2. Anüiteler

Eşit zaman aralıklarında ve genelde eşit tutarda yapılan ödemeler zincirleri **anüite** olarak adlandırılır. Kullanacağımız kavramlar aşağıda verilmiştir.

Ödeme Aralığı: İki ödeme arasındaki zaman. (Yıl, altı ay, ay, hafta veya herhangi sabit bir aralık olabilir.)
Anüite Dönemi: İlk ödeme aralığının başı ile son ödeme aralığının sonu arasındaki zaman.

Belirli Anüite: Anüite dönemi sabit olan anüitelerdir. (Ev kredisi ödemeleri vb.)
Belirsiz Anüite: Bazı belirsiz olaylara bağlı olarak anüite dönemi değişen anüitelerdir. (Sosyal güvenlik sigortası ödemeleri, hayat sigortası ödemeleri)

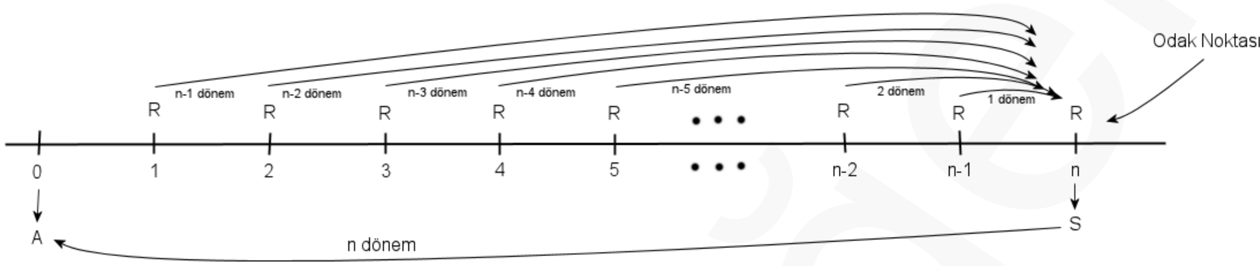
Normal Anüite: Ödemelerin, ödeme aralığının sonunda yapıldığı anüitelerdir.
Peşin Anüite: Ödemelerin, ödeme aralığının başında yapıldığı anüitelerdir.

Ertelenmiş Anüite: İlk ödemesi geç yatan anüitelerdir.

Basit Anüite: Ödeme aralığı ile faiz işleme aralığının çakıştığı anüitelerdir.
Genel Anüite: Basit olmayan anüitelerdir.

Uyarı! Aksi belirtilmedikçe normal basit anüite kastedilecektir.

R: Periyodik olarak ödenen anüite ödemesi.
n: Anüite dönemi boyunca faiz işleyen dönem sayısı. (Basit anüitelerde ödeme sayısı)
i: Dönem başına faiz oranı, ($i = \frac{j_m}{m}$)
S: Anüitenin toplam değeri ya da birikmiş değeri.
A: Anüitenin iskontolu değeri ya da şimdiki değeri.



Normal Basit Anüitede Birikmiş Değer

Dönem sonlarında yapılan toplam n tane R ödemesi, dönem başına i faiz oranından aşağıdaki S toplamını verir:

$S = R + R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} = R.\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = R.\frac{(1+i)^n-1}{i}$

Burada geometrik dizinin kısmi toplamı olan $1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ eşitliği kullanılmıştır. Kısalık amacıyla $s_{\overline{n}|i} := \frac{(1+i)^n-1}{i}$ denirse, aşağıdaki formül elde edilir:

$$\boxed{S = R.s_{\overline{n}|i} = R.\frac{(1+i)^n-1}{i}}$$

Normal Basit Anüitede İskontolu Değer

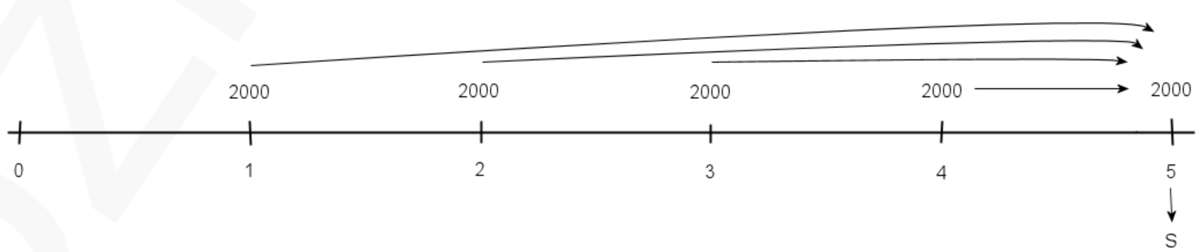
Dönem sonlarında yapılan toplam n tane R ödemesi, dönem başına i faiz oranından aşağıdaki A iskontolu değerini verir:

$A = S(1+i)^{-n}$ olduğundan $A = S(1+i)^{-n} = R.\frac{(1+i)^n-1}{i}.(1+i)^{-n} = R.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Yine kısalık amacıyla $a_{\overline{n}|i} := \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ denirse, aşağıdaki formül elde edilir:

$$\boxed{A = R.a_{\overline{n}|i} = R.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

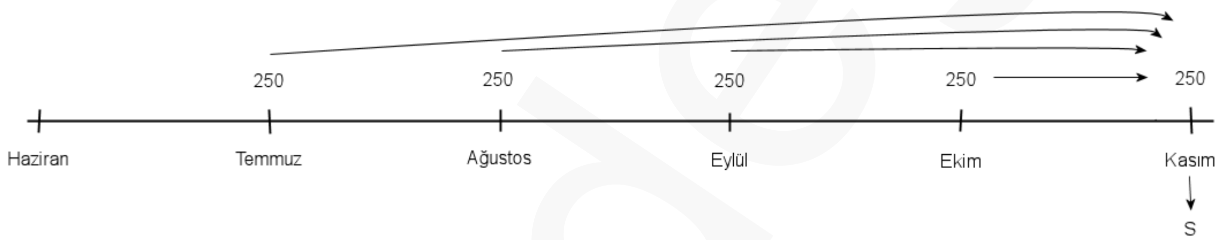
Örnek 2.1. *Her yıl 2000 TL ödenen 5 yıllık bir normal basit anüitenin toplam değerini yıllık bileşik %9 faiz oranı için hesaplayınız.*



$R = 2000, \quad j_1 = 0,09, \quad i = 0,09, \quad n = 5$

$S = R.s_{\overline{n}|i} = 2000.s_{\overline{5}|0,09} \quad \Longrightarrow \quad S = 2000.\frac{(1+0,09)^5-1}{0,09} = 11969,42$ **TL**

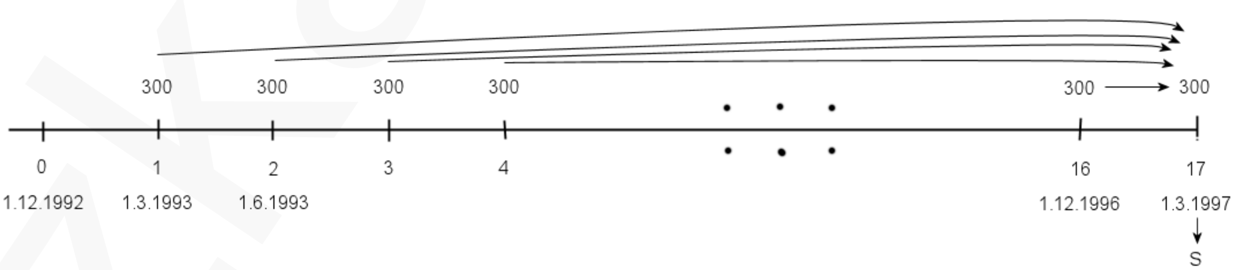
Örnek 2.2. *Bir kişi borcunu aylık 250 TL'lik ödemeler ile ödemektedir. Bu kişi Temmuz, Ağustos, Eylül ve Ekim aylarına ait borçlarını ödememiştir. Ödeme dengesinin sağlanması için boruçlunun Kasım ayındaki taksidi ile birlikte ödemesi gereken miktar nedir? Paranın değeri* $j_{12} = \%14,4$ *olarak alınız.*



$R = 250, \quad j_{12} = 0,144, \quad i = \frac{0,144}{12} = 0,012, \quad n = 5$

$S = R.s_{\overline{n}|i} = 250_{\overline{n}|0,012} = 250.\frac{(1+0,012)^5-1}{0,012} = 1280,36$ **TL**

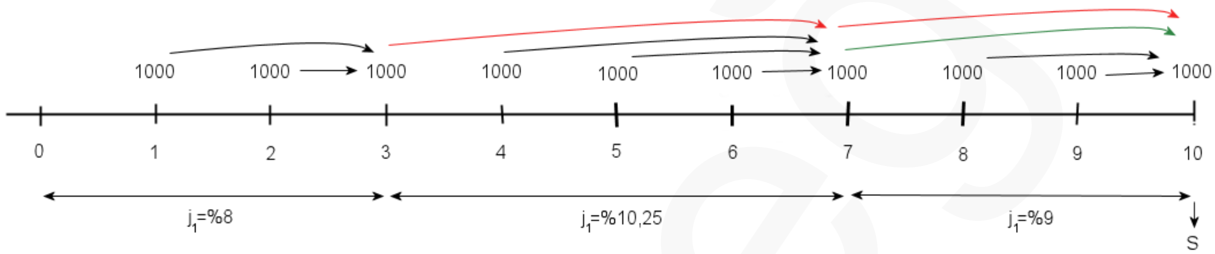
Örnek 2.3. *Bir yatırımcı 3 ayda bir bankaya 300 TL yatırmaktadır. Bankanın uyguladığı faiz oranı* $j_4 = \%8$*'dir. Bu yatırımda ilk ödeme 1.3.1993'te yapılmış ise son ödeme 1.3.1997'de yapıldıktan sonra hesapta ne kadar birikmiş olur?*



$R = 300, \quad j_4 = 0,08, \quad i = \frac{0,08}{4} = 0,02, \quad n = 17$

$S = R.s_{\overline{n}|i} = 300.s_{\overline{17}|0,02} = 300.\frac{(1+0,02)^{17}-1}{0,02} = 6003,62$ **TL**

Örnek 2.4. *Bir kimse 10 yıl boyunca bir bankaya her yılın sonunda 1000 TL yatırıyor. Paranın değeri ilk 3 yıl için $j_1 = \%8$, sonraki 4 yıl için $j_1 = \%10,25$ ve son 3 yılda $j_1 = \%9$ ise a) Yatırımın toplam değeri nedir? b) Elde edilen faiz nedir?*



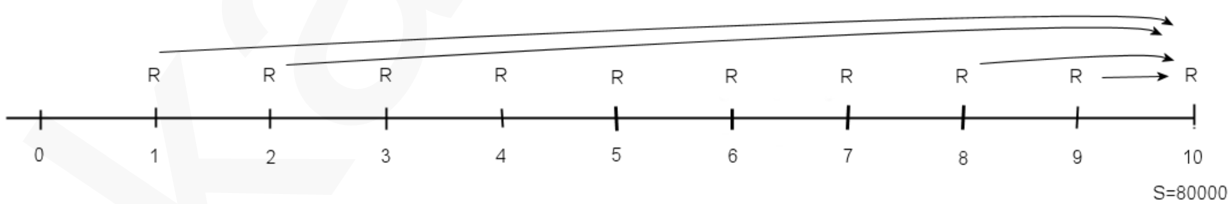
a) $S = 1000.s_{\overline{3}|0,08}.(1+0,1025)^4.(1+0,09)^3 + 1000.s_{\overline{4}|0,1025}.(1+0,09)^3 + 1000.s_{\overline{3}|0,09}$

$\Longrightarrow S = 1000.\frac{(1,08)^3-1}{0,08}.(1,1025)^4.(1,09)^3 + 1000.\frac{(1,1025)^4-1}{0,1025}.(1,09)^3 + 1000.\frac{(1,09)^3-1}{0,09}$

$= 6211,49 + 6032,38 + 3278,10 = 15521,97$ **TL**

b) $15521,97 - 10.1000 = 5521,97$ **TL**

Örnek 2.5. *Paranın değeri $j_1 = \%8$ olduğu biliniyorsa 10 yıl sonra 80000 TL biriktirmek için her yıl ne kadarlık bir yatırım yapılmalıdır.*



$$S = R.s_{\overline{n}|i} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{80000}{\frac{(1,08)^{10}-1}{0,08}} = 5522,36 \text{ TL}$$

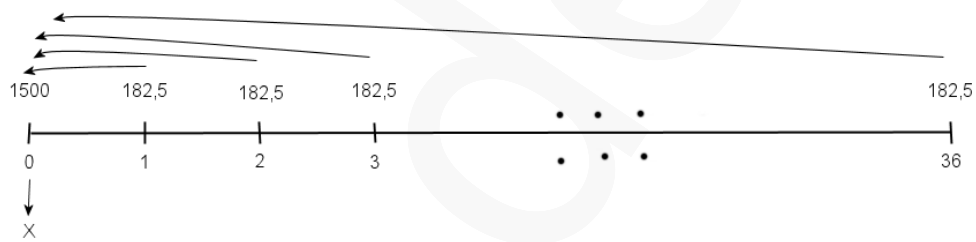
Örnek 2.6. *3 yıl boyunca her ayın sonunda 380 TL yatırılan bir anüitenin $j_{12} = \%12$'den iskontolu değerini bulunuz.*

$R = 380, \quad n = 36, \quad i = \frac{0,12}{12} = 0,01$

$A = R.a_{\overline{n}|i} = 380.\frac{1-(1+0,01)^{-36}}{0,01} = 11440,85$ TL

ya da $A = S.(1+i)^{-n} = R.s_{\overline{n}|i}.(1+i)^{-n} = 380.\frac{(1+0,01)^{36}-1}{0,01}.(1,01)^{-36} = 11440,85$ TL

Örnek 2.7. *Bir cep telefonunu satın almak için 1500 TL peşin ve 3 yıl boyunca aylık 182,5 TL ödenecektir, uygulanan faiz oranı $j_{12} = \%18$ olduğuna göre a) Telefonun nakit değeri nedir? b) Borçlanmanın toplam faizi nedir?*



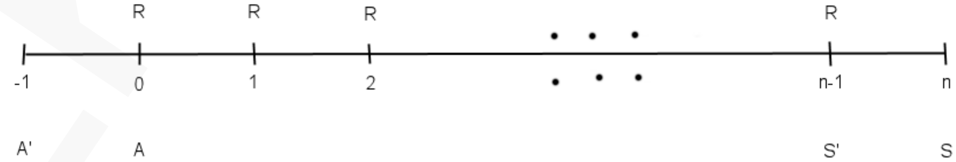
a) $R = 182,5, \quad n = 36, \quad j_{12} = 0,18, \quad i = \frac{0,18}{12} = 0,015$

$X = 1500 + 182,5.\frac{1-(1+0,015)^{-36}}{0,015} = 1500 + 5048,47 = 6548,47$ TL

b) $(182,5).36 - 5048,47 = 1521,93$ TL

Peşin Anüiteler

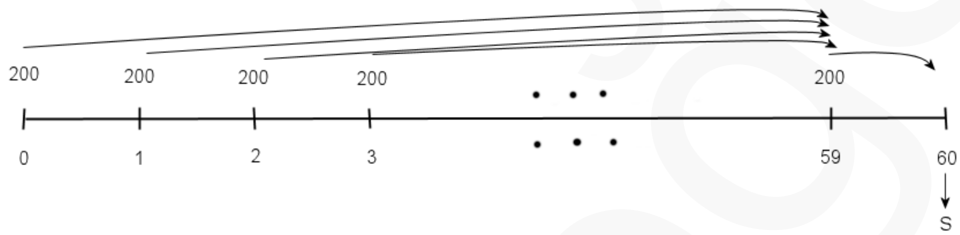
Ödemelerin dönem sonunda değil de dönem başında yapıldığı anüitelerdir.



$S' = R.s_{\overline{n}|i} \quad \Longrightarrow \quad S = S'.(1+i) = R.s_{\overline{n}|i}.(1+i)$

$A' = R.a_{\overline{n}|i} \quad \Longrightarrow \quad A = A'.(1+i) = R.a_{\overline{n}|i}.(1+i)$

Örnek 2.8. *Bir yatırımcı 5 yıl boyunca her ayın başında 200 TL'yi bir bankaya yatırmaktadır.* $j_{12} = \%10,5$ *ise 5 yıl sonundaki hesap toplamı ne olur?*

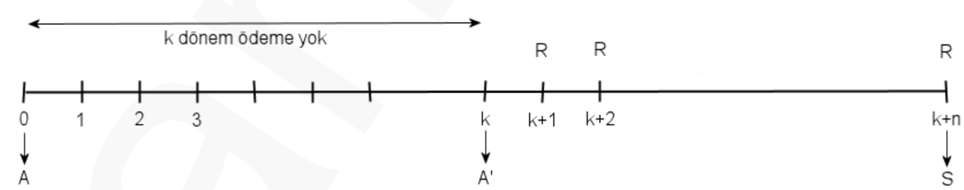


$R = 200, \quad n = 60, \quad i = \frac{0,105}{12}$

$S = 200.s_{\overline{60|}\frac{0,105}{12}}.(1 + \frac{0,105}{12}) = 200.\frac{(1+\frac{0,105}{12})^{60}-1}{\frac{0,105}{12}}.(1 + \frac{0,105}{12}) = 15831,10$ **TL**

Ertelenmiş (Tehirli) Anüiteler

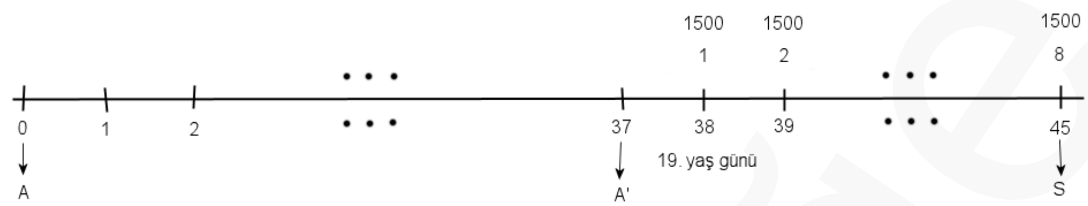
k dönem ertelenmiş anüite, ilk ödemesi k dönem sonra yani $k+1$. dönemde yapılan anüitedir.



$A' = R.a_{\overline{n}|i} \quad \Longrightarrow \quad A = A'.(1+i)^{-k} \quad \Longrightarrow \quad A = R.a_{\overline{n}|i}.(1+i)^{-k}$

$S = A.(1+i)^{k+n} \quad \Longrightarrow \quad S = R.a_{\overline{n}|i}(1+i)^{n} = R.\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = R.s_{\overline{n}|i}$

Örnek 2.9. *Bir çocuk doğduğunda ailesi tarafından ne kadarlık bir anapara bankaya yatırılmalıdır ki çocuk 19. doğum gününü kutladığında ödeme başlamak üzere altı ayda bir 1500 TL'lik 8 adet geri ödeme elde edilebilsin. Paranın değerini* $j_2 = \%9$ *alınız.*



$R = 1500, \quad k = 37, \quad n = 8, \quad i = \frac{0{,}09}{2}$

$S = 1500.s_{\overline{8}|\frac{0{,}09}{2}} \quad \Longrightarrow \quad A = S.(1 + \frac{0{,}09}{2})^{-45} = 1941,16$ **TL**

ya da $A' = 1500.a_{\overline{8}|\frac{0{,}09}{2}} \quad \Longrightarrow \quad A = A'.(1 + \frac{0{,}09}{2})^{-37} = 1941,16$ **TL**

2.1. Alıştırmalar

1. 10 yıl boyunca yıl sonunda 5000 TL ödemeli bir anüitenin toplam değerini a) $j_1 = \%6$, b) $j_4 = \%12$ oranlarından hesaplayınız.[a) 65903,97 TL b) 377006,30 TL]

2. Bir kişi her üç ayda bir bankaya $j_4 = \%5$ oranından ne kadar yatırmalıdır ki, 10 yıl sonra 5148,96 TL biriktirmiş olsun? [100 TL]

3. 5 yıl boyunca altı ayda bir 1500 TL yatırılacak bir anüitenin $j_2 = \%10$'dan iskontolu değerini bulunuz. [11582,60 TL]

4. Bir bankaya ne kadarlık bir anapara yatırılmalıdır ki 11. yılda ödeme başlamak üzere her yıl 15000 TL'lik 4 adet geri ödeme elde edilebilsin. Paranın değerini $j_1 = \%20$ alınız. [6271,43 TL]

5. $s_{\overline{m+n}|i} = s_{\overline{m}|i} \cdot (1+i)^n + s_{\overline{n}|i}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.