde 100000 TL'lik miras kalır. Bu parayla, 60 yaşına erişmesi halinde $j_4 = \%8$ oranından getirisi olacak bir anlaşma yapar.*

$a)$ ***Eğer yaşarsa 60 yaşında ne kadar alır?***

$b)$ ***Bu anlaşmayı yapmayıp parayı $j_4 = \%8$ den bir bankaya yatırsaydı 60 yaşında ne kadar alırdı?***

$a)$ $(1+i)^1 = (1+\dfrac{0,08}{4})^4 \Longrightarrow i = 0,08243216$

$100000 = X._{13}E_{47} = X.\dfrac{\ell_{60}}{\ell_{47}}(1+0,08243216)^{-13}$

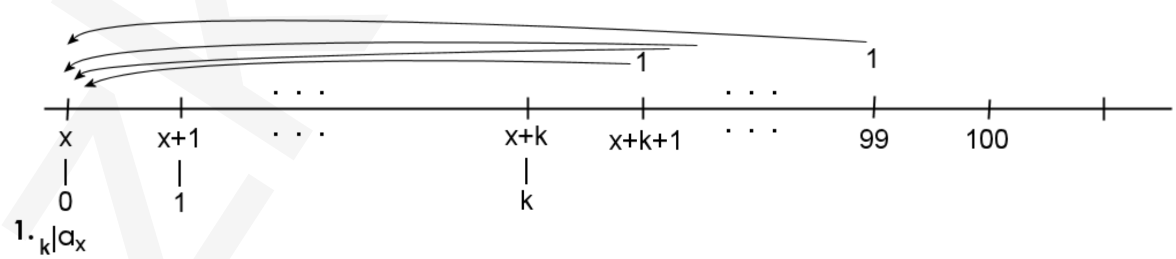
$100000 = X.\dfrac{8603801}{9340119}(1,08243216)^{-13} \Longrightarrow X = 303998,18$ **TL**

$b)$ $X = 100000.(1,08243216)^{13} = 280032,82$ **TL**

5.2. Ömür Boyu Hayat Anüitesi

x yaşındaki birisine k yıl sonra başlamak üzere ömür boyu (=yaşadığı sürece) her yıl ödenecek 1 TL'lik ödemelerin beklenen iskontolu değeri (=net tek primi):

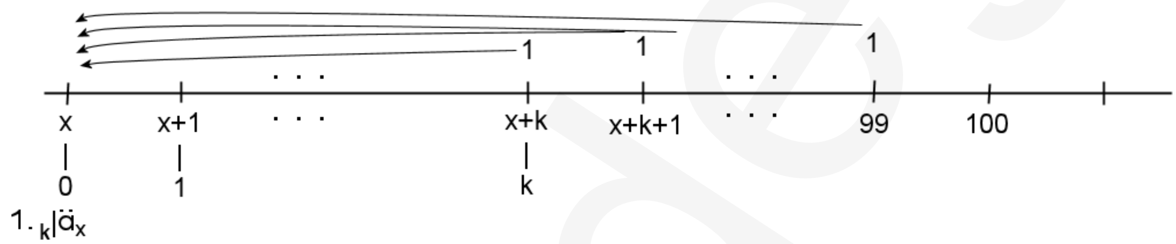
$i)$ **İlk ödeme k yıl sonra yıl sonunda yapılırsa:**



$$1._{k|}a_x = 1._{k+1}E_x + 1._{k+2}E_x + ... = 1.\frac{\ell_{x+k+1}}{\ell_x}.(1+i)^{-(k+1)} + 1.\frac{\ell_{x+k+2}}{\ell_x}.(1+i)^{-(k+2)} + ...$$

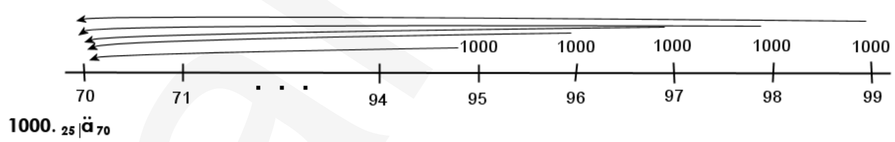
$$\Longrightarrow \boxed{1._{k|}a_x = 1.\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-(k+t)}.\frac{\ell_{x+k+t}}{\ell_x}}$$

$ii)$ **İlk ödeme k yıl sonra yıl başında yapılırsa:**



$$\boxed{1._{k|}\ddot{a}_x = 1.\sum_{t=0}^{\infty}(1+i)^{-(k+t)}.\frac{\ell_{x+k+t}}{\ell_x}}$$

Örnek 5.5. *70 yaşındaki bir erkeğe 95. yaşından başlamak üzere ömür boyu her yıl ödenecek 1000 TL'lik hayat anüitesinin $j_1 = \%8$'den net tek primini bulunuz.*



$$1000._{25|}\ddot{a}_{70} = 1000.\sum_{t=0}^{\infty}(1+0,08)^{-(25+t)}.\frac{\ell_{95+t}}{\ell_{70}}$$

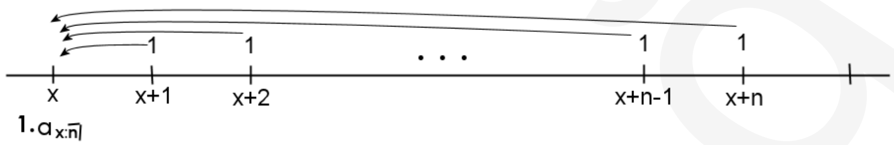
$$= 1000(1,08^{-25}.\frac{\ell_{95}}{\ell_{70}} + 1,08^{-26}.\frac{\ell_{96}}{\ell_{70}} + ... + 1,08^{-29}.\frac{\ell_{99}}{\ell_{70}})$$

$$= \frac{1000}{6274160}(1,08^{-25}.146721 + 1,08^{-26}.98309 + 1,08^{-27}.60504 + 1,08^{-28}.31450 + 1,08^{-29}.10757)$$

$$= \frac{1000}{6274160}.(47089,75512) = 7,51 \textbf{ TL.}$$

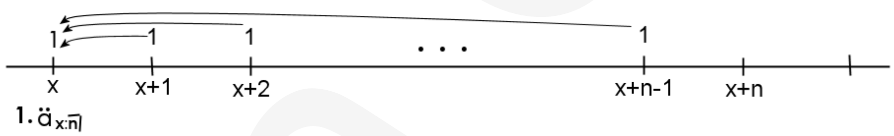
5.3. Geçici Hayat Anüitesi

i) x yaşındaki birine n yıl boyunca **her yılın sonunda** ödenecek 1 TL'lik ödemelerin net tek primi:



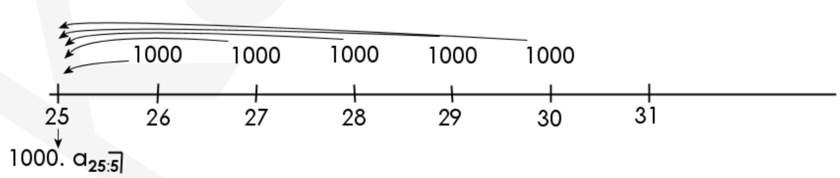
$$\boxed{1.a_{x:n\rceil} = 1.\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}.\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}}$$

ii) x yaşındaki birine n yıl boyunca **her yılın başında** ödenecek 1 TL'lik ödemelerin net tek primi:



$$\boxed{1.\ddot{a}_{x:n\rceil} = 1.\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^{-t}.\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}}$$

Örnek 5.6. *25 yaşındaki bir kadına 5 yıl için yapılan yılda 1000 TL ödenecek geçici hayat anüitesinin $j_1 = \%9$'dan net tek primini bulunuz.*



$1000.a_{25:5\rceil} = 1000.\sum_{t=1}^{5}(1+0,09)^{-t}.\frac{\ell_{25+t}}{\ell_{25}} = 3876,47$ **TL.**

6. Hayat Sigortaları

Hayat sigortası, sigorta şirketinin belli bir prim karşılığında sigortalının sözleşmede belirtilen süre içinde ve sözleşmede belirtilen hallerde yaşam kaybı veya sözleşmede belirtilen süreden daha uzun hayatta kalması halinde size veya belirlediğiniz kişilere sigorta bedelini ödediği sigorta türüdür. Hayat sigortaları başınıza beklenmedik bir olay gelmesi durumunda, sizi ve sevdiklerinizi güvenceye almasının yanı sıra tasarruf yapmanıza da olanak sağlar.

n **yıllık hayat sigortaları**

x yaşındaki birinin n yıl içinde ölmesi halinde varislerine ödenecek 1 TL'lik ödemenin net tek primi:

$$1.A^1_{x:\overline{n}|} = 1.\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^{-(t+1)}.\frac{d_{x+t}}{\ell_x}$$

Ömür boyu hayat sigortaları

x yaşındaki birinin ölmesi durumunda varislerine ödenecek 1 TL'lik ödemenin net tek primi:

$$1.A^1_{x:\overline{\infty}|} = 1.\sum_{t=0}^{\infty}(1+i)^{-(t+1)}.\frac{d_{x+t}}{\ell_x}$$

Örnek 6.1. *95 yaşındaki bir erkek için 50000 TL'lik ömür boyu hayat sigortasının $j_1 = \%8$'den net tek primini bulunuz.*

$$50000.A^1_{95:\overline{\infty}|} = 50000.\sum_{t=0}^{\infty}(1+0,08)^{-(t+1)}.\frac{d_{95+t}}{\ell_{95}} = 41859,26 \text{ TL.}$$

6.1. Alıştırmalar

1. 40 yaşındaki bir erkeğin

   $a)$ 65 yaşına erişebilmesinin

   $b)$ 50 yaşından önce ölmesinin

   $c)$ 65 ile 75 yaş arasında ölmesinin

$d)$ 75 yaşında ölmesinin olasılıklarını bulunuz.

[a) 0,78165342 b) 0,043787687 c) 0,25922733 d) 0,033534547]

2. 40 yaşındaki Ece Hanım'a 97. yaşından başlamak üzere ömür boyu her yıl ödenecek 1500 TL'lik hayat anüitesinin $j_1 = \%5$'ten net tek primini bulunuz.
[2,75 TL]

3. 93 yaşındaki Turgut Bey için 100000 TL'lik 3 yıllık hayat sigortasının $j_1 = \%6$'dan net tek primini bulunuz. [59038,29 TL]