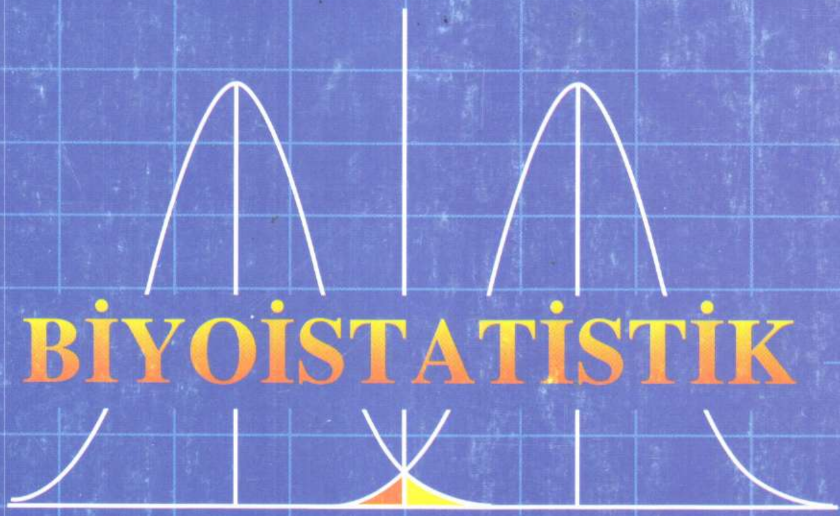
ANKARA ÜNİVERSİTESİ ECZACILIK FAKÜLTESİ YAYIN NO:79



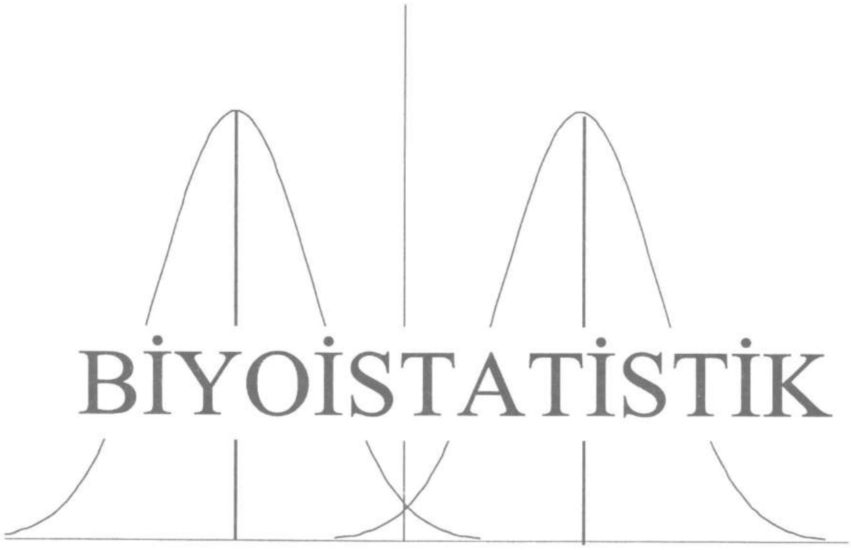
BİYOİSTATİSTİK

Prof. Dr. Tahsin KESİCİ

Doç. Dr. Zahide KOCABAŞ

ANKARA
1998

ANKARA ÜNİVERSİTESİ ECZACILIK FAKÜLTESİ YAYIN NO:79



BİYOİSTATİSTİK

PROF. DR. TAHSİN KESİCİ

DOÇ. DR. ZAHİDE KOCABAŞ

ANKARA

1998

ÖNSÖZ

Çeşitli bilim dallarının gelişme süreçleri incelendiğinde, istatistik metotları kullananların çok hızlı gelişme gösterdikleri fark edilir. Gelişimi durağanlaşmış bilim dalları istatistik metotları kullanmaya başlayınca atılımlar yapmaya başlamıştır. Her bilim dalında kullanılan deney materyali, deneme şartları ve istatistik metotların gerektirdiği ön koşulların gerçekleşme durumu diğerlerinden farklı olduğu için, konulara özgü istatistik yöntemlerin geliştirilmesini zorunlu kılmıştır. Bunun sonucu olarak da istatistik biliminde değişik dallar ortaya çıkmıştır. Bunlara örnek olarak, Ekonomi bilimlerinde istatistik metotlara "Ekonometri", psikolojide "Psikometri", antropolojide "Antropometri" verilebilir. Biyoloji ile ilgili bilimler için geliştirilen ve geliştirilmekte olan istatistik metotlara "Biyometri" veya "Biyoistatistik" denilmektedir.

Günümüzde bütün bilim dallarında yapılan çalışmalarda istatistik metotlarından geniş şekilde yararlanılmaktadır. Yapılan bir çalışma, eğer sonuçlar uygun istatistik metotlarla değerlendirilmemişse pek de ciddiye alınmamaktadır. Bunun farkında olan ve yeterli istatistik bilgisi olmayan araştırıcılar, sonuçlarını ya başka birine değerlendirtmekte veya günümüzde yaygın olarak kullanılan istatistik paket programları ile bazen uygun metotlar seçmeden değerlendirme yapmaktadırlar. Bu durumlarda genellikle sadece hesaplama sonuçları olduğu gibi çalışmaya konulmaktadır. Yani önemli olan yorum ve genelleştirme kısmı eksik kalmaktadır. Bunun nedeni de bu gibi araştırıcıların kendi konularında yeterli istatistik bilgiye sahip olmamalarıdır.

Sağlıkla ilgili bilim dalları arasında biyoistatistik yöntemlerden en erken ve en çok yararlanan bilim dalı eczacılıktır. Çünkü konusu gereği sürekli olarak yeni ilaçlar geliştirmek, bunları çok kapsamlı olarak denemek, mevcut olanlarla karşılaştırmak ve en önemlisi insan sağlığı yönünden riskleri en aza indirmek zorundadır. Bunları dikkate alan konu uzmanları eczacılık öğrenimi yapanlara "Biyoistatistik" dersinin zorunlu olmasını gerekli görmüşlerdir.

Bu kitap Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi öğrencilerine okutulan "Biyoistatistik" dersine bir kaynak olmak üzere hazırlanmıştır. Ele alınan konular öğrencilerin kolayca anlayabilmeleri için mümkün olduğu kadar basite indirgenmiştir. Açıklanan her konu sonunda da örnekler verilmiştir. Ele alınan örneklerdeki sayılar gerçek veriler değildir. İncelenen konuya uygun rastgele veriler ele alınmıştır. Eğer konu uzmanları gerçeğe uymayan büyüklükte sayılara rastlarsa bizi bağışlayacaklarını umarız.

Günümüzde karmaşık ve uzun hesaplamalar gerektiren Biyoistatistik yöntemler bilgisayarlar aracılığı ile herkes tarafından kullanılabilmektedir. Bu iş için geliştirilmiş bir çok paket program vardır. Bunlar arasından öğrenilmesi ve kullanılması en kolay olan MINITAB (MINITAB Ltd., 3 Mercia Business Village Tonwood Close, Westwood Business Park, Coventry, CV4 8HX, United Kingdom) seçilmiş ve ele alınan örnekler bir de bu paket programla değerlendirilerek çıktıları açıklamalı olarak konulmuştur. Buna müsaade eden MINITAB şirketine teşekkürü bir borç biliriz.

Kitabın hazırlanma, anlatım tekniği ve verilen bilgilerde sayın hocamız rahmetli Prof. Dr. Orhan DÜZGÜNEŞ'in bizlere öğrettiğinin büyük etkisi ve katkısı olduğunu belirtmek bizler için bir borçtur.

Kitabın tümünü dikkatle gözden geçirerek yaptığı düzeltme ve önerilerinden dolayı Prof. Dr. Fatin SEZGİN'e teşekkür borçlu olduğumuzu özellikle belirtmek isterim.

Kitabın basımı için gerekli idari işlemleri hızla tamamlayan Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Dekanlığına da ayrıca teşekkür etmeyi borç biliriz.

Eğer Doç. Dr. Zahide KOCABAŞ'ın azmi ve gayreti olmasaydı bu kitap ortaya çıkmazdı. Kendisi ile birlikte hazırladığımız müsveddeleri günü gününe bilgisayara geçirmiş, tekrar gözden geçirmek üzere bana vermiş, gerekli düzeltmelerin gününde yapılması için ısrarlı olmuştur. Sadece yazımını değil sayfa düzenlerini de bizzat kendisi yapmıştır. Bu gayretleri için kendisine teşekkür borçluyum.

Prof. Dr. Tahsin KESİCİ

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

VERİLERİN TOPLANMASI, ÖZETLENMESİ ve SUNULMASI

1.1. Giriş

Araştırıcının, konusu ile ilgili verilerini doğru olarak toplaması, özetlemesi, tanıtıcı değerleri hesaplaması, araştırmada dikkate alınan faktörlere göre analiz etmesi, eğer araştırmada birden fazla özellik dikkate alınmış ise bu özellikler arasındaki ilişkiyi araştırması, analizler sonucunda bulunan sonuçları değerlendirmesi, yorumlaması ve genelleştirmesi **İSTATİSTİK** metotlar olarak bilinir.

Bir araştırma yürütülürken üzerinde durulan topluluğun bütün bireylerinden veri toplamak çok zor, hatta olanaksızdır. Çünkü araştırma için ayrılan zaman ve maddi olanaklar bütün bireylerden veri toplanmasını sınırlar. Bu sınırlayıcı faktörleri aşmak mümkün olsa da gene gereksiz yere para ve zaman harcanmış olur. Bu sebeple veriler sınırlı sayıdaki bireylerden toplanır. Bu sınırlı sayıda bireylerin oluşturduğu gruba **ÖRNEK** denir. Örneğe giren özellikteki bireylerin tümünün oluşturduğu topluluğa (kitleye, yığına) ise **POPULASYON** denir. Biyolojik anlamda populasyon, canlıların topluluğudur. Örneğin, öğrenciler, kuşlar, balıklar biyolojik anlamda populasyonu oluşturur. İstatistik anlamda populasyon ise üzerinde çalışılan özelliktir. Örneğin, öğrencilerin ağırlıkları, boyları, kanlarında ölçülen potasyum, bakır, çinko değerleri gibi özellikler bir populasyondur.

Populasyondan hesaplanan değerlere **PARAMETRE**, parametrelere karşılık gelen ve örnekten hesaplanan değerlere de **İSTATİSTİK** adı verilir. Populasyondan hesaplanan parametreler Grek (Yunan) harfleri, örnekten hesaplanan istatistikler ise Latin harfleri ile gösterilir. Örneğin, herhangi bir üniversitedeki öğrencilerin tamamı populasyonu oluşturur. Bu öğrencilerin ağırlıklarına ait ortalama hesaplanır ise bu bir parametredir ve μ ile gösterilir. Eğer bu öğrencilerden üniversitedeki öğrencileri temsil eden belirli bir sayıda öğrenci seçilir ise bu bir örnektir ve örnekten hesaplanan ortalama populasyondan hesaplanana karşılık gelen bir istatistiktir (bu ortalamanın bir tahminidir). Araştırıcı üzerinde durduğu özellikleri istediği harfle tanımlayarak, bunların ortalamalarını üstüne çizgi koyarak ($\overline{A}$ *veya* $\overline{X}$ gibi) gösterebilir. Bunlara karşılık gelen parametreler ise μ_A ve μ_X ile gösterilir.

Bir araştırıcı Ankara Üniversitesi öğrencilerinin boş zamanlarını ne şekilde değerlendirdiği ile ilgili bir araştırma tasarlıyor olsun. Bu durumda araştırıcının istediği bilgileri elde edebilmesi için öğrencilere anket uygulaması gerekmektedir. Bu durumda Ankara Üniversitesinin tüm fakülte ve yüksek okullarındaki öğrenciler populasyonu oluşturur. Böyle bir araştırmada bütün öğrencilere anket uygulanması, araştırma için düşünülen süre ve maddi olanaklar dikkate alındığında, çok zordur. Bunun için Ankara Üniversitesi öğrencilerini (populasyonu) temsil edecek şekilde ve sayıda öğrenci seçilir. Belirli sayıda seçilen bu öğrenciler örneği oluşturur ve araştırıcı konusu ile ilgili anketi bu öğrencilere uygulayarak araştırmasını yürütür. Böylece belirli sayıdaki öğrencilere (örneğe) uyguladığı anket sonucunda elde ettiği verileri kullanarak yaptığı analizler ile bulduğu sonuçları yorumlar ve Ankara Üniversitesi öğrencileri (öğrenci populasyonu) için genelleştirir.

Örnekteki birey sayısına "**örnek genişliği**" denir. Bu araştırmada örnek genişliği 500'dür denirse, bunun anlamı Ankara Üniversitesi öğrencilerinden 500 tanesine anket uygulanmıştır yani örnekte 500 öğrenci vardır demektir.

Bir örneği oluşturan bireyler konu gereği, öğrenciler, hastalar, deney hayvanları vs. olabilir. Bir araştırıcı bir bölgedeki insanların kanlarındaki bakır ve çinko miktarları ile ilgili bir araştırma yapmayı düşünüyor olsun. Bu araştırıcının söz konusu bölgedeki bütün insanlardan kan alınması çok zor ve hatta olanaksızdır. Bu durumda bölgedeki insanları temsil edecek belirli sayıda kişi seçer. Belirlenen insanlar örneği oluşturur.

Örnekten elde edilen değerlerin güvenilir olması ve populasyon için genelleştirilebilecek sonuçlar vermesi için araştırıcının örneğini seçerken dikkat etmesi gereken önemli noktalar vardır. Bunlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

- Araştırıcı örneğe girecek bireyleri seçerken tarafsız (yansız) olmalıdır. Yani örneği oluşturacak bireyleri tamamen tesadüfi (rastgele) olarak seçmelidir.
- Araştırıcı örneğini alacağı populasyonu iyi tanımalıdır. Ve populasyonu temsil edebilecek yeterli sayıda bireyi örneğine almalıdır. Örnekteki birey sayısı arttıkça, örnekten tahmin edilen değer (hesaplanan istatistik) parametre değerine daha yakın olacak ve yapılan bu tahminin güvenirliliği artacaktır.

Örnek oluşturulduktan sonra araştırıcının rakamlarını doğru olarak toplaması gerekir. Yanlış olarak toplanan rakamlardan doğru sonuçları hesaplayabilecek hiç bir yöntem yoktur. Bunun için araştırıcı, rakamlarını toplarken kullanacağı sayma, ölçme veya analiz yöntemlerini iyi bilmekle birlikte sabırlı ve dürüst olmalıdır. Sayma, ölçme veya analiz yöntemleri ile elde ettiği rakamlar üzerinde beklentisi doğrultusunda düzeltmeler yapmamalıdır. Doğru olarak kaydettiği rakamları değerlendirerek sonuçlara ulaşmalı ve bu sonuçları yorumlamalıdır. Eğer beklediği sonuçlardan farklı değerler elde etmiş ise üzerinde çalıştığı konu ışığı altında yorumlar getirmelidir.

Populasyonu temsil edecek şekilde örnek alma teknikleri istatistiğin geniş bir konusudur. İstatistik eğitimi verilen kurumlarda ayrı bir ders olarak okutulur. Bu teknikleri açıklamak bu kitabın kapsamı dışındadır.

İstatistikte, örneğin herhangi bir özelliğini belirten rakamlara **GÖZLEM DEĞERİ** denir. Gözlem değerleri, eğer saymak sureti ile elde edilmişler ise **KESİKLİ GÖZLEM DEĞERİ**, tartmak, ölçmek veya herhangi bir analiz metodu kullanılarak elde edilmişler ise **SÜREKLİ GÖZLEM DEĞERİ** denir. Sürekli gözlem değerleri tarif aralığında her değeri alabilirler. Örneğin, öğrencilerin ağırlıkları tartmak, boyları ölçmekle elde edilir ki bunlar sürekli gözlem değerleridir. Fakat bir ailedeki çocuk sayısı, okunan gazete sayısı, bir işletmede çalışan eleman sayısı vs. saymak sureti ile elde edilir.

Bunlar da kesikli gözlem değerleridir. Eğer bir öğrencinin ağırlığı ölçülür ve 45.0 kg olarak kaydedilir ise bu ağırlık 44.5 ile 45.4 arasında her değeri alabilir. Fakat bir ailedeki çocuk sayısı, örneğin, ya 2'dir veya 3'dür. Bu iki değer arasında herhangi bir değer olması söz konusu değildir.

1.2. Verilerin Özetlenmesi

Araştırıcı örneğini oluşturduktan sonra, örneğe giren bireylerden rakamlarını toplar. Rakamlar toplandıktan sonra, değerlendirmenin ilk aşaması verilerin özetlenmesidir. Örneğin, 80 öğrencinin istirahat halinde dakikada kalp atışları sayısı aşağıdaki gibi belirlenmiş olsun.

87	98	81	83	96	89	81	60	67	102
83	69	77	62	77	82	68	76	72	80
85	79	58	81	99	93	73	75	68	70
75	105	80	79	76	77	72	84	81	55
89	70	81	48	71	67	80	75	77	80
88	61	81	75	73	81	63	83	82	87
82	83	82	71	65	62	82	87	69	74
50	74	66	77	93	74	78	52	85	73

Eğer araştırıcı yazdığı bir rapor veya bir makalede bu verileri yukarıdaki şekilde verirse okuyucuya 80 rakamı vermekten başka bir şey yapmamış olur. Okuyucu eğer nabız sayısı 80'den fazla olan kişilerin sayısını merak ederse rakamları tek tek kontrol ederek nabız sayısı 80'den fazla olan bireyleri sayması gerekir. Eğer veriler özetlenirse ileride açıklanacak olan eklemeli frekans tablolarından bu kolayca hesaplanabilir. Verilerin özetlenmesi frekans dağılım tablosu düzenleyerek veya grafikler çizilerek yapılabilir.

1.2.1. Frekans Dağılım Tablosu

Frekans dağılım tablosu, aynı veya birbirine yakın değere veya özelliğe sahip olan gözlem değerlerini aynı sınıfa koyarak ve her sınıftaki birey sayılarını belirterek hazırlanan tablolardır.

Frekans dağılım tablolarının hazırlanmasında güçlükle karşılaşılmaması için işlem basamakları aşağıda sıralanmıştır:

1. Frekans dağılım tablosu hazırlamanın ilk adımı frekans dağılım tablosunda kaç sınıfın olacağına karar vermektir. Genellikle frekans dağılım tablolarında 8-10 sınıf yapılır. Sınıf sayısının 8'den az ve 15'den fazla olmamasına dikkate edilir. Eğer sınıf sayısı 15'i geçerse özetlemeden beklenen amaca ulaşılmamış olur. En uygun sınıf sayısının belirlenmesinde aşağıda verilen Sturges formülü de kullanılabilir:

$$\text{Sınıf sayısı} = 1 + 3.3 \log(n)$$

Formülde n örnek genişliğidir. 80 öğrenciden oluşan örnek için hazırlanacak frekans dağılım tablosunda Sturges formülüne göre en uygun sınıf sayısı: 1+3.3 log (80)≅7'dir. Sınıf sayısı en az 8 olması istendiğinden ele alınan örnekte de 8 sınıf öngörülmüştür. Örnek genişliği 200 olsaydı bu sayı 1+3.3 log (200)≅9 olarak bulunacaktı.

2. Frekans dağılım tablosunda kaç sınıfın olacağına karar verildikten sonra yapılması gereken ikinci işlem basamağı, sınıf aralığının belirlenmesidir. Sınıf genişliği (sınıf aralığı) ard arda iki sınıfın sınırları arasındaki farktır ve yaklaşık olarak aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanır:

$$\text{Yaklaşık Sınıf Genişliği} = \frac{\text{Değişim Genişliği}}{\text{Sınıf Sayısı}}$$

$$\text{Değişim Genişliği} = \text{En büyük gözlem değeri} - \text{En küçük gözlem değeri}$$

İlk adımda yukarıdaki örnek için frekans dağılım tablosunda 8 sınıfın yapılmasına karar verilmişti. Bu durumda sınıf aralığı yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\text{Yaklaşık sınıf aralığı} = \frac{105-48}{8} = 7.125$$

Yaklaşık sınıf aralığı 7.125 olarak hesaplandıktan sonra araştırıcı sınıf aralığını, işlemleri kolay yürütebilmek için yuvarlaklaştırmalıdır. Ve sınıf aralığı 7 olarak alınabilir. Bu durumda, sınıf aralığında yapılan yuvarlaklaştırmaya bağlı olarak frekans dağılım tablosundaki sınıf sayısı kararlaştırılan sınıf sayısından bir-iki sınıf fazla veya az olabilir.

3. Frekans dağılım tablosunda sınıf sayısı kararlaştırılıp sınıf aralığı hesaplandıktan sonra sınıf sınırlarının belirlenmesi gerekir. Her sınıf alt ve üst sınırları ile belirtilir. İşlemlerin kolay yürütülmesi için ilk sınıfın alt sınırı örnekteki gözlem değerlerinin en küçüğü olarak seçilir (örneğimizde birinci sınıfın alt sınırı 48). Diğer sınıfların alt sınırları ise ilk sınıfın alt sınırına sınıf aralığı eklenerek hesaplanır. Sınıf sınırlarının duyarlılığı gözlem değerlerininki ile aynı olmalıdır. Ele alınan örnekte 48.0 veya 48.99 gibi bir sınır belirlenmez. Bir sınıfın alt sınırı ile bir sonraki sınıfın üst sınırı aynı olmamalıdır. Yani sınıf sınırları çakışmamalıdır. Ve birbirini takip eden iki sınıftan küçük olanın üst sınırı ile bundan sonrakinin alt sınırı arasında boşluk bırakılmamalıdır. Örnekteki en büyük gözlem değeri en son sınıfa girecek şekilde sınıflar oluşturulur.

4. Frekans dağılım tablosunda sınıfların alt ve üst sınırları hesaplandıktan sonra her sınıf için "**SINIF DEĞERİ**" hesaplanır. Sınıf değeri bir sınıfın alt sınırı ile üst sınırının orta noktasıdır ve söz konusu sınıfı en iyi temsil eden değerdir.

5. Frekans dağılım tablosundaki sınıflar düzenlendikten sonra sınıfların frekansları belirlenir. Örnekteki gözlem değerlerinin frekans dağılım tablosundaki sınıflardan hangisine dahil olduğu tek tek sırasıyla kontrol edilerek hangi sınıfa dahil olduğu kararlaştırılır ve böylece sınıfların frekansları önce işaretle sonra da rakamla belirlenir.

6. Frekans dağılım tablosundaki sınıfların frekansları mutlak olarak belirlendikten sonra "**Nisbi (%)**" frekanslar hesaplanır. Örneğimiz de 1. sınıfa ait % frekans 3*100/80=3.75 ve 2. sınıfa ait % frekans 4*100/80=5.0 olarak bulunmuştur.

Öğrencilerin dakikadaki kalp atışları ile ilgili örnek için yukarıda açıklanan bilgiler ışığında hazırlanan frekans dağılım tablosu Tablo 1.1'de verilmiştir.

TABLO 1.1. 80 öğrencinin dakikadaki kalp atış sayısı için düzenlenen frekans dağılım tablosu

Sınıflar	Sınıf Değeri	İşaretle Frekans	Sayı ile Frekans (Mutlak frekans)	% (Nisbi) Frekans
48-54	51.0	///	3	3.75
55-61	58.0	////	4	5.00
62-68	65.0	~~////~~ ////	9	11.25
69-75	72.0	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	18	22.50
76-82	79.0	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	26	32.50
83-89	86.0	~~////~~ ~~////~~ ///	13	16.25
90-96	93.0	///	3	3.75
97-103	100.0	///	3	3.75
104-110	107.0	/	1	1.25

1.2.2. Eklemeli Frekans Dağılım Tablosu

Frekans dağılım tablosu düzenlendikten sonra belirli bir değerden daha büyük veya daha küçük olan gözlem değerlerinin mutlak ve/veya nisbi miktarını belirtmek için eklemeli frekans dağılım tabloları düzenlenir. Eklemeli frekans dağılım tabloları "**...den daha az**" veya "**...den daha fazla**" eklemeli frekans tabloları olarak düzenlenebilir. Böylece belirli bir değerden daha küçük veya daha büyük gözlem değerlerinin (bireylerin) mutlak ve nisbi miktarları kolayca bulunabilir.

Eklemeli frekans dağılım tabloları düzenlenirken sınıfların "**Gerçek Sınırları**" kullanılır. **Gerçek sınır**, bir sınıfın üst sınırı ile bir sonraki sınıfın alt sınırının orta noktasıdır. Bu orta nokta önceki sınıfın **üst gerçek sınırı**, aynı zamanda sonraki sınıfın **alt gerçek sınırı**dır. Bir sınıf üst gerçek sınırında biter ve bu noktada sonraki sınıf başlar. Bu nokta söz konusu sınıfın alt gerçek sınırıdır.

ÖRNEK:

80 öğrencinin dakikada kalp atış sayısı için düzenlenen frekans dağılım tablosunda gerçek sınırların hesaplanması aşağıda açıklanmıştır:

Aşağıdaki frekans dağılım tablosunda birinci sınıfın gerçek sınırı hesaplanırken, eğer birinci sınıftan önce bir sınıf daha olsa idi bu sınıfın üst sınırı 47 olacağından, birinci sınıfın alt gerçek sınırı (47+48)/2=47.5 olarak bulunur. Bu nokta birinci sınıfın başladığı gerçek sınırdır. Aynı şekilde ikinci sınıfın gerçek sınırı (54+55)=54.5'tir. Bu ikinci sınıfın alt gerçek sınırı, birinci sınıfın ise üst gerçek sınırıdır. Diğer sınıflar için de bu şekilde hesaplanabileceği gibi birinci sınıfın gerçek sınırına sınıf aralığı eklenerek diğer sınıfların gerçek sınırları hesaplanabilir. Bu şekilde hesaplanan gerçek sınırlar Tablo 1.2'deki frekans dağılım tablosunda verilmiştir.

TABLO 1.2. 80 öğrencinin dakikada kalp atışları için düzenlenen frekans dağılım tablosundaki sınıflara ait alt gerçek sınırlar

Sınıflar	Alt gerçek sınır	Frekans
48-54	47.5	3
55-61	54.5	4
62-68	61.5	9
69-75	68.5	18
76-82	75.5	26
83-89	82.5	13
90-96	89.5	3
97-103	96.5	3
104-110	103.5	1
	110.5	0

Gerçek sınırlar hesaplandıktan sonra "...den daha az" ve "...den daha fazla" eklemeli frekans dağılım tabloları düzenlenebilir. "...den daha az" frekans dağılım tablosu düzenlenirken esas şudur: 47.5'den daha az değere sahip gözlem değeri sayısı 0'dır. 54.5'den daha az değere sahip gözlem değeri sayısı 3, yani önceki sınıfın frekansı kadardır. 61.5'den daha az değere sahip gözlem değerlerinin sayısı, bu sınıftan önceki sınıfların frekansları toplamı kadar, yani 7'dir. Ve diğer sınıflar için de "...den daha az" eklemeli frekansları aynı şekilde bulunur. Yani frekanslar yukarıdan aşağıya eklenerek bulunur. "...den daha fazla" eklemeli frekanslarının bulunması için yapılan işlemde "..den daha az" eklemeli frekansları için yapılan toplama işleminin tam tersidir. 110.5'den daha fazla değere sahip frekansların toplamı 0'dır. 103.5'den daha fazla değere sahip gözlem değerlerinin frekansı 1'dir. Ve diğer sınıflar içinde aynı işlem tekrarlanır. Bu sefer frekanslar aşağıdan yukarıya eklenerek tablo tamamlanır. Bu şekilde bulunan eklemeli frekanslar sınıfların gerçek sınırları ile birlikte Tablo 1.3'de verilmiştir.

Tablo 1.3'de görüleceği gibi eklemeli frekans tablolarında sınıf sayısı frekans dağılım tablosundaki sınıf sayısından bir fazladır. Aynı zamanda "...den daha az" ve "...den daha fazla" eklemeli mutlak frekansların toplamı örnek genişliğine bölünerek ...den daha az veya ...den daha fazla eklemeli nisbi frekansları bulunur.

TABLO 1.3. 80 öğrencinin dakikadaki kalp atış sayısı için ...den daha az ve ..den daha fazla eklemeli frekans dağılım tablosu

Alt gerçek sınır	Frekans	...den daha az eklemeli frekansları		...den daha fazla eklemeli frekansları	
		Mutlak	Nisbi(%)	Mutlak	Nisbi(%)
47.5	3	0	0.00	80	100.00
54.5	4	3	3.75	77	96.25
61.5	9	7	8.75	73	91.25
68.5	18	16	20.00	64	80.00
75.5	26	34	40.50	46	57.50
82.5	13	60	75.00	20	25.00
89.5	3	73	91.25	7	8.75
96.5	3	76	95.00	4	5.00
103.5	1	79	98.75	1	1.25
110.5	0	80	100.00	0	0.00

Eklemeli frekanslar bulunduktan sonra belirli bir değerden, örneğin dakikada kalp atışı 75.5'den daha fazla olanların örnekte %57.5'ini oluşturduğu, veya 61.5'den daha az olanların da %8.75 olduğu kolayca görülebilir.

1.2.3. Açık Uçlu Frekans Dağılım Tabloları

Bazı durumlarda araştırıcı örneğinden verileri elde ettiği zaman belirli bir değerden çok küçük veya çok büyük olan çok az sayıda gözlem değeri olduğunu görebilir. Bu gibi durumlarda açık uçlu frekans dağılım tabloları düzenlenir. Açık uçlu frekans dağılım tablolarının iki ucu açık olabileceği gibi tek ucu da açık olabilir.

Örneğin bir araştırıcı uyguladığı anket sonucunda kilosunu muhafaza için rejim yaptığını belirten 200 kişi tespit etmiş olsun. Bunların yaş gruplarına dağılımı incelendiğinde rejim uygulayanlar arasında, 19 yaşından küçük ve 54 yaşından büyük bireyler az olduğu için iki ucu açık frekans dağılım tablosu oluşturulmuştur. Düzenlenen frekans dağılım tablosu Tablo 1.4'de verilmiştir.

TABLO 1.4. 200 kişinin yaşları için düzenlenen frekans dağılım tablosu

Bu tip tablolar 2 ucu açık frekans dağılım tablosudur.

Yaş Grupları	Birey sayısı (f)
<24	9
25-29	47
30-34	57
35-39	37
40-44	27
45-49	9
50-54	7
>54	7

1.2.4. Kalitatif Sınıflı Frekans Dağılım Tabloları

Eczacılar odası son 3 yıl içinde Eczacılık fakültesinden mezun olanlardan rastgele seçtiği 200 eczacıyla yaptığı anket sonucunda çalışma şekillerini tespit etmiş olsun. Ankette eczacıların kendi hesaplarına açtıkları eczanede (A), bir başkasıyla ortak eczanede (B), özel sektörde eczacı olarak (C), devlet hizmetinde eczacı olarak (D) veya eczacılık dışında başka alanda (E) çalışıp çalışmadıkları sorularak bilgi toplanmıştır. Sonuçlar Tablo 1.5'de özetlenmiştir. Bu tablo da bir frekans dağılım tablosudur.

TABLO 1.5. 200 eczacının çalışma şekillerine göre sınıflandırılması

Çalışma şekilleri	Eczacı sayısı
A (kendi eczanesi)	90
B (ortak eczane)	30
C (özel sektör)	40
D (devlet hizmeti)	30
E (başka alanlar)	10

1.2.5. Kesikli Gözlem Değerleri İçin Frekans Dağılım Tabloları

Bazı durumlarda araştırıcı üzerinde çalıştığı örnekten dar sınırlar arasında değişen tamsayılı gözlem değerleri elde eder. Bu durumda frekans dağılım tablosunu nasıl düzenleyeceği topladığı tamsayılı değerlerin arasındaki farklılığa bağlıdır.

ÖRNEK 1:

Bir araştırıcı bir ilaç şirketinde ilaç tanıtıcı olarak çalışan kişilerin bir günde dolaştıkları yer sayısını araştırmış ve 50 kişinin dolaştığı yer sayısını aşağıdaki gibi belirlemiş olsun.

6	6	5	7	8	8	5	6	7	6
7	7	5	6	6	6	6	7	6	7
4	6	6	6	6	6	7	5	7	6
6	5	7	6	7	4	7	8	7	7
5	7	7	5	6	6	5	6	4	6

Bu durumda araştırıcı frekans dağılım tablosundaki sınıfları 4'den 8'e kadar belirlemesi yeterlidir. Çünkü topladığı gözlem değerleri arasında büyük farklılık yoktur. Bu şekilde düzenlenen frekans dağılım tablosu Tablo 1.6'da verilmiştir.

TABLO 1.6. 50 ilaç satış elemanın dolaştığı yer sayısı için düzenlenen frekans dağılım tablosu

Sınıflar (gidilen yer sayısı)	Frekans (pazarlamacı sayısı)
4	3
5	8
6	21
7	15
8	3

1.2.6. Sürekli Gözlem Değerleri İçin Frekans Dağılım Tablosu

Genellikle biyolojik araştırmalarda üzerinde durulan özellikler sürekli dağılım gösterirler. Bu özellikleri belirlemek üzere tespit edilen gözlem değerleri de süreklidir. konunun özelliği, rakamların büyüklüğü ve kullanılan ölçü aletinin duyarlılığına bağlı olarak sürekli olan bu gözlem değerleri virgülden sonra belirli sayıda hane yürütülerek kaydedilirler. Örneğin bir doğumevinde doğan bebeklerin doğum ağırlıkları 50 gr duyarlı bir terazide tespit ediliyor olsun. Bu doğumevinde bir ayda doğan 120 erkek bebeğin ağırlıkları aşağıdaki gibi olsun.

3.45	3.40	3.15	3.70	3.20	3.50	3.10	3.20	3.65	3.10
3.20	3.25	3.20	3.30	3.35	3.60	3.30	3.60	3.60	3.30
3.20	3.55	3.50	3.95	3.30	3.50	3.15	3.60	3.30	3.25
3.60	3.50	3.40	3.25	3.30	3.10	3.40	3.60	3.50	3.50
3.80	3.60	3.80	3.50	3.85	3.45	3.70	3.40	3.10	3.20
3.20	3.35	3.10	3.10	3.45	3.30	3.30	3.45	3.30	3.70
3.60	3.35	3.40	3.50	3.40	3.35	2.85	3.10	3.30	3.85
3.40	3.25	3.45	3.45	3.65	3.55	3.85	3.20	3.75	3.65
3.35	3.80	3.50	3.20	3.20	3.30	3.40	3.00	3.40	3.20
3.75	3.40	3.40	3.45	3.40	3.20	3.25	3.50	3.30	3.20
3.35	3.30	3.35	3.10	3.60	3.45	3.55	3.40	3.35	3.30
3.00	3.40	3.50	3.65	3.55	3.60	3.65	3.10	3.40	3.40

Verilerin incelenmesinden görüleceği gibi en küçük değer 2.85 ve en büyük değer de 3.95'dir. Eğer 10 sınıf yapılması istenirse;

$$\text{Sınıf aralığı} = \frac{3.95 - 2.85}{10} = 0.11 \cong 0.1$$

Sınıf aralığının 0.1 kg alınması hem diğer sınıfların sınırlarının belirlenmesinde hem de ileride yapılacak hesapların kolaylığı yönünden yerinde bir karardır.

Daha önce belirlenen ilkeler doğrultusunda 120 bebeğin doğum ağırlığına ilişkin frekans dağılımı Tablo 1.7'deki gibidir. Daha önce de belirtildiği gibi birbirini takip eden iki sınıfın üst ve alt sınırları çakışmamalı ve aralarında boşluk olmamalıdır.

TABLO 1.7. 120 erkek bebeğin doğum ağırlıkları için düzenlenen frekans dağılım tablosu

Sınıflar	Sınıf değeri	f_i	% frekans
2.85 -2.94	2.895	1	0.83
2.95 - 3.04	2.995	2	1.67
3.05 - 3.14	3.095	9	7.50
3.15 - 3.24	3.195	15	12.50
3.25 - 3.34	3.295	19	15.83
3.35 - 3.44	3.395	24	20.00
3.45 - 3.54	3.495	19	15.83
3.55 - 3.64	3.595	14	11.67
3.65 - 3.74	3.695	8	6.67
3.75 - 3.84	3.795	5	4.17
3.85 - 3.94	3.895	3	2.50
3.95 - 4.04	3.995	1	0.83

Tablo 1.7'de verilen frekans dağılım tablosu için eklemeli frekans dağılımı ise Tablo 1.8'deki gibi düzenlenir.

TABLO 1.8. Tablo 1.7'de verilen frekans dağılım tablosundan düzenlenen eklemeli frekans dağılım tablosu

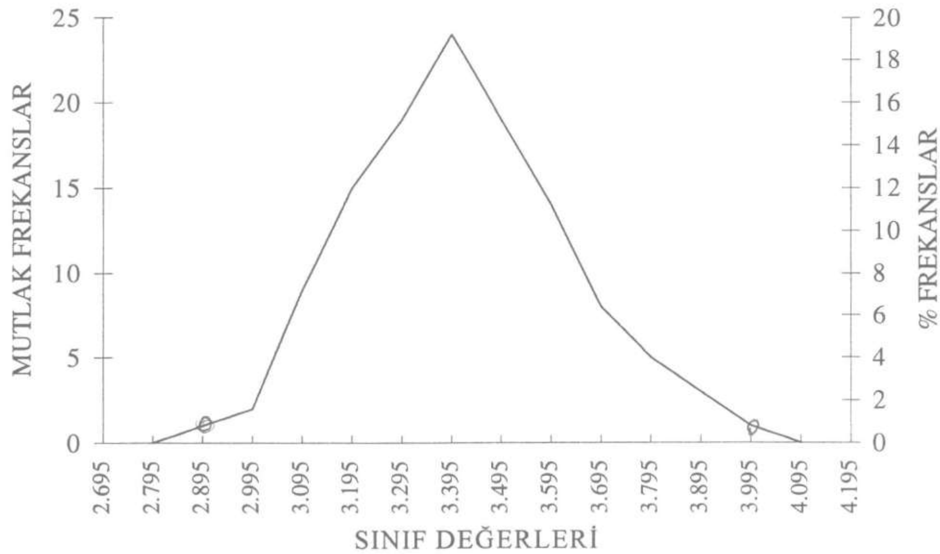
Alt gerçek sınır	---den daha az		---den daha fazla	
	Mutlak	%	Mutlak	%
2.845	0	0.00	120	100.00
2.945	1	0.83	119	99.17
3.045	3	2.50	117	97.50
3.145	12	10.00	108	90.00
3.245	27	22.50	93	77.50
3.345	46	38.33	74	61.67
3.445	70	58.33	50	41.67
3.545	89	74.17	31	25.83
3.645	103	85.83	17	14.17
3.745	111	92.50	9	7.50
3.845	116	96.67	4	3.33
3.945	119	99.17	1	0.83
4.045	120	100.00	0	0.00

1.3. Grafikler

Frekans dağılım tablosu düzenlendikten sonra grafikler çizilebilir. Eğer frekans dağılım tablosu sürekli gözlem değerleri için düzenlenmişse bu durumda araştırıcı "**POLİGON**" veya "**HİSTOGRAM**" çizebilir. Fakat düzenlenen frekans dağılım tablosu kesikli (tam) gözlem değerleri kullanılarak hazırlanmışsa bu durumda sadece "**ÇUBUK DİYAGRAM**" çizilebilir.

1.3.1. Poligon Kesikli veriler için

Frekans dağılım tablosu hazırlandıktan sonra eğer araştırıcı isterse poligon grafiği çizebilir. Frekans poligonu çizilirken X eksenine "sınıf değerleri" ve Y eksenine de her sınıfa ait mutlak veya nisbi (%) "frekans" konularak grafik çizilir. 120 bebeğin doğum ağırlığı için düzenlenen frekans dağılım tablosundan çizilen frekans poligonu Şekil 1.1'deki gibidir.

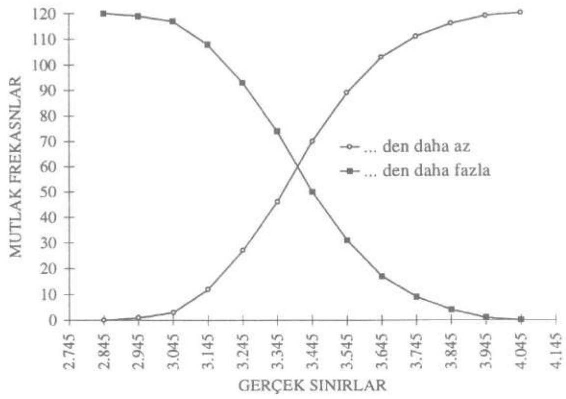


ŞEKİL 1.1. Tablo 1.1'de verilen 120 bebeğin doğum ağırlığı için düzenlenmiş frekans dağılım tablosundan çizilen frekans poligonu

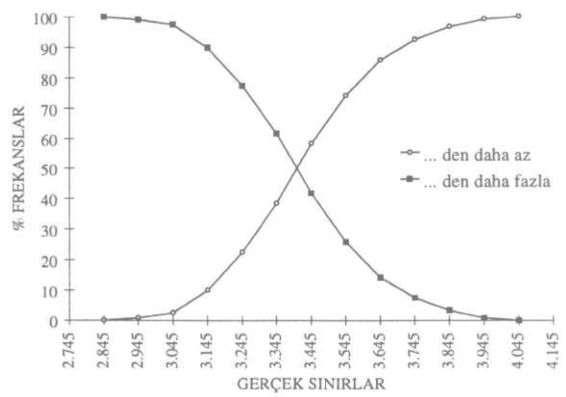
Frekans poligonu çizilirken, poligon frekans dağılım tablosundaki birinci sınıftan önce olduğu varsayılan sınıfın, sınıf değerinden başlar, en son sınıftan sonra varolduğu varsayılan sınıfın sınıf değerinde biter.

Yukarıda açıklandığı şekilde eklemeli frekans poligonları da çizilebilir. 120 bebeğin doğum ağırlığı için düzenlenen mutlak ve nisbi eklemeli frekans poligonları Şekil 1.2.a ve b'deki gibidir. Bu grafikte, belirli bir doğum ağırlığından daha az veya daha çok doğum ağırlığına sahip olan bebeklerin sayısı kolayca görülebilir. Şekil 1.2.b'den de görüldüğü gibi, nisbi "...den daha az" ve "...den daha fazla" eklemeli poligonları %50 noktasında birbirini keser.

a.



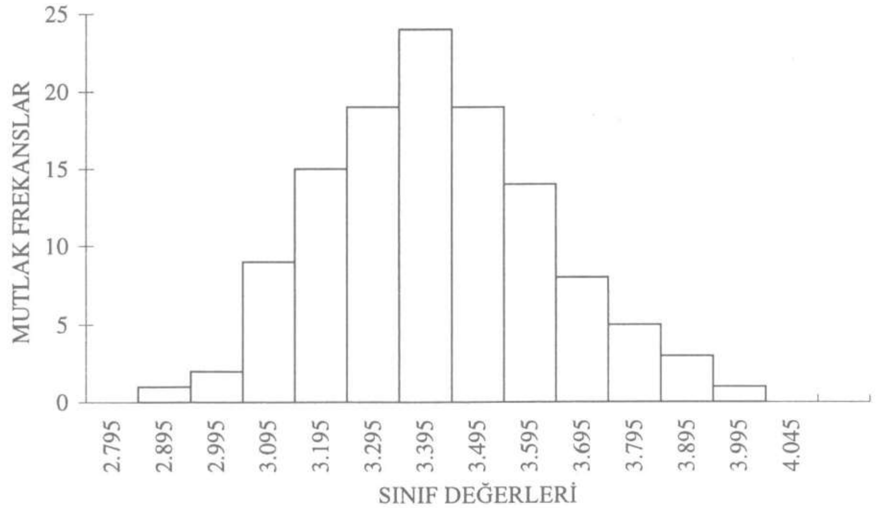
b.



ŞEKİL 1.2. Tablo 1.8'de verilen frekans dağılım tablosu için mutlak (a) ve nisbi (b) eklemeli frekans poligonları

1.3.2. Histogram Sürekli veriler için

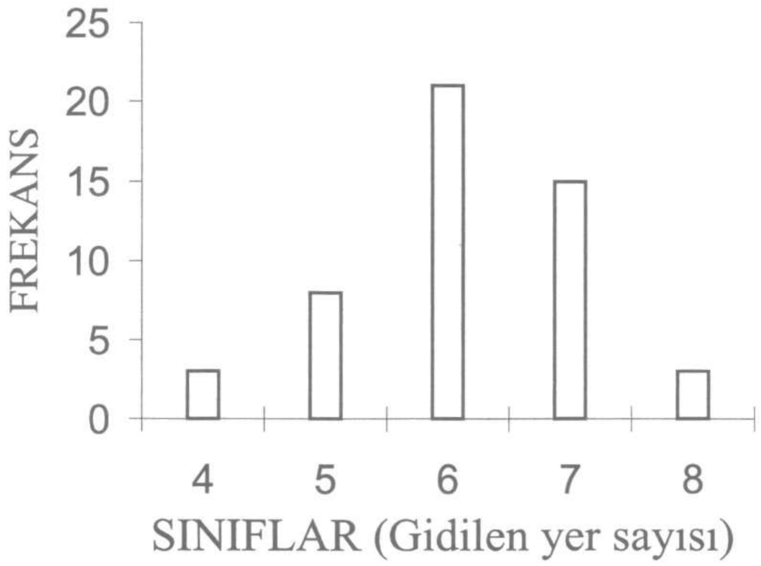
Düzenlenen bir frekans dağılım tablosu için histogram da çizilebilir. Histogram çizilirken X-eksenine gerçek sınırlar ve Y-eksenine her sınıfa ait frekanslar konur. Ve dikdörtgenler oluşturulur. Dikdörtgenlerin orta noktaları Şekil 1.3'te verilen histogramda da görüldüğü üzere sınıf değerlerine karşılık gelir.



ŞEKİL 1.3. Tablo 1.1'de verilen 120 bebeğin doğum ağırlığı için düzenlenmiş frekans dağılım tablosundan çizilen histogram

1.3.3. Çubuk Diyagram

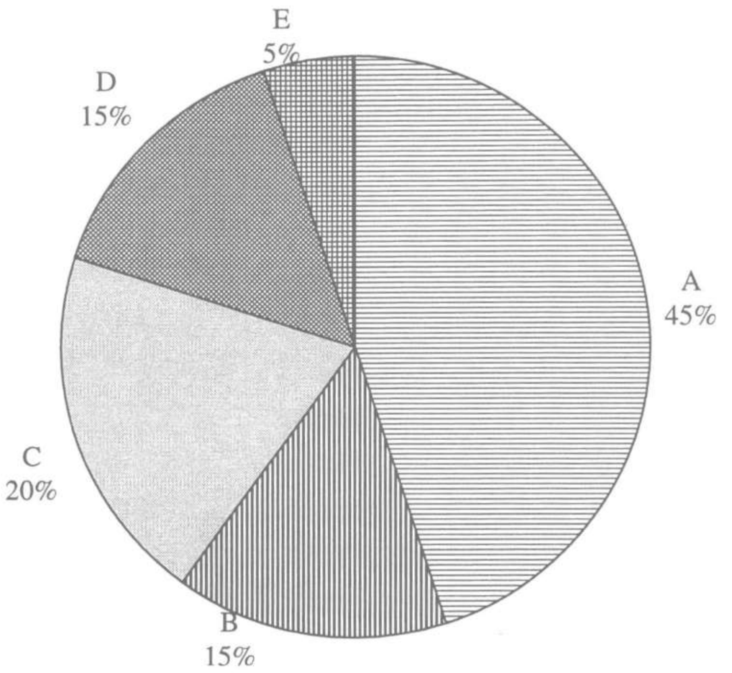
Eğer düzenlenen frekans dağılım tablosu tamsayılı gözlem değerleri içinse, bu frekans dağılım tabloları için çubuk diyagram çizilir. X-eksenine sınıflar ve Y-eksenine sınıflara ait frekanslar konur. Çubuk diyagram çizildikten sonra çubuklar çizgi ile birleştirilmez çünkü tamsayılı gözlem değerleri söz konusu iki değer arasında her hangi bir değeri alamaz. Çubuk diyagram, 50 ilaç satış elemanının bir günde gittiği yer sayıları için düzenlenen ve Tablo 1.6'da verilen frekans dağılım tablosu için çizilerek Şekil 1.4'de verilmiştir.



ŞEKİL 1.4. Tablo 1.6'da verilen frekans dağılım tablosu için çizilen çubuk diyagram

1.3.4. Çember (Pasta Dilimi) Grafik

Pasta dilimi şeklindeki grafikte bir bütünün kısımları pastanın dilimleri şeklinde gösterilir. Daha önce eczacıların çalışma şekilleri ile ilgili anket sonucunda elde edilen verilerden düzenlenen ve Tablo 1.5'de özetlenen verilerin pasta dilimi şeklinde gösterimi Şekil 1.5'de görülmektedir.



ŞEKİL 1.5. Eczacıların çalışma biçimlerine ait Tablo 1.5'de verilen tabloya ait çember (pasta dilimi) grafik

1.4. Bilgisayar Uygulaması

Verilerin özetlenmesi ve frekans dağılım tablolarının düzenlenmesi istatistik paket programları kullanılarak kolayca yapılabilir. Bu ve bundan sonraki bölümlerin sonlarında her bölümde verilen konu ile ilgili MINITAB paket programı kullanılarak bilgisayar çıktıları ve bu çıktıların yorumlanmasına ait örnekler verilecektir.

Genellikle bu tip paket programlarda veriler satır ve sütunlardan oluşan bir elektronik tabloya kaydedilir. Eğer bir bireyden birden fazla özellik tespit edilmişse bunların her biri ayrı bir sütuna kaydedilir. MINITAB paket programında sütunlar C1, C2... olarak adlandırılmışlardır. Sütun sayısı bu paket programın sürümlerine göre değişik ve gelişen bilgisayar teknolojisine bağlı olarak artmaktadır. Oldukça eski sürümlerinde 100 sütun vardır. Yeni sürümlerinde bu sayı daha fazladır. İstenirse sütunlara işlenen özelliklerin isimleri de verilebilir.

Paket programın komutları kullanılarak istenilen istatistik işlem ve analiz yapılabilir.

ÖRNEK 1:

120 bebeğin doğum ağırlığı için MINITAB paket programı kullanılarak frekans dağılım tablosu şöyle hazırlanabilir:

Bebeklerin ağırlıklarının işlendiği sütuna "AGIRLIK" adı verilmiş olsun. MINITAB'da histogram yapılması için kullanılan komut 'GStd' ve daha sonra 'HISTOGRAM''dır. Bu komuttan sonra verilerin hangi sütunda bulunduğu belirtilir. Gene bu paket programda her komut için birçok alt komutlar vardır. Bunlar kullanıcıya birçok seçenek sunar. Alt komutları kullanmak için esas komutun sonuna ";" konur. Aşağıdaki ilk satırda "AGIRLIK" sütunundaki verilerin histogramının yapılacağı, ikinci satırdaki "START" alt komutu ile ilk sınıfın sınıf değerinin 2.895 ve son sınıfın değerinin 3.995 olacağı, üçüncü satırdaki "INCREMENT" alt komutu ile de sınıf aralığının 0.1 olacağı belirtilmiştir. 0.1 değerinin sonuna konulan nokta ile de alt komutların bittiği belirtilmiştir.

```
MTB> GStd.
MTB > HISTOGRAM 'AGIRLIK';
SUBC>  Start 2.895 3.995;
SUBC>  Increment 0.1.

Histogram of AGIRLIK   N = 120

Midpoint  Count
  2.895     1 *
  2.995     2 **
  3.095     9 *********
  3.195    15 ***************
  3.295    19 *******************
  3.395    24 ************************
  3.495    19 *******************
  3.595    14 **************
  3.695     8 ********
  3.795     5 *****
  3.895     3 ***
  3.995     1 *
```

Yukarıda verilen ve MINITAB kullanılarak hazırlanan frekans dağılım histogramda 'MIDPOINT', frekans dağılım tablosundaki sınıf değerlerine karşılık gelmektedir. 'COUNT' olarak verilen sütun ise her sınıfa ait frekansları göstermektedir. Eğer kullanıcı isterse histogramdaki ilk sınıf değerini, son sınıf değerini ve sınıf aralığını, yukarıda verilen komutlarda görüldüğü gibi, kendi tanımlayabilir. Eğer kullanıcı bu değerleri tanımlamazsa paket program otomatik olarak sınıf değerlerini ve sınıf aralığını kendisi belirleyecektir. Buna ait örnek ise aşağıda verilmektedir:

MTB>GStd.

MTB > HISTOGRAM 'AGIRLIK'

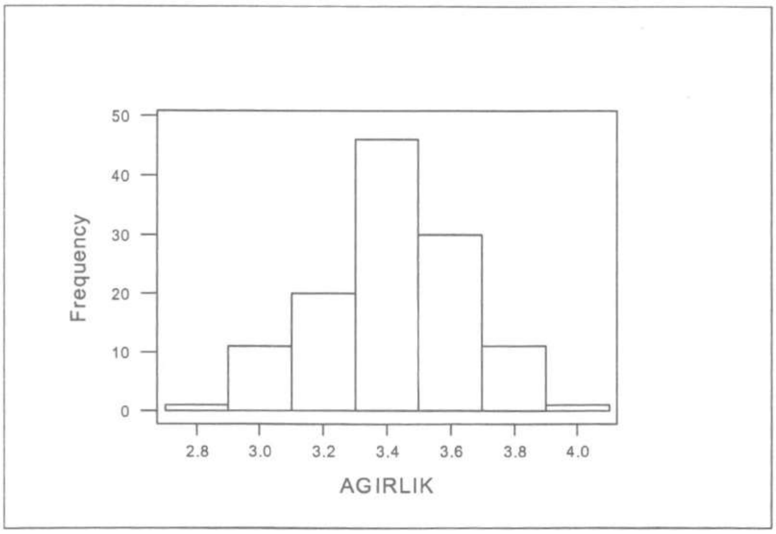
Histogram of AGIRLIK N = 120

```
Midpoint  Count
   2.9     1 *
   3.0     2 **
   3.1     9 *********
   3.2    15 ***************
   3.3    19 *******************
   3.4    24 ************************
   3.5    19 *******************
   3.6    14 **************
   3.7     8 ********
   3.8     5 *****
   3.9     3 ***
   4.0     1 *
```

Araştırıcı isterse histogram grafiği de oluşturabilir. Bunun komutu ise;

MTB>HIST 'AGIRLIK'

şeklindedir. Bu komutu verdiği zaman aşağıdaki histogram grafiği oluşturulur.



ÖRNEK 2:

Bir hastaneye bir günde gelen hastalardan tesadüfen seçilen 150 tanesinin yaşları aşağıdaki gibi tespit edilmiştir.

40	47	40	36	43	50	42	50	37	50	38	42	53	49
48	54	39	38	50	44	54	40	42	43	42	48	55	33
46	43	48	48	49	46	41	42	48	40	50	33	45	37
43	47	41	43	41	45	57	51	52	39	50	47	40	50
45	45	39	42	56	46	46	47	45	42	34	44	39	36
44	32	39	53	44	41	42	39	41	35	44	47	52	48
51	59	31	36	36	42	49	40	41	54	40	41	51	46
39	42	48	45	60	41	46	50	51	45	45	41	38	39
41	48	50	42	29	44	43	53	41	40	41	40	44	37
44	41	44	49	48	44	52	58	38	44	36	48	52	57
58	44	51	48	51	45	52	43	43	55				

Bu veriler MINITAB'a girilerek aşağıdaki komut verildiği zaman araştırıcı frekans dağılım tablosunu düzenlemiş olur. Burada 'HIST' komutunda 'INCR 3' frekans dağılım tablosunda sınıf aralığının 3 olacağını belirtmektedir.

```
MTB>GStd.
MTB > HIST C1;
SUBC> INCR 3.
Histogram of C1   N = 150

Midpoint  Count
   30       2 **
   33       4 ****
   36       9 *********
   39      21 *********************
   42      32 ********************************
   45      27 ***************************
   48      20 ********************
   51      20 ********************
   54       8 ********
   57       5 *****
   60       2 **
```

Eğer herhangi bir başlangıç noktası ve artış miktarı belirtilmezse program ilk sınıfın sınıf değerini ve sınıf aralığını aşağıda verildiği gibi kendi belirleyecektir.

```
MTB>GStd.
MTB > HIST C1
Histogram of C1   N = 150
Midpoint  Count
    28      1 *
    32      4 ****
    36     12 ************
    40     35 ***********************************
    44     39 ***************************************
    48     29 *****************************
    52     20 ********************
    56      8 ********
    60      2 **
```

Aşağıdaki örnekte verildiği gibi araştırıcı isterse ilk sınıfın sınıf değerini de START komutunu kullanarak kendi belirleyebilir.

```
MTB> GStd.
MTB > HIST C1;
SUBC> START 29;
SUBC> INCR 3.
Histogram of C1   N = 150

Midpoint  Count
  29.00     1 *
  32.00     4 ****
  35.00     7 *******
  38.00    15 ***************
  41.00    33 *********************************
  44.00    29 *****************************
  47.00    22 **********************
  50.00    19 *******************
  53.00    11 ***********
  56.00     5 *****
  59.0 0    4 ****
```

BÖLÜM II

TANITICI İSTATİSTİKLER

Araştırıcı örneğini oluşturacak bireyleri seçip, verilerini topladıktan sonra, bu örneğinin özelliklerini tanımlayacak değerleri hesaplar. Bu hesaplanan değerlere tanıtıcı istatistikler adı verilir. Bir örnek için hesaplanan tanıtıcı istatistikler merkezi eğilim ölçüleri (ortalamalar) ve değişim ölçüleri olmak üzere iki grupta toplanır.

2.1. Merkezi Eğilim Ölçüleri (Ortalamalar)

Ortalamalar, merkezi eğilim ölçüleri olarak da adlandırılır. Çünkü gözlem değerleri ortalama etrafında toplanma eğilimi gösterilirler. Merkezi eğilim ölçüleri, bir örnekteki bireyleri temsil eden tipik değerlerdir. Merkezi eğilim ölçüleri aşağıda sıralandığı gibi 5 gruba ayrılır:

1. Aritmetik Ortalama,
2. Ortanca değer (Median),
3. Tepe Değeri (Mode),
4. Geometrik Ortalama,
5. Harmonik Ortalama.

Eğer sadece "ortalama" denirse bunun ile kastedilen "aritmetik ortalama"dır.

2.1.1. Aritmetik Ortalama

Bir örneği en iyi temsil eden değer

Aritmetik ortalama, n tane gözlem değerinin toplamının n'e bölümüdür ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \ldots(2.1)$$

Eşitlikte, x_i, örnekteki i inci gözlem değeri, n, toplam gözlem sayısıdır.

ÖRNEK 1:

Bir sınıftan tesadüfi olarak seçilen 10 öğrencinin ağırlıkları aşağıdaki gibi bulunmuş olsun.

49 51 55 50 57 60 55 50 62 56

Bunların aritmetik ortalaması 2.1 numaralı eşitlikten;

$$\overline{X} = \frac{49+51+55+50+57+60+55+50+62+56}{10} = \frac{545}{10} = 54.5$$

olarak hesaplanır.

ÖRNEK 2:

Verilerin özetlenmesi açıklanırken (BÖLÜM I) 80 öğrencinin kalp atışları örnek olarak verilmişti. Araştırıcı bu verilerini özetledikten ve grafik ile sunduktan sonra dakikadaki ortalama kalp atışı sayısını hesaplamak isteyebilir. Bu durumda, (2.1) numaralı eşitlik kullanılarak, aritmetik ortalama, 80 değerin toplamının gözlem sayısına bölümü ile aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$\overline{X} = \frac{87+98+81+83+\ldots+50+74+66}{80}$$

$$\overline{X} = \frac{6146}{80} = 76.8$$

2.1.1.1. Frekans Dağılım Tablosundan Ortalamanın Hesaplanması

Eğer herhangi bir örnekte verilerin frekansları farklı ise aritmetik ortalamanın hesaplanmasında bu dikkate alınır. Örnekte gözlenenler ve frekansları aşağıdaki gibi olsun:

X_i	6	8	10	12	14
f_i	1	2	4	3	1

Burada aritmetik ortalama:

$$\overline{X} = \frac{1x6 + 2x8 + 4x10 + 3x12 + 1x14}{1+2+4+3+1} \cong 10.2'\text{dir.}$$

Araştırıcı örneğinden elde ettiği değerler için frekans dağılım tablosu düzenlemiş ise aritmetik ortalamayı benzer şekilde frekans dağılım tablosundan hesaplayabilir. Bu amaçla aşağıdaki eşitlik kullanılır:

frekans dağılım tablosundaki sınıf sayısı

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad \ldots(2.2)$$

Eşitlikte f_i, i. sınıfın frekansı, k, frekans dağılım tablosundaki sınıf sayısı, X_i, i. sınıfın sınıf değeridir. Frekans dağılım tablosundan ortalama hesaplanırken, her bir sınıf değerinin aritmetik ortalamaya katkısı, söz konusu sınıfın frekansı ile tartılır.

ÖRNEK 3:

120 bebeğin doğum ağırlığı ile ilgili örnek için araştırıcı frekans dağılım tablosunu düzenlemişse ortalamayı Tablo 2.1'de verilen frekans dağılım tablosundan (2.2) numaralı eşitliği kullanarak hesaplayabilir.

TABLO 2.1. 120 bebeğin doğum ağırlıkları için düzenlenen frekans dağılım tablosu ve frekans dağılım tablosundan aritmetik ortalamanın hesaplanması

Sınıf Değeri X_i	Frekans f_i	$X_i f_i$
2.895	1	2.895
2.995	2	5.990
3.095	9	27.855
3.195	15	47.925
3.295	19	62.605
3.395	24	81.480
3.495	19	66.405
3.595	14	50.330
3.695	8	29.560
3.795	5	18.975
3.895	3	11.685
3.995	1	3.995

$$\overline{X} = \frac{2.895 + 5.990 + 27.855 + \ldots + 11.685 + 3.995}{1 + 2 + 9 + \ldots + 3 + 1}$$

$$\overline{X} = \frac{409.7}{120} = 3.414\,\text{kg}$$

Örnekten elde edilen veriler tek tek toplanarak hesaplanan ortalama ile frekans dağılım tablosundan hesaplanan ortalama arasında küçük bir farklılık olacaktır. Bunun sebebi frekans dağılım tablosu düzenlenirken verilerin özetlenmiş olmasıdır. Eğer veriler tek tek toplanarak aritmetik ortalama hesaplanırsa 3.403 kg olarak bulunur.

2.1.1.2. Aritmetik Ortalamanın Özellikleri

1. Bir örnekteki gözlem değerlerinin örnek ortalamasından farkları alınır ve toplanırsa bu sapmaların toplamı sıfır olarak bulunur. Yani, $\sum (X_i - \overline{X}) = 0$ 'dır.

2. Bir örnekteki gözlem değerlerinin hepsine bir A sabiti eklenirse, elde edilen değerlerin ortalaması, önceki ortalamadan A kadar fazla olacaktır. Yani;

$$y_i = x_i + A \text{ ise}$$
$$\overline{y} = \overline{x} + A \text{ olarak bulunur.}$$

3. Bir örnekteki gözlem değerlerinden hepsinden bir A sabiti çıkarılırsa, elde edilen değerlerin ortalaması, önceki ortalamadan A kadar az olacaktır. Yani:

$$y_i = x_i - A \text{ ise}$$
$$\overline{y} = \overline{x} - A \text{ olarak bulunur.}$$

4. Bir örnekteki gözlem değerlerinin hepsi c gibi bir sabit ile çarpılırsa, elde edilen değerlerin ortalaması önceki değerlerin ortalamasının c katı kadardır:

$$y_i = cx_i$$
$$\overline{y} = c\overline{x}$$

5. Bir örnekteki gözlem değerlerinin hepsi c gibi bir sabite bölünürse, elde edilen değerlerin ortalaması önceki değerlerin ortalamasının c ile bölümüne eşit olacaktır:

$$y_i = \frac{x_i}{c}$$
$$\overline{y} = \frac{\overline{x}}{c}$$

2.1.1.3. Kısa Yoldan Aritmetik Ortalamanın Hesaplanması

Frekans dağılım tablosundan ortalamanın nasıl hesaplanabileceği yukarıda gösterilmişti. Bir frekans dağılım tablosu düzenlendikten sonra aritmetik ortalamaya ait özelliklerden de yararlanarak aritmetik ortalama kısa yoldan hesaplanabilir. Kısa yoldan aritmetik ortalama hesaplanırken frekans dağılım tablosunda her sınıfa ait sınıf değerleri işlem yapması kolay "b" değerlerine aşağıdaki şekilde çevrilir:

$$b_i = \frac{X_i - A}{c} \qquad \ldots (2.3)$$

Yani ortalamanın 3. ve 5. özellikleri birlikte uygulanır, A ve c özel olarak seçilir. Böylece yeni değişken tam sayılardan oluşur. (2.3) numaralı eşitlikte, X_i, i. sınıfın sınıf değeri, A, frekans dağılım tablosunda ortalardaki bir sınıfın sınıf değeri, c, sınıf aralığıdır. A değerinin hangi sınıf değeri olacağı hakkında her hangi bir kural yoktur. Fakat mümkün olduğu kadar ortadaki bir sınıf değerinin seçilmesi işlem yapılması daha kolay olan "b" değerlerinin bulunmasını sağlar.

Ortalamanın özelliklerine göre b_i'lerin ortalaması $\bar{b} = \dfrac{\bar{X} - A}{c}$ dir. x_i'lerin ortalaması, $\bar{b}$, A ve c bilindiğine göre $\bar{X} = c\bar{b} + A$ şeklinde bulunur.

Frekans dağılım tablosundaki her sınıf için "b" değerleri hesaplandıktan sonra "b" değerlerine ait aritmetik ortalama aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i b_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

"b" değerlerine ait ortalama hesaplanırken "b" değerleri ile frekansların çarpımlarının toplamı bulunurken cebirsel toplam yapılır, yani "b" değerlerinin işareti dikkate alınır. Kısa yoldan aritmetik ortalama Tablo 2.1'de verilen frekans dağılım tablosundan

Tablo 2.2'deki gibi hesaplanır. A sabiti olarak en çok frekansa sahip olan 3.395 değeri alınarak birinci sınıf için b_1=(2.895-3.395)/0.1=-5 ve diğer sınıflar içinde aynı şekilde hesaplanmış ve Tablo 2.2'de verilmiştir.

TABLO 2.2. Kısa yoldan aritmetik ortalamanın hesaplanması

Sınıf Değeri X_i	Frekans f_i	b_i	$f_i\, b_i$
2.895	1	-5	-5
2.995	2	-4	-8
3.095	9	-3	-27
3.195	15	-2	-30
3.295	19	-1	-19
3.395=A	24	0	0
3.495	19	1	19
3.595	14	2	28
3.695	8	3	24
3.795	5	4	20
3.895	3	5	15
3.995	1	6	6

$$\sum f_i b_i = -5-8-27-30-19+0+19+28+24+20+15+6=23$$

$$\bar{b}=\frac{23}{120}\cong 0.1917$$

$b_i = \dfrac{x_i - A}{c}$ → seçilen sınıf değeri

↓ sınıf aralığı

120 bebeğin ortalama doğum ağırlığı ($\overline{X}$) ise;

$x_i = b_i c + A$

$\bar{X} = \bar{b}c + A = 3{,}395 + 0{,}1(0{,}1917)$

$$\overline{X} = (0.1917)(0.1) + 3.395 = 3.414 \text{ kg olarak bulunur.}$$

$= 3{,}414\,\text{kg}$

2.1.2. Ortanca Değer (Median)

Örnekten elde edilen gözlem değerleri büyüklüklerine göre sıralandığı zaman en ortadaki gözlem değeri ortanca değerdir (median). Tüm gözlem değerlerinin yarısı bu değerden küçük diğer yarısı bu değerden büyüktür. Eğer üzerinde çalışılan örnekte tek sayıda gözlem değeri varsa ortanca değer $\frac{(n+1)}{2}$ ci gözlem değeridir. Örnekteki gözlem değeri sayısının çift olduğu zaman ise ortanca değer, $\frac{n}{2}$ ci gözlem değeri ile $(\frac{n}{2}+1)$ ci gözlem değerinin ortalamasıdır.

Örnek 1:

On beş bireylik bir örnekte elde edilen ölçümler aşağıdaki gibi bulunmuştur.

7 14 18 18 26 16 8 28 12 18 9 45 20 15 8
n=15

Bu örnek için ortanca değeri hesaplayabilmek için ilk olarak gözlem değerlerinin büyüklüklerine göre (küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe doğru) aşağıdaki gibi sıraya konulması gerekir.

7 8 8 9 12 14 15 16 18 18 18 20 26 28 45

Gözlem değerleri büyüklüklerine göre sıraya konduktan sonra $\frac{(n+1)}{2}$ = 8. gözlem değeri yani 16 bu örnek için ortanca değerdir.

Örnek 2:

Eğer üzerinde çalışılan örnekte çift sayıdaki gözlem değeri büyüklüklerine göre aşağıdaki şekilde sıralanarak verilmiş ise;

7 8 8 9 15 18 25 29
n=8

Bu örnek için ortanca değer, 4'üncü (yani $\frac{n}{2}$ci) ile 5'inci (yani $(\frac{n}{2}+1)$ci) gözlem değerinin ortalamasıdır. Bunun değeri de $\frac{9+15}{2}=12$'dir.

2.1.2.1. Frekans Dağılım Tablosundan Ortanca Değerin Hesaplanması

Frekans dağılım tablosunda ortanca değer $\frac{n}{2}$ci gözlem değerinin bulunduğu sınıftadır. Ortanca değer hesaplanırken birinci sınıftan başlayarak frekanslar toplanır ve $\frac{n}{2}$ci gözlem değerinin dahil olduğu sınıf ortanca değerin bulunduğu sınıftır. Ortanca değerin frekans dağılım tablosundan hesaplanması 120 bebeğin doğum ağırlığı için düzenlenen frekans dağılım tablosu kullanılarak açıklanacaktır.

Bu örnekte doğum ağırlıkları büyüklük sırasına konduğu zaman değerlerin 60'ından küçük, 60'ından büyük olan değer ortancadır. Tablo 1.8'de verilmiş olan frekans dağılım tablosunda "...den daha az" eklemeli frekanslarına bakıldığı zaman 60. değerin 7'inci sınıfta olduğunu görülür. Bu sınıfın sınırlarını ve eklemeli frekanslarını aşağıdaki gibi göstermek mümkündür.

3.345 c=0.1 3.445

46 frekans 70 frekans

Sınıf aralığında 24 gözlem değerinin eşit aralıklar ile dağıldığını kabul ederek 60'ıncı gözlem değerini (yani ortancayı) bulmak için aşağıdaki şekilde bir orantı kurulur. Burada ortanca değer 46. gözlem değerinden, yani 3.345 kg'dan sonra 14 frekansın kapladığı sınıf aralığı kadar daha fazladır. Aşağıda kurulan orantıda 14 frekansın 0.0583 birimlik sınıf aralığına dağılmış olduğu bulunmuştur. Bu değer 46. gözlem değerinin bulunduğu sınıfın gerçek sınırına eklenerek ortanca hesaplanır.

0.1 sınıf aralığında	24 frekans
x	14 frekans

$$X = \frac{(0.1)(14)}{24} \cong 0.0583$$

ve **Ortanca değer=3.345+0.0583=3.4033** olarak bulunur.

Frekans dağılım tablosundan ortanca değer hesaplamak için aşağıdaki formül de kullanılabilir. Bu eşitlik yukarıda açıklanan çözümün formül şeklinde ifadesidir.

$$\text{Ortanca Değer} = L_1 + \frac{(n:2) - (\sum f)_1}{f_{OD}} c \qquad \text{...(2.4)}$$

2.4 numaralı eşitlikte, L_1, ortanca değerin bulunduğu sınıfın alt gerçek sınırı, $(\sum f)_1$, ortanca değerin bulunduğu sınıftan önceki sınıfların frekansları toplamı, f_{OD}, ortanca değerin bulunduğu sınıfın frekansı, n, toplam gözlem sayısı, c, sınıf aralığıdır. 2.4 numaralı eşitlik kullanılarak:

$$\text{Ortanca değer} = 3.345 + \frac{120/2 - 46}{24}(0.1) = 3.4033$$

olarak hesaplanır.

Eğer 120 değer sıraya konur 60'ıncı ve 61'inci değerlerin ortalaması alınırsa 3.400 olarak bulunur. Aradaki önemli olmayan fark, frekans dağılım tablosunda verilerin özetlenmesinden ileri gelir.

Frekans dağılım tablosu düzenlendikten sonra araştırıcı 120 bebekten en az doğum ağırlığına sahip %25'nin hangi değerden daha az ağırlığa sahip olduğunu (yani ilk çeyrek değeri) hesaplamak isteyebilir. Ortanca değerin bulunmasına benzer şekilde bu değer de hesaplanabilir. 120 bebeğin %25'i 30 bebek demektir. Yani, 120 bebeğe ait doğum ağırlığı küçükten büyüğe doğru sıralandığı zaman bebeklerin %25'i 30'uncu sıradaki bebekten daha az doğum ağırlığına sahiptir. Tablo 1.8'de verilen frekans dağılım tablosunda 30. bebek frekansı 19 olan sınıftadır. Bu durumda (2.4) numaralı eşitliğe benzer şekilde söz konusu ağırlık;

$$\text{İlk çeyrek değer} = 3.245 + \frac{120/4 - 27}{19}(0.1) = 3.261$$

olarak bulunur.

120 bebekten en fazla doğum ağırlığına sahip %25'nin hangi değerin üzerinde (yani, üçüncü çeyrek değeri) olduğunu bulmak için de küçükten büyüğe doğru sıralanmış olan doğum ağırlıklarından 90.'sını (120'nin %75'i 90'dır) hesaplamak gerekir. Tablo 1.8'deki frekans dağılım tablosunda 90. gözlem değeri frekansı 14 olan sınıftadır. Yine (2.4) numaralı eşitliğe benzer şekilde söz konusu doğum ağırlığı;

$$\text{Üçüncü çeyrek (\%75'lik) değer} = 3.545 + \frac{120(3/4) - 89}{14}(0.1) = 3.552$$

olarak bulunur.

2.1.2.2. Ortanca Değerin Kullanıldığı Durumlar

Bazı durumlarda bir örnek için aritmetik ortalama iyi bir tanıtıcı değer olmayabilir. Bu durumlarda ortanca değerin kullanılması gerekir. Ortanca değerin tercih edildiği durumlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

- Üzerinde çalışılan örnekte gözlem değerlerinde büyük çarpıklık varsa ortanca değer kullanılır. Çünkü aritmetik ortalama sapan değerlerden etkileneceği için söz konusu örnek için iyi bir tanıtıcı istatistik olamaz. Örneğin her hangi bir bölgede 6 eczanenin günlük satışları 25 35 55 49 33 500 milyon TL olsun. Aritmetik ortalama 116.2 milyon TL (697/6=116.2) olarak bulunur ki bu yanıltıcıdır. Çünkü ortalama 500'den etkilenmiştir. Bu ve bu gibi sapan değerlerin bulunduğu örneklerde ortanca değer kullanılır. Bu örnek için ortanca değer 42 milyon TL'dir ve örneği daha iyi tanımlar.

- Bazı durumlarda araştırıcı bir veya iki ucu açık frekans dağılım tablosu düzenlemek durumunda kalabilir. Bir veya iki ucu açık frekans dağılım tablolarında aritmetik ortalama hesaplanamaz. Bu gibi durumlarda da söz konusu frekans dağılım tablosu için ortanca değer hesaplanabilir. Örneğin araştırıcı 195 eczanenin aylık net gelirleri için düzenlenen ve Tablo 2.3'de verilen iki ucu açık bir frekans dağılım tablosu üzerinde çalışıyor ise ancak ortanca değeri hesaplayabilir.

TABLO 2.3. 195 eczanenin net aylık gelirleri için düzenlenen iki ucu açık frekans dağılım tablosu

Aylık gelir (milyon TL)	Frekans
<10	20
10-24	38
25-39	46
40-54	31
55-69	18
70-84	12
85-99	18
>99	12

Bu örnek için ortanca değer:

Ortanca $\text{değer} = 24.5 + \dfrac{(195)/2 - 58}{46}(15) \cong 37.38$ olarak bulunur.

- Örneğe seçilmiş olan tüm ünitelerden veri elde etmek için uzun zaman gerekiyorsa bu gibi durumlarda da ortanca değer hesaplanır.

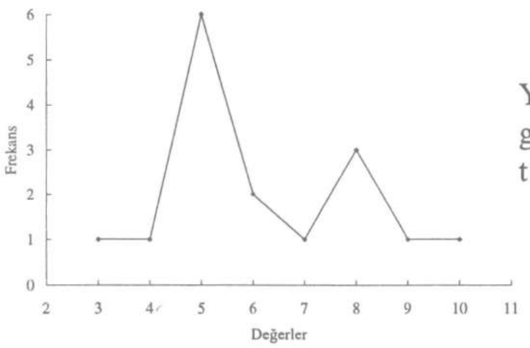
Örneğin, bir çeşit kanser için geliştirilen ilaçla tedavi edilmekte olan 8 hastanın, tedaviye başladıktan sonraki yaşam süreleri aşağıdaki gibi olsun:

Hasta no	6	7	3	2	1	4	5	8
Yaşam süresi (ay)	16	16	18	22	26	yaşıyor	yaşıyor	yaşıyor

Görüldüğü gibi araştırmaya başladıktan 26 ay sonra hastalardan üçü yaşamaktadır. Bu durumda aritmetik ortalama hesaplanamaz, ancak sıraya konmuş bu sonuçlardan 4. ve 5. sıradakilerin ortalaması olan ortanca değer (burada 24 ay) hesaplanabilir.

2.1.3. Tepe Değeri (Mode)

Bir örnekte frekansı en yüksek yani en çok tekrarlanan gözlem değeri tepe değeridir. Bir örneği oluşturan değerler 5,6,7,5,4,8,8,8,5,10,5,5,6,3,9,5 ise bu örnekte iki tepe değeri vardır ve bunlar 5 ve 8'dir.



Yandaki şekilde görüldüğü gibi 5 ve 8 bu örnekteki tepe değerleridir.

Frekans dağılım tablosu düzenlendiği zaman bir örneğin tepe değeri, frekans dağılım tablosunda frekansı en yüksek olan sınıfın sınırları içindedir. Tepe değerinin frekans dağılım tablosundan hesaplanması için aşağıda verilen eşitlik kullanılır:

$$\text{Tepe Değeri} = L_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} c \qquad ...(2.5)$$

Eşitlikte, L_1, tepe değerinin bulunduğu sınıfın alt gerçek sınırı, d_1, tepe değerinin bulunduğu sınıfın frekansı ile bir önceki sınıfın frekansı arasındaki fark, d_2, tepe değerinin bulunduğu sınıfın frekansı ile bir sonraki sınıfın frekansı arasındaki fark, c ise sınıf aralığıdır.

ÖRNEK:

120 bebeğin doğum ağırlığı ile ilgili örnek için düzenlenen frekans dağılım tablosunda tepe değeri, frekansı 24 olan sınıfın

sınırları içindedir. Bu sınıfın alt gerçek sınırı 3.345, tepe değerinin bulunduğu sınıftan bir önceki sınıfın frekansı 19 ve bir sonraki sının frekansı 19'dur. Bu değerler 2.5 numaralı eşitlikte yerine konursa;

$$\text{Tepe Değeri} = 3.345 + \frac{(24-19)}{(24-19)+(24-19)}(0.1) = 3.395$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi tepe değerinin bulunduğu sınıftan önce ve sonraki sınıfların frekansları eşit ise tepe değeri sınıf değerine eşittir.

Frekans dağılım tablosunda eğer ardışık iki sınıfın frekansı birbirine eşit ve en yüksek ise bu durumda ilk sınıfın alt gerçek sınırı alınır ve sınıf aralığı iki katına çıkarılır, yani bu iki sınıf tek bir sınıf gibi kabul edilerek tepe değeri hesaplanır. Fakat ardışık olmayan iki sınıfın frekansı en yüksek ise bu durumda ayrı ayrı iki tepe değeri hesaplanır.

ÖRNEK:

Bir araştırıcı 115 bireyden oluşan örneği için Tablo 2.4'de verilen frekans dağılım tablosunu oluşturmuş olsun. Burada tepe değeri hesaplanmak istenirse, en yüksek frekansa sahip ardışık iki sınıfın olduğu görülür.

TABLO 2.4. 115 bireyden elde edilen veriler için düzenlenen frekans dağılım tablosu

Sınıflar	Sınıf değeri X_i	Alt gerçek sınır	Frekans f_i
5.0-9.9	7.45	4.95	5
10.0-14.9	12.45	9.95	9
15.0-19.9	17.45	14.95	16
20.0-24.9	22.45	19.95	17
25.0-29.9	27.45	24.95	20
30.0-34.9	32.45	29.95	20
35.0-39.9	37.45	34.95	14
40.0-44.9	42.45	39.95	10
45.0-49.9	47.45	44.95	4

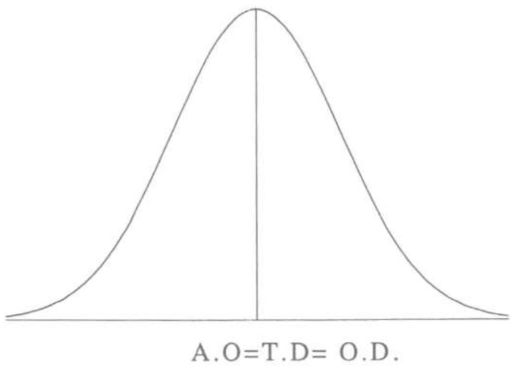
Bu örnek için tepe değeri hesaplanırken 5. sınıfın (20 frekansa sahip ilk sınıfın) alt gerçek sınırı alınır ve 2.6 numaralı eşitlikte "c", sınıf aralığı olarak, frekans dağılım tablosundaki sınıf aralığının iki katı, yani "c" yerine frekans dağılım tablosunda sınıf aralığı olan 5.0 değil 10.0 kullanılır.

$$\text{Tepe Değeri} = 24.95 + \frac{(20-17)}{(20-17)+(20-14)}(10.0) \cong 28.28$$

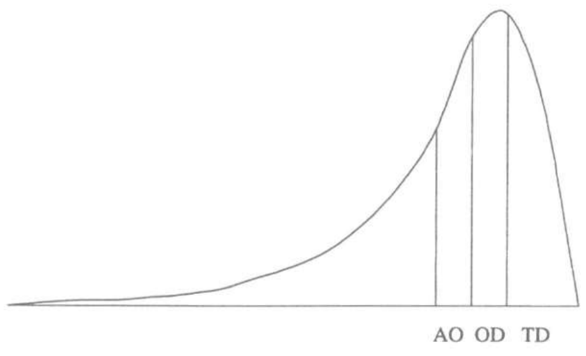
olarak bulunur.

2.1.4. Aritmetik Ortalama, Ortanca ve Tepe Değeri Arasındaki İlişki

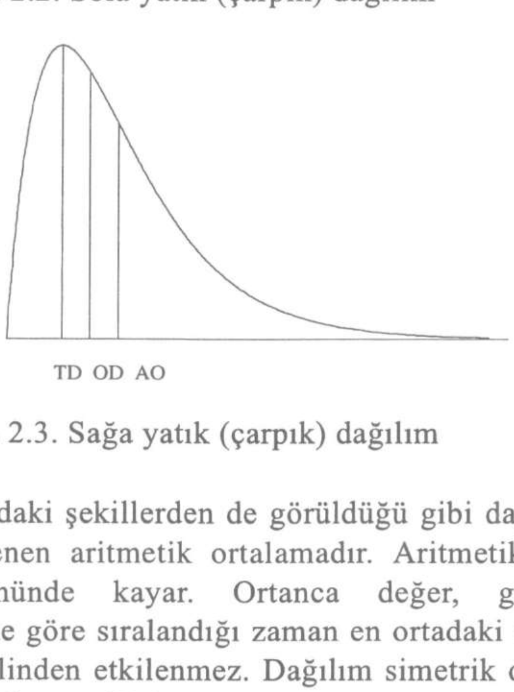
Aritmetik ortalama, ortanca ve tepe değerinin sıralanışı, örnekten elde edilen gözlem değerlerinin dağılımına bağlıdır. Eğer dağılım simetrik (Şekil 2.1) ise her üç ortalama da aynı değere sahiptir. Şekil 2.2'de gösterildiği gibi dağılım sola yatık (çarpık) bir dağılım ise en küçük aritmetik ortalama, en büyük ise tepe değeridir. Dağılım sağa yatık (çarpık) (Şekil 2.3) olduğu zaman ise en büyük aritmetik ortalama, en küçük tepe değeridir.



ŞEKİL 2.1. Normal (Simetrik) dağılım



ŞEKİL 2.2. Sola yatık (çarpık) dağılım



ŞEKİL 2.3. Sağa yatık (çarpık) dağılım

Yukarıdaki şekillerden de görüldüğü gibi dağılımın şeklinden en çok etkilenen aritmetik ortalamadır. Aritmetik ortalama sapan değerler yönünde kayar. Ortanca değer, gözlem değerleri büyüklüklerine göre sıralandığı zaman en ortadaki değer olduğu için dağılımın şeklinden etkilenmez. Dağılım simetrik olduğu zaman her üçü de örneğin özelliklerini aynı derecede tanımlarken, dağılım simetriden uzaklaştıkça ortanca değer daha güvenilir bir tanıtıcı istatistik haline gelir.

2.1.5. Geometrik Ortalama

n tane pozitif değerin geometrik ortalaması bunların çarpımlarının n. dereceden köküdür.

$$G.O = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n}$$

Eğer örnek genişliği büyük ise geometrik ortalama gözlem değerlerinin logaritmalarının ortalamasının anti logaritması olarak da aşağıda verildiği gibi hesaplanabilir.

$$\log \; G.O = \frac{1}{n}[(\log(x_1) + \log(x_2) + ... + \log(x_n)]$$

$$G.O = \text{antilog}(\log \; G.O)$$

ÖRNEK 1:

Bir örnekte elde edilen veriler 2, 4, 8, 16, 32 ise bu örnek için geometrik ortalama

$$G.O = \sqrt[5]{2.4.8.16.32} = 8.0$$

Veya

$$\log G.O = 1/5[(\log(2)+\log(4)+\log(8)+\log(16)+\log(32)]$$
$$=0.9031$$
$$G.O = \text{antilog}(0.9031) = 8.0$$

ÖRNEK 2:

Geometrik ortalama eşit zaman aralıkları ile değişen oranlar için kullanılır. Örneğin bir işçinin ücreti birbirini izleyen 3 yılda %16, %20 ve %32 oranında artmış ise ortalama artış:

$$G.O = \sqrt[3]{(1.16)(1.2)(1.32)} \cong 1.225$$

Ortalama % artış 22.5'tir.

2.1.6. Harmonik Ortalama

Harmonik ortalama verilerin terslerinin ortalamasının tersidir. Ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$H.O = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}}$$

$$= \frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}$$

ÖRNEK 1:

Harmonik ortalamanın kullanımı bir hız problemi örneği ile açıklanacaktır. A ve B şehirleri arasında y km uzunluktaki bir yolu 3 araba z_1 , z_2 ve z_3 zamanında gidiyor olsun.

y

A B

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{3y}{z_1 + z_2 + z_3}, \qquad \text{zaman} = z = \frac{\text{yol}}{\text{hız}} \quad \text{olduğundan}$$

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{3y}{\frac{y}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{y}{h_3}}$$

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{3y}{y(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3})}$$

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{3}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}}$$

olarak bulunur ki bu harmonik ortalamadır. A ve B şehirleri arasındaki yolu 1. araba 120 km/s, 2. araba 100 km/s ve 3. araba ise 50 km/s hızla gidiyor ise ortalama hız:

$$H.O = \frac{3}{\frac{1}{120} + \frac{1}{100} + \frac{1}{50}} \cong 78.26 \text{ km/s}$$

2.2. Değişim Ölçüleri

Araştırıcı verilerini topladığı zaman bunlar arasında bir farklılık olduğunu görecektir. Bu farklılık varyasyondur. Bir örnekte elde edilen gözlem değerlerinin arasındaki farklılığın yani varyasyonun sayısal olarak ifadesi için kullanılan istatistikler değişim ölçüleridir. Değişim ölçüleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. Değişim Genişliği
2. Ortalama Sapma
3. Varyans
4. Standart Sapma
5. Varyasyon Katsayısı

2.2.1. Değişim Genişliği

Değişim genişliği (D.G) bir örnekteki en küçük gözlem değeri ile en büyük gözlem değeri arasındaki farktır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

D.G=En büyük gözlem değeri -En küçük gözlem değeri ...(2.6)

ÖRNEK:

a örneği:	7	11	14	5	8	10	16	21	D.G=21-5=16
b örneği:	5	14	13	12	14	17	16	21	D.G=21-5=16

Değişim genişliği yaygın olarak kullanılan iyi bir değişim ölçüsü değildir. Çünkü sadece bir örnekteki en büyük gözlem değeri ile en küçük gözlem değeri arasındaki farkı verir. Örneği oluşturan tüm gözlem değerlerinin birbirinden olan farklılıkları hakkında bir bilgi vermez.

2.2.2. Ortalama Sapma

Bir örnekteki gözlem değerlerinin ortalamadan olan sapmalarının mutlak değerlerinin ortalamasına ortalama sapma (O.S) denir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$O.S = \frac{\sum_{i=1}^{n} |(x_i - \bar{x})|}{n} \qquad ...(2.7)$$

ÖRNEK:

Yukarıda verilen a ve b örnekleri için ortalama sapmaları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

a örneğinin ortalaması=11.5

$$O.S_a = \frac{|(7-11.5)| + |(11-11.5)| + ... + |(21-11.5)|}{8} = \frac{33.0}{8} = 4.125$$

b örneğinin ortalaması=14.00

$$O.S_b = \frac{|(5-14)| + |(14-14)| + ... + |(21-14)|}{8} = \frac{24}{8} = 3.00$$

Ortalama sapma hesaplanırken gözlem değerlerinin birbirinden olan farklılığı değil ortalamadan olan sapmaları dikkate alınır. Fakat ortalama sapma tercih edilen bir değişim ölçüsü değildir. Çünkü ortalama sapma hesaplandıktan sonra bu, varyasyonu meydana getiren kaynaklara göre analiz edilemez, yani ortalama sapma istatistik testlere uygun bir değişim ölçüsü değildir. Bu sebepten dolayı tercih edilen değişim ölçüsü varyanstır.

σ^2

2.2.3. Varyans

Yaygın olarak kullanılan değişim ölçüsü varyanstır. Varyans eğer populasyondan hesaplanıyorsa parametredir ve σ^2 ile gösterilir, örnekten hesaplanıyorsa bir istatistiktir ve S^2 ile gösterilir. Varyansın birimi aslında vardır fakat belirtilemez. Varyans aşağıdaki formüller kullanılarak hesaplanır.

Standart sapma varyansın kare köküdür.

Populasyonda: popülasyon ortalaması

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\text{Kareler toplamı}}{\text{Birey sayısı}} \qquad \ldots(2.8)$$

Ö rnekte:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{(n-1)} = \frac{\text{kareler toplamı}}{\text{Serbestlik derecesi}} \qquad \ldots(2.9)$$

Yukarıdaki eşitliklerde, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ ve $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ kareler toplamı ve kısaca $\sum d_x^2$ olarak gösterilir, N populasyondaki birey sayısı ve (n-1) örnek için serbestlik derecesidir. Kareler toplamı ($\sum d_x^2$), gözlem değerlerinin ortalamadan sapmalarının (farklarının) karelerinin toplamıdır. Varyans örnekten hesaplanırken serbestlik derecesine yani (n-1)'e bölünür. Çünkü populasyon ortalaması bilinmediği zaman ortalama örnekten hesaplanır ve kareler toplamı hesaplanırken μ yerine $\overline{x}$ kullanılır. Yani serbestlik derecesindeki 1 sayısı, bir parametre yerine istatistik kullanılmasındandır.

ÖRNEK 1:

Üzerinde çalışılan örnekten elde edilen veriler 1 2 3 4 ve 5 ise bu örnek için varyans aşağıdaki şekilde hesaplanır:

Örneğin ortalaması, $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$

Kareler toplamı;

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 10$$

Varyans, $S^2 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \dfrac{10}{5-1} = 2.5$ olarak bulunur.

ÖRNEK 2:

Ortalama sapmaları hesaplanan örnekler için varyansların hesaplanması.

a örneği için varyansın hesaplanması:

a örneğinin ortalaması,

$$\overline{x} = \frac{7+11+14+5+8+10+16+21}{8} \cong 11.5$$

Kareler toplamı;

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = (7-11.5)^2+(11-11.5)^2+...+(21-11.)^2 = 194.0$$

Varyans, $S^2 = \dfrac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{(n-1)} = \dfrac{194.0}{8-1} \cong 27.71$ olarak bulunur.

b örneği için varyansın hesaplanması:

b örneğinin ortalaması,

$$\overline{x} = \frac{5+14+13+12+14+17+16+21}{8} \cong 14.0$$

Kareler toplamı;

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = (5-14.0)^2+(14-14.0)^2+...+(21-14.0)^2 = 148.0$$

Karelerin toplamı = $\sum x_i^2$
Kareler toplamı = $\sum d_x^2$

Varyans, $S^2 = \dfrac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1} = \dfrac{148.0}{8-1} \cong 21.14$ olarak bulunur.

Gözlem sayısı = 5
Gözlemlerin toplamı = 27
Gözlemlerin karelerinin toplamı = 163
old. göre varyans ve standart sapmayı hesaplayın

ÖRNEK 3:

Bir örneğe ait aritmetik ortalama hesaplandığı zaman aritmetik ortalamanın virgülden sonra devirli bir değer bulunabilir. Örneğin elde edilen veriler 2, 2 ve 3 ise bu örneğe ait ortalama $\bar{x} = 2.33\bar{3}$'tür. Yukarıdaki şekilde kareler toplamı hesaplandığı zaman ortalamanın yaklaşık bir değer alınmasında dolayı bir hata yapılmış olur. Bu sebeple ve işlemlerin daha kolay yürütülmesinden ve yuvarlaklaştırma hatası barındırmamasından dolayı kareler toplamı aşağıdaki verilen eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$\sum d_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} \qquad \ldots(2.10)$$

Yukarıda da verildiği şekilde örnekteki gözlem değerlerinin kareleri alınarak toplanır ve bu toplamdan gözlem değerlerinin toplamının karesinin gözlem sayısına bölümü çıkarılarak kareler toplamı hesaplanmış olur.

Verilerin 2, 2 ve 3 olduğu örnek için kareler toplamı;

$$\sum d_x^2 = (2^2 + 2^2 + 3^2) - \frac{(2+2+3)^2}{3} = 17 - \frac{49}{3} \cong 0.67$$

ve bu örnek için varyans;

$$S^2 = \frac{0.67}{(3-1)} = 0.335$$

2.2.3.1. Frekans Dağılım Tablosundan Varyansın Hesaplanması

Araştırıcı üzerinde çalıştığı örnek için frekans dağılım tablosunu oluşturmuş ise varyansı frekans dağılım tablosundan hesaplayabilir. Frekans dağılım tablosundan varyansın hesaplanması için kullanılan eşitlik:

$$S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i - 1} \qquad \ldots(2.11)$$

Eşitlikte, k frekans dağılım tablosundaki sınıf sayısı, f_i i. sınıfın frekansı, X_i, i. sınıfın sınıf değeridir.

ÖRNEK 1:

Frekans dağılım tablosundan varyansın hesaplanması.

X_i	f_i	f_iX_i	$f_iX_i^2$
1	1	1	1
2	3	6	12
3	2	6	18
5	2	10	50

$\sum f_i X_i = 23$

$\sum f_i X_i^2 = 81$

$\sum f_i = 8$

Varyans, (2.11) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$S^2 = \frac{81 - \frac{(23)^2}{8}}{8-1} = 2.125 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 2:

120 bebeğin doğum ağırlığı için Tablo 2.1'de verilen frekans dağılım tablosunda varyansın hesaplanması ile ilgili bilgiler Tablo 2.5'de verilmiştir.

TABLO 2.5. Frekans dağılım tablosundan varyansın hesaplanması

Sınıf değeri X_i	Frekans f_i	f_iX_i	$f_iX_i^2$
2.895	1	2.895	8.381
2.995	2	5.990	17.940
3.095	9	27.855	86.211
3.195	15	47.925	153.120
3.295	19	62.605	206.284
3.395	24	81.480	276.625
3.495	19	66.405	232.086
3.595	14	50.330	180.936
3.695	8	29.560	109.224
3.795	5	18.975	72.010
3.895	3	11.685	45.513
3.995	1	3.995	15.960

Tablo 2.5'de verilen bilgiler kullanılarak varyansın hesaplanması aşağıda gösterilmiştir.

$$\sum f_iX_i = 409.7$$

$$(\sum f_iX_i)^2 = 167854.09$$

$$\sum f_iX_i^2 = 1404.290$$

$$\sum d_x^2 = 1404.29 - \frac{167854.09}{120} = 5.5059$$

$$S^2 = \frac{5.5059}{(120-1)} \cong 0.0463$$

2.2.3.2. Varyansın Özellikleri

1. Kareler toplamı ve dolayısı ile varyans minimumdur. Bir örnekteki gözlem değerlerinin ortalamadan başka bir değerden sapmalarının karelerinin toplamı, ortalamadan olan sapmalarının karelerinin toplamından daha büyüktür. Yani $\sum(x_i - a)^2$ eğer $a = \overline{x}$ ise minimumdur.

ÖRNEK:

x_i	$x_i - \bar{x}$
3	-1
5	1
6	2
2	-2

$\sum x = 16$

$\bar{x} = 4$

Eğer kareler toplamı hesaplanırken a=3 olarak alınsa bu durumda hesaplanacak sapma kareler toplamı 14, a=6 alınsa kareler toplamı 26 olarak bulunur. Kareler toplamı $a = \bar{x}$ olduğu zaman minimumdur. Bu durumda kareler toplamı 10'a eşittir.

2. Bir örnekteki gözlem değerlerine sabit bir değerin eklenmesi veya çıkarılması yeni elde edilecek değerlerin varyansını değiştirmez. Yani (A sabit olmak üzere);

$$y_i = x_i \pm A \quad \text{ise} \quad \sum d_y^2 = \sum d_x^2 \quad \text{dolayısı ile}$$
$$S_y^2 = S_x^2$$

ÖRNEK:

x_i	$y_i = x_i - 2$	$z_i = x_i + 2$
3	1	5
5	3	7
6	4	8
2	0	4

$\sum d_x^2 = 10.0$

$\sum d_y^2 = 10.0$

$\sum d_z^2 = 10.0$

Verilen örnekten görüldüğü gibi sabit bir sayının eklenmesi veya çıkarılması kareler toplamını ve dolayısıyla varyansı değiştirmez.

3. Bir örnekteki gözlem değerleri sabit bir değer ile çarpılırsa, yeni değerlerin varyansı, eski değerlerin varyansının sabit sayının karesi ile çarpımına eşittir. Yani (c sabit bir sayı olmak üzere);

$$y_i = cx_i \quad \text{ise} \quad \sum d_y^2 = c^2 \sum d_x^2 \quad \text{dolayısı ile}$$
$$S_y^2 = c^2 S_x^2$$

ÖRNEK:

x_i	$y_i = (2)x_i$	$z_i = (4)x_i$
3	6	12
5	10	20
6	12	24
2	4	8

$$\sum d_x^2 = 10.0$$
$$\sum d_y^2 = 40.0$$
$$\sum d_z^2 = 160.0$$

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi X değerlerine ait kareler toplamı 10.0 iken Y değerlerine ait kareler toplamı X değerlerine ait kareler toplamının 2'nin karesi ile çarpımına ve Z değerlerine ait kareler toplamı X değerlerine ait kareler toplamının 4'ün karesi ile çarpımına eşittir.

4. Bir örnekteki değerler sabit bir değere bölünürse, yeni değerlerin varyansı, eski gözlem değerlerinin varyansının sabit sayının karesi ile bölümüne eşittir. Yani (c sabit bir sayı olmak üzere;

$$y_i = \frac{x_i}{c} \quad \text{ise} \quad \sum d_y^2 = \frac{\sum d_x^2}{c^2} \quad \text{dolayısı ile}$$

$$S_y^2 = \frac{S_x^2}{c^2}$$

ÖRNEK:

x_i	$y_i = x_i/2$	$z_i = x_i/4$
3	1.5	0.75
5	2.5	1.25
6	3.0	1.5
2	1.0	0.5

$$\sum d_x^2 = 10.0$$
$$\sum d_y^2 = 2.5 = \frac{10}{4}$$
$$\sum d_z^2 = 0.625 = \frac{10}{16}$$

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi X değerlerine ait kareler toplamı 10.0 iken Y değerlerine ait kareler toplamı X değerlerine ait kareler toplamının 2'nin karesi ile bölümüne ve Z değerlerine ait kareler toplamı X değerlerine ait kareler toplamının 4'ün karesi ile bölümüne eşittir.

2.2.3.3. Frekans Dağılım Tablosundan Kısa Yoldan Varyansın Hesaplanması

Aritmetik ortalamada olduğu gibi varyans da frekans dağılım tablosundan kısa yoldan hesaplanabilir. Bunun için aritmetik ortalamada olduğu gibi frekans dağılım tablosundaki sınıf değerleri daha önce verdiğimiz 2.3 numaralı eşitlik kullanılarak "b" değerlerine çevrilir.

$$b_i = \frac{X_i - A}{c}$$

Eşitlikte, X_i, i. sınıfın sınıf değeri, A, frekans dağılım tablosunda ortalardaki bir sınıfın sınıf değeri, c, sınıf aralığıdır.

Bu eşitlikte "X" çekilecek olursa $X_i=A+b_ic$ eşitliği elde edilir. Varyansın özelliklerinden hatırlanacağı üzeri sabit bir sayının (A) değerlere eklenmesi veya çıkarılması yeni elde edilecek değerlerin varyansını değiştirmez. Bu durumda geriye $X_i=b_ic$ kalır. Bu durumda X değerlerine ait kareler toplamı ve varyans aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\sum d_x^2 = c^2 \sum d_b^2 \quad \text{ve} \quad S_x^2 = c^2 S_b^2$$

Yukarıda verilen eşitlik kullanılarak frekans dağılım tablosundan "b" değerlerine ait varyansın aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanması gerekir.

$$S_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i b_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{k} f_i b_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1} \qquad \ldots(2.12)$$

ÖRNEK:

120 bebeğin doğum ağırlıkları için düzenlenen frekans dağılım tablosunda kısa yoldan varyansın hesaplanması için gerekli işlemler Tablo 2.6'da verilmiştir.

TABLO 2.6. Kısa yoldan varyansın hesaplanması

Sınıf Değeri X_i	Frekans f_i	b_i	$f_i\,b_i$	$f_i\,b_i^2$
2.895	1	-5	-5	25
2.995	2	-4	-8	32
3.095	9	-3	-27	81
3.195	15	-2	-30	60
3.295	19	-1	-19	19
3.395=A	24	0	0	0
3.495	19	1	19	19
3.595	14	2	28	56
3.695	8	3	24	72
3.795	5	4	20	80
3.895	3	5	15	75
3.995	1	6	6	36

$b_i = \frac{X_i - A}{C}$ $\qquad \Sigma d_b^2 = \Sigma f b^2 - \frac{(\Sigma f b)^2}{\Sigma f}$

$X_i = A + C b_i$

$\Sigma d_x^2 = C^2 \Sigma d_b^2$

$S_x^2 = C^2 S_b^2$

$$\Sigma f_i b_i = 23$$

$$\Sigma f_i b_i^2 = 555$$

$$\Sigma (f_i b_i)^2 = 529$$

$$\Sigma d_b^2 = 555 - \frac{(23)^2}{120} = 550.5917$$

$$S_b^2 = \frac{550.5917}{(120-1)} = 4.6268$$

olarak hesaplandıktan sonra X değerlerine ait varyans, $S_x^2 = c^2 S_b^2$ eşitliği kullanılarak $S_x^2 = (0.1)^2(4.6268) = 0.0463$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi bu değer 49. sayfada hesaplanan varyans ile aynıdır.

2.2.4. Standart Sapma

Yaygın olarak kullanılan diğer bir değişim ölçüsü standart sapmadır ve varyansın kare köküne eşittir. Standart sapmanın birimi vardır. Eğer populasyondan hesaplanıyorsa parametredir ve σ ile gösterilir, örnekten hesaplanıyorsa bir istatistiktir ve S ile gösterilir. Ve aşağıdaki formüller kullanılarak hesaplanır.

Populasyonda:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}} \qquad \ldots(2.13)$$

Örnekte:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{(n-1)}} \qquad \ldots(2.14)$$

ÖRNEK:

120 bebeğin doğum ağırlıkları ile ilgili örnek için varyans 0.0463 olarak bulunmuştu. Bu örnek için standart sapma ise $S = \sqrt{0.0463} = 0.2151$ kg'dır.

2.2.5. Varyasyon Katsayısı

Varyasyon katsayısı, örneklerin varyasyon bakımından karşılaştırılmaları gerektiği zaman hesaplanır. Çünkü örneklerin ortalamaları büyüdükçe standart sapmaları da genellikle büyüyecektir. Varyasyon katsayısı (CV, Coefficient of variation) hesaplanarak standart sapma üzerinde ortalamanın etkisi ortadan kaldırılmış olur. Ve standart sapmayı ortalamanın yüzdesi olarak, yani bir örnekteki varyasyonu % (nisbi) olarak ifade eder. Aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} 100 \qquad \ldots(2.15)$$

Bir örnekten elde edilen gözlem değerleri arasında sıfır ve negatif değerler varsa bu örnekler için varyasyon katsayısının hesaplanması bir anlam taşımaz. Çünkü varyasyon katsayısı %100'ü geçebilir.

ÖRNEK 1:

Şubat ayında 5 gün yapılan sıcaklık ölçümleri 5, 4, 0, -3 ve 2 olsun.

Bu örnek için ortalama, $\bar{x} = \dfrac{5+4+0+(-3)+2}{5} = 1.6$

ve standart sapma, $S = \sqrt{\dfrac{(25+16+0+9+4) - \dfrac{(8)^2}{5}}{5-1}} \cong 3.2$

olarak bulunur.

Bu örnek için varyasyon katsayısı ise $CV = \dfrac{3.2}{1.6} 100 = \%200$ olarak hesaplanır. Bu değer %100'den büyük olduğu için bir anlam taşımaz. Bu sebeple de veriler arasında sıfır ve negatif değerler varsa varyasyon katsayısı hesaplanmaz.

ÖRNEK 2:

Ayrı semtlerde bulunan A ve B eczanelerinde Kasım ayında 20 iş gününde işlem gören sosyal güvenlik kurumlarına ait ortalama günlük reçete sayısı A eczanesinde 25.5, standart sapma 2.8; aynı değerler B eczanesinde 36.8 ve 3.4'tür. Günlük işlem gören reçete sayısının değişimini karşılaştırmak için sadece standart sapmaya bakılacak olursa, B eczanesinde değişimin (varyasyonun) daha fazla olduğu kanısına varılır. Ancak burada ortalama da daha yüksektir. Standart sapmalar ortalamaya oranlanarak ortalamanın farklılığının etkisi giderilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$CV_A = \frac{2.8}{25.5}.100 = \%11.0$$

$$CV_B = \frac{3.4}{36.8}.100 = \%9.2$$

Bu sonuçlara göre değişim A eczanesinde sayısal olarak daha büyük çıkmıştır. A eczanesinde değişimin daha fazla olduğunu söyleyebilmek içinse ileriki bölümlerde açıklanacağı şekilde hipotez kontrolünün yapılması gerekir.

2.3. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

120 bebeğin doğum ağırlıkları için MINITAB paket programından alınan tanıtıcı istatistiklere ait çıktı aşağıda verilmiştir:

MTB>DESC 'AGIRLIK'

	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
AGIRLIK	120	3.4029	3.4000	3.3991	0.2088	0.0191

	MIN	MAX	Q1	Q3
AGIRLIK	2.8500	3.9500	3.2500	3.5500

Yukarıda verilen bilgisayar çıktısında;

N; Örnekteki gözlem sayısı,

MEAN; Aritmetik ortalama,

MEDIAN; Ortanca değer,

TREMEAN; Verilerin en küçük ve en büyük %5 dışındaki gözlemlere ait ortalama,

STDEV; Standart sapma,

SEMEAN; Ortalamanın standart hatası (bunun ile ilgili bilgi BÖLÜM 4'de verilmektedir.)

MIN; En küçük değere sahip gözlem,

MAX; En büyük değere sahip gözlem,

Q1; En küçük ağırlıkların %25'nin bittiği ağırlık,

Q3; En büyük ağırlıkların %25'nin başladığı ağırlık,

Bu değerlerin nasıl hesaplandığı konular açıklanırken verilmişti. Frekans dağılım tablosundan ortalama ve standart sapma ile bilgisayar çıktısı arasında küçük farklar vardır. Bunun nedeni gözlem değerlerinin frekans dağılım tablosunda sınıf değerleri ile ifade edilmesindendir.

ÖRNEK 2:

Bir hastaneye bir günde gelen hastalardan tesadüfen 150 tanesinin yaşları aşağıdaki gibi tespit edilmiştir.

40	47	40	36	43	50	42	50	37	50	38	42	53	49
48	54	39	38	50	44	54	40	42	43	42	48	55	33
46	43	48	48	49	46	41	42	48	40	50	33	45	37
43	47	41	43	41	45	57	51	52	39	50	47	40	50
45	45	39	42	56	46	46	47	45	42	34	44	39	36
44	32	39	53	44	41	42	39	41	35	44	47	52	48
51	59	31	36	36	42	49	40	41	54	40	41	51	46
39	42	48	45	60	41	46	50	51	45	45	41	38	39
41	48	50	42	29	44	43	53	41	40	41	40	44	37
44	41	44	49	48	44	52	58	38	44	36	48	52	57
58	44	51	48	51	45	52	43	43	55				

Araştırıcı verilerini MINITAB paket programına girdikten sonra DESC (DESCRIBE) komutunu kullanarak aşağıda verildiği şekilde örneğe ait bütün tanıtıcı istatistikleri alabilir.

```
MTB > DESC C11

           N    MEAN   MEDIAN   TRMEAN    STDEV   SEMEAN
C11      150  44.673   44.000   44.612    6.047    0.494

         MIN     MAX      Q1      Q3
C11   29.000  60.000  41.000  49.000
```

BÖLÜM III
İSTATİSTİK DAĞILIMLAR

Üzerinde çalışılan kesikli ve sürekli değişkenlere ait verilerin elde edildiği örnekler genellikle dağılım fonksiyonları bilinen populasyonları temsil ederler. Bunlardan en çok rastlanan üç tanesi bu kitabın kapsamında incelenecektir. **Binom**, **Poisson** ve **normal** dağılımlar fonksiyonları bilinen ve en çok rastlananlardır.

3.1. Binom Dağılımı Kesikli verilerin dağılımıdır.

Adından da anlaşılacağı gibi binom dağılmış populasyonda değişkenlerin iki hali söz konusudur. Bunlardan biri üzerinde durulan (araştırılan, istenen) hal, diğeri de üzerinde durulmayan (istenmeyen) haldir. Eğer ele alınan özelliğin ikiden fazla hali söz konusu ise multinom dağılım söz konusudur. Ancak böyle durumlar da binom dağılımı olarak incelenebilir. Bu ikiden fazla halden sadece bir tanesi araştırıcı için önemli ise bunu birinci hal olarak alır, diğerleri de ikinci hali oluşturur. Binom dağılımında populasyonda üzerinde durulan halin olasılığı (ihtimali) π ile gösterilir. Ele alınan populasyonda π'nin değişmediği, yani populasyondaki her bireyin üzerinde durulan hali taşıma olasılığının sabit olduğu varsayılır. Üzerinde durulan halin olasılığı π olduğuna göre ($\pi<1$), üzerinde durulmayan halin olasılığı da $(1-\pi)$'dir. π bilinmediği zaman, diğer parametrelerde olduğu gibi, örnekten tahmin edilir. Bu durumda üzerinde durulan halin olasılığı p, diğer halin olasılığı (1-p) veya kısaca q ile gösterilir.

Herhangi bir toplumda doğan bebeklerin cinsiyetlerinin erkek veya kız olması gibi sadece iki hal söz konusudur. Biyolojik kurallardan da çocuğun cinsiyetinin kız veya erkek olma olasılığının 1/2 olduğu bilinmektedir.

Üzerinde durulan hal kız çocuk ise, bunun olma olasılığı π=0.5'dir. Yani parametre bilinmektedir. İki çocuklu aileler ele alındığında, aşağıdaki durumlar söz konusudur.

SÖZ KONUSU HALLER	OLASILIĞI
a. İlk ve ikinci çocuk erkektir.	$\frac{1}{4}$
b. İlk çocuk erkek ikinci çocuk kızdır.	$\frac{1}{4}$
c. İlk çocuk kız ikinci çocuk erkektir.	$\frac{1}{4}$
d. İlk ve ikinci çocuk kızdır.	$\frac{1}{4}$

1 kız 1erkek

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Kız çocuk sayısı ele alınan değişken (X) ise bunun yukarıda aldığı değerler (0, 1, 1, 2) şeklindedir. Birinci veya ikinci çocuğun kız olması önemli olmadığından b ve c halleri birlikte ele alınabilir. Bu durumda X değişkeninin aldığı değerler (0,1 ve 2)'dir. Bunların olasılıkları sırasıyla (1/4, 2/4 ve 1/4)'dür. Bu durum da şöyle de yazılabilir: $[(1)(\frac{1}{4}),\ (2)(\frac{1}{4}),\ (1)(\frac{1}{4})]$. Bunlar her halin olasılıklarıdır. Sırasıyla 0.25, 0.5 ve 0.25'tir ve toplamları (1.0)'dir. Bu $[\pi+(1-\pi)]^2$ şeklinde de gösterilebilir. Bu açılım $(1)(\pi^2)+(2)(\pi)(1-\pi)+(1)(1-\pi)^2$'dir. Bilindiği şekilde buna binom açılımı da denir. Burada 1,2,1 katsayıları n olayda (burada iki), üzerinde durulan halin 2, 1 ve 0 kere görülme sayısıdır, yani kombinasyondur. nCr veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir. Bu da:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\text{'dir.}$$

Bu bilgilere göre binom dağılımında üzerinde durulan halin r kere olma olasılığı P(r) aşağıdaki gibi gösterilir.

$$P(r) = C(n,r)\pi^r(1-\pi)^{(n-r)}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}\pi^r(1-\pi)^{(n-r)} \qquad ...(3.1)$$

3.1 numaralı eşitlik binom dağılımının olasılık fonksiyonudur. Bu fonksiyonda n deneme sayısı, r bu denemede istenen olayın görünme sayısı, P(r) istenen olayın n denemede r defa görünme olasılığıdır. nCr ise n tane farklı şeyden r tanesi alınarak sıra gözetmeksizin yapılabilecek dizilişlerin sayısıdır.

Faktöriyel ile ilgili aşağıdaki bilgilerin hatırlanması yararlıdır.

**** 0!=1'dir.**
**** 1!=1'dir.**
**** 4!=4.3.2.1=24'tür.**

3.1.1. İstenen Olayın Oluş İhtimalinin Hesaplanması

Bütün binom populasyonlarda n denemede istenen olayın r defa meydana gelme olasılığı yukarıda verilen olasılık fonksiyonu kullanılarak hesaplanabilir.

Yapılan bir araştırmada öğrencilerin %25'inin sigara içtiği saptanmıştır. Rastgele seçilecek dört öğrenciden;

a. 4'ünün de sigara içmeme olasılığı,
b. 4 öğrenciden 3'nün sigara içmeme olasılığı,
c. 4 öğrenciden 2'sinin sigara içmeme olasılığı,
d. 4 öğrenciden 1'inin sigara içmeme olasılığı,
e. 4 öğrenciden 4'ünün de sigara içme (veya hepsinin sigara içme) olasılığı yukarıda verilen olasılık fonksiyonu kullanılarak hesaplanabilir.

Bu olasılıkları hesaplamak için önce istenen ve istenmeyen tip olayların olasılıklarının bulunması gerekir. Sigara içmeme olayının olasılığı (istenen tip) $\pi = \frac{3}{4}$ ve istenmeyen tip (sigara içme) olayın olasılığı ise $(1-\pi) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ şeklinde hesaplanır. Bu örnekte deneme sayısı (n) 4'tür. Deneme sayısı 4 olduğu zaman mümkün olan ve olasılıkları istenen 5 durum söz konusudur.

a. $$P(4) = C(4,4)(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^{4-4} = \frac{4!}{(4-4)!4!}(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^0$$

$$= (\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256} = 0.316$$

Bu hesaplanan olasılık 4 öğrenciden 4'ününde sigara içmeme olasılığıdır.

b. $$P(3) = C(4,3)(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})^{4-3} = \frac{4!}{(4-3)!3!}(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})^1$$

$$= \frac{4!}{(4-3)!3!}(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4}) = 4\frac{27}{256} = \frac{108}{256} = 0.422$$

Bu hesaplanan ihtimal 4 öğrenciden 3'ünün sigara içmeme ihtimalidir.

c. $$P(2) = C(4,2)(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^{4-2} = \frac{4!}{(4-2)!2!}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^2$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!2!}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^2 = 6\frac{9}{256} = \frac{54}{256} = 0.211$$

Bu hesaplanan olasılık 4 öğrenciden 2'sinin sigara içmeme olasılığıdır.

d. $$P(1) = C(4,2)(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^{4-1} = \frac{4!}{(4-1)!1!}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^3$$

$$= \frac{4!}{(4-1)!1!}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^3 = 4\frac{3}{256} = \frac{12}{256} = 0.047$$

Bu hesaplanan olasılık 4 öğrenciden 1'inin sigara içmeme olasılığıdır.

e. $$P(0) = C(4,0)(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^{4-0} = \frac{4!}{(4-0)!0!}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^4$$

$$= \frac{4!}{(4-0)!0!}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256} = \frac{1}{256} = 0.004$$

Bu hesaplanan ihtimal 4 öğrencinin hepsinin sigara içme ihtimalidir.

Mümkün olan durumların oluş ihtimallerinin toplamı 1'e eşittir, yani;

$$P(4)+P(3)+P(2)+P(1)+P(0)=1.0$$

$$\frac{81}{256}+\frac{108}{256}+\frac{54}{256}+\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=1.0$$

Binom dağılımına ait olasılık fonksiyonu kullanılarak hesaplanan olasılıklar $(\pi+(1-\pi))^n$ binomunun açılımındaki terimlere karşılık gelir. Yukarıda verilen örnek için binom açılımı kullanılacak olursa;

$$(\pi+(1-\pi))^4=\pi^4(1-\pi)^0+4\pi^3(1-\pi)^1+6\pi^2(1-\pi)^2+4\pi^1(1-\pi)^3+\pi^0(1-\pi)^4$$

$$(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})^4=\underbrace{(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^0}_{a}+\underbrace{4(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})^1}_{b}+\underbrace{6(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^2}_{c}+\underbrace{4(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^3}_{d}+\underbrace{(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^4}_{e}$$

Mümkün olan haller için olasılıklar bulunduktan sonra araştırıcı istediği olasılıkları hesaplayabilir. Örneğin:

a. En az 2 öğrencinin sigara içmeme olasılığı;

$P(r\geq2)=P(2)+P(3)+P(4)$'e eşittir, yani en az iki öğrencinin sigara içmeme olasılığı 2, 3 ve 4 öğrencinin sigara içmeme olasılıklarının toplamıdır.

b. En fazla 2 öğrencinin sigara içmeme olasılığı;

$P(r\leq2)=P(0)+P(1)+P(2)$'ye eşittir, yani en fazla 2 öğrencinin sigara içmeme olasılığı 0, 1 ve 2 öğrencinin sigara içmeme olasılıklarının toplamıdır.

c. 2 veya 3 öğrencinin sigara içmeme olasılığı P(2) ve P(3)'ün toplamına eşittir.

3.1.2. Binom Dağılımına Göre Beklenen Frekanslar

Verilen örnekte araştırıcı bir kere 4 öğrenciyi rastgele seçtiği zaman yukarıdaki olasılıklar hesaplanır. fakat rastgele 4 öğrenci seçme işlemi 200 kere tekrarlanmış ve aşağıdaki gibi bir frekans dağılımı tablosu oluşturulmuş olabilir. 4'er öğrencilik 200 örnek için sigara içmeyen öğrenci sayısı bakımından dağılımı (gözlenen frekanslar) Tablo 3.1'de verilmiştir. Araştırıcı, bu örnek için binom dağılımına göre beklenen frekansları da hesaplayarak aşağıdaki frekans dağılımı tablosunda vermiştir. Binom dağılımına göre beklenen frekanslar şu şekilde hesaplanmaktadır: 4 öğrencilik bir örnekte hepsinin sigara içme olasılığı 0.004 (1/256) ise 200 örnekten 200(0.004)=0.8 tanesinde 4 öğrencinin 4'ününde de sigara içmesi beklenir ki bu 1. sınıfın binom dağılımına göre beklenen frekansıdır. Aynı şekilde 2. sınıf için beklenen frekans: 4 öğrencilik bir örnekte 4 öğrenciden 1'inin sigara içmeme olasılığı 0.047 ise 200 örnekten 200(0.047)=9.4 tanesinde 4 öğrenciden 1 tanesinin sigara içmemesi beklenir. Bu şekilde diğer sınıflar içinde beklenen frekanslar hesaplanarak Tablo 3.1'deki frekans dağılımı tablosunda verilmiştir. Frekans dağılımı tablosunda da görüldüğü gibi beklenen frekansların toplamı da 200'dür.

TABLO 3.1. 4'er öğrencilik 200 örnek için gözlenen ve π=0.75 olan binom dağılımına göre beklenen frekanslar.

Sigara içmeyen öğrenci sayısı (r)	Gözlenen frekans	Binom dağılımına göre beklenen frekans
0	2	0.8
1	12	9.4
2	45	42.2
3	80	84.4
4	61	63.2
Toplam	200	200

3.1.3. Binom Dağılımının Parametreleri

Binom dağılımının parametreleri "n" ve "π"'dir. Dağılımın ortalaması, $\mu=n\pi$ ve varyansı, $\sigma^2=n\pi(1-\pi)$'dir. Yukarıda verilen örnek için ortalama, $\mu=4(3/4)=3$'tür. Yani 200 kere rastgele 4 öğrencinin bulunduğu örnekler oluşturulsa sigara içmeyen öğrenci sayısı bakımından ortalama 3'tür. Bu ortalama Tablo 3.1'de verilen frekans dağılım tablosunda teorik frekanslardan aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir.

$$\mu = \frac{0x0.8 + 1x9.4 + 2x42.2 + 3x84.4 + 4x63.2}{200} = 2.99 \cong 3$$

Rastgele oluşturulan 4 öğrencilik 200 örnekte sigara içmeyen öğrenci sayısı bakımından değişimin ölçüsü de varyanstır ve örneğimizde aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\sigma^2 = 4(\frac{3}{4})(1-\frac{3}{4}) = 0.75$$

Gözlenen frekanslardan hesaplanan ortalama ise istatistiktir ve aşağıdaki gibidir:

$$\overline{X} = \frac{(0)(2)+(1)(12)+(2)(45)+(3)(80)+(4)(61)}{200} = 2.93\text{'tür.}$$

Örnekten hesaplanan varyans ise 0.859'tur.

ŞULE ÖZCAN

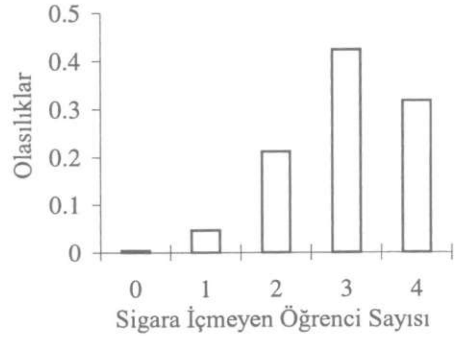
3.1.4. Binom Dağılımının Şekli

Binom dağılımının şekli "n" ve "π"'ye bağlıdır. Deneme sayısı ne olursa olsun $\pi=1/2$ için dağılımın şekli simetriktir. İstenen tip ve istenmeyen tip olayların oluş olasılığı farklı olduğu zaman dağılımın şekli değerlerden büyük olanın tarafına doğru yatıktır (çarpıktır). Eğer $\pi > 1/2$ ise dağılım sol tarafa, fakat $\pi < 1/2$ ise dağılım sağ tarafa yatıktır. π ve $(1-\pi)$ değerlerinin eşit olmadığı durumlarda deneme sayısının (n'nin) artması dağılımın simetriye yaklaşmasını sağlar.

Binom dağılımında sınıf sayısı deneme sayısının bir fazlasına (yani n+1'e) eşittir, çünkü istenen olayın sıfır olması durumu da söz konusudur.

ÖRNEK:

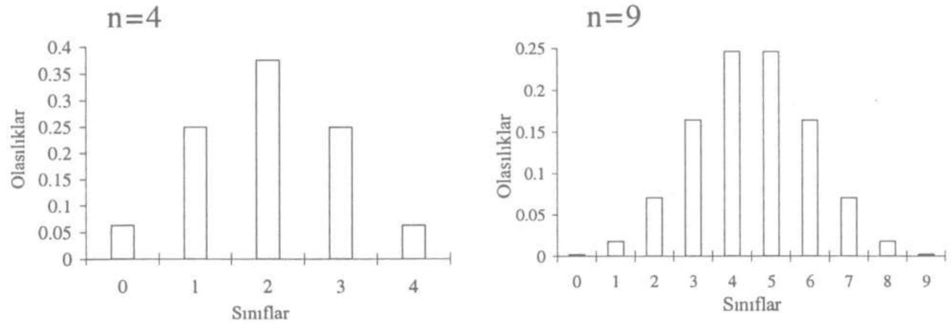
Yukarıda verilen ve sigara içen ve içmeyen öğrenciler ile ilgili binom dağılımının şekli Şekil 3.1'de verilmiştir.



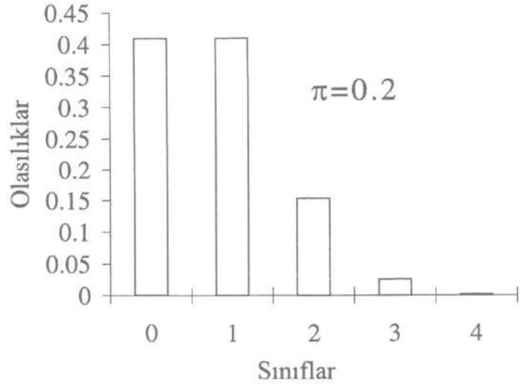
ŞEKİL 3.1. Sigara içmeyen öğrencilerin sayılarına ait dağılım

Şekil 3.1'den de görüldüğü gibi $\pi>1/2$ olduğu zaman dağılım sola yatık (çarpık) olmaktadır.

"π" ve "n"'nin değişik değerlerine bağlı olarak binom dağılımın şekli aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir. Şekil 3.2, $\pi=0.5$ ve çeşitli "n" değerleri için binom dağılımlarının şeklini göstermektedir. Görüldüğü üzere deneme sayısına bağlı olmaksızın $\pi=0.5$ olduğu zaman dağılım simetriktir. Şekil 3.3, $\pi=0.2$ (n=4) ve Şekil 3.4, $\pi=0.8$ (n=4) için binom dağılımlarının şeklini göstermektedir.

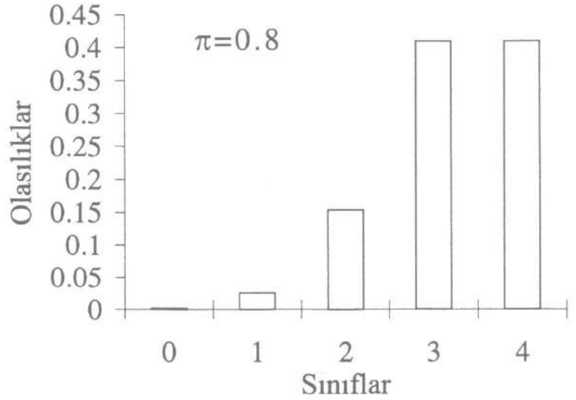


ŞEKİL 3.2. $\pi=0.5$ ve deneme sayısı 4 ve 9 için binom dağılımının şekli



Şekil 3.3. π=0.2 ve n=4 için binom dağılımının şekli

Şekil 3.3'de gösterildiği gibi π<0.5 olduğu zaman dağılım sağa yatık (çarpık) olmaktadır, yani istenen olayın n denmede r kere meydana gelme olasılığı r değeri arttıkça azalmaktadır

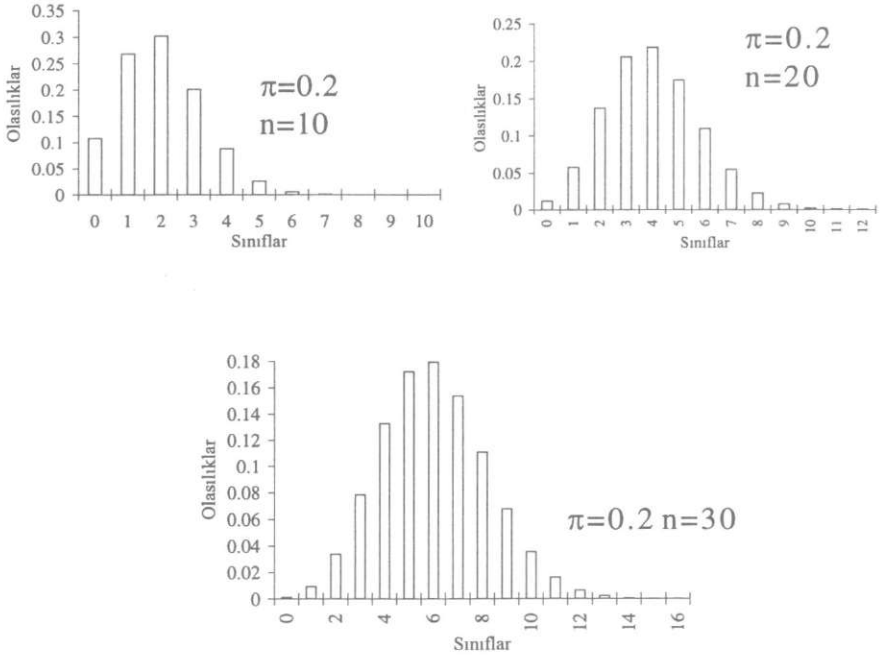


ŞEKİL 3.4. π=0.8 ve n=4 için binom dağılımının şekli

Şekil 3.4'te gösterildiği gibi π>0.5 olduğu zaman dağılım sola yatık (çarpık) olmaktadır, yani istenen olayın n denmede r kere meydana gelme olasılığı r değeri arttıkça artmaktadır.

Şekil 3.5 ise istenen olayın herhangi bir değeri için deneme sayısının artması ile dağılımın şeklinin simetrikleştiğini göstermektedir. Şekil 3.2'de π=0.2 ve n=4 olduğu zaman dağılımın sağa yatık bir dağılım olduğu gösterilmişti. Aşağıdaki şekillerde ise

π=0.2 olduğu durumda deneme sayısının artması ile dağılımın şeklinin simetriye yaklaştığını göstermektedir.



ŞEKİL 3.5. π=0.2 için artan deneme sayısının binom dağılımının şekli üzerine etkisi

Şekil 3.5'de de görüldüğü üzere π=0.2 olmasına rağmen deneme sayısı arttıkça dağılımın şekli simetrikleşmektedir. Bu n=10, n=20 ve n=30 için gösterilmiştir. Burada gösterildiği gibi π değeri ne olursa olsun deneme sayısının artması ile dağılım simetriye yaklaşır.

ÖRNEK:

Çok sayıda kişinin katıldığı ve sınav sonuçlarının "BAŞARILI" ve "BAŞARISIZ" olarak açıklandığı bir sınavda tesadüfen seçilen 300 adaydan 180 adayın başarılı olduğu saptanmıştır. Bu sınava katılanlar arasından rastgele 6 kişi seçilse;

a. Hepsinin başarılı olma olasılığı,
b. 5 kişinin başarılı olma olasılığı,
c. 4 kişinin başarılı olma olasılığı,
d. 3 kişinin başarılı olma olasılığı,
e. 2 kişinin başarılı olma olasılığı,
f. 1 kişinin başarılı olma olasılığı,
g. Hiçbirinin başarılı olma olasılığı nedir.

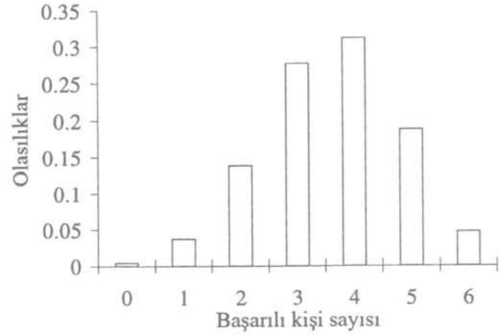
300 kişinin katıldığı bir sınavda 180 kişi başarılı olduğuna göre başarılı olma (istenen olayın) olasılığı $p = \frac{180}{300} = 0.6$ ve başarısız olma (istenmeyen olayın) olasılığı q=1-p=1-0.6=0.4'tür. Bu durumda;

$$P(6) = C(6,6)(0.6)^6(0.4)^0 = 0.047$$
$$P(5) = C(6,5)(0.6)^5(0.4)^1 = 0.187$$
$$P(4) = C(6,4)(0.6)^4(0.4)^2 = 0.311$$
$$P(3) = C(6,3)(0.6)^3(0.4)^3 = 0.276$$
$$P(2) = C(6,2)(0.6)^2(0.4)^4 = 0.138$$
$$P(1) = C(6,1)(0.6)^1(0.4)^5 = 0.037$$
$$P(0) = C(6,0)(0.6)^0(0.4)^6 = 0.004$$

Deneme sayısı 6 olduğu zaman mümkün olan 7 hal vardır. Bu hallerin olasılıklarının toplamı 1'e eşittir;

P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)+P(7)=1'dir.

Bu örnek için binom dağılımının şekli ise Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



ŞEKİL 3.6. Başarılı kişilerin sayısına ait olasılıklar

Şekil 3.6'da verilen grafikten de görüldüğü üzere p=0.6 Olduğu için dağılımın şekli simetriye çok yakındır.

Sınava giren 300 kişi arasından geriye iadeli olarak tesadüfen seçilmiş 6'şar kişi bulunan 175 tane grup oluşturan bir araştırıcı başarılı kişi sayısı bakımından dağılımı ve binom dağılımına göre beklenen frekansları Tablo 3.2'deki frekans dağılımı tablosunu oluşturarak vermiştir.

TABLO 3.2. 6'şar bireylik 175 grupta gözlenen ve p=0.6 olan binom dağılımına göre beklenen başarılı birey sayısı

Başarılı kişi sayısı (r)	Gözlenen frekans	Binom dağılımına göre beklenen frekans
0	1	0.700
1	9	6.475
2	25	24.150
3	47	48.000
4	51	54.425
5	35	32.725
6	7	8.225

Tablo 3.2'de verilen örnek için ortalama, $\mu=6(0.6)=3.6$'dır. Rastgele seçilmiş 6'şar kişilik 175 grupta başarılı kişi sayısı bakımından ortalama 3.6'dır. Bu ortalama Tablo 3.2'de verilen frekans dağılım tablosundaki teorik frekanslar kullanılarak aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir.

$$\mu = \frac{0x0.70 + 1x6.475 + 2x24.15 + 3x48.0 + 4x54.425 + 5x32.725 + 6x8.225}{175} = \frac{629.45}{175}$$

$$\cong 3.6$$

Rastgele oluşturulan 6 kişilik 175 örnekte başarılı kişi sayısı bakımından değişimin ölçüsü de varyanstır ve örneğimizde aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\sigma^2 = 6(0.6)(1-0.6) = 1.44$$

3.2. Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı da binom dağılımı gibi kesikli bir dağılımdır. Bu dağılım, çok az rastlanan fakat belirli (sabit) bir olasılıkla meydana gelen olayların dağılımıdır. Poisson dağılımı gösteren olaylara örnekler aşağıdaki gibi verilebilir:

- Belirli bir nüfus içinde 110 yaşına kadar yaşayan insanların sayısı,
- Belirli bir günde yanlış düşen telefon numaralarının sayısı,
- Bir günde başlayan savaş sayısı,
- Bir hayat sigortası tarafından sigortalanan belirli sayıda insandan belirli bir zaman aralığında ölenlerin sayısı,
- Çok az satılan bir maldan bir dükkanda bir günde satılanların sayısı,
- Bir kitaptaki yazım hatalarının sayısı,
- Çok sayıda birimden oluşan ambalajlanmış mallardaki bozuk olanların sayısı.

Yukarıda örnek olarak verilen olayların meydana geliş sayıları Poisson dağılımı gösterirler. Bu olayların belirli bir sayıda meydana gelme olasılıkları Poisson dağılımı fonksiyonu kullanılarak hesaplanır.

Binom dağılımında "n" deneme sayısının çok büyümesi ve "π" istenen olayın oluş olasılığının çok küçük olması durumlarında da Poisson dağılım fonksiyonu kullanılır. Çünkü bu durumda istenen olayın belirli bir sayıda oluş olasılığının binom fonksiyonu kullanılarak hesaplanması zorlaşır.

3.2.1. Olayların Oluş Olasılıklarının Hesaplanması

Poisson dağılımının fonksiyonu Fransız matematikçisi Poisson tarafından bulunan aşağıdaki eşitliğe göre belirlenir:

$$\boxed{P(r) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}} \quad \ldots(3.2)$$

Formülde, μ dağılımın ortalaması, r nadir olarak görülen olayın meydana geliş sayısı, e tabii logaritma tabanı olup e≅2.718'dir. Araştırıcı istenen olayın herhangi bir sayıda görülme olasılığını hesapladıktan sonra aşağıda gösterildiği şekilde olayın birbirini izleyen sayıda görülme olasılıklarını hesaplayabilir.

$$P(0) = \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} = e^{-\mu}$$

$$P(1) = \frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu} = \mu P(0)$$

$$P(2) = \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} = \frac{\mu}{2}\frac{\mu}{1} e^{-\mu} = \frac{\mu}{2} P(1)$$

$$P(3) = \frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu} = \frac{\mu}{3}\frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} = \frac{\mu}{3} P(2)$$

$$\boxed{P(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \frac{\mu}{n} P(n-1)}$$

ÖRNEK 1:

Bir hayat sigortası bir yılda 5000 kişiyi kazalara karşı sigortalamış olsun. Bir yılda sigortalanmış kişilerden herhangi birinin kazadan ölme olasılığı π 0.001 olarak bilindiğine göre bir yıl boyunca 4 kişinin kazadan ölme olasılığı nedir.

Bu olasılık binom fonksiyonu kullanılarak hesaplanacak olursa bu $P(r{=}4){=}C(5000,4)\pi^4(1-\pi)^{5000-4}$'dür. Bunun hesaplanması zordur. Halbuki Poisson dağılımın fonksiyonu kullanılarak kısaca hesaplanabilir.

Bu örnek için ortalama, $\mu = n\pi$, 5000(0.001)=5'tir. 4 kişinin kazadan ölme olasılığı ise;

$$P(4) = \frac{\mu^4}{4!} e^{-5} = \frac{5^4(2.718)^{-5}}{24} = \frac{625(0.0067)}{24} = 0.1745$$

$P(5) = \frac{5}{5} P(4) = 0{,}1745$

$P(6) = \frac{5}{6} P(5) = 0{,}1454$

n büyüyüp π küçüldükçe Poisson dağılımı kullanılır.

ÖRNEK 2:

100 kişilik bir sınıfta 1 Ocak'ta doğanların sayısı Poisson dağılımı gösterir. Herhangi bir kişinin 1 Ocak'ta doğmuş olma olasılığı p=1/365'tir. Bu dağılımın ortalaması,

$\mu = np = \frac{100}{365} \cong 0.2740$. 3 kişinin 1 Ocak'ta doğmuş olma olasılığı;

$$P(3) = \frac{0.2740^3}{3!} e^{-0.2740} = \frac{0.02057(2.718)^{-0.2740}}{6} = \frac{0.02057(0.76035)}{6} = 0.002606$$

ÖRNEK 3:

300 sayfalık bir kitabın hazırlanması sırasında 150 yazım hatası yapılmış ise sayfa başına ortalama hata μ=150/300=1/2'dir. Bir sayfada hiç hata yapılmamış olma ihtimali;

$$P(0) = \frac{0.5^0}{0!} 2.718^{-0.5} \cong \frac{1}{\sqrt{2.718}} = 0.6066$$

300 sayfalık bu kitabın kaç sayfasında hiç hata yapılmadığı hesaplanmak istenirse bunun için de hesaplanan olasılık ile sayfa sayısı çarpılır ve 300(0.6066)≅182 olarak bulunur.

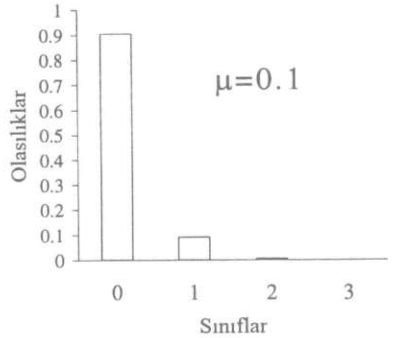
3.2.2. Poisson Dağılımının Parametresi ve Dağılım Şekli

Poisson dağılımları 3.2 numaralı eşitlikte verilen fonksiyondan da görüldüğü gibi birbirlerinden ortalamaları ile ayrılır. Yani fonksiyonun tek parametresi dağılımın ortalaması (μ)'dür. Poisson dağılımında ortalama ve varyans birbirine eşittir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

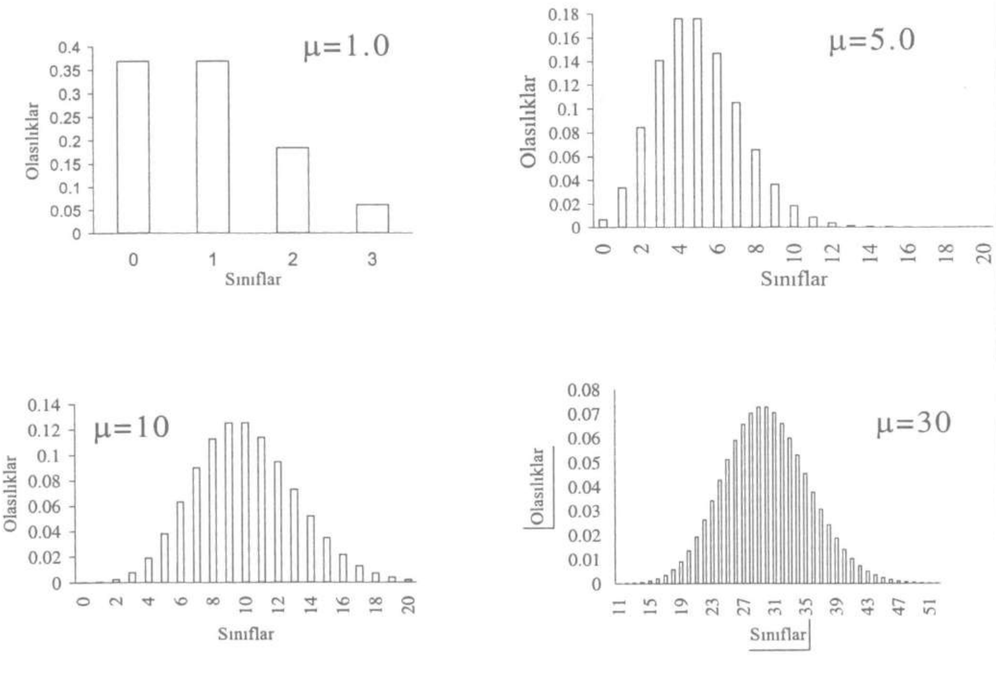
$$\boxed{\mu=\sigma^2=n.\ \pi}$$

Eşitlikte, n birey sayısı, π ise olayın oluş olasılığıdır.

Poisson dağılımının şekli ortalamaya bağlıdır. Şekil 3.7 farklı ortalamalara sahip Poisson dağılımlarının şeklini göstermektedir.



Yanda verilen grafikte de görüldüğü gibi dağılımın şekli pozitif yöne, sağa, doğru bir yatıklık (çarpıklık) göstermektedir.



ŞEKİL 3.7. Farklı ortalamalara sahip Poisson dağılımları

Şekil 3.7'de verilen grafiklerde de görüldüğü gibi Poisson dağılımının şekli ortalaması büyüdükçe simetriye yaklaşmaktadır.

ÖRNEK 4: Çalışıp Gelicen

Hastaneler için imal edilen ve içinde 300 tablet bulunan ambalajlardan 200 adet rastgele alınmış ve bunlardaki kırık tablet sayısı belirlenmiştir. Ambalajda bulunan tabletler ya kırıktır veya sağlamdır. Üzerinde durulan değişkenin iki hali söz konusudur. Kırık tablet oranı çok düşüktür. Kırık tabletlerin binom dağılımı gösterdiği düşünülebilir. Ancak kırık tablet oranı çok düşüktür, n ise 300 gibi büyük bir sayıdır. Bu durumda Poisson dağılımı uygulanabilir. Yukarıda belirtildiği gibi teorik olarak Poisson dağılımında ortalama varyansa eşittir. Örnekte eşit olmayabilir. Çekilen örnek sayısı sonsuz olduğu zaman eşit olur. Herhangi bir örnekte değişken kesikli, n sayısı çok ve ortalama ile varyans birbirine yakın ise Poisson dağıldığı düşünülebilir. Aşağıdaki örnekte (Tablo 3.3) önce ortalama ve varyans hesaplanmıştır.

TABLO 3.3. İçinde 300 tablet bulunan 200 ambalajın kırık tablet bakımından dağılımı

Kırık tablet sayısı	f_i	f_iX_i	$f_iX^2_i$
0	56	0	0
1	77	77	77
2	40	80	160
3	20	60	180
4	6	24	96
5	1	5	25
Toplam	200	246	538

$$\overline{X} = \frac{246}{200} = 1.23$$

$$\Sigma d_x^2 = 538 - \frac{(246)^2}{200} = 235.42$$

$$S^2 = \frac{235.42}{199} = 1.183$$

Ortalama ve varyans birbirine yakındır. Bu örneğin ortalaması 1.23 olan bir Poisson dağılımı gösterdiği varsayılarak teorik frekanslar, f_i', hesaplanabilir. Sonuçlar Tablo 3.4'de özetlenmiştir.

TABLO 3.4. 300 tablet bulunan 200 ambalaj için gözlenen ve Poisson dağılımına göre beklenen frekanslar

Sınıflar	Kırık tablet sayısı	f_i	f_i'
1	0	56	58.46
2	1	77	71.91
3	2	40	44.22
4	3	20	18.13
5	4	6	5.58
6	5	1	1.70

Birinci sınıfta yani herhangi bir ambalajda hiç kırık tablet bulunmama olasılığı;

$$P(0) = \frac{1.23^0}{0!} e^{-1.23} = 0.2923$$

Birinci sınıfta beklenen teorik frekans $f_1' = (200)(0.2923) = 58.46$ olarak bulunur. En son sınıfta 5 ve daha fazla kırık tableti kapsar. Bu sınıfın teorik frekansı bulunurken bundan önceki sınıfların teorik frekansları toplamı olan 198.30'un 200'den farkı alınır yani, $f_6' = 200 - (58.46 + 71.91 + 44.22 + 18.13 + 5.58) = 1.70$ olarak bulunur.

Görüldüğü gibi teorik frekanslar ile gözlenen frekanslar arasında farklar vardır. Bunların tesadüften ileri gelip gelmediğinin testi ilerideki konularda görülecektir.

3.3. Normal Dağılım

Normal dağılım, binom ve Poisson dağılımlarının aksine sürekli bir dağılımdır. Aralarındaki farklılıklar tesadüften ileri gelen gözlem değerlerinin oluşturduğu populasyonların dağılımı normal dağılıma uygunluk gösterir. Örneğin, aynı koşullarda yetişen belirli yaş grubunda ve cinsiyetteki sağlıklı öğrencilerin ağırlıkları arasındaki farklılık her öğrenciye etkisi rastgele ve küçük olan çok sayıda etkenden (faktörden) ileri gelir. Bu gibi etkiler altında oluşan özellikler normal dağılım gösterir. Bu nedenle ele alınan öğrenciler ağırlık bakımından bir **normal populasyonu** temsil ederler.

Normal populasyonlarda dağılım:

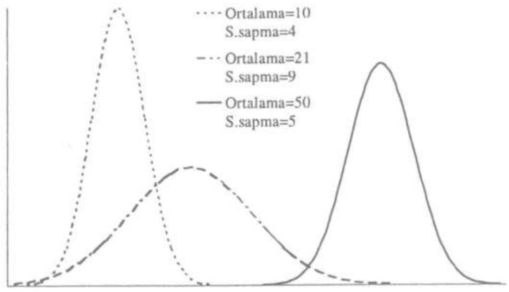
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \ldots(3.3)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilir. Normal dağılım fonksiyonun iki parametresi vardır. Bunlar ortalama, μ, ve standart sapma, σ'dır. Fonksiyondaki e ve π sabit değerlerdir: e≅2.718, yani tabii logaritma tabanı ve π=3.1416'dır. Bir normal dağılımın ortalama ve standart sapması biliniyorsa yukarıda verilen olasılık fonksiyonu kullanılarak belirli değerler arasındaki olasılıklar hesaplanabilir. Örneğin, öğrencilerin ağırlıkları ortalaması, μ=60 kg ve standart sapması σ= 5 kg olan bir normal dağılım gösteriyorsa bu populasyonda öğrencilerin ağırlıklarının 65 ile 69 kg arasında olma olasılığı hesaplanmak istenirse normal dağılım olasılık fonksiyonunun bu aralıkta integralinin alınması gerekir:

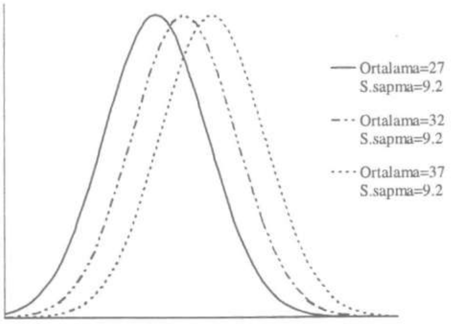
$$\int_{65}^{69} f(x)\,dx = \int_{65}^{69} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-60}{5}\right)^2} dx$$

Bu integralin alınması ile bulunacak değer öğrencilerin 65 ile 69 kg arasında olma olasılığını verecektir. Başka bir deyişle, ağırlıkları 65 ile 69 kg arasında olan öğrencilerin % miktarını verecektir.

Normal dağılım fonksiyonundan da görüldüğü gibi normal dağılımlar ortalama ve standart sapmaları ile birbirlerinden ayrılırlar. Şekil 3.8 ortalama ve standart sapmaları birbirinden farklı normal dağılımları göstermektedir. Şekil 3.9 ise standart sapmaları aynı fakat ortalamaları farklı olan normal dağılımları göstermektedir. Şekil 3.10'da ortalamaları aynı fakat standart sapmaları farklı olan normal dağılımlar verilmiştir.

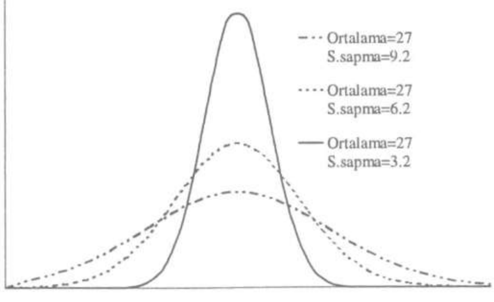


ŞEKİL 3.8. Parametreleri birbirinden farklı normal dağılımlar



ŞEKİL 3.9. Standart sapmaları aynı fakat ortalamaları birbirinden farklı normal dağılımlar

Şekil 3.9'da görüldüğü gibi normal dağılımlar aynı standart sapmaya, fakat farklı ortalamalara sahip olabilir. Bu durumda dağılımları oluşturan gözlem değerleri arasındaki varyasyon aynı fakat ortalamaları farklıdır.



ŞEKİL 3.10. Ortalamaları aynı fakat standart sapmaları birbirinden farklı normal dağılımlar

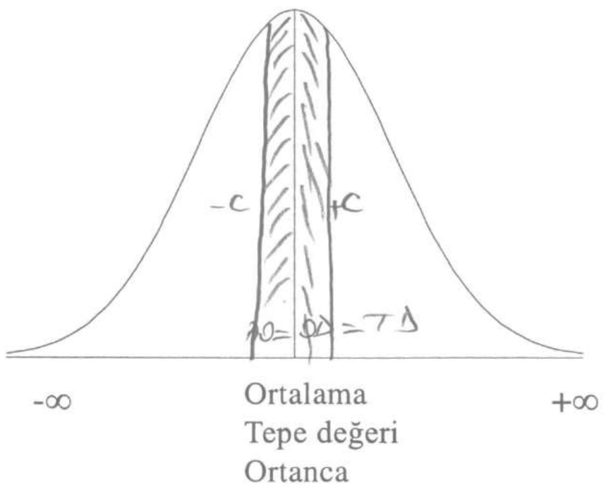
Şekil 3.10'da görüldüğü gibi normal dağılımlar aynı ortalamaya, fakat farklı standart sapmalara sahip olabilir. Bu durumda dağılımları oluşturan gözlem değerlerinin ortalamaları aynı olmasına karşın standart sapma arttıkça aralarındaki varyasyon artacaktır.

3.3.1. Normal Dağılımın Özellikleri

Normal dağılımın özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1.Normal dağılım çan eğrisi şeklindedir (Şekil 3.11),

2.Normal dağılım ortalama etrafında simetriktir. Ortalama, tepe değeri ve ortanca değer aynıdır (Şekil 3.11).



ŞEKİL 3.11. Normal dağılım şekli

3. Normal dağılımın simetrik olması sebebi μ ile μ+c bulunan bireylerin %'si, μ ile μ-c arasında bulunan bireylerin %'sine eşittir.

4. Normal dağılım sürekli bir dağılım olduğu için -∞'dan +∞'a kadar bütün değerleri kapsar, yani x'in -∞ ile +∞ arasında bulunma ihtimali 1'dir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1.0$$

3.3.2. Standart Normal Dağılım

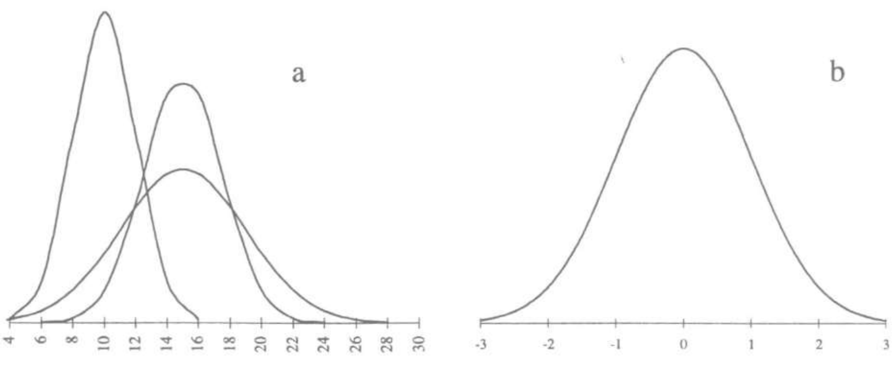
Ortalaması ve standart sapması bilinen bir normal dağılımda herhangi bir X değerinin belir sınırlar arasında olma olasılığı hesaplanmak istenirse olasılık fonksiyonun söz konusu sınırlar arasında integralinin alınması gerektiği yukarıda belirtilmişti. Bu olasılığın hesaplanması aşağıdaki integralin alınmasını gerektirir. Bu hem çok zaman gerektirir hem de istatistiği kullanmak durumunda olan herkes bu ölçüde matematik bilmek zorunda değildir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

Parametreleri farklı normal dağılımları oluşturan gözlem değerlerinden ortalamaları çıkarılıp standart sapmalarına bölünerek standardize edilebilir, standardize edilmiş değerler (Z değerleri) aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\boxed{Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}}$$

Bu durumda ortalaması ve standart sapmaları farklı olan normal dağılımlar (Şekil 3.12 a), ortalamaları ve standart sapmaları aynı olan değerlere dönüştürülmüş olur (Şekil 3.12 b). Standardize edilmiş değerlerin dağılımına "**Standart Normal**" dağılım denir.



ŞEKİL 3.12. Parametreleri farklı normal dağılımlar ve standart normal dağılım

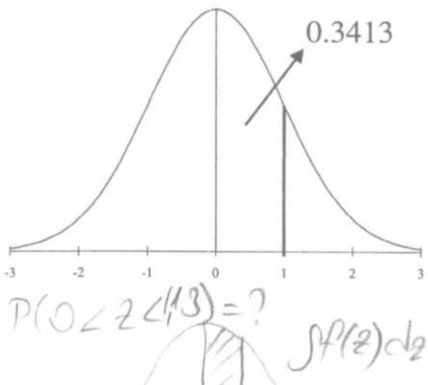
Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}}$$

şeklindedir. Fonksiyonda görüldüğü gibi normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunda olduğu gibi X değerleri değil, X değerinin ortalama ve standart sapma bakımından standartlaştırılmış değeri, Z, kullanılmıştır. Z-dağılımı da olarak isimlendirilen standart normal dağılımın ortalaması 0 ve standart sapması 1'dir. Bu dağılım da ortalaması etrafında simetriktir, yani ortalama ile +Z arasında olma olasılığı, ortalama ile -Z değeri arasında olma olasılığına eşittir. Ortalamadan küçük Z değerlerinin oranı %50 (yani 0.5) ve ortalamadan büyük Z değerlerinin oranı da %50 (yani 0.5)'dir. Bu dağılıma dahil olan bütün Z değerlerinin oluş olasılıkları toplamı 1'e eşittir. Parametresi bilinen ve normal dağılım gösteren X değerleri standardize edilerek Z değerlerine çevrilebilirler. Z dağılımında ortalama (0 ile) belirli Z değerleri arasında kalan alanlar, olasılık fonksiyonunun integrali alınarak hesaplanmış ve tablo halinde düzenlenmiştir (TABLO A). Bu tablo kullanılarak kolayca ortalama ile belirli Z değerleri arasındaki alan bulunabilir.

ÖRNEK 1:

Z değerlerinin 0 ile 1.0 değerleri arasında olanların oranı nedir?

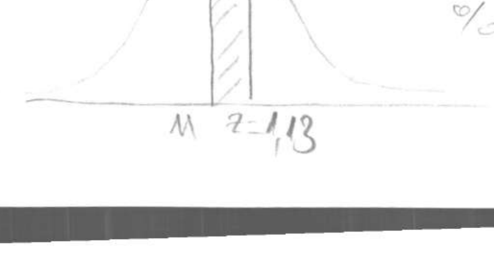


Tablo A'dan bakıldığı zaman 0 ile +1 arasındaki alan 0.3413'tür. Yani sıfır ile +1 arasındaki bütün Z değerleri, dağılımı oluşturan Z değerlerinin %34.13 kadarıdır. Başka bir deyişle; standart normal populasyonda her hangi bir Z değerinin sıfır ile 1 arasında olma olasılığı %34.13'tür.

$P(0 < Z < 1{,}13) = ?$

$\int f(z)\,dz = 0{,}3708$

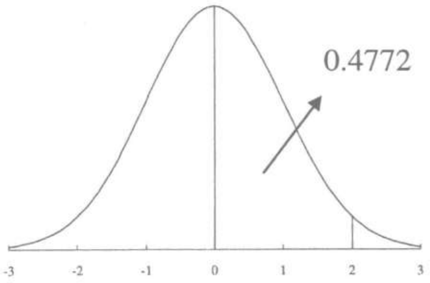
%37,08 : 0 ile 1,13 arasında



Normal populasyonlarda gözlem değerlerinin %34.13'ü ortalama ile bundan 1 standart sapma uzaklıktaki nokta arasında olduğu söylenebilir.

ÖRNEK 2:

Z değerlerinin 0 ile 2.0 değerleri arasında olanların oranı nedir.



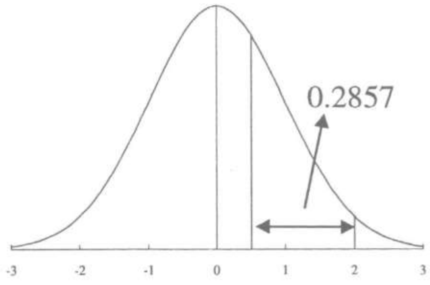
Tablo A'dan bakıldığı zaman 0 ile +2 arasındaki alan 0.4772'dir. Yani sıfır ile +2 arasındaki bütün Z değerleri, dağılımı oluşturan Z değerlerinin %47.72 kadarıdır. Normal populasyonda gözlem değerlerinin %47.72'si ortalama ile bundan 2 standart sapma uzaklıktaki nokta arasında olduğu söylenebilir.

ÖRNEK 3:

Standart normal dağılımda tüm Z-değerlerinin % ne kadarı 0.5 ile 2 arasındadır.

Bu örnekte istenen ihtimal:

$$P(0.5<Z<2.0)=P(0<Z<2.0)-P(0<Z<0.5)$$



Bu olasılığı hesaplamak için Z değerlerinin 0 ile 2.0 arasında olma olasılığından Z değerlerinin 0 ile 0.5 arasında olma olasılığı çıkarılır. Tablo A'dan bakıldığı zaman $P(0<Z<2.0)=0.4772$ ve $P(0<Z<0.5)=0.1915$'dir. Bu durumda istenen olasılık:

$0.4772-0.1915=0.2857$'dir.

ÖRNEK 4:

Bir doğumevinde doğan bebeklerin ağırlıklarının ortalamasının 3.2 kg ve standart sapmasının ise 0.3 kg olan bir normal dağılım gösterdiği bilinmektedir. Buna göre;

a. Bu doğumevinde 3.2 kg ile 3.9 kg arasında doğan bebeklerin nisbi miktarı nedir?

b. Bu doğumevinde 3.2 kg'dan daha hafif doğan bebeklerin nisbi miktarı nedir?

c. Bu doğumevinde 2.8 kg ile 3.6 kg arasında doğan bebeklerin nisbi miktarı nedir?

d. Bir günde ortalama 200 bebeğin doğduğu kabul edilirse bu bebeklerden kaç tanesinin ağırlığı 4 kg'dan daha fazladır?

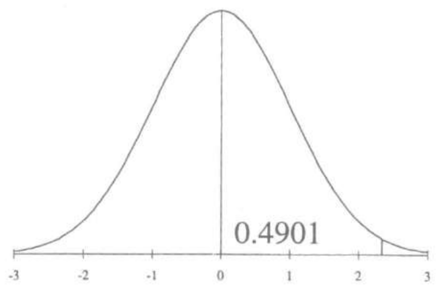
e. Bebeklerden en ağır %2.5'ini sınırlayan alt değer nedir?

f. Bebeklerden en hafif %5'i hangi ağırlıktan daha düşüktür?

Yukarıda istenen olasılıkların hesaplanabilmesi için her X değerinin standardize edilerek bunlara karşılık gelen Z değerinin hesaplanması gerekir.

a. Burada istenen olasılık P(3.2<X<3.9)'tur. Bunun için X değerleri standardize edilerek Z değerleri hesaplanır ve Tablo A kullanılarak söz konusu olasılık aşağıdaki şekilde bulunur.

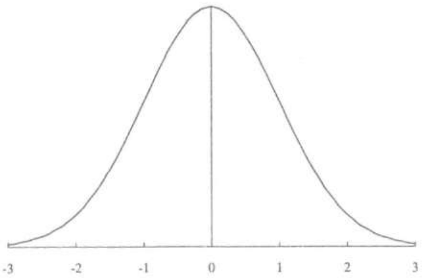
$$P(3.2 < X < 3.9) = P(\frac{3.2-3.2}{0.3} < Z < \frac{3.9-3.2}{0.3})$$
$$= P(0 < Z < 2.33)\text{'dır.}$$



Tablo A'dan P(0<Z<2.33)=0.4901 olarak bulunur. Yani bu doğum evinde doğan bebeklerin %49.01'inin ağırlığı 3.2 kg ile 3.9 kg arasındadır.

b. Bu şıkta istenen doğan bebeklerin ağırlığının 3.2 kg'dan daha hafif olma olasılığı, yani P(X<3.2)'dir. Burada da yine 3.2 değerine karşılık gelen Z değeri bulunmalıdır. Bu değer a şıkkında

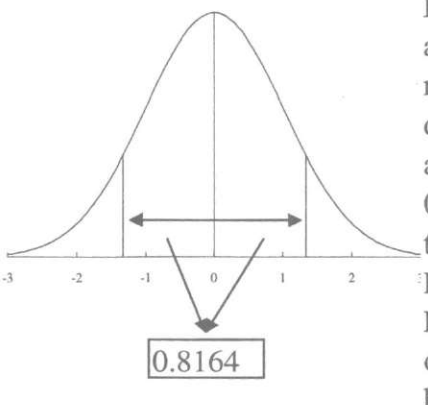
Z=0 olarak çıkmıştır. Burada istenen olasılık Z değerlerinin 0'dan küçük olma olasılığıdır.



$P(Z<0)=0.5$ yani standart normal dağılımda Z değerlerinin 0'dan küçük olma olasılığı %50'dir. Başka bir deyişle, doğan bebeklerin 3.2 kg'dan daha hafif olma olasılığı %50'dir.

c. Doğan bebeklerin 2.8 kg ile 3.6 kg arasında olanların nisbi miktarı $P(2.8<X<3.6)$'dır. İlk olarak yapılması gereken bu değerlerine karşılık gelen Z değerlerinin hesaplanmasıdır.

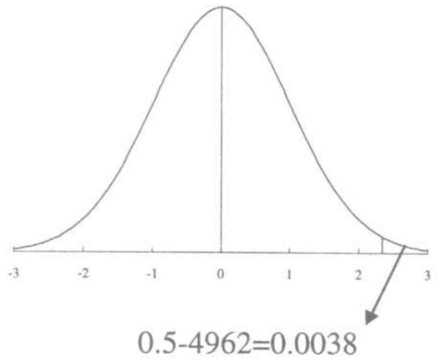
$$P(2.8 < X < 3.6) = P(\frac{2.8-3.2}{0.3} < Z < \frac{3.6-3.2}{0.3})$$
$$= P(-1.33 < Z < 1.33)$$



Burada istenen -1.33 ile 0 ve 0 ile 1.33 arasındaki Z değerlerinin nisbi miktarlarının toplamıdır. Başka bir deyişle Z değerlerinin -1.33 ile 0 arasında olma olasılığı ile Z değerlerinin 0 ile 1.33 arasında olma olasılıklarının toplamıdır. Tablo A'dan; $P(-1.33<Z<0)=0.4082$ ve $P(0<Z<1.33)=0.4082$'dir ve istenen olasılığı $0.4082+0.4082=0.8164$'tür. Yani bu doğum evinde doğan bebeklerin %81.64'ünün doğum ağırlığı 2.8 kg ile 3.6 kg arasındadır.

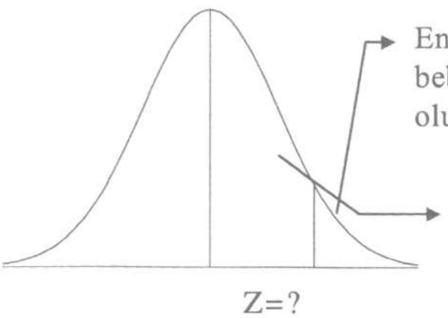
d. Bu şıkta bir günde doğan 200 bebekten kaç tanesinin doğum ağırlığının 4 kg'dan daha fazla olduğu isteniyor. Bu durumda ilk olarak doğan bebeklerden % kaçının doğum ağırlığının 4 kg'dan daha fazla olduğunun hesaplanması gerekir.

$$P(X > 4) = P(Z > \frac{4 - 3.2}{0.3} = P(Z > 2.67)$$



Burada istenen olasılık;
0.5-P(0<Z<2.67)=0.5-0.4962
=0.0038'dir.
Yani bir günde doğan 200 bebeğin %0.38'inin ağırlığı 4 kg'dan daha fazladır. Bu durumda doğum ağırlığı 4 kg'dan daha fazla olan bebek sayısı 200*0.0038=0.76, yaklaşık 1'dir.

e. Bu şıkta sorulan doğan bebeklerin en fazla ağırlığa sahip olan %2.5'uğunun hangi ağırlığın üstünde olduğudur. Bu ağırlığın hesaplanabilmesi için standart normal dağılım tablosunun tersten kullanılması gerekmektedir, yani 0 ile belirli bir Z değerinin arasındaki alan değil, 0.4750'lik alanın 0 ile hangi Z değeri arasında olduğuna bakılacaktır. Bu Z değeri bulunduktan sonra $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ eşitliğinde dağılım parametreleri ve Z değeri yerine konarak bu Z değerine karşılık gelen X değerinin hesaplanması gerekir.



En ağır doğum ağırlığına sahip bebeklerin %2.5'uğunun oluşturduğu alan

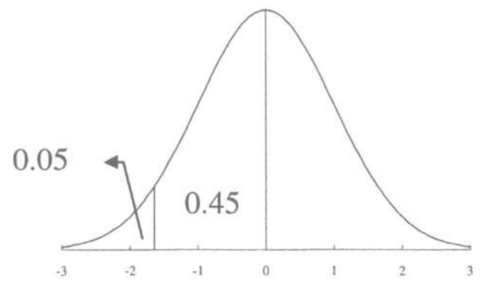
Doğum ağırlığı ortalama ile %2.5'lik en ağır doğum ağırlığına sahip bebekler arasındaki alan %47.5'tur. Bu durumda standart normal dağılım tablosundan 0 ile hangi Z değeri arasındaki alanının %47.5 olduğunun bulunması gerekir.

Tablo A'ya bakıldığı zaman 0 ile Z=1.96 arasında kalan alanının 0.4750 olduğu görülüyor. Bu durumda %2.5'lik alanın başladığı ağırlığı bulmak için; $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ eşitliğinde Z değeri ve dağılımın parametreleri yerine konarak X değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$1.96 = \frac{X-3.2}{0.3} \quad ise$$
$$X = 1.96(0.3) + 3.2 = 3.788\ kg$$

olarak bulunur.

f. Bu şıkta ise en az doğum ağırlığına sahip bebeklerin %5'nin hangi doğum ağırlığından başladığı sorulmaktadır. Burada da yine standart normal dağılım tablosu tersinden kullanılmalıdır ve 0 ile hangi Z değeri arasındaki alanın %45 olduğu bulunmalıdır. Tablo A'ya bakıldığı zaman 0 ile Z=1.64 arasındaki alanın 0.4495 ve 0 ile Z=1.65 arasındaki alanın ise 0.4505 olduğu görülür. 0.4495 ile 0.4505'in ortalaması alınırsa 0.45 değeri elde edilir. 0.45 değerine karşılık gelen Z değerini bulmak için de 1.64 ile 1.65'in ortalaması alınırsa 1.645 bulunur yani 0 ile Z=1.645 arasındaki alan 0.45'tir.



Burada en az ağırlığa sahip bebeklerin %5'nin hangi ağırlıktan başladığı sorulduğu için bizi ilgilendiren ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu taraftır. Fakat yukarıda da belirtildiği gibi dağılım simetrik olduğu için 0 ile1.645 arasındaki alan ile -1.645 ile 0 arasındaki alan birbirine eşittir. Bu durumda %5.0'lik alanın başladığı ağırlığı bulmak için; $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ eşitliğinde Z= -1.645 ve dağılımın parametreleri yerine konarak X değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$-1.645 = \frac{X-3.2}{0.3} \; ise$$

$$X = -1.645(0.3) + 3.2 \cong 2.707 \; kg$$

olarak bulunur.

3.3.3. Frekans Dağılım Tablosunda Normal Dağılıma Göre Olması Beklenen Frekansların Hesaplanması

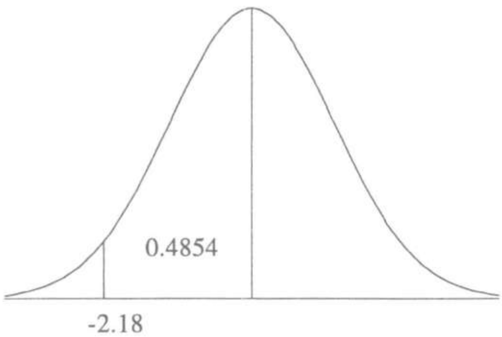
Üzerinde çalışılan konu ile ilgili bilgilerin toplanması için seçilen örnekten veriler elde edildikten sonra araştırıcı için frekans dağılım tablosunu oluşturarak örneğin ortalaması ve standart sapmasını hesaplamış olsun. Frekans dağılım tablosunu oluşturan sınıflar için, ortalaması ve standart sapması örnekten hesaplanan gibi olan bir normal dağılıma göre her sınıfta beklenen frekansları hesaplanabilir.

Frekans dağılımı tablosunda normal dağılıma göre beklenen frekansların nasıl hesaplanacağı I. BÖLÜM'de 120 bebeğin doğum ağırlığı için düzenlenen frekans dağılımı tablosu kullanılarak açıklanacaktır. Bu örnek için ortalama 3.414 ve standart sapma da 0.2152 olarak hesaplanmıştı. Örnekten hesaplanan bu değerler parametre yerine kullanılarak, ortalaması 3.414 ve standart sapması 0.2152 olan normal dağılıma göre beklenen frekanslar şu şekilde hesaplanır: Tablo 3.5'deki frekans dağılımı tablosunda da görüleceği gibi **birinci sınıf 2.945** üst gerçek sınırında bitmektedir. Bu sınıf 2.945'ten daha küçük değere sahip gözlem değerlerini kapsar. Bu durumda söz konusu normal dağılımda gözlem değerlerinin % ne kadarının 2.945'ten daha küçük olduğunun hesaplanması gerekir. Bu olasılığı ($P(X<2.945)$) hesaplayabilmek içinde ilk olarak 2.945 değerine karşılık gelen Z-değeri bulunur.

TABLO 3.5. 120 bebeğin doğum ağırlığına ait gözlenen ve ortalaması 3.414 ve standart sapması 0.2152 olan normal dağılıma göre beklenen frekanslar

Gerçek üst sınır	Olasılık	Frekans	Beklenen frekans
2.945	0.0146	1	1.750
3.045	0.0290	2	3.480
3.145	0.0620	9	7.440
3.245	0.1092	15	13.104
3.345	0.1597	19	19.164
3.445	0.1812	24	21.744
3.545	0.1734	19	20.808
3.645	0.1286	14	15.432
3.745	0.0805	8	9.660
3.845	0.0390	5	4.680
3.945	0.0160	3	1.920
4.045	0.0068	1	0.816
	Toplam	120	119.998

$$P(X<2.945)=P(Z<\frac{(2.945-3.414)}{0.2152})=P(Z<-2.18) \text{ bulunur.}$$



Bu normal dağılımda gözlem değerlerinin 2.945'ten veya standart normal dağılımda Z=-2.18'den daha küçük değere sahip olma olasılığı;
0.5-0.4854=0.0146'dir.
Yani tüm gözlemlerin (120 gözlem değerinin)

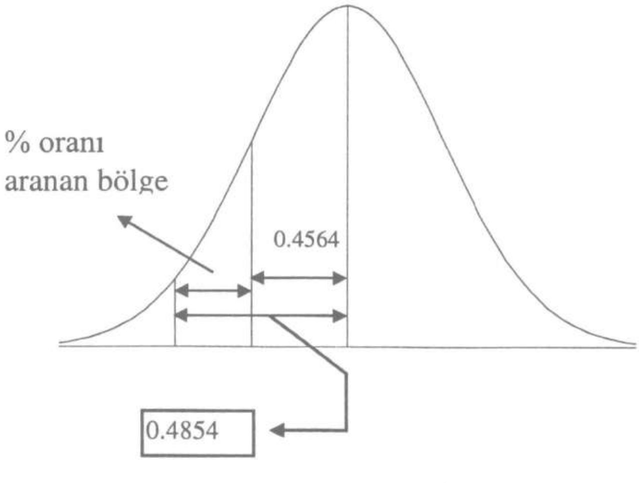
%1.46'sı bu sınıftadır. Bu durumda 1. sınıf için normal dağılıma göre beklenen frekans 120(0.0146)≅1.75'tir.

İkinci sınıfta ise doğum ağırlığı 2.945 ile 3.045 kg arasında olan bebekler vardır. Bu sınıf için söz konusu normal dağılıma göre olması beklenen frekansların hesaplanabilmesi için P(2.945<X<3.045) olasılığının bulunması gerekir.

$$P(2.945 < X < 3.045) = P(\frac{2.945 - 3.414}{0.2152} < Z < \frac{3.045 - 3.4141}{0.2152})$$

$$= P(-2.18 < Z < -1.71)$$

Bu olasılığın hesaplanabilmesi için Z değerlerinin -2.18 ile 0 arasında olma olasılığından Z değerlerinin -1.71 ile 0 arasında olma olasılığının çıkarılması gerekir. Yani aşağıdaki grafik üzerinde gösterilen alan hesaplanacaktır.



Şöyle ki;
Gözlem değerlerinin 2.945 ile 3.045 arasında olma olasılığı:
0.4854-0.4564=0.029.
Yani gözlem değerlerinin %2.9'unun bu sınıfta olması beklenir. Bu durumda bu sınıf için beklenen frekans 120(0.029)=3.48 olarak bulunur.

III.sınıf için: P(3.045<X<3.145)=P(-1.71<Z<-1.25) yani bebeklerin doğum ağırlıklarının 3.045 ile 3.145 kg arasında olma olasılığı 0.4564-0.3944=0.062'dir. Bu sınıfın beklenen frekansı ise 120(0.062)≅7.44'tür.

IV.sınıf için: P(3.145<X<3.245)=P(-1.25<Z<-0.79) yani bebeklerin doğum ağırlıklarının 3.145 ile 3.2455 kg arasında olma olasılığı 0.3944-0.2852=0.1092'dir. Bu sınıfın beklenen frekansı ise 120(0.1092)≅13.104'tür.

V. sınıf için: Bu sınıfta yer alan bebeklerin doğum ağırlığı 3.245 ile 3.345 kg arasındadır. Burada $P(3.245<X<3.345)$ olasılığı hesaplanacaktır. Bu X değerlerine karşılık gelen Z değerleri hesaplandığı zaman $P(-0.79<Z<-0.32)$ olarak bulunur.

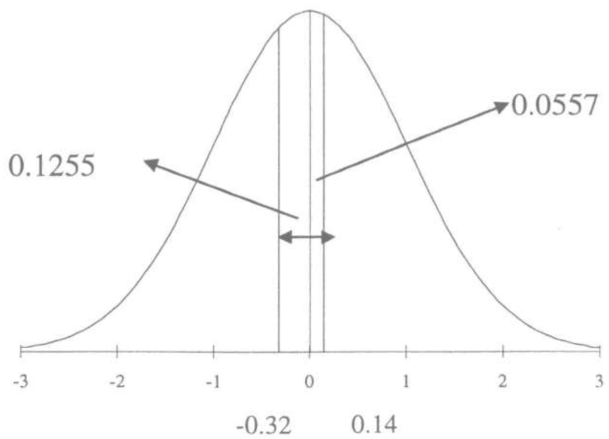
$$P(-0.79<Z<-0.32)=0.2852-0.1255=0.1597$$

Bu sınıfta beklenen teorik frekans=120(0.1597)=19.164'dür.

VI.sınıf için: $P(3.345<X<3.445) = P(-0.32<Z<0.14)$ 'tür. Dikkat edilecek olursa bu sınıfa ait Z değerlerinin biri pozitif diğeri ise negatiftir. Bunun anlamı aranan aralık ortalamanın iki tarafındadır.

$$P(-0.32<Z<0.14)=P(-0.32<Z<0)+P(0<Z<0.14)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu ifade aşağıda daha açık olarak normal dağılım üzerinde gösterilmiştir.



$P(-0.32<Z<0)=0.1255$
$P(0<Z<0.14)=0.0557$

$P(-0.32<Z<0.14)=0.1255+0.0557=0.1812$ yani ele alınan 120 bebeğin doğum ağırlığının dahil olduğu normal dağılımda 3.345 ile

BÖLÜM IV

ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

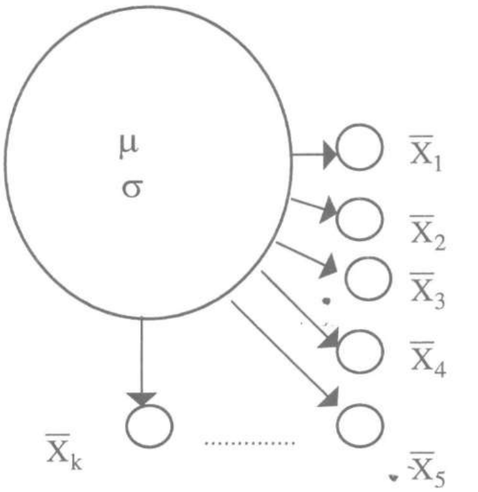
Bir populasyondan belirli bir örnek genişliğinde rastgele mümkün olan sayıda örnekler çekilse ve bu örneklerde herhangi bir istatistik hesaplansa, hesaplanan bu istatistiğin değeri örnekten örneğe değişecektir. Hesaplanan bu istatistikler bir dağılım gösterir. Bu dağılıma, hesaplanan istatistiğe ait **ÖRNEKLEME DAĞILIMI** denir.

Örnekleme dağılımları teorik dağılımlardır ve hipotez kontrolleri için gereklidir. Üzerinde çalışılan bir örneğin hipotezle belirtilen (hipotez ve kontrolleri hakkında bilgi için BÖLÜM VI'ya bakınız.) populasyondan rastgele çekilmiş örneklerden biri olma olasılığı, yani söz konusu istatistiğe ait örnekleme dağılımına dahil olama olasılığı hesaplanır. Bu hesaplanan olasılığa göre araştırıcının kurmuş olduğu hipotez ret veya kabul edilir.

Herhangi bir istatistiğe ait örnekleme dağılımının şekli ve parametreleri, örneklerin çekildiği populasyonun şekline, parametrelerine ve örnek genişliğine bağlıdır.

4.1. Ortalamaya ait Örnekleme Dağılımı

Ortalaması μ ve standart sapması σ olan bir normal populasyondan n örnek genişliğinde çok sayıda geri iadeli rastgele örnekler çekilse ve bu örneklerde ortalamalar hesaplansa bu ortalamaların her biri populasyon ortalamasının bir tahminidir. Örneklerden hesaplanan ortalamalar örnekten örneğe değişir ve bir dağılım gösterir. Bu dağılıma "**Ortalamaya ait Örnekleme Dağılımı**" denir. Bu dağılımın parametreleri $\mu_{\bar{x}}$ ve $\sigma_{\bar{x}}$'dir. Ortalamaya ait örnekleme dağılımının parametreleri yukarıda da değinildiği gibi rastgele çekilen örneklerin genişliğine, populasyonun parametrelerine ve şekline bağlıdır.



Parametreleri bilinen bu populasyondan "n" örnek genişliğine sahip çok sayıda (k tane) örnek çekilse ve ortalamaları hesaplansa, bu ortalamalar örnekten örneğe değişecek ve bir dağılım gösterecektir. Bu dağılım $k \to \infty$'a gittiği zaman "ortalamaya ait örnekleme" dağılımıdır.

Bu dağılımın parametrelerinden biri $\mu_{\bar{x}}$ yani ortalamadır ve populasyon ortalamasına, μ_x'e, eşittir. Diğer parametresi ise standart sapma, $\sigma_{\bar{x}}$'dir ve aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(4.1)$$

Yani ortalamaya ait örnekleme dağılımının populasyondan hesaplanan standart sapmasıdır.

Fakat çoğu zaman populasyon varyansı bilinmediği için örnekten tahmin edilir. Bu durumda ortalamaya ait örnekleme dağılımının standart sapması;

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(4.2)$$

şeklinde tahmin edilir. Buna ortalamaya ait örnekleme dağılımının örnekten tahmin edilen standart sapması veya kısaca ortalamanın **standart hatası** denir.

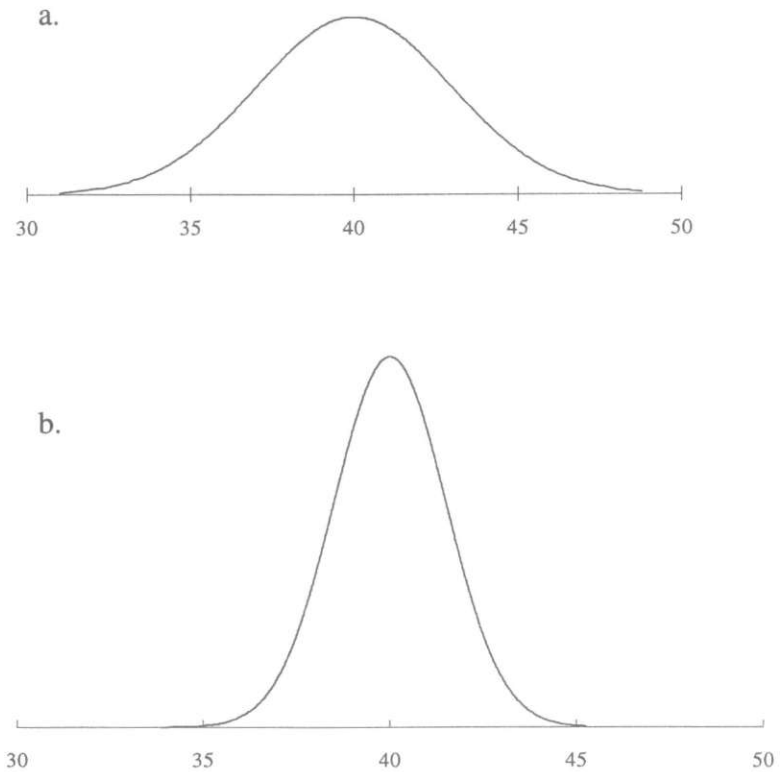
Ortalamaya ait örnekleme dağılımının şekli örneklerin çekildiği populasyonun şekline ve tesadüfen çekilen örneklerin genişliğine bağlıdır. Eğer örneklerin çekildiği populasyon normal dağılım gösteren bir populasyon ise örnek genişliği ne olursa olsun ortalamaya ait örnekleme dağılımı normal dağılım gösterir. Fakat örneklerin çekildiği populasyon yatık (sağa veya sola çarpık) bir dağılım gösteriyorsa bu durumda örnekleme dağılımın şekli örneklerin genişliğine bağlıdır. Normal dağılım dışındaki dağılımlardan çekilen örneklerin genişliği arttıkça ortalamaya ait örnekleme dağılımı örnek genişliğine bağlı olarak normal dağılıma yaklaşır. Aşağıdaki örneklerde önce normal dağılımdan çekilen örneklerin genişliğinin dağılım tipini etkilemediği daha sonra normal olmayan dağılımlardan çekilen örneklerin genişliği arttıkça ortalamaya ait örnekleme dağılımının normal dağılıma yaklaştığı gösterilecektir.

ÖRNEK 1:

Şekil 4.1.a'da MINITAB paket programında benzetim (simulasyon) yöntemi ile üretilmiş, ortalaması, $\mu=40$ ve standart sapması, $\sigma=3$ olan bir normal dağılım görülmektedir. Bu dağılımdan $n=4$ olan mümkün olan sayıda örnekler çekildiği zaman hesaplanan ortalamaların her biri populasyon ortalamasının bir tahmini olup örnekten örneğe değişir ve Şekil 4.1.b'de görüldüğü gibi bir normal dağılım gösterir. Bu ortalamaya ait örnekleme dağılımıdır. Şekil 4.1.b'de görüldüğü gibi örnek genişliği 4 olmasına rağmen ortalamaya ait örnekleme dağılımı normal dağılım göstermiştir. Bu dağılımın parametreleri ise ortalama ve standart sapma olup aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{\bar{x}} = 40$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = 1.5$$



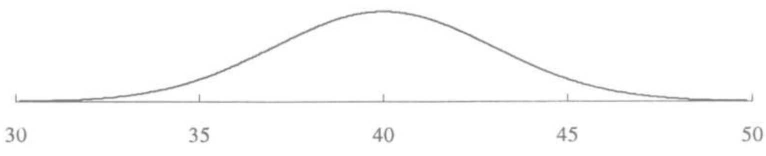
ŞEKİL 4.1. Benzetim (simulasyon) yöntemi ile üretilmiş, ortalaması, μ=40 ve standart sapması, σ=3 olan bir normal dağılım (a) ve n=4 bireylik örneklerden elde edilen ortalamaya ait örnekleme dağılımı (b)

ÖRNEK 2:

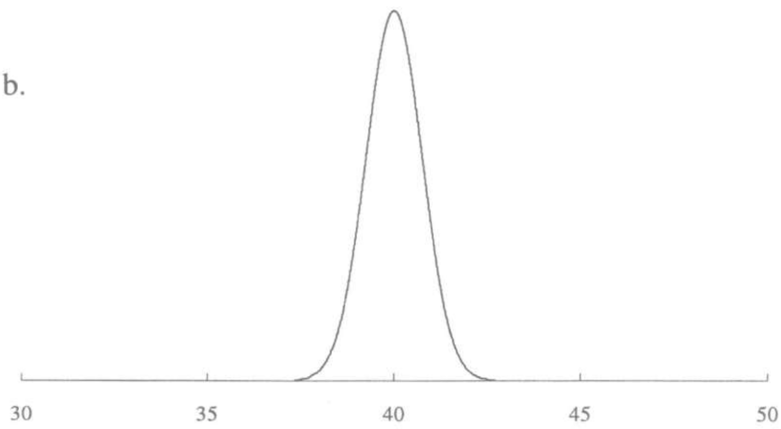
Ortalaması μ=40 ve σ=3 olan ve Şekil 4.1.a'da verilen normal dağılımdan bu sefer "n=16" örnek genişliğine sahip mümkün olan sayıda örnekler çekilse ve ortalamaları hesaplansa, ortalamaya ait örnekleme dağılımı yine normal dağılım gösterecektir (Şekil 4.2. a ve b). Şekil 4.1.b'de verilen grafikten görüldüğü ve Şekil 4.2.b ile karşılaştırıldığı zaman da anlaşılacağı gibi örnek genişliği arttığı zaman ortalamaya ait örnekleme dağılımının standart sapması küçülmektedir.

Bu dağılımın parametreleri ise; ortalaması, $\mu_{\bar{x}} = 40$, fakat örnek genişliğine bağlı olarak standart sapması, $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{16}} = 0.75$'dir.

a.



b.



ŞEKİL 4.2. Benzetim (simulasyon) yöntemi ile üretilmiş, ortalaması, μ=40 ve standart sapması, σ=3 olan bir normal dağılım (a) ve n=16 bireylik örneklerden elde edilen ortalamaya ait örnekleme dağılımı (b).

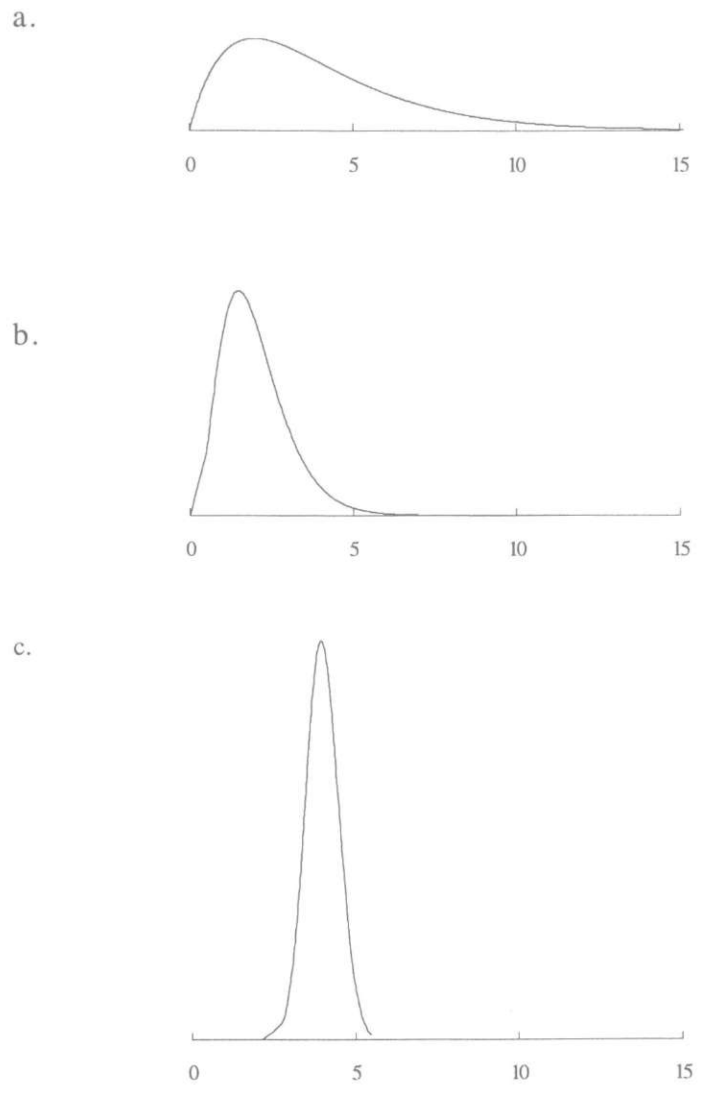
ÖRNEK 3:

Örnekler yatık (çarpık) bir dağılım gösteren populasyondan çekiliyorsa ortalamalara ait örnekleme dağılımının şekli populasyondan rastgele çekilen örneklerin büyüklüğüne (genişliğine) bağlıdır. Örneğin 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı gösteren bir populasyondan genişliği 4 olan örnekler çekilse populasyon ve ortalamanın örnekleme dağılımı Şekil 4.3.a ve b'de verildiği gibidir.

Şekil 4.3.a'da simulasyon yöntemi ile üretilmiş 4 serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımı görülmektedir. Bu dağılımın ortalaması 4 (ki-kare dağılımında ortalama serbestlik derecesidir) ve varyansı 8'dir (ki-kare dağılımında varyans serbestlik derecesinin iki katıdır.). Şekil 4.3.b'de ise Şekil 4.3.a'da verilen dağılımı gösteren populasyondan çekilen ve genişliği 4 olan örneklerden hesaplanan ortalamalara ait dağılım görülmektedir. Bu dağılımın ortalaması yine 4, fakat varyansı 8/4'tür.

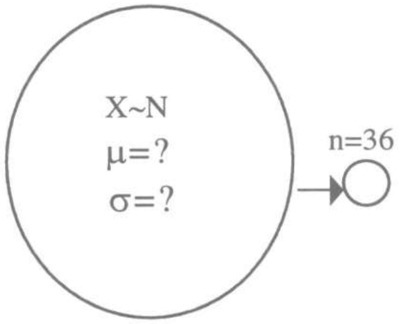
Şekil 4.3.c'de ise 4 serbestlik dereceli ki-kare populasyonundan çekilmiş 32 bireylik örneklerden hesaplanmış ortalamalara ait örnekleme dağılımı görülmektedir. Bu dağılımın da ortalaması 4, fakat varyansı 8/32'dir.

Şekil 4.3.b'den de görüldüğü gibi ki-kare dağılımından çekilen 4 bireylik örneklerden hesaplanan örneklerin ortalamalarına ait dağılımda yatıklık (çarpıklık), Şekil 4.3.a'da verilen dağılıma nazaran biraz azalmıştır. Eğer Şekil 4.3.a'da verilen dağılımı gösteren populasyondan 32 bireylik örnekler çekilirse ve bu örneklerde ortalamalar hesaplanırsa, hesaplanan ortalamalara ait dağılımın şekli ise Şekil 4.3.c'de verildiği gibi olacaktır. Şekil 4.3.c'de de görüldüğü gibi dağılım yatık (çarpık) bir dağılım olmasına rağmen, söz konusu populasyondan çekilen örneklerin genişliği arttıkça ortalamaya ait örnekleme dağılımının şekli de normal dağılıma yaklaşmaktadır.



ŞEKİL 4.3. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı (a), n=4 bireylik örneklerden elde edilen ortalamaya ait örnekleme dağılımı (b), ve n=32 bireylik örneklerden elde edilen ortalamaya ait örnekleme dağılımı (c).

ÖRNEK 4:

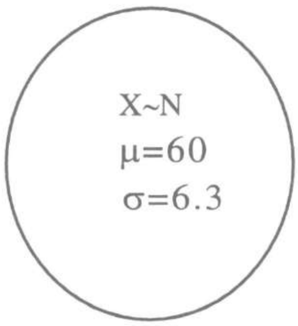


Ortalaması ve standart sapması bilinmeyen bir populasyondan 36 bireylik bir örnek çekilmiş ve bu örneğin ortalaması 56.4 ve standart sapması da 7.2 olarak bulunmuştur. Ortalamaya ait örnekleme dağılımının parametrelerinin örnekten tahminleri $\overline{X}$ ve $S_{\overline{X}}$'dir.

Çünkü populasyonun standart sapması örnekten tahmin edilmiştir. Bu dağılımın parametrelerinin tahminleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\overline{X} = 56.4 \qquad \text{ve} \qquad S_{\overline{X}} = \frac{7.2}{\sqrt{36}} = 1.2$$

ÖRNEK 5:



Parametreleri yandaki şekilde verilen bir populasyon vardır. Elimizde de bu populasyondan çekilip çekilmediğini bilmediğimiz 9 bireylik bir örnek bulunmaktadır. Bu örnekte ortalama 56.4 olarak hesaplanmış ise bu örneğin, ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olma olasılığı nedir?

Bu örnekte, ortalamaya ait örnekleme dağılımının parametreleri $\mu_{\overline{X}} = 60$ ve $\sigma_{\overline{X}} = \frac{6.3}{\sqrt{9}} = 2.1$'dir. 56.4 olarak hesaplanan ortalamanın, ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olma olasılığını bulmak için bu değere karşılık gelen Z değerinin aşağıda verilen eşitlik kullanılarak hesaplanması gerekir. Aranan olasılık $P(\overline{X} < 56.4)$'tür.

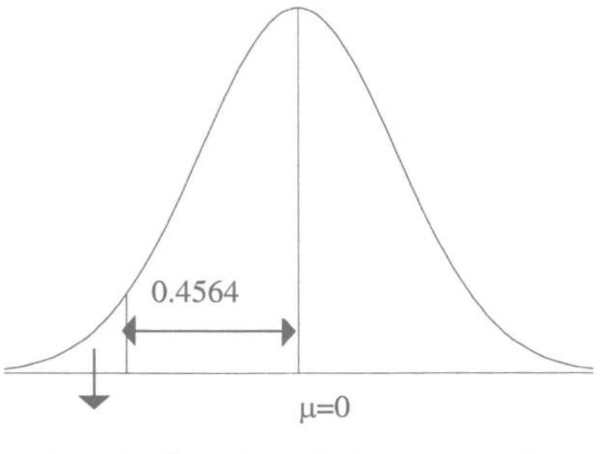
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

Eşitlikte görüldüğü gibi standart sapma olarak ortalamaya ait örnekleme dağılımının standart sapması kullanılmaktadır. Çünkü hesaplanmak istenen, örnekten hesaplanan ortalamanın ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olma olasılığıdır.

Yukarıda verilen ortalamaya karşılık gelen Z-değeri;

$$Z = \frac{56.4 - 60}{2.1} = -1.71$$

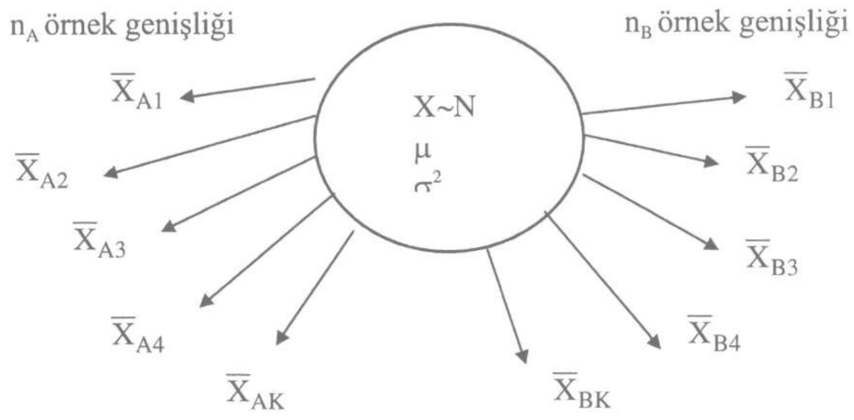
Söz konusu ortalamanın, ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olma olasılığının bulunması ise aşağıda şekil üzerinde gösterilmiştir. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi standart normal dağılımda Z değerlerinin -1.71 ile 0 arasında olma olasılığı 0.4564'tür.



Şekilde işaretlenmiş olan alan söz konusu ortalamanın, ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olma olasılığını verir. Bu olasılık da 0.5-0.4564=0.0436' ya eşittir. Yani bu ortalamanın bu dağılıma dahil olma olasılığı %5'ten daha azdır.

4.2. Ortalamalar arası Farka ait Örnekleme Dağılımı

Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir normal populasyondan n_A örnek genişliğinde geri iadeli örnekler alınarak ortalamaları hesaplansa ve daha sonra aynı populasyondan n_B örnek genişliğinde yine geri iadeli örnekler çekilse ve yine ortalamaları hesaplansa. Hesaplanan bu ortalamalar tamamen tesadüfi olarak yan yana getirilerek ortalamalar arasındaki fark alınsa bu farklar bir dağılım gösterir. Bu dağılıma $k \rightarrow \infty$ için "**ortalamalar arası farka ait örnekleme**" dağılımı denir ve bu farklar da normal bir dağılım gösterir.



$$\overline{X}_{A1} - \overline{X}_{B50} = D_1$$
$$\overline{X}_{A5} - \overline{X}_{B27} = D_2$$
$$\overline{X}_{A12} - \overline{X}_{B60} = D_3$$
$$\overline{X}_{A29} - \overline{X}_{B72} = D_4$$
.
$$\overline{X}_{A99} - \overline{X}_{B121} = D_k$$

Her bir ortalama populasyon ortalamasının bir tahmini olduğu için hesaplanan farkların sıfır olması beklenir. Fakat farklar normal bir dağılım gösterir. Bu dağılım yukarıda da belirtildiği gibi ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımıdır.

Bu dağılımın ortalaması, $\mu_D=0$'dır. Çünkü $\mu_D = \mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B}$ ve $\mu_{\bar{X}_A} = \mu$, $\mu_{\bar{X}_B} = \mu$ 'dür. Dağılımın varyansı $\sigma_D^2 = \sigma_{\bar{X}_A}^2 + \sigma_{\bar{X}_B}^2$ 'dir[1].

$\sigma_{\bar{X}_A}^2 = \dfrac{\sigma_{X_A}^2}{n_A}$ ve $\sigma_{\bar{X}_B}^2 = \dfrac{\sigma_{X_B}^2}{n_B}$ olduğuna ve $\sigma_{X_A}^2 = \sigma_{X_B}^2 = \sigma^2$ olduğuna göre dağılımın varyansı;

$$\sigma_D^2 = \frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B} = \sigma^2 \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B} \qquad \text{...(4.3)}$$

olarak bulunur. Dağılımın standart sapması ise;

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma^2 \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}} \qquad \text{...(4.4)}$$

$n_A = n_B = n$ ise dağılımın varyansı;

$$\sigma_D^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2 (n+n)}{n.n} = \frac{2n\sigma^2}{n^2} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

ve standart sapması da;

---

[1] X ve Y gibi iki bağımsız değişkenin toplamlarının varyansı,

$$\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

X ve Y gibi iki bağımsız değişkenin farkının varyansı,

$$\sigma_{(X-Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

X ve Y gibi iki bağımlı değişkenin toplamlarının varyansı,

$$\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

X ve Y gibi iki bağımlı değişkenin farkının varyansı,

$$\sigma_{(X-Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\sigma_D = \sqrt{2\frac{\sigma^2}{n}} \quad ...(4.5)$$

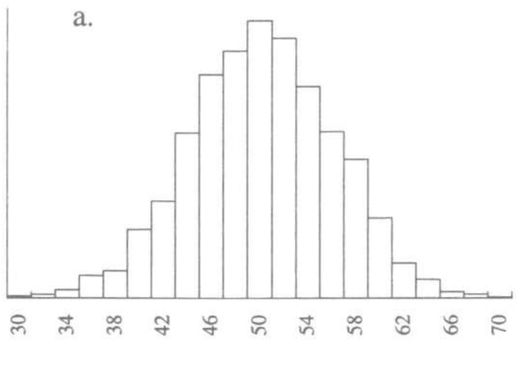
şeklinde bulunur.

Ortalamalar arası Farka ait Örnekleme Dağılımının Şekli

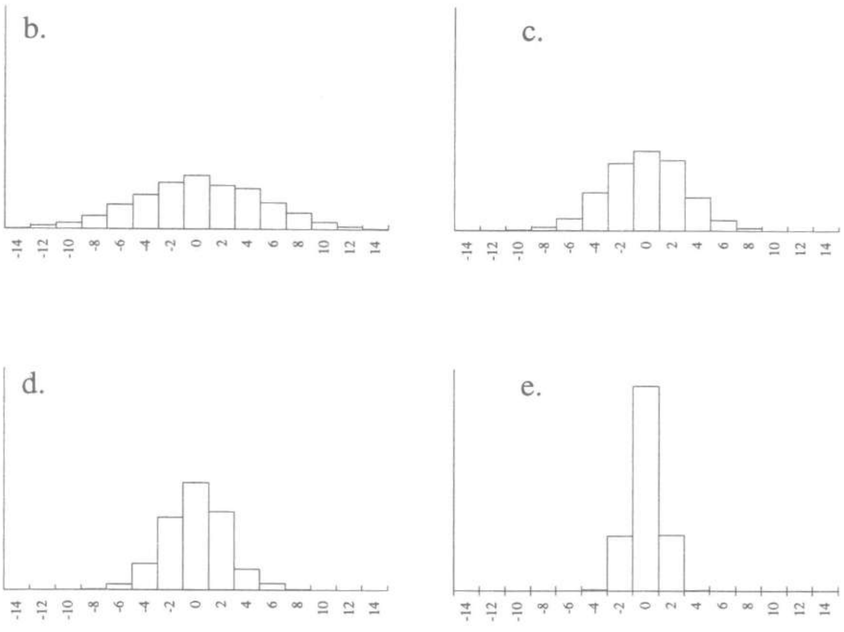
Normal dağılımdan alınan örneklerin içerdiği birey sayısı ne olursa olsun elde edilecek ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımının şekli normal olacaktır.

Simulasyon yöntemi ile ortalaması 50 ve standart sapması 6 olan normal dağılan değerler üretilmiştir. Bunların histogramı Şekil 4.4.a'da görülmektedir. Bu normal populasyondan 4, 9, 15 ve 60 birey içerecek şekilde simulasyon yöntemi ile çekilen örneklerden elde edilen ortalamalar arası farka ait histogramlar da Şekil 4.4.b, c, d ve e'de görülmektedir.

Şekil 4.4.b, c, d ve e'de görüldüğü gibi normal dağılımdan çekilen örnek ortalamaları arası farkların dağılımı örnek genişliği ne olursa olsun normaldir. Sadece örnek genişliği artıkça ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımının standart sapması azalmaktadır.



ŞEKİL 4.4. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş a. ortalaması 50 ve standart sapması 6 olan populasyon ve bu populasyondan çekilen ve b.)$n_A = n_B=4$, c.)$n_A = n_B=15$, d.)$n_A = n_B=30$ ve e.)$n_A = n_B=60$ olan örneklerden elde edilen ortalamalar arası farkların histogramları

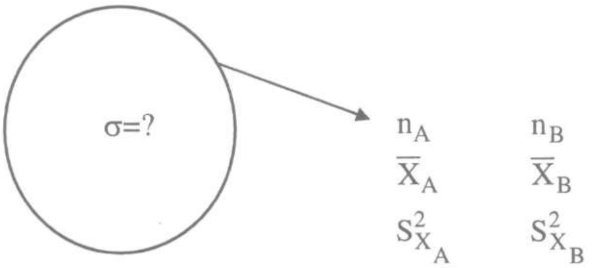


ŞEKİL 4.4.(devam). Simulasyon yöntemi ile üretilmiş a. ortalaması 50 ve standart sapması 6 olan populasyon ve bu populasyondan çekilen ve b.)n_A= n_B=4, c.)n_A= n_B=15, d.)n_A= n_B=30 ve e.)n_A= n_B=60 olan örneklerden elde edilen ortalamalar arası farkların histogramları

Şekil 4.4.b'de verilen dağılımın standart sapması, $\sigma_D = 6\sqrt{\frac{2}{4}} = 4.24$ iken, Şekil 4.4.c'de verilen dağılımın standart sapması 2.828, Şekil 4.4.d'de verilen dağılım standart sapması 2.191 ve Şekil 4.4.e'de verilen dağılımın standart sapması ise 1.549'tur. Örnek genişliğine bağlı olarak elde edilecek örnekleme dağılımında farklar arasındaki varyasyonun azaldığı verilen şekillerden de görülebilmektedir. Örnek genişliği 4 olduğu zaman deneyde elde ettiğimiz farklar -14 ile 14 arasında değişirken, örnek genişliği 60 olduğu zaman elde edilen farklar yaklaşık olarak -3.5 ile 3.5 arasında değişmektedir.

Toplanmış Varyans:

Çoğu zaman örneklerin çekildiği populasyonun varyansı bilinmez. Bu durumda ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımının varyansı (veya standart sapması) örnekten tahmin edilir.



Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi eğer örnek genişlikleri n_A ve n_B olan iki örnek çekilmiş ise bu durumda

$$\sigma_D^2 = \sqrt{\sigma^2 \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}}$$

eşitliğinde σ^2 yerine konacak populasyon varyansının en iyi tahmini **toplanmış varyanstır**. Toplanmış varyans populasyondan çekilen örneklerin varyanslarının serbestlik derecesi ile tartılı ortalamasıdır ve populasyon varyansının en iyi tahminidir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$S^2 = \frac{(n_A - 1)S_{X_A}^2 + (n_B - 1)S_{X_B}^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \qquad \ldots(4.6)$$

$\sum d_{X_A}^2 = (n_A - 1)S_{X_A}^2$ ve $\sum d_{X_B}^2 = (n_B - 1)S_{X_B}^2$ olduğu bilindiğine göre toplanmış varyans aşağıdaki şekilde de yazılabilir;

$$S^2 = \frac{\sum d_{X_A}^2 + \sum d_{X_B}^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)}$$

Bu durumda ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımın örnekten tahmin edilen varyansı S_D^2 olarak gösterilir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$S_D^2 = \frac{\sum d_{X_A}^2 + \sum d_{X_B}^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \cdot \frac{(n_A + n_B)}{(n_A n_B)}$$

Ve dağılımın örnekten hesaplanan standart sapması da;

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum d_{X_A}^2 + \sum d_{X_B}^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \cdot \frac{(n_A + n_B)}{(n_A n_B)}} \qquad \ldots(4.7)$$

şeklinde hesaplanır. Bu örnek ortalamaları arası farkın standart hatasıdır.

4.3. Oranlara ait Örnekleme Dağılımı

Üzerinde çalışılan olayın oluş olasılığı π olan populasyondan örnekler çekilse söz konusu oran hesaplansa, bunların her biri π'nin birer tahminidir. Tahmin edilen bu olasılıklar örnekten örneğe değişecek ve bir dağılım gösterecektir. Söz konusu bu dağılıma "**oranlara ait örnekleme dağılımı**" denir. Bu dağılımın parametreleri olan ortalama ve varyans, μ_p ve σ_p^2'dir. Oranlara ait örnekleme dağılımının ortalaması, populasyonda üzerinde durulan olayın oluş olasılığına eşittir, yani $\mu_p = \pi$'dir. Dağılımın varyansı ise;

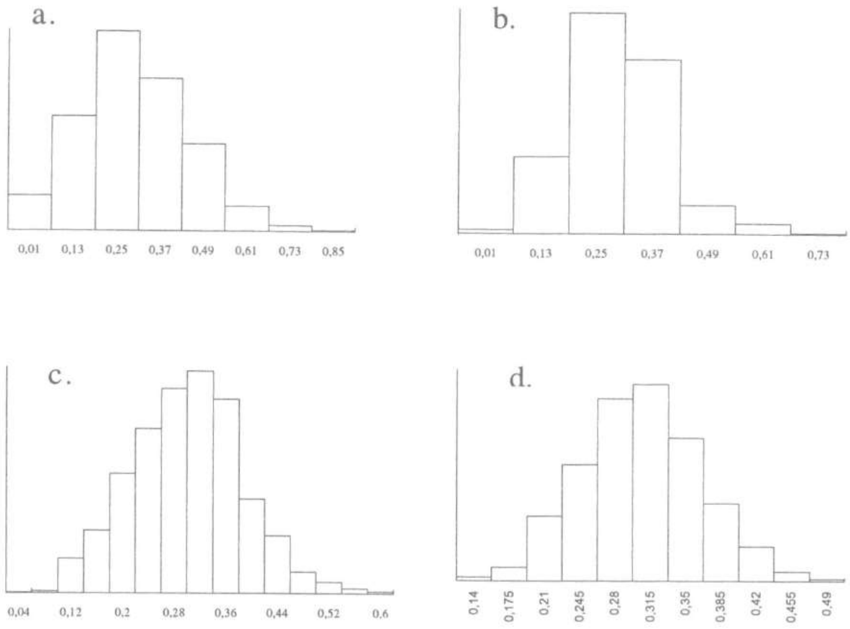
$$\sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \qquad \ldots(4.8)$$

Eğer π bilinmiyor ise yerine örnekten hesaplanan p değeri kullanılır. Bu durumda örnekleme dağılımına ait varyansın tahmini;

$$S_p^2 = \frac{p(1-p)}{n} \text{ dir.} \qquad \ldots(4.9)$$

Oranlara ait örnekleme dağılımının şekli populasyonun π'sine ve çekilen örneklerin genişliğine bağlıdır. Eğer populasyonda üzerinde durulan olayın oluş olasılığı, $\pi \leq 1/2$ ise oranlara ait örnekleme dağılımının normal dağılıma yaklaşabilmesi için $n.\pi \geq 10$ olmalıdır. $\pi > 1/2$ olduğu durumlarda ise oranlara ait örnekleme dağılımının normal dağılıma yaklaşabilmesi için ise $n.(1-\pi) \geq 10$ şartının yerine getirilmiş olması gerekir. Aslında hiçbir zaman tam olarak normal dağılım olmayıp bu şartlar sağlandığı zaman normal dağılıma yaklaşır. Belirtilen bu şartları sağlamayan örnek genişlikleri için elde edilecek örnekleme dağılımının şekli normal olmayacaktır. Bu durum aşağıda dağılım şekilleri verilerek açıklanmaktadır.

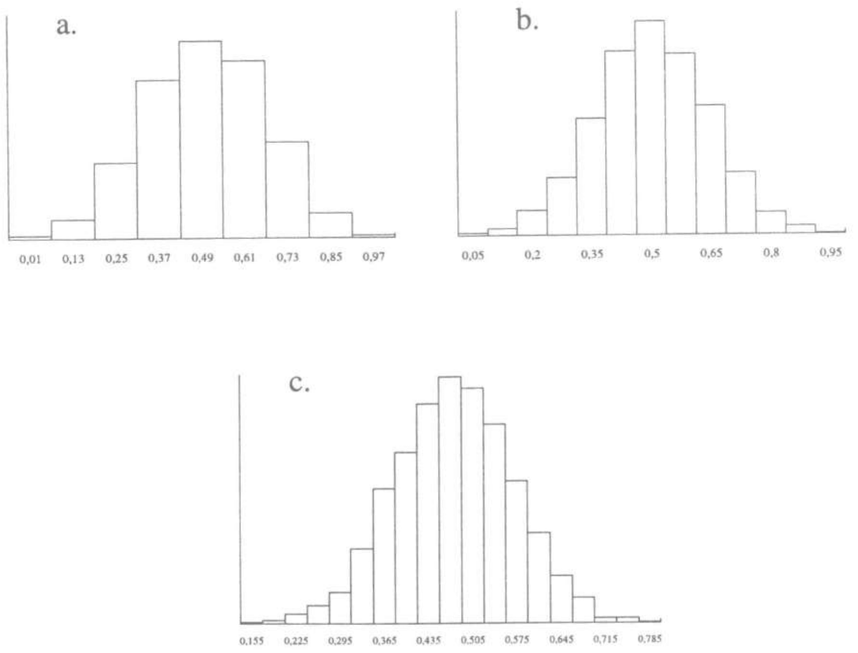
Simulasyonla üzerinde durulan olayın oluş olasılığı π=0.3 olan bir populasyondan örnek genişliği 9, 15, 30 ve 60 olan çok sayıda örnekler çekildiği ve bu örneklerin her birinde üzerinde durulan olayın oluş olasılığı hesaplandığı zaman bu oranlara ait örnekleme dağılımlarının şekli sırası ile Şekil 4.5.a, b, c ve d'de verilmiştir.



ŞEKİL 4.5. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş π=0.3 olan populasyondan çekilen a.)n=9, b.)n=15, c.)n=30 ve d.)n=60 birey içeren örneklerden elde edilen oranlara ait histogramlar

Şekil 4.5'de verildiği gibi oranlara ait örnekleme dağılımının normal dağılıma yaklaşması için gerekli şart ($\pi \leq 1/2$ olduğu için) $n.\pi \geq 10$ dur. Örnek genişliklerinin 9 ve 15 olduğu durumlarda bu şart gerçekleşmemektedir. Ve bu durumda, Şekil 4.5.a ve b'de gösterildiği gibi elde edilen dağılım yatık (çarpık) bir dağılımdır. π=0.3 olduğu zaman, oranlara ait örnekleme dağılımının normal dağılım gösterebilmesi için örnek genişliği en az $n=10/0.3 \cong 33$ olmalıdır. Şekil 4.5.c, örnek genişliği 30 olan örneklerden elde edilen örnekleme dağılımını göstermektedir. Şekilden de görüldüğü gibi örnekleme dağılımının şekli normale yaklaşmıştır. Örnek genişliği 60 olduğu zaman ise oranlara ait örnekleme dağılımı normal dağılıma daha çok yaklaşmıştır (Şekil 4.5.d).

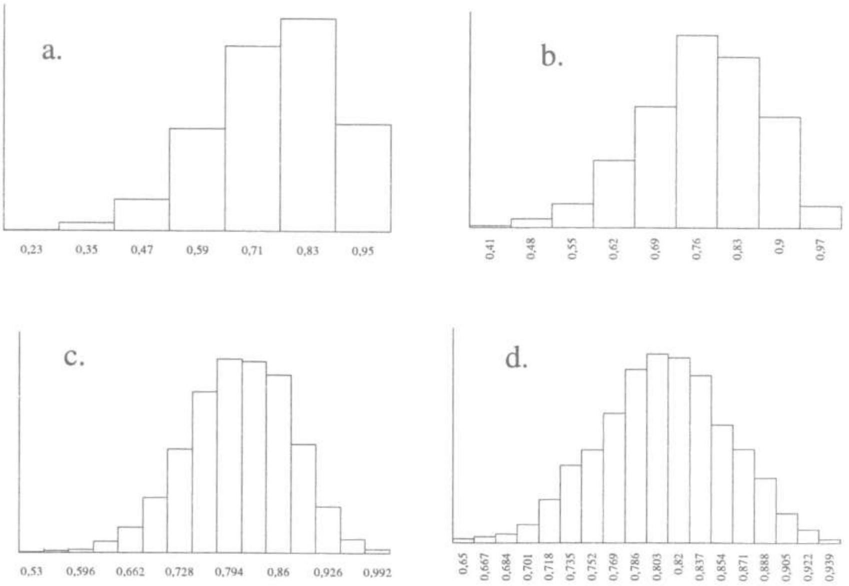
Şekil 4.6. a, b ve c ise π =0.5 olan bir populasyondan çekilen 9, 15 ve 30 bireylik örneklerden elde edilen oranlara ait örnekleme dağılımlarının şeklini göstermektedir.



ŞEKİL 4.6. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş π=0.5 olan populasyondan çekilen a.)n=9, b.)n=15 ve c.)n=30 birey içeren örneklerden elde edilen oranlara ait histogramlar

Üzerinde durulan olayın oluş olasılığı, π=0.5 olduğu zaman dağılımın şekli simetriktir. Bu nedenle, söz konusu populasyondan çekilen örneklerin genişliği ne olursa olsun oranlara ait örnekleme dağılımı simetrik bir şekil gösterecektir. Artan örnek genişlikleri ile de dağılım yaklaşık bir normal dağılım olacaktır (Şekil 4.6.a,b,c).

Şekil 4.7 ise simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve üzerinde durulan olayın oluş olasılığı 0.5'den büyük olan bir populasyondan 9, 15, 30 ve 60 birey içeren örnekler çekilerek elde edilen oranlara ait örnekleme dağılımlarının şeklini göstermektedir.



ŞEKİL 4.7. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş π=0.8 olan populasyondan çekilen a.)n=9, b.)n=15, c.)n=30 ve d.)n=60 birey içeren örneklerden elde edilen oranlara ait histogramlar

Eğer populasyon π'si 1/2'den büyük ise oranlara ait örnekleme dağılımının normal dağılıma yaklaşabilmesi için n. $(1-\pi) \geq 10$ şartının yerine getirilmiş olması gerektiği daha önce belirtilmişti. Söz konusu populasyonda π=0.8 olduğu için örnekleme dağılımının normal dağılıma yaklaşması için örnek genişliği en az n=10/(1-0.8)=50 olmalıdır. Şekil 4.7. a ve b'de gösterildiği gibi küçük örnek genişlikleri için örnekleme dağılımı yatık (çarpık) bir dağılım gösterir. Örnek genişliği 30 olduğu zaman dağılımın şekli normale yaklaşmaktadır (Şekil 4.7.c) ve örnek genişliği 50'den daha büyük olduğu zaman ise oranlara ait örnekleme dağılımı yaklaşık normal bir dağılım göstermektedir (Şekil 4.7.d).

ÖRNEK:

Bir populasyonda üzerinde durulan olayın oluş olasılığının %85 olduğu bilinmekte ise bu populasyondan en az kaçar bireylik örnekler alınmalıdır ki oranlara ait örnekleme dağılımı normal bir dağılıma yaklaşsın?

$\pi \geq 1/2$ ise dağılım şeklinin normale yaklaşması için $n(1-\pi) \geq 10$ olmalıdır. Bu durumda örnek genişliği en az $n.(1-0.85)=10$'dur. Bu işlem yapıldığı zaman örnek genişliğinin en az 67 olması gerektiği bulunur. Böyle bir populasyondan çekilen örneklerden hesaplanan oranlara ait dağılımın normal dağılıma yaklaşması için en az 67 birey içeren örnekler alınmalıdır.

ÖRNEK:

$\pi=0.7$ olan bir populasyondan örnek genişliği 100 olan mümkün olan sayıda rastgele örnekler alınsa, hesaplanan oranların % ne kadarının değeri 0.608 ile 0.792 arasındadır?

Oranlara ait örnekleme dağılımın parametreleri ortalama, $\mu_p=\pi$ ve varyans $\sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$'dir. İstenen olasılık ise $P(0.908<p<0.792)$'dir.

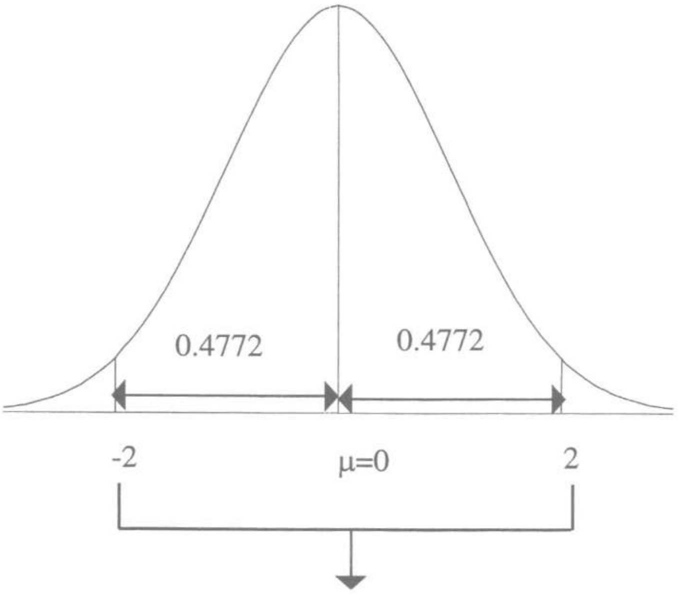
Bu olasılığı hesaplamak için aşağıda verilen Z eşitliği kullanılarak bu oranlara karşılık gelen Z-değerlerinin bulunması gerekir.

$$Z = \frac{p-\mu_p}{\sigma_p} = \frac{p-\mu_p}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Yukarıda verilen eşitlik kullanılarak söz konusu oranlara karşılık gelen Z-değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$P\left(\frac{(0.608-0.7)}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{100}}} < Z < \frac{(0.792-0.7)}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{100}}}\right) = P(-2 < Z < 2)$$

İstenen olasılığın bulunması ise aşağıda şekil üzerinde gösterilmiştir.



Oranların 0.608 ile 0.792 arasında olma olasılığı;

P(-2<Z<0)+P(0<Z<2)= 0.4772+0.4772=0.9544'tür.

Yani hesaplanan oranların %95.44'ünün değeri 0.608 ile 0.792 arasındadır.

4.4. Oranlar arası Farka ait Örnekleme Dağılımı

Üzerinde durulan olayın oluş olasılığı π olan bir populasyondan genişliği n_1 ve n_2 olan örnekler çekilse ve bu örneklerde p_1 ve p_2'ler hesaplansa, daha sonra örneklerden hesaplan olasılıklar tamamen tesadüfen yan yana getirilerek farkları alınsa, hesaplanan farklar bir dağılım gösterecektir ki bu dağılıma "**oranlar arası farka ait örnekleme dağılımı**" denir. Oranlar arası farka ait örnekleme dağılımının ortalaması $\mu_{(p_1-p_2)}=0$ ve varyansı $\sigma^2_{(p_1-p_2)}=\sigma^2_{p_1}+\sigma^2_{p_2}$'dır. Bu da aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$\sigma^2_{(p_1-p_2)}=\frac{\pi(1-\pi)}{n_1}+\frac{\pi(1-\pi)}{n_2} \qquad \ldots(4.10)$$

Eğer populasyondaki oluş olasılığı bilinmiyorsa örnekten hesaplanan değerler kullanılır. Bu durumda oranlar arası farkın örnekleme dağılımının tahmini varyansı;

$$S^2_{(p_1-p_2)} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \qquad \ldots(4.11)$$

Oranlar arası farka ait örnekleme dağılımı, populasyondan çekilen örneklerin genişlikleri yeteri kadar büyükse normal dağılım gösterir.

BÖLÜM V
REGRESYON ve KORELASYON

Bir çok durumda araştırıcı üzerinde çalıştığı örnekte birden fazla özelliğe ait veri toplayabilir. Bu gibi durumlarda sadece örneğin tanıtıcı istatistiklerini hesaplamak ve bilmek araştırıcı için yeterli olmayacaktır. Çünkü bu elde veriler olmasına rağmen bilgi kaybı demektir ve eldeki veriler kullanılarak iki özellik arasında bir ilişki olup olmadığı, değişkenlerden birinin bir birim artmasına karşılık diğer değişkende nasıl bir değişiklik meydana geldiği araştırılabilir.

Bir örnekten birden fazla özelliğe ait veri toplandığı zaman hesaplanması gereken istatistikler korelasyon ve regresyon katsayılarıdır. Bu kitapta söz konusu katsayılar açıklanırken iki özellik arasındaki doğrusal ilişki dikkate alınmıştır.

Değişkenler arasındaki ilişkilerin kaynağı değişik olabilir. Ele alınan değişkenlerden biri diğerini etkileyen etkenlerden (faktörlerden) biri olabilir. Bu tip ilişkilere **sebep-sonuç** ilişkisi denir. Ele alınan iki değişkenin her ikisini de etkileyen bir veya birçok faktörün varlığı da ilişki sebebidir. Her ilişkiyi sebep-sonuç ilişkisi olarak ele almak yanlıştır[2]. Örneğin, sigara tüketimi ile akciğer kanseri vakası sayısı arasındaki ilişkiyi araştırırken, 20 yıl boyunca tüketilen sigara miktarı ile akciğer kanserinden ölenlerin sayısı arasında hesaplanan ilişkiyi dikkatli yorumlamak gerekir. Bu ilişkide sigaranın kanser yapma etkisi yanında, zamana bağlı olarak

---

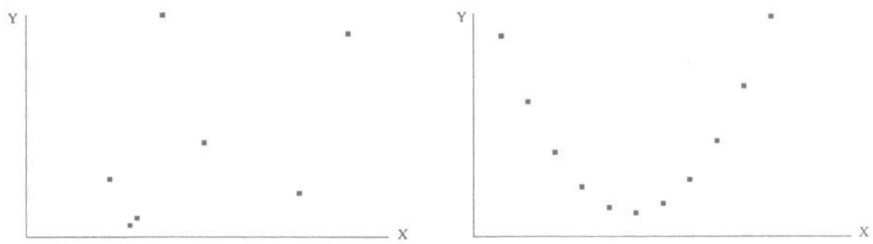
[2] Birçok değişkenin zaman periyodu içinde değişmesi de bu değişkenler arasında bir ilişkiye neden olur.

nüfusun, teşhis metotlarındaki gelişmenin ve doktora başvurma alışkanlığının artmasının da etkisi vardır.

5.1. Korelasyon Katsayısı

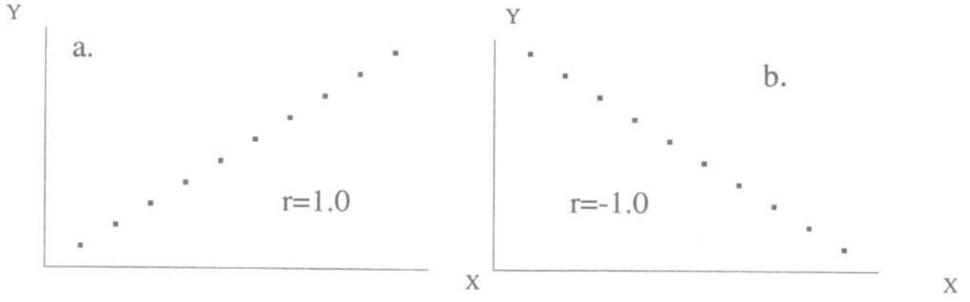
Bir örnekten iki özelliğe ait toplanan verilerin koordinat sisteminde noktalar halinde gösterilmesi araştırıcıya iki özellik arasında bir ilişki olup olmadığı, eğer varsa ilişkinin şekli hakkında bir ön bilgi verecektir.

Eğer veriler koordinat ekseninde işaretlendiği zaman Şekil 5.1'de verilen grafiklerde görüldüğü gibi bir dağılım gösteriyorsa iki özellik arasındaki ilişkinin derecesini belirten korelasyon katsayısı (r) 0 veya 0'a çok yakın bir değerdir. Bu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olmadığını gösterir.



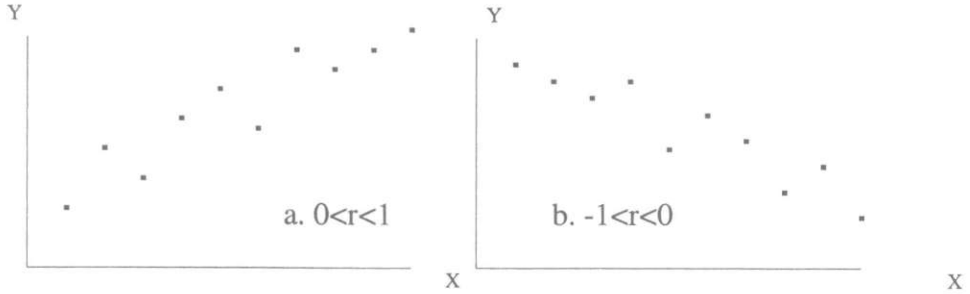
ŞEKİL 5.1. X ve Y özellikleri arasındaki ilişkinin 0 veya 0'a yakın olabileceği durumlar

İki özelliğe ait veriler koordinat sisteminde işaretlendiği zaman aşağıdaki grafiklerde gösterildiği gibi noktalar bir doğru üzerinde sıralanabilir. Bu, iki özellik arasında tam bir ilişki olduğunu gösterir, yani her X değerine karşılık gelen bir tek Y değeri vardır. Tam ilişki olduğu zaman korelasyon katsayısı 1.0 olarak bulunur. İlişkinin yönünü ise korelasyon katsayısının işareti belirtir. Eğer iki özellik arasındaki ilişki Şekil 5.2.a'daki gibi artan bir ilişki ise yani X arttıkça Y de artıyorsa korelasyon pozitif işaretlidir, yani r=1.0 olarak bulunur. Fakat iki özellik arasındaki ilişki Şekil 5.2.b'de verildiği gibi negatif (ters, azalan) bir ilişki ise korelasyon katsayısı negatif işaretlidir, yani r=-1.0 olarak bulunur.



ŞEKİL 5.2. X ve Y özellikleri arasında a. artan ve b. azalan tam doğrusal ilişki

Veriler koordinat sisteminde işaretlendiği zaman Şekil 5.3.a ve b'de verildiği gibi de olabilir.



ŞEKİL 5.3. X ve Y özellikleri arasında tam olmayan a. artan ve b. azalan doğrusal ilişki

Şekil 5.3'de görüldüğü gibi iki özellik arasında tam bir ilişki yoktur, yani noktalar bir doğru üzerinde dizilmemişlerdir. Bu durumda, eğer Şekil 5.3.a'da olduğu gibi iki özellik arasında tam olmayan pozitif bir ilişki varsa korelasyon katsayısı 0 ile +1 arasında bir değer alır. İki özellik arasında negatif tam olmayan bir ilişki söz konusu olduğu zaman ise (Şekil 5.3.b) korelasyon katsayısı -1 ile 0 arasındadır.

Yukarıda da açıklandığı gibi korelasyon katsayısı -1 ile +1 arasında değişir. İlişki tam ise 1 değerini alır. Korelasyon katsayısının işareti ise ilişkinin yönünü gösterir. Korelasyon katsayısının eşiti ise populasyonda aşağıdaki gibidir:

ikisi arasındaki derece nedir?

X		y
3	+1	4
5	+1	6
4	+1	5
2	+1	3

r=1

%100'lük tam bir ilişki var.

Populasyopnda:

$$\rho = \frac{\sum(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum(x_i - \mu_x)^2 \sum(y_i - \mu_y)^2}} \qquad ...(5.1)$$

Örnekte ise:

$\frac{14.18}{\sqrt{54.86}}$

$$r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2 \sum(y_i - \overline{y})^2}} \qquad ...(5.2)$$

Ve kısaca aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\boxed{r = \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d_x^2 \sum d_y^2}}} \qquad ...(5.3)$$

Eşitlikte, $\sum d_x d_y$, çarpımlar toplamı, $\sum d_x^2$, X değişkenine ait kareler toplamı, $\sum d_y^2$, Y değişkenine ait kareler toplamıdır.

Çarpımlar toplamı, X değerlerinin kendi ortalamalarından sapmaları ile Y değerlerinin kendi ortalamalarından sapmalarının çarpımlarının toplamıdır ve $\sum d_x d_y = \sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ şeklinde gösterilir. Kareler toplamının hesaplanmasında olduğu gibi çarpımlar toplamının hesaplanmasında da kolaylık için aşağıda verilen eşitlik kullanılır. Her birey için X ve Y değerlerinin çarpımlarının toplamından X ve Y değerlerinin toplamlarının çarpımının birey sayısına bölümü çıkarılır. Korelasyon katsayısının işaretini, çarpımlar toplamının işareti belirler.

$$\sum d_x d_y = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} \qquad ...(5.4)$$

5.2. Regresyon Katsayısı

Ele alınan iki değişkenden biri diğerinin fonksiyonu olarak ele alınabilir. Bu durum özelliklerin doğası olarak böyle olabildiği gibi, araştırıcı işine uygun olduğu için kendisi böyle seçmiş olabilir. Bir ülkenin nüfusu yıllar ilerledikçe artar. Yani pozitif bir ilişki vardır. Burada ülke nüfusu yılların (zamanın) bir fonksiyonudur. Nüfus Y, zaman X ile tanımlanırsa bu ilişki kısaca **y=f (x)** olarak gösterilir. Herhangi bir aracın fren sonucu yerde bıraktığı iz (metre olarak) o andaki hızının (km/saat) bir fonksiyonudur. Gerçekte ilişki **fren mesafesi = f(hız)** şeklindedir. Ancak günlük yaşamda herhangi bir kaza sonucu aracın o andaki hızı bilinmek istenir. Bu kaza yapan taraflar için çok önemlidir. Ancak kaza olmuş bitmiştir ve kanıt olarak yolda aracın bıraktığı fren izi vardır. İşte hızı tahmin etmek için gerçekteki durumun aksine **hız=f(fren mesafesi)** şeklinde ele alınabilir.

Değişkenlerden biri diğerinin fonksiyonu olarak tanımlandığında eşitliğin sol tarafındaki değişkene **bağımlı** değişken sağ tarafındakine de **bağımsız** değişken denir. Bağımlı değişken birden fazla değişkenin fonksiyonu olarak da ele alınabilir, **y=f** (x_1, x_2, x_3) gibi.

Bu bölümde bir bağımlı ve bir bağımsız değişken arasındaki ilişki ele alınacaktır.

y=f (x) eşitliğinde; X bağımsız değişken Y ise bağımlı değişkendir. Örnekteki X ve Y çiftleri koordinat ekseninde noktalandığında, ilişkinin doğrusal olduğunun varsayılabileceği kararına varılmış ise fonksiyon örnekte;

$$Y=a+bX+e$$ şeklinde ifade edilebilir.

Bağımsız değişkenin kendi ölçü birimi cinsinden bir birim değişmesine karşılık bağımlı değişkenin kendi ölçü birimi cinsinden ortalama olarak ne kadar değişeceğini gösteren katsayıya regresyon katsayısı denir. Korelasyon katsayısı iki özellik arasında ilişkinin derecesini verir ve bir birimi yoktur. Fakat regresyon katsayısının birimi vardır ve bağımsız değişkende bir birim değişmeye karşılık bağımlı değişkenin kendi birimi cinsinden ortalama olarak değişeceği miktardır. Bağımsız değişken X ve bağımlı değişken Y ile gösterilirse: X değişkeninin bir birim artmasına karşılık Y değişkenin kendi birimi cinsinden ortalama olarak değişeceği miktara Y'nin X'e göre regresyon katsayısı denir ve b_{yx} olarak gösterilir. Eğer Y değişkeni bağımsız değişken ise bu durumda da b_{xy} şeklinde ifade edilir.

Bağımlı b_{yx} = Y'nin X'e göre regresyon katsayısı
Bağımsız
b_{xy} = X'in Y'ye göre regresyon katsayısı
Bağımlı Bağımsız

Regresyon katsayısının hesaplanması için kullanılan eşitlik genel biçimde aşağıdaki gibidir:

$$\text{Regresyon katsayısı (b)} = \frac{\text{Çarpımlar Toplamı}}{\text{Bağımsız değişkene ait kareler toplamı}}$$

Bu durumda b_{yx} katsayısının hesaplanması için kullanılacak eşitlik;

$$\boxed{b_{yx} = \frac{\sum d_x d_y}{\sum d_x^2}} \qquad \text{...(5.5)}$$

ve b_{xy} katsayısının hesaplanması için ise kullanılacak eşitlik;

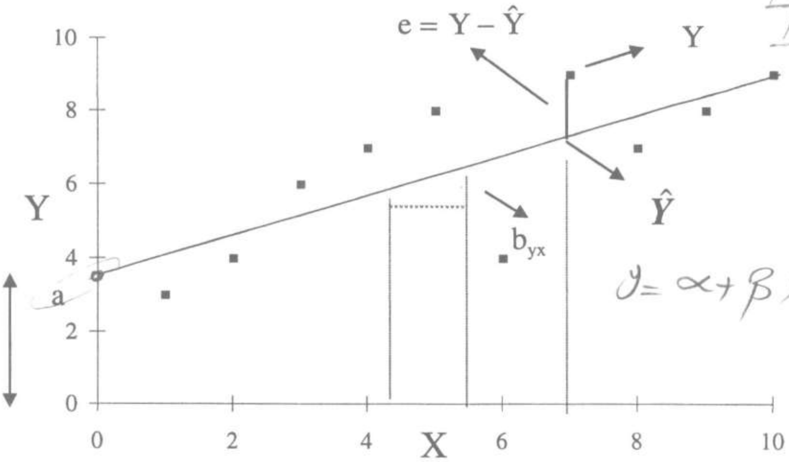
Regresyon katsayısının birimi bağımlı değişkenin birimine eşittir.

$$b_{xy} = \frac{\sum d_x d_y}{\sum d_y^2} \qquad \text{...(5.6)}$$

Yukarıda verilen eşitlikler kullanılarak regresyon katsayısı hesaplandığı zaman iki özellik arasındaki ilişkinin yönüne bağlı olarak katsayının işareti pozitif veya negatif çıkar. Eğer iki özellik arasında ters bir ilişki varsa katsayı negatif işaretli, artan bir ilişki varsa katsayı pozitif işaretli olarak bulunur. Regresyon katsayısının işareti ile korelasyon katsayısının işareti hiç bir zaman farklı bulunamaz çünkü her ikisinin de işareti çarpımlar toplamının işareti ile belirlenir.

5.3. Regresyon Denklemi

Eğer işaretlenen noktalar bir doğru üzerinde olsa idi doğrunun denklemi kolayca oluşturulabilirdi. Eğer noktalar tam bir doğru üzerinde değil de, doğru etrafında dağılıyorsa X ve Y değerlerine karşılık gelen noktaların hepsine birden en yakın geçecek bir doğru oluşturulabilir. Oluşturulacak bu doğruya "**Regresyon Doğrusu**" , bu doğrunun denklemine de "**Regresyon Denklemi**" veya "**Önceden Tahmin Denklemi**" denir ve $\hat{Y} = a + b_{yx}X$ şeklinde gösterilir. Şekil 5.4'te gösterildiği gibi denklemdeki "a" katsayısı, regresyon doğrusunun Y-eksenini kestiği noktanın ordinatı, b_{yx} ise regresyon doğrusunun eğimi yani regresyon katsayısıdır.



$y = \alpha + \beta X + e$

ŞEKİL 5.4. X ve Y özelliklerine ait gerçek gözlemler ve regresyon doğrusu

Regresyon denklemindeki katsayılar, X değerlerine karşılık gözlenen Y değerleri ile bu denklemden tahmin edilecek $\hat{Y}$ değerleri arasındaki sapmaların kareler toplamını minimum yapacak şekilde hesaplanmışlardır, yani bu katsayılar $\sum(Y - \hat{Y})^2$ değerini minimum yapan değerlerdir. $\sum(Y - \hat{Y})^2$ eşitliğinde $\hat{Y}$ yerine $(a + b_{yx}X)$ konarak $\sum(Y - (a + b_{yx}X))^2$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin tahmin edilmek istenen "a" ve "b"'ye göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlendiği ve elde edilen eşitlikler çözüldüğü zaman bu katsayıların eşitleri $a = \overline{Y} - b_{yx}\overline{X}$ ve $\boxed{b_{yx} = \frac{\sum d_x d_y}{\sum d_x^2}}$ olarak bulunur.

$Y = a + b_{yx}X + e$

ve;

tahmin eşitliği de $\hat{Y} = a + b_{yx}X$ olduğuna göre Y-$\hat{Y}$=e'dir. Buna regresyondan sapma denir. a ve b katsayıları, bu sapma kareler toplamını ($\sum e^2$) minimum yapan değerlerdir. Regresyondan sapmaların, ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılım gösterdiği varsayılır.

5.4. İsabet (Doğruluk) Derecesi

Yukarıdaki tahmin edilen değerlerden de görüldüğü gibi gözlenen değerler ile tahmin edilen Y değerleri arasında bir farklılık vardır. Bunun sebebi iki özellik arasındaki ilişkinin tam ilişki olmamasıdır. Oluşturulan bu denklem ile yapılan tahminlerin doğruluk (isabet) derecesi, r^2 ile gösterilir. r^2, yukarıda açıklanan ve hesaplanan korelasyon katsayısının karesine eşittir. Korelasyon katsayısının mutlak değer olarak 1'e yaklaşması regresyon denklemi kullanılarak yapılacak tahminlerin isabet derecesinin yüksek olduğu anlamına gelir.

ÖRNEK 1:

Herhangi bir vitamin karması şurubunda kapağı açıldıktan sonra oda sıcaklığında muhafazası halinde C vitamini miktarının değişmesini incelemek üzere yapılan bir çalışmada başlangıçta ve haftalar boyunca birim hacimde bulunan C vitamini miktarı aşağıdaki gibi olsun.

Haftalar	Birim hacimde bulunan C vitamini
0	100
2	90
4	70
6	40
8	30

Gözlemler koordinat ekseninde işaretlenince Şekil 5.5'deki grafik elde edilir.

Burada haftalar bağımsız değişken (X), buna bağlı olarak değişen vitamin miktarı ise bağımlı değişkendir (Y). Vitamin miktarı zamanın bir fonksiyonu olarak alınır, yani **Y=f (x)**'dir.

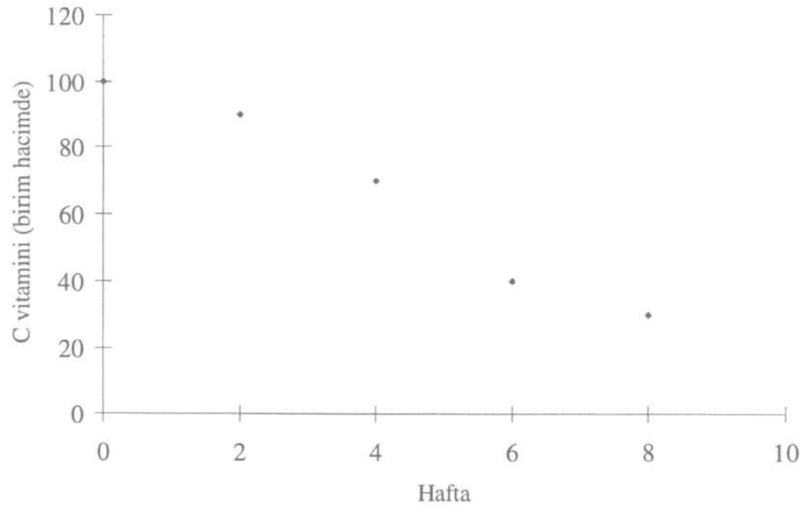
Şekil 5.5'te koordinat eksenine işaretlenen noktaların dağılımına bakılırsa, ilişkinin doğrusal olarak alınabileceği görülür. O halde varsayılan regresyon modeli;

$$Y=\alpha+\beta X+e$$

şeklindedir. Bu modelin ele alınan örnekten tahmini

$$\hat{Y} = a + b_{yx}X$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 5.5. Haftalar boyunca birim ünitede bulunan C vitamini miktarı

Bu modelin katsayılarının yukarıda açıklandığı şekilde hesaplanması için aşağıdaki tablo hazırlanmıştır.

	X	Y	X^2	Y^2	XY
	0	100	0	10000	0
	2	90	4	8100	180
	4	70	16	4900	280
	6	40	36	1600	240
	8	30	64	900	240
Toplam	20	330	120	25500	940

Toplamlar aşağıdaki gibidir:

$$\sum X = 20,\ \sum Y = 330,\ \sum XY = 940,\ \sum X^2 = 120,\ \sum Y^2 = 25500$$

Bağımsız değişkenin ortalaması: $\overline{X} = \frac{20}{5} = 4$

Bağımlı değişkenin ortalaması: $\overline{Y} = \frac{330}{5} = 66$

$\sum x^2 - (\sum x)^2$

Bağımsız değişkenin kareler toplamı: $\sum d_X^2 = 120 - \frac{(20)^2}{5} = 40$

Bağımlı değişkenin kareler toplamı: $\sum d_Y^2 = 25500 - \frac{(330)^2}{5} = 3720$

Çarpımlar toplamı: $\sum d_X d_Y = 940 - \frac{(20)(330)}{5} = -380$

Birim hacimdeki C vitamini miktarının zamana göre regresyon katsayısı ise 5.5 numaralı eşitlikte yukarıda hesaplanan değerler yerine konarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$b_{yx} = \frac{\sum d_x d_y}{\sum d_x^2}$ $\quad b_{yx} = \frac{-380}{40} = -9.5$

-9.5 katsayısının anlamı "**Bağımsız değişkenin (haftanın) bir birim artmasına karşılık (1 hafta) bağımlı değişkenin (vitamin) 9.5 mg azaldığı**" şeklindedir.

Tahmin etmek istediğimiz değişken bağımlı
kendisinden yararlandığımız değişken bağımsız

$a = \overline{Y} - b_{yx}\overline{X}$ $\hat{y} = a + b_{yx} X$

$a = 66 - (-9.5)(4) = 104$

$r^2 =$ tahminlerdeki isabet derecesi

Bu sonuçlara göre regresyon eşitliği,

5. haftada C vit. mik.

$\hat{Y} = 104 - 9.5X$ şeklindedir. $104 - 9,5.5 = 56,5$

Ele alınan zaman ve birim hacimdeki C vitamini arasındaki korelasyon katsayısı, 5.3 numaralı eşitlikte hesaplanan değerler yerine konarak aşağıdaki gibi hesaplanır: $r^2 = (-0,985)^2$

$\cong 0,97$ Eğer oluşturulacak regresyon denklemi kullanılacak bağımlı değişkene ilişkin tahminlerin isabet derecesi

$$r_{xy} = \frac{-380}{\sqrt{(40)(3720)}} = -0.985$$

Hesaplanan korelasyon katsayısı birim ünitedeki C vitamini ile zaman arasında 0.985 gibi azalan doğrusal bir ilişki olduğunu gösterir. Bu örnek için belirtme katsayısı veya isabet derecesi de $(0.985)^2 \cong 0.97$ olarak bulunur. Bunun anlamı, bağımlı değişkendeki değişmelerin %97'sinin bağımsız değişken ile açıklanabildiği şeklindedir.

ÖRNEK 2:

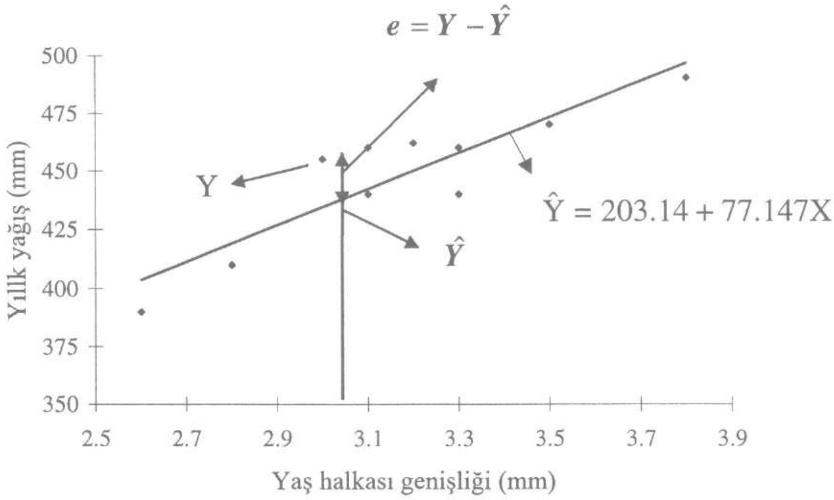
Ağaçlardaki yaş halkalarının genişliği birçok faktörün etkisi altındadır. Bunlardan en önemlisi de yıllık yağış miktarıdır. Yağışın fazla olduğu yıllarda yaş halkaları daha geniş, az olduğu yıllarda ise daha dardır. Çok yaşlı ağaçların herhangi bir nedenle kesilme durumunda yaş halkalarının genişliklerinden yüzlerce yıl önceki yağış miktarları ve kurak geçen yıllar hakkında bilgi edinilebilir. herhangi bir bölgede yağış gözlemi (rasadı) yapılan yıllar ve o bölgede kesilmiş olan ağacın o yıllara ait halka genişlikleri arasındaki ilişki belirlenerek 80-100 yıl öncesine (ağacın yaşına göre daha eski) ait yağış tahmin edilmeye çalışılır. Yağış halkası genişliğine (X), yıllık yağış miktarına da (Y) densin. Gerçekte yaş halkası sonuç, yıllık yağış miktarı da sebeptir. Yani **X=f (y)**'dir.

Ancak yaş halkası genişliğinden yağış miktarı tahmin edilmek istendiğinden gerçek durumun aksine **yağış (mm)=f(halka genişliği)** veya **Y=f(x)** şeklinde, yani yağış, halka genişliğinin bir fonksiyonu şeklinde alınabilir.

Örnek olarak herhangi bir bölgede yaşlı bir ağacın kesildiğini ve o bölgede son 10 yılda yıllık yağış rasadı (gerçekte daha uzun yılları kapsar) yapıldığını varsayalım. Bu yıllara ait yağış miktarları ve yaş halkası ölçümleri aşağıdaki gibi olsun. Yağış Y ekseni, yağış halkası genişliği de X ekseni olarak alındığında ve Şekil 5.6'da gösterildiği gibi gözlemler koordinat eksinine işaretlendiğinde Y=a+bX gibi bir doğrusal modelin kurulabileceği görülmektedir.

	Yaş halkası genişliği (mm) X	Yıllık yağış (mm) Y	X^2	Y^2	XY
	3.3	460	10.89	211600	1518.0
	3.1	460	9.61	211600	1426.0
	2.8	410	7.84	168100	1148.0
	3.3	440	10.89	193600	1452.0
	3.5	470	12.25	220900	1645.0
	3.0	455	9.00	207025	1365.0
	3.1	440	9.61	193600	1364.0
	3.8	490	14.44	240100	1862.0
	3.2	462	10.24	213444	1478.4
	2.6	390	6.76	152100	1014.0
Toplam	31.7	4477	101.53	2012069	14272.4

Not: Ağaçlar çok yaşlı olduğu için, bu ileri yaşlarda aynı yağış miktarında yağış halkası genişliğine yaşın etkisinin ihmal edilebilecek kadar az olduğu varsayılmıştır.



ŞEKİL 5.6. Yaş halkası genişliğine göre yıllık yağış miktarı

Gözlemlere ait aşağıdaki değerler hesaplanır:

Bağımsız değişkenin ortalaması: $\overline{X} = 3.17$

Bağımlı değişkenin ortalaması: $\overline{Y} = 447.7$

Bağımsız değişkenin kareler toplamı: $\sum d_X^2 = 1.041$ $\rightarrow 10153 - \frac{(31,7)^2}{10}$

Bağımlı değişkenin kareler toplamı: $\sum d_Y^2 = 7716.1$

Çarpımlar toplamı: $\sum d_X d_Y = 80.31$ $14272,4 - \frac{31,7.4477}{10}$

$\hat{Y} = a + b_{yx}X$ tahmin eşitliğinin katsayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$b_{yx}=77.15$ $\quad a=203.14$

$b_{yx} = \frac{80,31}{1,041}$

$a = 447,7 - 77,15.3,17$

Bu örnek için hesaplanan regresyon denklemi ve iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı ise aşağıdaki gibidir:

$$\hat{Y} = 203.14 + 77.15X$$
$$r = 0.90 \quad \frac{80,31}{\sqrt{1,041.7716,1}}$$

Burada 77.15'in anlamı, yaş halkalarının 1 mm artmasına karşılık yağışta ortalama olarak 77.15 mm artmaktadır. Tahmin doğrusunu koordinat ekseninde çizmek için bağımsız değişkenin iki değerine karşılık bağımlı değişkenin aldığı değerler hesaplanır, bu noktalar doğru ile birleştirilir. Örnek olarak,

$X = 2.7$ için $\hat{Y} = 411.45$

$X = 3.8$ için $\hat{Y} = 496.31$

Doğruyu daha duyarlı çizmek için tahmin noktalarını çok yakın almamak gerekir. Çizilen bu doğru gözlenen noktaların hepsine birden en yakın geçen doğrudur (Şekil 5.6).

Koordinat eksenine işaretlenen noktalardan X eksenine dik indirildiğinde nokta ile doğru arasındaki uzaklığa regresyondan sapma denir, e_i gösterilir (Şekil 5.6). a ve b katsayıları bu sapmaların karelerinin toplamı en küçük olacak şekilde (en küçük kareler yöntemi) hesaplandığı daha önce açıklanmıştı. Yani, $\sum e_i^2$ minimumdur.

Katsayıları belirlenmiş olan tahmin eşitliğinden geçmiş yılların yağış miktarları tahmin edilebilir. 70 yıl önceki bir yılın yaş halkası genişliği 3.6 mm ise, o yılki tahmini yağış miktarı $\hat{Y} = 203.14 + 77.15(3.6) = 480.88$ mm'dir. Bu tahmindeki isabet derecesi korelasyon katsayısının karesine eşittir. Ele alınan örnekte belirtme katsayısı (isabet derecesi), r^2=0.81'dir.

Burada dikkate edilmesi gereken nokta, yaş halkaları genişliğinden yapılacak tahminde, tahmin denkleminde bağımsız değişken yerine konacak değerin gözlem aralığında olması gereğidir. Ele alınan örnekte yaş halkası genişliği 2.6-3.8 mm arasında olmalıdır. Ancak bu değerlerden çok uzakta olmayan noktalar için de tahmin yapılabilir.

ÖRNEK 3:

Bundan önceki örnekte gerçek durumda X=f (y) olduğu halde, pratik uygulamada daha kullanışlı olduğu için tahmin modeli Y=f(x) şeklinde alındı. Kimyasal analizlerde kullanılan birçok alet, herhangi bir materyal içinde bulunan bir madde için yapılan analizde, araştırılan maddenin doğrudan oranını değil de orana bağlı olarak ya sayısal bir değer veya bir grafik alanı gösterir (fotometre ve gaz kromotografi cihazı gibi). Bu tip aletler kullanılmadan önce aranılan maddeyi değişik oranlarda içeren çözeltiler hazırlanır. Bunlar sıra ile alete konarak gösterdiği değerler okunur. Burada standart çözeltilerdeki madde oranları bağımsız değişken, aletten okunan değerler ise bağımlı değişkendir. Halbuki araştırıcılar alette okunandan aranan maddenin oranını tahmin etmek isterler. Bu durumda da bundan önceki yaş halkaları örneğinde olduğu gibi, aranan madde oranını bağımlı değişken almak akla gelir. Ancak kimya alanında aletlerin bu yolla kalibrasyonunda ve aranan madde oranının tahmininde fonksiyon gerçek durumdaki gibi alınagelmektedir. Bağımlı ve bağımsız değişkenin yeri değiştirilmez. Bütün kimya kitaplarında ve laboratuvarlarda böyle yapıldığı için aşağıdaki örnek ele alınmıştır. Üzerinde durulan maddeyi %1, %2, ..., %7 oranında içeren standart çözeltiler (X) hazırlanmış bunlar sıra ile alete konarak pik alanları (Y) okunmuş ve sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

	% konsantrasyon X	Pik alanı Y	X^2	Y^2	XY
	1	1.5	1	2.25	1.5
	2	2.7	4	7.29	5.4
	3	4.0	9	16.00	12.0
	4	5.4	16	29.16	21.6
	5	7.2	25	51.84	36.0
	6	8.0	36	64.00	48.0
	7	9.2	49	84.64	64.4
Toplam	28	38.0	140	255.18	188.9

Noktalar koordinat eksenine işaretlendiğinde (Şekil 5.7) doğrusal bir ilişkinin varlığı görülür.

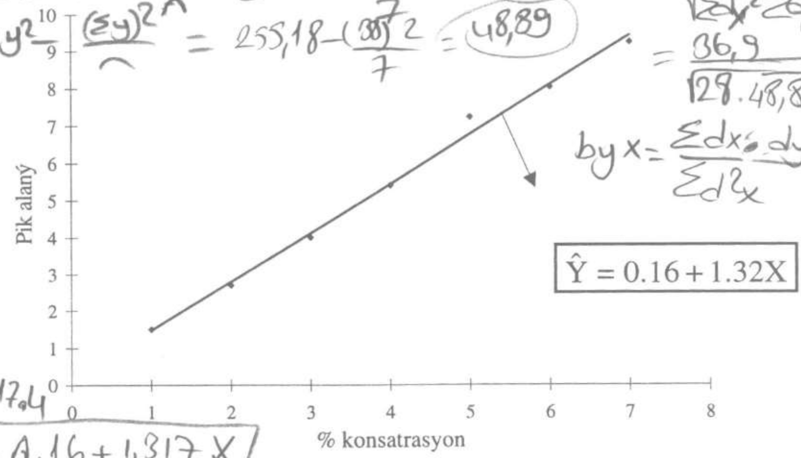
$\Sigma dxdy = \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n} = 188,9 - \frac{28 \cdot 38}{7} = 36,9$

$\Sigma d^2x = \Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n} = 140 - \frac{(28)^2}{7} = 28$

$\Sigma d^2y = \Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n} = 255,18 - \frac{(38)^2}{7} = 48,89$

$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x \Sigma d^2y}} = \frac{36,9}{\sqrt{28 \cdot 48,89}} = 0,997$

$byx = \frac{\Sigma dx \cdot dy}{\Sigma d^2x} = 1,317$



$y = a + byxX$

$a = \bar{y} - byx\bar{X}$

$= 5,428 - 1,317 \cdot 4$

$\boxed{= 0,16}$

$\boxed{y = 0,16 + 1,317X}$

ŞEKİL 5.7. % konsantrasyonlara karşılık gözlenen pik alanları ve regresyon doğrusu

$\hat{Y} = a + b_{yx}X$ tahmin eşitliğinin katsayıları hesaplanarak denklemde yerine konduğu zaman elde edilen eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$\hat{Y} = 0.16 + 1.32X$$

$$r^2 = 0.99$$

İçinde aranan maddenin oranının bilinmediği bir çözelti alete konduğunda pik alanı olarak 6.2 okunmuşsa bu değer (Y) yerine konarak X'in aldığı değer çözülürse aranan oran bulunmuş olur.

$$6.2 = 0.16 + 1.32X$$

$$\hat{X} = \frac{6.2 - 0.16}{1.32} \cong 4.58$$

Demek ki üzerinde durulan maddenin oranı ele alınan örnekte %4.58'dir.

$bxy = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2y} = \frac{36,9}{48,89} = 0,755$

$\hat{X} = a + b_{xy}Y \longrightarrow \hat{X} = -0{,}1 + 0{,}755 \cdot Y$

$a = \bar{X} - b_{xy}\bar{Y}$ $\quad -0{,}1 + 0{,}755 \cdot (6{,}2) = \boxed{4{,}58}$

$= 4 - 0{,}755 \cdot 5{,}428 = \boxed{-0{,}1}$

Eğer X=f(y) alınsa idi ve tahmin eşitliğinin modeli $\hat{X} = a + b_{yx}Y$ şeklinde olsa idi eşitlik $\hat{X} = -0.1 + 0.755Y$ şeklinde olacaktı. Burada da r^2=0.99'dur. 6.2 doğrudan yerine konarak;

$$\hat{X} = -0.1 + (0.755)(6.2)$$

$$\hat{X} = 4.58$$

olarak aynı tahmin değeri daha kısa yoldan bulunabilirdi. Yukarıda da değinildiği gibi kimya alanında ilişki olduğu gibi ele alınmaktadır.

5.5. Korelasyon Katsayısına ait Örnekleme Dağılımı

X ve Y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı ρ olan bir populasyondan örnekler çekilse ve bu örneklerde korelasyon katsayıları hesaplansa, hesaplanan korelasyon katsayıları örnekten örneğe değişecektir ve bir dağılım gösterecektir. Bu dağılıma "**korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımı**" denir.

Korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımının parametreleri ortalama, μ_r ve varyans, σ_r^2'dir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mu_r = \rho \quad \text{ve} \quad \sigma_r^2 = \frac{(1-\rho^2)}{n} \qquad \text{...(5.7)}$$

Varyansın (σ_r^2) hesaplanmasında kullanılan (1-ρ^2) değeri, Y-değerlerinin regresyon denklemi ile açıklanamayan sapmalarından ileri gelen varyasyonun nisbi ölçüsüdür. Eğer ρ=1.0 olan bir populasyondan örnekler çekilse ve korelasyon katsayıları hesaplansa, hesaplanan korelasyon katsayıları 1'e eşit olacaktır ve bir varyasyon söz konusu olmayacaktır. (1-ρ^2) değeri büyüdükçe (ki bu ρ'nun küçülmesi demektir) korelasyon katsayılarının gösterdiği varyasyon artar. Aynı zamanda söz konusu varyasyon populasyondan çekilen örneklerin genişliklerine de bağlıdır. Örnek genişliği arttıkça korelasyon katsayıları arasındaki varyasyon azalır.

Eğer populasyona ait ρ değeri bilinmiyorsa bu durumda korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımının varyansı hesaplanırken örnekten hesaplanan değer kullanılır ve varyans aşağıdaki şekilde hesaplanır:

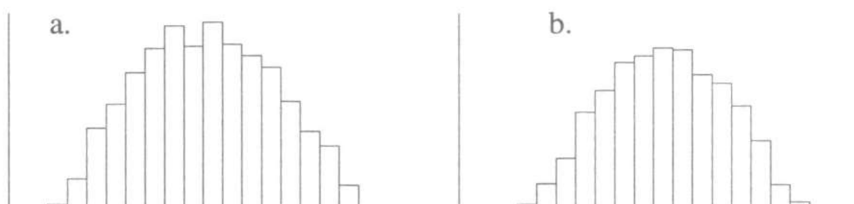
$$S_r^2 = \frac{(1-r^2)}{(n-2)} \qquad \ldots(5.8)$$

Korelasyon katsayısının örnekten hesaplanan standart sapması ise aşağıdaki gibidir:

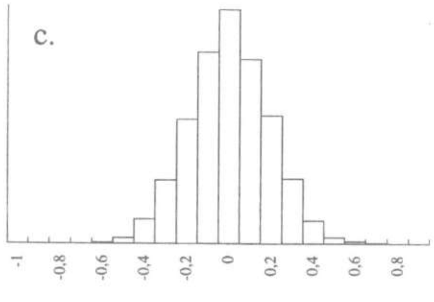
$$S_r = \sqrt{\frac{(1-r^2)}{(n-2)}}$$

Daha önce de başka istatistikler için belirtildiği gibi buna kısaca korelasyon katsayısının **standart hatası** denir.

Simulasyon yöntemi ile $\rho=0$ olan bir populasyondan örnek genişliği n=8, n=10 ve n=30 yani bu sayılarda X ve Y değişken çifti içeren çok sayıda örnekler çekilmiş ve bunlardan korelasyon katsayısı hesaplanmıştır. Her örnek genişliğinde de korelasyon katsayılarının çoğunluğu sıfır etrafında toplanmıştır. Bir kısmı pozitif bir kısmı negatiftir. Ortalamaları sıfırdır. Bunların histogramları yapıldığında Şekil 5.8'de görüldüğü gibi örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları normal dağılıma yaklaşmaktadır. Bu normal dağılımların standart sapmaları örnek genişliği arttıkça azalmaktadır.

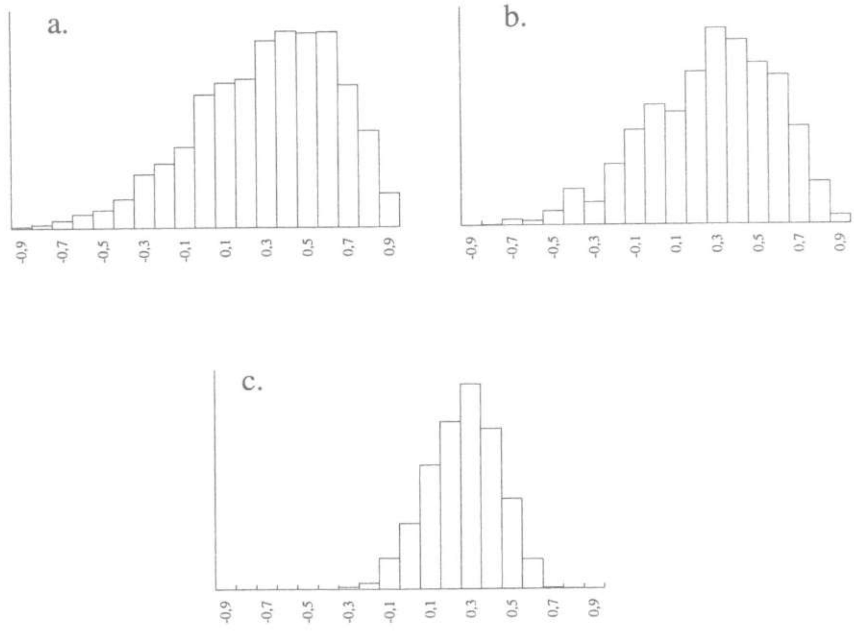


ŞEKİL 5.8. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve $\rho=0$ olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8, b.) n=10 ve c.) n=30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait histogramlar

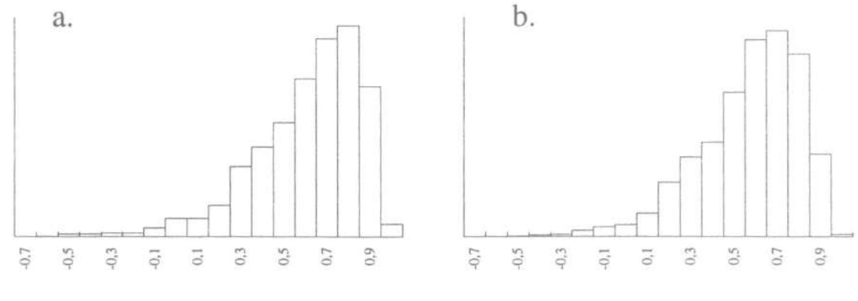


ŞEKİL 5.8. (devam) Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0 olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8, b.) n=10 ve c.) n=30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait histogramlar

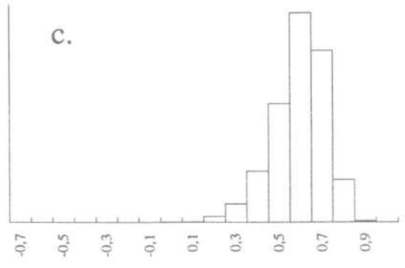
Populasyona ait korelasyon katsayısı (ρ) sıfırdan farklılaştıkça, örnekten hesaplanan korelasyon katsayısının (r) dağılım şeklinin simetriden uzaklaştığı Şekil 5.9, 5.10 ve 5.11'de görülmektedir. Şekil 5.9.a., b. ve c., simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0.3 olan populasyondan çekilmiş 8, 10 ve 30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımlarını göstermektedir. Şekil 5.10.a., b. ve c., simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0.6 olan populasyondan çekilmiş 8, 10 ve 30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımlarını göstermektedir. Şekil 5.11.a., b. ve c. ise simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0.9 olan populasyondan çekilmiş 8, 10 ve 30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımlarını göstermektedir. Şekil 5.9, 5.10 ve 5.11'de verilen korelasyona ait örnekleme dağılımlarından görülebileceği gibi, bu populasyonlardan çekilen örneklerin genişliği arttıkça dağılım normale biraz yaklaşır.



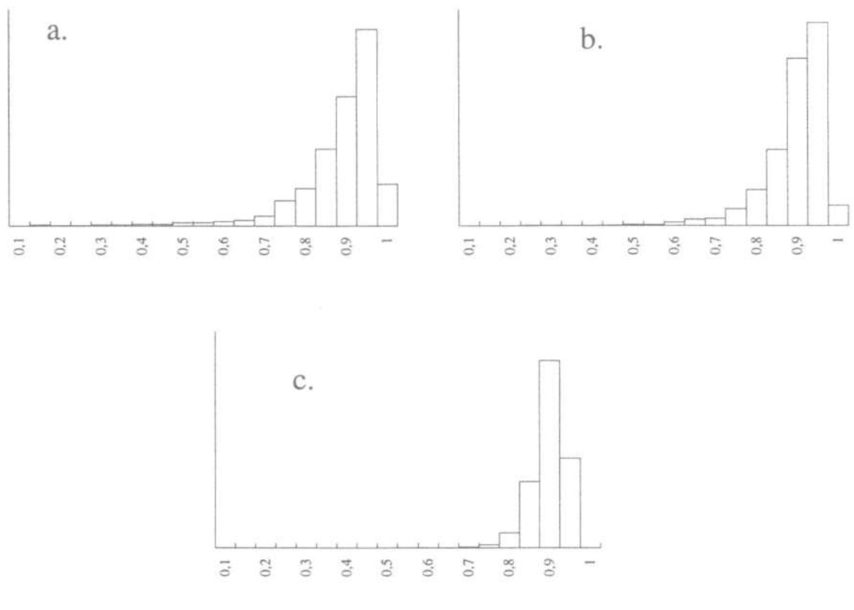
ŞEKİL 5.9. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve $\rho=0.3$ olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8, b.) n=10 ve c.) n=30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait histogramlar



ŞEKİL 5.10. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve $\rho=0.6$ olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8, b.) n=10 ve c.) n=30 birey çifti içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait histogramlar



ŞEKİL 5.10.(devam). Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0.6 olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8, b.) n=10 ve c.) n=30 birey çifti içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait histogramlar

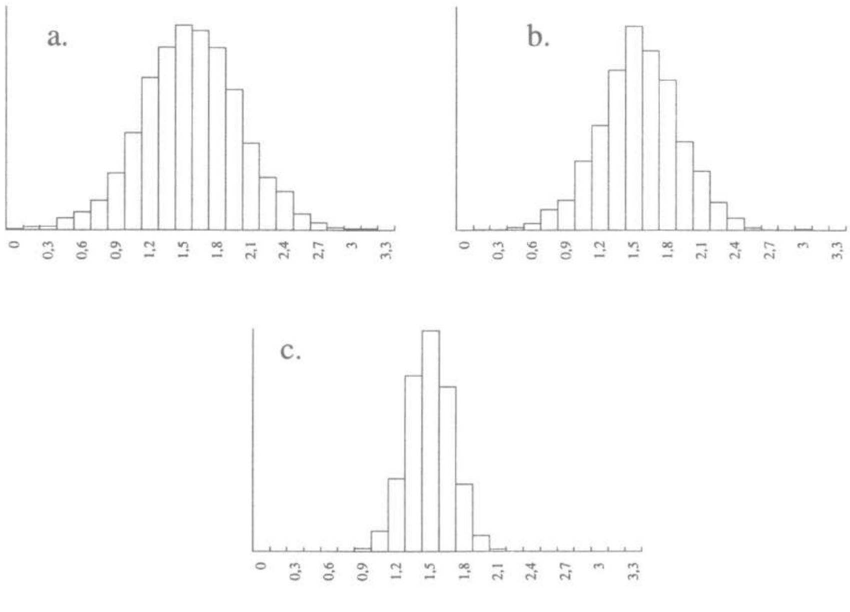


ŞEKİL 5.11. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0.9 olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8 ve b.) n=10 ve c.) n=30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayısına ait histogramlar

Populasyonda korelasyon katsayısının (ρ) sıfırdan farklı olduğu durumlarda örneklerden hesaplanan r değerleri aşağıdaki şekilde Z_r-değerlerine dönüştürülürse bu değerler yaklaşık normal dağılır.

$$\boxed{Z_r = \frac{1}{2}\log_e\frac{(1+r)}{(1-r)} = 1.1513\log\frac{(1+r)}{(1-r)}} \rightarrow 336 \qquad ...(5.9)$$

Elde edilen Z_r-değerleri ρ ne olursa olsun normal dağılıma yaklaşır. Şekil 5.12'de örnek olarak ρ=0.9 olan populasyondan çekilmiş 8, 10 ve 30 birey içeren örneklerden elde edilen ve dağılım şekli Şekil 5.11'de verilen örnekleme dağılımını oluşturan r değerleri için hesaplanmış Z_r-değerlerinin dağılımı verilmektedir. Şekil 5.12'de görüldüğü gibi ρ=0.9 olmasına rağmen örnek genişliği ne olursa olsun Z_r-değerlerinin dağılımı normale yaklaşmaktadır. Aynı şekilde ρ=0.3 ve ρ=0.6 olan populasyonlardan çekilmiş örneklerden elde edilen korelasyon katsayılarına karşılık gelen Z_r-değerleri de hesaplansa, bu hesaplanan değerler de normal dağılıma yaklaşır.



ŞEKİL 5.12. Simulasyon yöntemi ile üretilmiş ve ρ=0.9 olan populasyondan çekilmiş ve a.) n=8, b.) n=10 ve c.) n=30 birey içeren örneklerden elde edilmiş korelasyon katsayıları için hesaplanmış Z_r-değerlerine ait histogramlar

Bu Z_r-değerlerinin ortalaması;

$$\mu_{Z_r} = \frac{1}{2} \log_e \frac{(1+\rho)}{(1-\rho)} \quad \ldots(5.10)$$

ve standart sapması;

$$\sigma_{Z_r} = \sqrt{\frac{1}{(n-3)}} \quad \ldots(5.11)$$

tür.

Korelasyon katsayısı ρ olan bir populasyondan n_1 ve n_2 örnekleme genişliğinde örnekler çekilse ve bu örneklerde korelasyon katsayıları hesaplansa (r_1 ve r_2'ler) ve bunlar tamamen tesadüfen yan yana getirilerek farkları alınsa bu farklar bir dağılım gösterir ki bu dağılama "**korelasyon katsayıları arasındaki farka ait örnekleme dağılımı**" denir. Korelasyon katsayılarına karşılık hesaplanacak Z_r-değerleri farkı bir normal dağılıma yaklaşır. Bu farkların gösterdiği dağılımın ortalaması;

$$\mu_{(Z_{r1}-Z_{r2})} = 0$$

ve standart sapması;

$$\sigma_{(Z_{r1}-Z_{r2})} = \sqrt{\frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)}} \quad \ldots(5.12)$$

tür.

5.6. Regresyon Katsayısına ait Örnekleme Dağılımı

Regresyon katsayısı β_{yx} olan populasyondan n birey içeren örnekler çekilse ve regresyon katsayıları hesaplansa, hesaplanan regresyon katsayıları (b_{yx}'ler) büyük n değerleri için normal dağılıma yaklaşır. Bu dağılıma regresyon katsayısına ait örnekleme dağılımı denir. Bu dağılımın ortalaması, β_{yx} ve varyansı;

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_e^2}{\sum d_x^2} \qquad ...(5.13)$$

dir. 5.13 numaralı eşitlikteki σ_e^2, $Y = \alpha + \beta X + e$ modelinin α ve β parametreleri bilindiğinde $S_e^2 = \frac{\sum e^2}{n} = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n}$ şeklinde hesaplanır. Burada $\sum e^2$, Şekil 5.6'da görüldüğü gibi, gözlemlerin regresyon doğrusundan sapmalarının karelerinin toplamı olup aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum e^2 = \sum d_y^2 - \beta_{yx} \sum d_x d_y$$

β_{yx}'in eşiti olan $\frac{\sum d_x d_y}{\sum d_x^2}$ yerine konduğunda daha kısa olarak aşağıdaki eşitlikten de hesaplanır:

$$\sum e^2 = \sum d_y^2 - \frac{(\sum d_x d_y)^2}{\sum d_x^2}$$

Eğer populasyona ait regresyon eşitliğinin katsayıları bilinmiyor ve örnekten tahmin ediliyorsa bu durumda regresyon katsayısına ait örnekleme dağılımının varyansı;

$$S_b^2 = \frac{S_e^2}{\sum d_x^2} \qquad ...(5.14)$$

dir. Regresyon katsayısının standart hatası ise aşağıdaki gibidir:

$$S_b = \sqrt{\frac{S_e^2}{\sum d_x^2}}$$

Eşitlikte, S_e^2 regresyon doğrusundan sapma kareler ortalamasıdır ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$S_e^2 = \frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{n-2} = \frac{\sum d_y^2 - b_{yx}\sum d_x d_y}{n-2} = \frac{\sum d_y^2 - \frac{(\sum d_x d_y)^2}{\sum d_x^2}}{n-2} \qquad ...(5.15)$$

Regresyondan sapma kareler toplamı (n-2)'ye bölünerek S_e^2 bulunmuştur. Bunun nedeni regresyon eşitliğinde α ve β parametreleri yerine bunların örnekten tahminlerinin yani istatistiklerin kullanılmış olmasıdır.

Regresyon eşitliğinin diğer katsayısı olan a'nın standart hatasının eşiti ise aşağıdaki gibidir:

$$S_a = \sqrt{S_e^2 \frac{\sum X_i^2}{n\sum d_x^2}} \quad \text{veya} \quad S_a = S_e\sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum d_x^2}} \qquad ...(5.16)$$

$\hat{Y}_i = a + b_{yx}X_i$ eşitliğinden herhangi bir X_i noktası için $\hat{Y}_i$ tahmini yapılmış ise bunun standart hatası ($S_{\hat{y}_i}$) aşağıdaki gibidir:

$$S_{\hat{y}_i} = S_e\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum d_x^2}} \qquad ...(5.17)$$

Eğer örnek genişliği yeteri kadar fazla ise kök içindeki $\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum d_x^2}$ ihmal edilecek kadar küçük olur. Bu durumda tahminin standart hatası olarak S_e alınır. Yani $S_{\hat{y}_i} = S_e$ olarak alınabilir.

ÖRNEK:

Örnek 1'de haftalar boyunca (X) C-vitamininin (Y) değişimi incelenmişti. Regresyon eşitliği $\hat{Y} = 104 - 9.5X$ olarak bulunuştu. Bu örnek için aşağıdaki sonuçlar hesaplanabilir.

$$\sum(Y_i - \hat{Y})^2 = \sum e^2 = 3720 - \frac{(-380)^2}{40} = 110.0$$

$$S_e^2 = \frac{110.0}{(5-2)} = 36.67 \qquad S_e = \sqrt{(36.67)} = 6.055$$

$$S_b = \sqrt{\frac{36.67}{40}} = 0.957 \qquad S_a = \sqrt{36.67\frac{120}{(5)(40)}} = 4.69$$

Yaş halkaları genişliği ile yıllık yağış miktarı arasındaki örnek için regresyon eşitliği $\hat{Y} = 203.14 + 77.15X$ olarak bulunmuştu. Ele alınan örnekteki sonuçlara göre:

$$\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum e^2 = 7716.1 - \frac{(80.31)^2}{1.041}$$

$$\sum e^2 = 1520.4$$

$$S_e^2 = \frac{1520.4}{10-2} = 190.05 \; S_e = \sqrt{190.05} = 13.79$$

X=3.8 mm yaş halkası genişliği için $\hat{Y} = 496.31$ mm yağış tahmin edilmişti. Bu tahminin standart hatası;

$$S_{\hat{y}} = 13.79\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(3.8 - 3.17)^2}{1.041}} = 16.78$$

Buna göre 3.8 mm halka genişliği için yapılan yağış miktarı tahmini 496.31±16.78 mm olarak belirtilir. Daha önce de belirtildiği gibi tahminler standart hataları ile birlikte verilirse bir bilimsel değer taşır.

Regresyon için verilen Örnek 3'de pik alanı için eşitlik $\hat{Y} = 0.16 + 1.32X$ olarak belirlenmişti. Kimya laboratuvarlarında aletten okunan Y değerleri yerine konarak X değerinin (konsantrasyonun) tahmin edildiği açıklanmıştı. Böyle tahmin edilen bir $\hat{x}$ değerinin (konsantrasyonun) standart hatası ise aşağıdaki gibidir:

$$S_{\hat{x}_i} = \frac{S_e}{b_{yx}}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(y_i - \bar{y})^2}{b_{yx}^2 \sum d_x^2}} \qquad ...(5.18)$$

Örnek 3 için;

$$\overline{X} = 4.0 \quad \overline{Y} = 5.43$$

$$\sum d_x d_y = 36.9 \quad \sum d_x^2 = 28.0 \quad \sum d_y^2 = 48.89$$

değerleri hesaplanırsa, Y=6.2 pik alanı için hesaplanan $\hat{x} = 4.58$ konsantrasyonunun standart hatası aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$S_{\hat{x}} = \frac{0.229}{1.32}\sqrt{1 + \frac{1}{7} + \frac{(6.2 - 5.43)^2}{(1.32)^2(28)}} = 0.186$$

Tahmin edilen konsantrasyon standart hatası ile birlikte 4.58±0.186 olarak gösterilir.

Regresyon katsayısı β_{yx} olan populasyondan n birey içeren örnekler çekilse ve regresyon katsayıları hesaplansa, hesaplanan regresyon katsayıları (b_{yx}'ler) tamamen tesadüfen yan yana getirilerek farkları alınsa bu farklar bir dağılım gösterir ki bu dağılıma regresyon katsayıları arasındaki farka ait örnekleme dağılımı denir. Bu dağılımın ortalaması, $\mu_{(b1-b2)}=0$ ve varyansı;

$$\sigma^2_{(b1-b2)} = S^2_{b1} + S^2_{b2}$$

$$\sigma^2_{(b1-b2)} = \frac{S^2_e}{\sum d^2_{x1}} + \frac{S^2_e}{\sum d^2_{x2}}$$

Örnekler aynı populasyondan çekildiği için σ^2_e'ler aynıdır ve eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma^2_{(b1-b2)} = \sigma^2_e\left(\frac{1}{\sum d^2_{x1}} + \frac{1}{\sum d^2_{x2}}\right) \qquad ...(5.19)$$

Regresyon katsayıları arasındaki farka ait örnekleme dağılımının standart sapması ise:

$$\sigma_{(b1-b2)} = \sqrt{\sigma^2_e\left(\frac{1}{\sum d^2_{x1}} + \frac{1}{\sum d^2_{x2}}\right)} \qquad ...(5.20)$$

Populasyona ait regresyon katsayısı bilinmiyor ve σ^2_e örnekten tahmin ediliyorsa S^2_e örneklerden hesaplanan regresyondan sapma kareler ortalamalarının serbestlik dereceleri ile tartılı ortalamasıdır ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$S^2_e = \frac{\sum(Y_1 - \hat{Y}_1)^2 + \sum(Y_2 - \hat{Y}_2)^2}{(n_1 - 2) + (n_2 - 2)} \qquad ...(5.21)$$

ve regresyon katsayıları arasındaki farka ait dağılımın standart sapması ise 5.22 numaralı eşitlikle verildiği gibidir.

$$S_{(b1-b2)} = \sqrt{S^2_e\left(\frac{1}{\sum d^2_{x1}} + \frac{1}{\sum d^2_{x2}}\right)} \qquad ...(5.22)$$

dir.

5.7. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

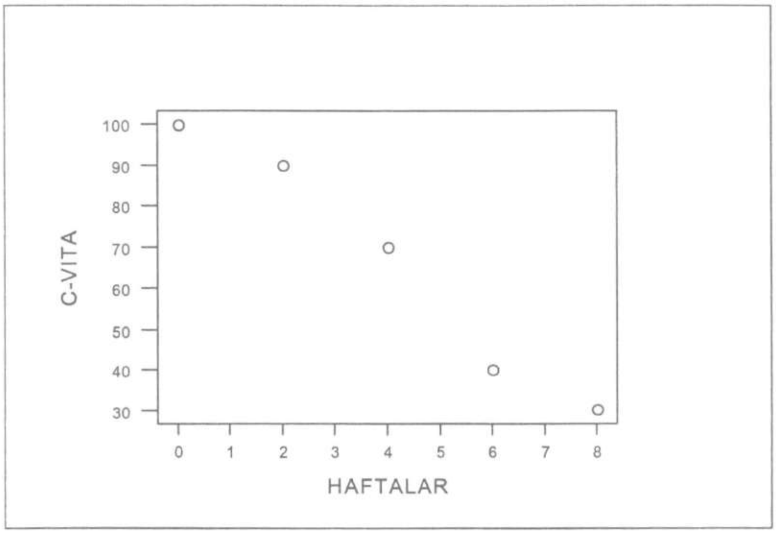
Bir vitamin karması şurubunda kapağı açıldıktan sonra oda sıcaklığında muhafazası halinde C-vitamini miktarında haftalar boyunca meydana gelen değişiklikler ile ilgili örneğin MINITAB paket programından alınan çıktıları aşağıdaki gibidir.

```
MTB > PRINT C1 C2
 ROW  HAFTALAR  C-VITA

   1     0    100
   2     2     90
   3     4     70
   4     6     40
   5     8     30
```

C1 sütununa haftalar, C2 sütununa C-vitamini miktarları girilmiş, bu sütunlara "HAFTALAR" ve "C-VITA" adları verilmiştir.

```
MTB > Plot 'C-VITA'*'HAFTALAR';
SUBC>   Symbol.
```



MTB > CORREL C1 C2

(Bu komut, C1 ve C2 sütunlarında kayıtlı olan haftalar ve haftalar boyunca gözlenen C-vitamini miktarları arasındaki korelasyon katsayısını aşağıdaki şekilde vermektedir.)

Correlation of HAFTALAR and C-VITA. = -0.985

(Haftalar ve C-vitamini arasında negatif 0.985 korelasyon olduğunu göstermektedir.)

MTB > REGRESS C2 1 C1

The regression equation is
C-VITA. = 104 - 9.50 HAFTALAR

(Örnek 1'de nasıl hesaplandığı gösterilen regresyon denklemi. Denklemde 104, a katsayısı, -9.50 ise regresyon katsayısıdır.)

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	104.000	4.690	22.17	0.000
HAFTALAR	-9.5000	0.9574	-9.92	0.002

Burada Stdev sütununda verilen a ve b katsayılarının standart hatalarıdır. Yani S_a=4.69, S_b=0.9574'tür. Örnekte de bu değerler hesaplanmıştı.

Katsayılara ait hipotez kontrolleri hakkında detaylı bilgi için Bölüm VII ve VIII bakınız.

s = 6.055 R-sq = 97.0% R-sq(adj) = 96.1%

S=6.055 değeri S_e'dir. Örnekte bu değer hesaplanmıştı. R-sq olarak verilen isabet derecesi (veya belirtme katsayısı), yani korelasyon katsayısının karesidir.

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	1	3610.0	3610.0	98.45	0.002
Error	3	110.0	36.7		
Total	4	3720.0			

ÖRNEK 2:

Ağaçların yaş halkaları genişlikleri ve yıllık yağış miktarı ile ilgili örnek için MINITAB paket programından alınan çıktılar.

MTB > PRINT C4 C5

ROW	GENISLIK	YAGIS
1	3.3	460
2	3.1	460
3	2.8	410
4	3.3	440
5	3.5	470
6	3.0	455
7	3.1	440
8	3.8	490
9	3.2	462
10	2.6	390

Bu örnekte halka genişliği C4, yağış miktarı C5 sütunlarına girilmiştir. Sütun başlıklarına da bu isimler verilmiştir.

MTB > CORREL C4 C5

Correlation of GENISLIK and YAGIS = 0.896

(Yaş halkaları genişliği ve yıllık yağış miktarı arasında pozitif 0.896 korelasyon olduğunu göstermektedir.)

```
MTB > REGRESS C5 1 C4

The regression equation is
YAGIS = 203 + 77.1 GENISLIK

Predictor      Coef      Stdev    t-ratio      p
Constant     203.14      43.05      4.72   0.000
GENISLIK      77.15      13.51      5.71   0.000

s = 13.79      R-sq = 80.3%     R-sq(adj) = 77.8%

Analysis of Variance

SOURCE        DF       SS         MS        F        p
Regression     1    6195.7     6195.7    32.60    0.000
Error          8    1520.4      190.1
Total          9    7716.1
```

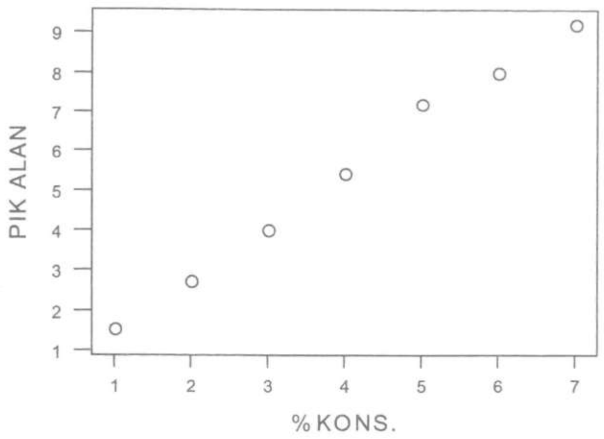
ÖRNEK 3.

% konsantrasyonlar ve pik alanları ile ilgili örneğin MINITAB paket programından alınan çıktıları.

```
MTB > PRINT C7 C8

ROW  % KONS.  PIK ALAN
  1     1      1.5
  2     2      2.7
  3     3      4.0
  4     4      5.4
  5     5      7.2
  6     6      8.0
  7     7      9.2

MTB > Plot 'PIK ALAN'*'%KONS.';
SUBC>   Symbol.
```



MTB > CORREL C7 C8
Correlation of % KONS. and PIK ALAN = 0.997

MTB > REGRESS C8 1 C7

The regression equation is
PIK ALAN = 0.157 + 1.32 % KONS.

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	0.1571	0.1947	0.81	0.456
% KONS.	1.31786	0.04354	30.27	0.000

s = 0.2304 R-sq = 99.5% R-sq(adj) = 99.3%
Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	1	48.629	48.629	916.29	0.000
Error	5	0.265	0.053		
Total	6	48.894			

BÖLÜM VI
HİPOTEZ KONTROLLERİ

Bütün bilim dallarında yapılan araştırmaların amacı elde edilen örneklerden yararlanarak üzerinde çalışılan populasyonun bilinmeyen parametreleri hakkında sonuç çıkarmaktır. Sonuç çıkarma iki şekilde yapılabilir: populasyonu temsil edecek parametrelerin tahmini veya populasyon parametreleri ile ilgili hipotezlerin test edilmesi.

Hipotez kontrolleri, bilimsel metotların bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bir bilim adamı üzerinde çalıştığı konuyu gözler, verilerini toplar, hipotezini kurar ve oluşturduğu hipotezini topladığı gözlemlerine karşı test eder. Eğer yaptığı kontrol sonucunda gözlemleri ile hipotezi arasında bir uyum yoksa oluşturmuş olduğu hipotezi reddeder. Yapılan kontrol sonucunda gözlemler ile hipotez uyum içinde ise kurmuş olduğu hipotezin geçerli olduğuna veya örnekten elde edilen sonuçların hipotezle belirtilen populasyondan çekilen örneklerden hesaplanabilen sonuçlarla uyum içinde olduğuna karar verir. Verdiği bu kararlarda yanılma olasılıklarını hesaplar.

Araştırıcının yapmış olduğu bir araştırma sonucunda oluşturmuş olduğu hipotezi kabul edip etmeyeceğine karar vermesi için hipotez kontrolü yapması gerekir. Hipotez kontrolü bir istatistik işlemler dizisi olduğu için "**istatistik kontrol**" de denebilir (bazı kitaplarda ise doğrudan "**istatistik kontrol**" denmektedir). Hipotez kontrolü, bir araştırma sonucunda üzerinde çalışılan örnekten hesaplanan istatistiğin, araştırıcının kurduğu hipotezle belirttiği populasyondan alınan aynı örnek genişliğindeki örneklerden elde edilmiş, aynı istatistiklerin örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak ve hesaplanan ihtimale dayanarak kurulan hipotezin kabul edilip edilmeyeceğine karar vermektir.

Hipotez kontrolleri, kurulan hipotezlerin gerçeklere karşı test edilebildiği bütün alanlarda yapılabilir. Örneğin, bir ilaç fabrikasında, üretilen vitamin-mineral kombinasyonu drajelerde ortalama olarak 20 mg B_1 vitamini olması gerektiğini bilen bir yönetici gerçekten drajelerin ortalama olarak bu miktarda vitamin içerip içermediğini araştırmak isteyebilir. Bunun için n-drajelik bir örnek alır. Bu drajelerin B_1 vitamini miktarını belirler. Daha sonra elde ettiği verilere dayanarak drajelerin ortalama olarak 20 mg B_1 vitamini içerip içermediğine karar verir. Yani ortalama B_1 vitamini miktarının 20 mg'a eşit $(\mu_{\overline{X}} = 20\text{mg})$ olduğu hipotezini kontrol ederek karar verir. Ayrıca yönetici yanlış karar verme ihtimalinin ne olduğunu da bilmek ister.

Yapılan bir araştırma sonucunda bir hipotez kurulduğu zaman, bu hipotez yapılan kontrol sonucunda kabul veya reddedilir. Bu karara varılabilmesi bir dizi istatistik işlemi gerektirir. Bu işlemleri 5 grupta toplamak mümkündür.

1. Hipotezlerin kurulması,
2. Yapılacak kontrolün çift veya tek taraflı kontrol olup olmadığına karar verilmesi,
3. Test istatistiğinin seçilmesi,
4. I. tip hata olasılığının belirlenmesi,
5. Gerekirse testin gücünü hesaplanması ve güç eğrilerinin belirlenmesi.

6.1. Hipotezler

Hipotez kontrolünün birinci aşaması, araştırıcının hipotezlerini kurmasıdır. Hipotez kontrolünde iki tip hipotez vardır:

1. Kontrol hipotezi (H_0)
2. Karşıt (alternatif) hipotez (H_1, birçok yabancı kitapta alternatif hipotez olarak geçer ve H_A ile gösterilir.)

Kontrol hipotezi adından da anlaşılacağı gibi kontrol edilebilir olmalı, bir karşıtı olmalı ve bir anlam taşımalıdır. Yapılan kontrol sonucunda bu hipotez reddedilirse karşıt hipotez kabul edilir.

İstatistik hipotezler üzerinde çalışılan örnekten elde edilen verilerin durumları ile ilgilenir. Bir araştırıcının x_1, x_2, x_3..... x_n olmak üzere verileri varsa bu verilerin bir dağılımı söz konusudur.

Eğer araştırıcı bu dağılımda bir bölge belirlerse X değerlerinin bu bölgeye dahil olma ihtimalini hesaplayabilir.

Kurulan hipotezler varsayılan dağılımın bir veya daha fazla parametresini kapsayabilir. Bir parametreyi kapsarsa "**basit hipotez**", birden fazla parametreyi kapsarsa "**bileşik hipotez**" denir. Bazı yazarlar basit hipotezleri (h) ile bileşik hipotezleri (H) ile gösterirler. Ancak bu konuda yazarlar arasında tam bir birlik olduğunu söylemek mümkün değildir. Test ve karşıt hipotezin basit ve bileşik olmasına göre hipotez testleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Basit bir hipotezi basit bir karşıt hipoteze karşı test edilir. Test ortalama ile ilgili olarak ise,

$$H_0: \mu=a$$
$$H_1: \mu=b$$

şeklinde olabilir.

2. Basit bir hipotezin bileşik bir hipoteze karşı testi. Bu test aşağıdaki şekilde olabilir.

$$H_0: \mu=a$$
$$H_1: \mu\neq a$$

3. Bileşik bir hipotezin bileşik bir hipotezle test edilmesi. Bu test de aşağıdaki şekilde olabilir:

$$H_0: \mu\geq a$$
$$H_1: \mu<a$$

Hipotez testleri karşıt hipotezin kapsadığı yöne göre iki veya tek taraflı olabilir.

$$H_0: \mu=a \qquad \textbf{veya} \qquad H_0: \mu=a$$
$$H_1: \mu<a \qquad\qquad\qquad H_1: \mu>a$$

testleri tek taraflıdır. Buna karşılık aşağıdaki test iki taraflıdır:

$$H_0: \mu=a$$
$$H_1: \mu\neq a$$

Çünkü karşıt hipotez ortalamanın (a) değerinden sapmasının her iki yönünü (büyük veya küçük) kapsamaktadır.

Basit ve bileşik hipotez kavramları aşağıda üç farklı alandan verilen örnekler dikkate alınarak açıklanacaktır.

1. Bir lastik fabrikasından çalışan bir mühendis, üretilen lastiklerin ömrünün en az 35000 km olup olmadığını,

2. Bir ziraatçı, yeni gübrenin buğday verimini diğer bir gübreye nazaran artırıp artırmadığını,

3. Bir doktor yeni bir ilacın herhangi bir hastalığı iyileştirme oranının %90 olup olmadığını, araştırmak istemektedir. Bu araştırıcıların hipotez kontrolü yaparak karar verebilmeleri için önce hipotezlerini kurmaları gerekir.

Birinci örnekte mühendis, "üssel dağılımın bir parametresi olan θ'nın en az 35000 km olduğu", ikinci örnekte ziraatçı, "$\mu_{\overline{X}_1} = \mu_{\overline{X}_2}$ olduğu (ki burada $\mu_{\overline{X}_1}$ ve $\mu_{\overline{X}_2}$ iki normal dağılımın ortalamalarıdır)" ve üçüncü örnekte doktor, "π=0.90 olduğu (ki π binom populasyon parametresidir)" hipotezini kontrol edecektir.

Yukarıdaki örneklerde belirtildiği gibi istatistik hipotezlerin çoğu dağılımın parametreleri ile ilgilidir. Bazen kurulan hipotez dağılımın şeklini de dikkate alabilir. Örneğin birinci örnekte mühendis örneğin bir üssel dağılımdan alınıp alınmadığını da araştırabilir.

Söz konusu araştırıcıların kontrol hipotezleri ile birlikte karşıt hipotezlerini de oluşturması gerekir. Örneğin mühendis karşıt hipotezini "θ, 35000 km'den azdır" şeklinde oluşturabilir. İkinci örnekte ise "$\mu_{\overline{X}_1} \neq \mu_{\overline{X}_2}$" ziraatçinin kurduğu karşıt hipotez olabilir. Üçüncü örnekte ise doktor karşıt hipotezini "π=0.60" şeklinde oluşturmuş olabilir.

Bileşik ve basit hipotez kavramları karşıt hipotezler için de geçerlidir.

Birinci örnek için: H_0: $\theta \geq 35000$ (Bileşik hipotez)
H_1: $\theta < 35000$ (Bileşik hipotez)

İkinci örnek için: H_0: $\mu_{\overline{X}_1} = \mu_{\overline{X}_2}$ (Basit hipotez)
H_1: $\mu_{\overline{X}_1} \neq \mu_{\overline{X}_2}$ (Bileşik hipotez)

Üçüncü örnek için : H_0: π=0.90 (Basit hipotez)
H_1: π=0.60 (Basit hipotez)

6.2. Test İstatistiği

Hipotezler kurulduktan sonra araştırıcının test istatistiğini belirlemesi gerekir. Çünkü hipotez kontrolü, örnekten hesaplanan istatistiğin, söz konusu populasyondan ayni genişlikteki örneklerden elde edilecek örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak ve bu sonuca göre karar vermektir. Test istatistiği örnekten elde edilen verilerin bir fonksiyonudur. Araştırıcının amacı ve elde edilen verilerin doğrultusunda hipotez kontrolünde kullanılacak test istatistiği belirlenir. Kullanılacak test istatistiğinin doğru olarak belirlenmesi yapılan hipotez kontrolünün geçerli olması için önemlidir. Test istatistiğinin belirlenmesi iki örnek ile açıklanacaktır.

ÖRNEK 1:

Bir eczacı yeni üretilen bir ilacın bir hastalığın iyileştirilmesinde diğer bir ilaçtan daha etkili olduğu hipotezini öne sürüyor. Bu hipotezin doğru olup olmadığını kontrol etmek için söz konusu hastalığı taşıyan hastalardan tamamen tesadüfi belirli bir sayıda hasta seçer. Daha sonra yine tamamen tesadüfi olarak bu hastaları iki gruba ayırır. Gruplardan birini oluşturan hastaları yeni ilaç (A) ile diğer grubu da diğer ilaç (B) ile tedavi eder. Belirli bir süre sonunda hastalığın iyileşme göstergesi olarak kabul edilen bir kan özelliğine ait analizleri yaparak verilerini toplar. Gözlediği verilerine dayanarak eczacı;

H_0: Hastalığın iyileşmesine etki bakımından yeni ilaç ile eski ilaç arasında fark yoktur, gözlenen fark tesadüften ileri gelmektedir, yani $\mu_{\overline{X}_A} = \mu_{\overline{X}_B}$ 'dir

kontrol hipotezini,

H_1: Hastalığın iyileşmesine etki bakımından yeni ilaç, eski ilaç ilaçtan daha etkilidir, yani $\mu_{\overline{X}_A} > \mu_{\overline{X}_B}$ 'dir

hipotezine karşı kontrol edecektir.

Burada kontrol hipotezi ile belirlenen "**ortalamalar arası farka ait örnekleme**" dağılımıdır ve örnekten elde edilen $(\overline{A} - \overline{B})$ farkının hipotezle belirtilen populasyondan çekilen örneklerden elde edilecek "**ortalamalar arası farka ait örnekleme**" dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak gerekir.

Test hipotezi geçerli olduğunda ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımının ortalaması, $\mu_D = 0$ ve standart sapması (eğer populasyon varyansı biliniyorsa), $\sigma_D = \sqrt{\sigma^2 (\frac{n_A + n_B}{n_A n_B})}$ olduğuna göre, örnekten hesaplanan farkın bu dağılıma dahil olma ihtimalini bulmak için Z-değeri aşağıdaki gibi hesaplanır (populasyon varyansı bilinmediği zaman t-istatistiği hesaplanır ki bu BÖLÜM VIII'de ayrıntılı olarak verilmektedir.):

$$Z = \frac{(\overline{A} - \overline{B}) - \mu_D}{\sqrt{\sigma^2 \frac{(n_A + n_B)}{(n_A n_B)}}}$$

bulunan Z-değeri kullanılarak örnekten hesaplanan farkın örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali hesaplanarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar verilir.

ÖRNEK 2:

Bir doktor, herhangi bir hastalığın tedavisinde bir ilacın etki oranının belirtildiği gibi gerçekten 0.75 olup olmadığını araştırmak istiyor. Bunun için söz konusu hastalığı taşıyan hastalardan tesadüfen 100 hasta seçiyor ve belirtilen ilaç ile tedavi ediyor. Belirli bir süre sonunda 100 hastadan 69 tanesinin iyileştiğini görüyor.
Bu durumda araştırmayı yapan doktor;

H_0: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 olarak kabul edilebilir. Gözlenen 0.69 oranı ile 0.75 arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, yani, π=0.75'dir
kontrol hipotezini;

H_1: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 değildir, yani $\pi \neq 0.75$'dir
hipotezine karşı test etmesi gerekir.

Burada hipotez ile belirtilen dağılım, π'si 0.75 olan populasyondan alınan 100 bireylik örneklerden elde edilecek "oranlara ait örnekleme" dağılımıdır. Örnekten hesaplanan 0.69 oranının bu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin bulunması gerekir. Oranlara ait örnekleme dağılımının ortalaması, $\mu_p = \pi$ ve standart sapması, $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ olduğuna göre, örnekten hesaplanan p=0.69 oranının söz konusu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini bulmak için (populasyona ait π bilindiği için) Z-değeri;

$$Z = \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$ şeklinde hesaplanır. Ve bulunan Z-değerine göre, örnekten hesaplanan oranın örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali saptanarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar verilir. Bu konu ile ayrıntılı bilgiler ve örnekler sonraki bölümlerde verilmektedir.

6.3. I. ve II. Tip Hatalar

Hipotez kontrollerinde kontrol hipotezi karşıt hipoteze karşı test edilerek karar verildiği zaman iki tip hata söz konusudur.

Yapılan kontrol sonucunda doğru olan kontrol hipotezi (H_0) ret edildiği zaman yapılan hata I. tip hatadır. Başka bir deyişle doğru olan bir kontrol hipotezi için ret kararı verildiği zaman I. tip hata yapılmış olur. I. tip hata yapma ihtimali α ile gösterilir.

II. tip hata ise karşıt hipotezin (H_1) gerçekte doğru olduğu durumlarda kontrol hipotezinin kabulü ile yapılan hatadır. II.tip hata yapma ihtimali β ile gösterilir.

Hipotez kontrollerinde verilecek kararların isabetli veya hatalı olması α ve β ihtimallerine bağlıdır. Kararların isabetli veya hatalı olması ve bunlara ait ihtimaller Tablo 6.1'de verilmektedir.

$\alpha \to$ %1 - 0,5

TABLO 6.1. Hipotez kontrollerinde isabetli ve hatalı kararlar ve ihtimalleri

Gerçek durum	Verilen karar	
	H_0 hipotezi kabul	H_0 hipotezi ret
H_0 doğru	İsabetli karar (1-α)	Hatalı karar (α)
H_1 doğru	Hatalı karar (β)	İsabetli karar (1-β)

Tablo 6.1'de görüldüğü gibi geçerli kontrol hipotezinin kabulü ile (1-α) ihtimal ile isabetli karar verilmiş demektir. Geçerli H_1 hipotezinin yapılan kontrol sonucunda kabul edilmesi ile de isabetli karar verilmiş olur ki bunun ihtimali (1-β)'dır. Bu ihtimale "Testin Gücü (veya Hipotez Kontrolünün Gücü)" denir. Bu konu ile ilgili bilgi 6.5 numaralı bahiste verilmektedir.

α ve β arasında ters bir ilişki vardır. α-değerinin küçülmesi, I. tip hata ihtimalinin azalmasına karşın II. tip hata ihtimalinin artmasına yol açar.

I. tip hata ihtimali, test istatistiğinin mümkün olan değerlerini yani söz konusu test dağılımını iki bölgeye ayırır:

1. Ret bölgesi veya kritik bölge
2. Kabul bölgesi

Eğer hesaplanan test istatistiğinin değeri "**ret**" bölgesine düşüyorsa kontrol hipotezi ret edilerek karşıt hipotez kabul edilir. Eğer söz konusu istatistiğin değeri "**kabul**" bölgesine dahil ise bu durumda "Kontrol hipotezi reddedilememiştir" denir.

Araştırıcı hipotez kontrolüne başlarken I. tip hata ihtimalini belirlemelidir. Bu ihtimal biyolojik ve fen bilimlerinde genel olarak %1 ve/veya %5 olarak alınır. Bu ihtimalin belirlenmesi konusunda, kontrol hipotezinin reddedilmesinin doğuracağı sonuç göz önünde bulundurulur. İnsan sağlığına ve hayatına zarar verecek maddelerde α küçülür. Örneğin bir araştırıcı hipotezlerini;

$\mathbf{H_0}$: İlaç öldürücü etkiye sahip değildir
$\mathbf{H_1}$: İlaç öldürücü etkiye sahiptir,

şeklinde kurmuş ise α=0.00001 gibi çok küçük alınmalıdır. Ayrıca deney büyük örnekler üzerinde ve çok dikkatli yürütülmelidir.

6.4. Çift ve Tek Taraflı Kontroller

Hipotez kontrolleri çift veya tek taraflı olarak yapılabilir. Yapılacak hipotez kontrolünün çift veya tek taraflı yapılıp yapılmayacağını araştırıcının kuracağı karşıt hipotez belirler.

Araştırıcı, örnekten hesapladığı istatistiğinin sadece örnekleme dağılımına dahil olup olmadığı ile ilgileniyorsa, yani sadece örnekleme dağılımının ortalamasından sapıp sapmadığı önemli ise bu durumda yapılması gereken çift taraflı kontroldür.

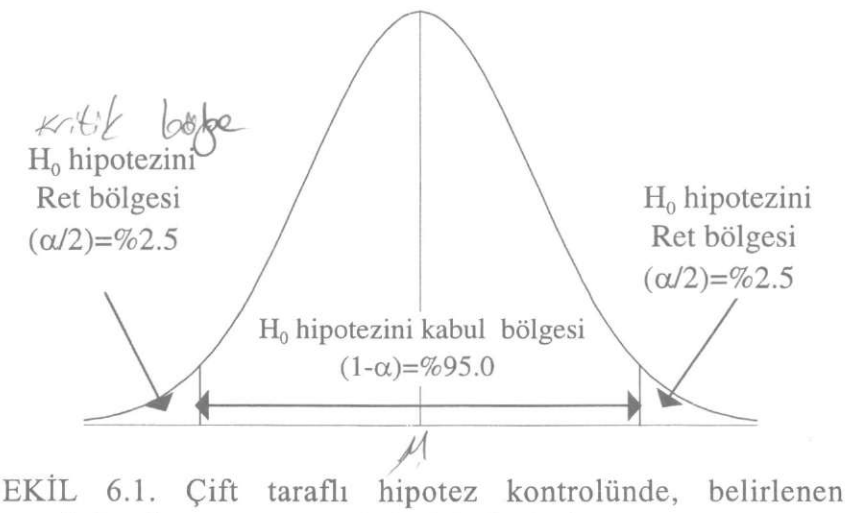
Bunun için, örnekleme dağılımının ortalamasından büyük veya küçük tarafa örnekten hesaplanan değer veya daha fazla sapanların ihtimali bulunur. Örneğin 6.2. numaralı bölümde 2. örnekte yapılan kontrol çift taraflı kontroldür. Çünkü yapılan hipotez kontrolünde;

H_0: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 olarak kabul edilebilir. Gözlenen 0.69 oranı ile 0.75 arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, yani, π=0.75'dir

kontrol hipotezi;

H_1: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 değildir, yani $\pi \neq$0.75'dir

hipotezine karşı test edilmektedir. Burada araştırıcının ilgilendiği söz konusu ilacın etki oranının 0.75 olarak kabul edilip edilemeyeceğidir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini de α=0.05 (%5) olarak belirlemiş ise bu ihtimalin yarısını örnekleme dağılımında ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu tarafta diğer yarısını ise ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu tarafta alır. Şekil 6.1, çift taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I.tip hata ihtimaline göre ret ve kabul bölgelerini göstermektedir.



ŞEKİL 6.1. Çift taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I.tip ihtimaline göre ret ve kabul bölgeleri

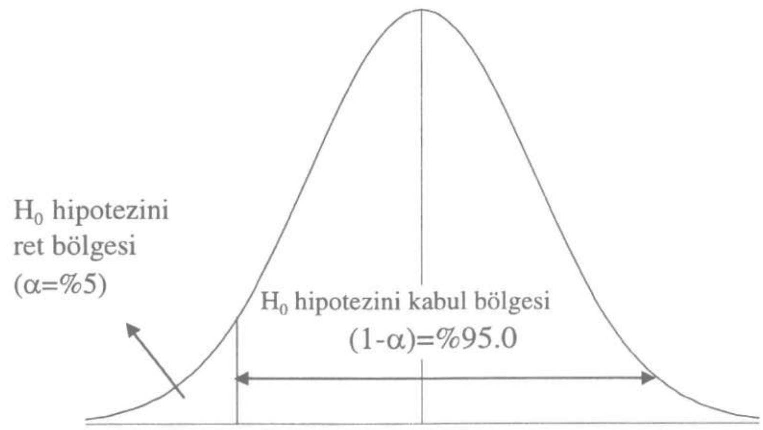
Bazı durumlarda ise araştırıcı sadece örnekten hesaplanan istatistiğin örnekleme dağılımının ortalamasından küçük (veya büyük) tarafa sapması ile ilgilenebilir. Bu durumda tek taraflı hipotez kontrolü yapılır. Tek taraflı hipotez kontrolünde örnekleme dağılımının ortalamasından küçük (veya büyük) tarafa, örnekten hesaplan istatistik kadar ve daha fazla sapanların ihtimali hesaplanır. Bunun içinde I. tip hata ihtimali dağılımın hangi tarafı ile ilgileniliyorsa o tarafta alınır. Örneğin yukarıdaki örnekte doktor söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranının 0.75'den daha az olduğunu kontrol etmek istiyorsa;

H_0: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 olarak kabul edilebilir. Gözlenen 0.69 oranı ile 0.75 arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, yani, π=0.75'dir

kontrol hipotezi;

H_1: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75'ten düşüktür, yani π<0.75'dir

hipotezine karşı test eder ki bu durumda doktor örnekleme dağılımında ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu taraf ile ilgilenir. Dolayısıyla ortalamadan sol tarafta 0.69 ve daha küçük oranların bu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplar. Şekil 6.2, tek taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I.tip hata ihtimaline göre ret ve kabul bölgelerini göstermektedir. Şekil 6.2'de görüldüğü gibi araştırıcı ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu taraf ile ilgilendiği için %5'lik I. tip hata ihtimalini ortalamanın sol tarafında almıştır. Tek taraflı hipotez kontrolü yapan bir araştırıcı eğer ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu taraf ile ilgileniyorsa bu durumda %5'lik I.tip hata ihtimalini ortalamanın sağ tarafında alması gerekir.



ŞEKİL 6.2. Tek taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I.tip ihtimaline göre ret ve kabul bölgeleri

Hipotezler kurulduktan ve test istatistiği hesaplandıktan sonra, eğer hesaplanan test istatistiğine göre örnekten hesaplanan istatistiğin söz konusu dağılıma dahil olma ihtimali kararlaştırılan I. tip hata ihtimalinden daha büyük ise, yani H_0 hipotezini kabul bölgesine giriyorsa H_0 hipotezi reddedilemedi denir. Aksi takdirde kontrol hipotezi ret edilerek karşıt hipotez kabul edilir.

6.5. Testin Gücü

Yapılan hipotez kontrolünün gücü daha önce de belirtildiği gibi $(1-\beta)$'dır. β ihtimalinin küçülmesi ile yapılan hipotez kontrolünün gücü artar. Bu ise belirli bir α ve örnek büyüklüğü için kontrol edilecek hipotezin reddedileceği örnek değerinden uzaklığına bağlıdır. Hipotez kontrolünün gücü aşağıda verilen bir örnek ile açıklanacaktır. Verilen örnekte hem II.tip hatanın hem de hipotezin gücünün karşıt hipotez ile belirtilen parametreye bağlı olarak değişimi gösterilecektir.

ÖRNEK:

Bir vitamin karmasında 25 mg B_1 vitamini bulunması gerektiği belirtilmiştir. Üretim aşamasında değişik aralıklarla yapılan kontrollerden beher drajede bulunan B_1 vitamini miktarına ait standart sapmanın 1.2 mg olduğu bilinmektedir. Bu verilere göre

$$\mu=25 \text{ mg}$$
$$\sigma=1.2 \text{ mg}$$

dır. Gene daha önceki verilerden drajelerdeki B_1 vitamini miktarının normal dağıldığı bilinmektedir.

Söz konusu fabrikanın ürettiği vitamin karmalarından rastgele 16 ambalaj alınsa ve bunların her birinden de rastgele alınan drajeler tahlil edilse, eğer üretimde herhangi bir değişiklik olmamışsa, bu n=16 drajelik örneklerde B_1 vitamini ortalaması, ortalaması, $\mu_{\overline{X}} = 25$ mg ve standart sapması, $\sigma_{\overline{X}} = 1.2/\sqrt{16} = 0.3$ mg olan bir normal dağılım gösterir. Yapılacak bir hipotez testinde test ve karşıt hipotez aşağıdaki gibi olsun:

$$H_0: \mu_{\overline{X}} = \mu_X = 25\,\text{mg}$$
$$H_1: \mu_{\overline{X}} < 25\,\text{mg}$$

Burada populasyona ait standart sapma bilindiği için seçilecek test dağılımı standart normal dağılımdır.

Eğer birinci tip hata olasılığı $\alpha=0.05$ olarak belirlenmişse herhangi bir örnek ortalamasına ait test değeri $Z=-1.645$'den daha küçük ise test hipotezi reddedilecektir. Ayrıca örnek ortalamasının hangi değerden küçük olduğunda test hipotezinin reddedileceğini (test hipotezinin reddedileceği sınırı) mg cinsinden hesaplamak mümkündür. Bu da;

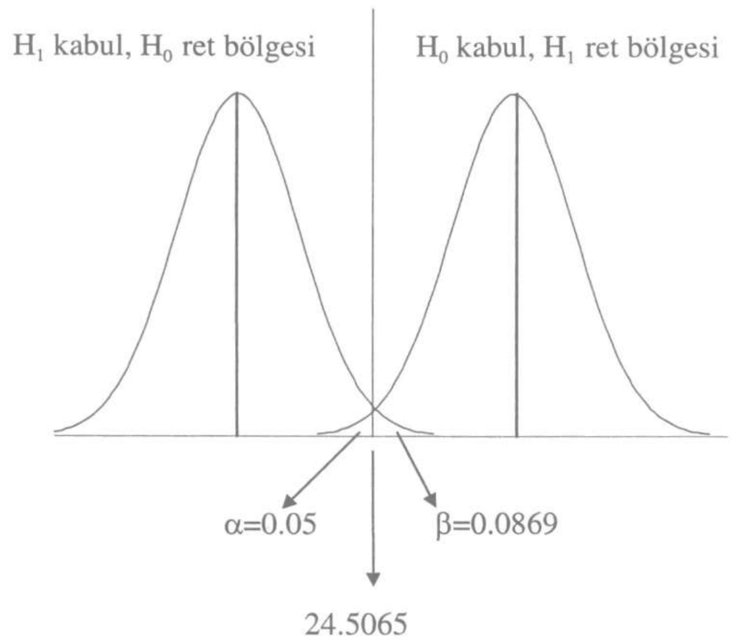
$$-1.645 = \frac{\overline{X} - 25}{0.3}$$

bağıntısından $\overline{X} = 24.5065$ olarak bulunur. Bu ilaç fabrikasının ürettiği bir vitamin karması partisinden alınan 16 örnekte ortalama < 24.5065 mg olarak bulunmuş ise drajelerdeki B_1 vitamini ortalamasının 25 mg olduğu hipotezi reddedilecektir. Gerçekte ortalama 25 mg B_1 vitamini bulunduğu halde bu partinin yanlış olarak reddedilme olasılığı (I. tip hata olasılığı), $\alpha=0.05$'tir. Acaba gerçekte ortalama B_1 vitamini 25 mg'dan daha düşük olduğu halde $\mu=25$ mg hipotezinin (test hipotezinin) kabul edilme olasılığı (II. tip hata olasılığı) nedir?

Bunun hesaplanması için karşıt hipotezin aldığı değerin bilinmesi gerekir. Karşıt hipotez ise $H_1: \mu_{\overline{X}} < 25\,\text{mg}$ şeklinde idi. Bu ise 25 mg'dan küçük bütün değerleri kapsar. bunların her biri için II. tip hata olasılığı hesaplanabilir. Eğer karşıt hipotezin 24.1 mg değeri alınırsa bunun için II.tip hata olasılığı (β) hesaplanabilir. Burada bulunması gereken olasılık ortalaması $\mu=24.1$ mg ve standart sapması 0.3 mg olan normal dağılımda 24.5065 mg'dan daha büyüklerin oranıdır (Şekil 6.3). Bu oran da 24.5065'in Z-değeri hesaplanarak bulunur.

$$Z = \frac{24.5065 - 24.1}{0.3} = 1.355 \cong 1.36$$

Z tablosundan (Tablo A) 0 ile 1.36 arasındaki Z'lerin oranının 0.4131 olduğu bulunur. Bu değerden büyük Z'lerin oranı ise 0.5-0.4131=0.0869'dur. İşte α=0.05 olduğunda, karşıt hipotezin ortalaması 24.1 mg ise II.tip hata olasılığı β=0.0869'dur Yani gerçekte vitamin ortalaması 24.1 mg iken 25 mg olarak kabul edilme olasılığı %8.69'dur. Bu durumda testin gücü 1-0.0869=0.9131'dir. Yani α=0.05 ve karşıt hipotez μ=24.1 mg ise karşıt hipotezin kabul edilme olasılığı (doğru karar verme olasılığı) %91.31'dir. Şekil 6.3, I. ve II. tip hata ihtimallerini göstermektedir.



ŞEKİL 6.3. $H_0{:}\mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezinin $H_1{:}\ \mu_{\bar{x}} = 24.1$ mg hipotezine karşı kontrolünde I. ve II. tip hata ihtimalleri.

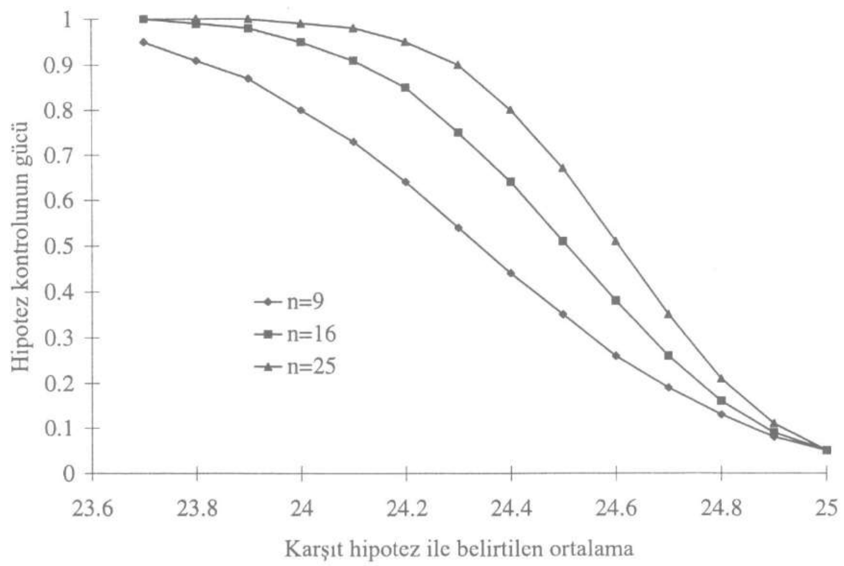
Eğer karşıt hipotez ile ortalamanın 24.5 olduğu belirtilmekte ise bunun ret edilme ihtimali, $Z = \frac{24.5065 - 24.5}{0.3} \cong 0.022$ ve daha çok sapanların oluş ihtimalidir. Bu da 0.5-0.008=0.4920 olarak bulunur.

Bu durumda $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezinin $H_1: \mu_{\bar{x}} = 24.1$ mg hipotezine karşı gücü 1-0.4920=0.508'dir.

Hipotez kontrollerinin gücü, karşıt hipotezin parametresi kontrol edilen hipotezin parametresine yaklaştıkça azalmaktadır. Ayrıca örnek büyüklüğü arttıkça aynı H_1 hipotezlerine karşı yapılacak kontrolün gücü de artmaktadır. Tablo 6.2 farklı H_1'ler ve örnek genişlikleri için β ve (1-β) ihtimallerini göstermektedir. Şekil 6.4'te ise Tablo 6.2'deki değerler için güç eğrileri verilmiştir.

TABLO 6.2. Ortalaması 25 mg ve standart sapması 1.2 mg olan hipotezle belirtilmiş dağılımdan çekildiği kabul edilen 9, 16 ve 25 bireylik örneklerden hesaplanan çeşitli ortalamalara göre kurulacak karşıt hipotezlerin II. tip hata ihtimalleri ve $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezine karşı güçleri.

Karşıt hipoteze	n=9		n=16		n=25	
göre μ	β	(1-β)	β	(1-β)	β	(1-β)
23.7	0.05	0.95	0.00	1.00	0.00	1.00
23.8	0.09	0.91	0.01	0.99	0.00	1.00
23.9	0.13	0.87	0.02	0.98	0.00	1.00
24.0	0.20	0.80	0.05	0.95	0.01	0.99
24.1	0.27	0.73	0.09	0.91	0.02	0.98
24.2	0.36	0.64	0.15	0.85	0.05	0.95
24.3	0.46	0.54	0.25	0.75	0.10	0.90
24.4	0.56	0.44	0.36	0.64	0.20	0.80
24.5	0.65	0.35	0.49	0.51	0.33	0.67
24.6	0.74	0.26	0.62	0.38	0.49	0.51
24.7	0.81	0.19	0.74	0.26	0.65	0.35
24.8	0.87	0.13	0.84	0.16	0.79	0.21
24.9	0.92	0.08	0.91	0.09	0.89	0.11
25.0	0.95	0.05	0.95	0.05	0.95	0.05



ŞEKİL 6.4. $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25mg$ kontrol hipotezinin $H_1: \mu < 25\,mg$ hipotezine karşı kontrolünde n=9, n=16 ve n=25 bireylik örnekler için güç eğrileri. α=0.05, σ=1.2.

Tablo 6.2 ve Şekil 6.4'te görüldüğü gibi karşıt hipotezle belirtilen populasyon parametresi kontrol hipotezi ile belirtilen populasyon parametresine yaklaştıkça II. tip hata artmakta ve dolayısıyla hipotez kontrolünün gücü azalmaktadır. Ayrıca, Tablo 6.2 ve Şekil 6.3'den de izlenebileceği gibi örnek genişliği arttıkça β ihtimali azalmakta ve dolayısıyla bu durum hipotez kontrolünün gücünün, yani (1-β)'nın, artmasını sağlamaktadır.

BÖLÜM VII

Z DAĞILIMI ve Z-KONTROLLERİ

7.1. Z-Dağılımı

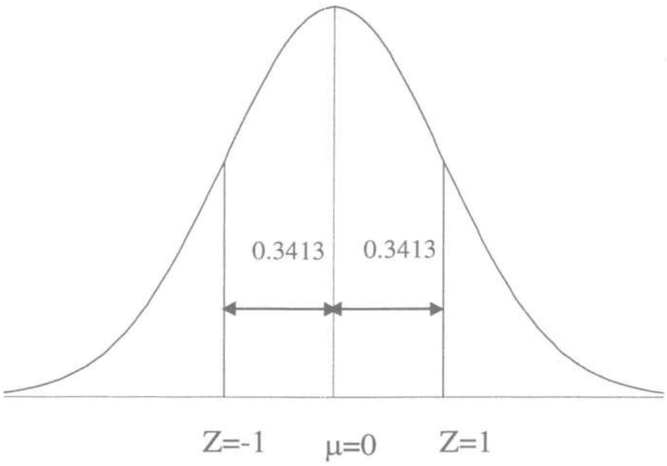
Bölüm 3.3.2'de belirtildiği gibi bütün normal dağılımlar Z-dağılımına (standart normal dağılıma) dönüştürülebilir. Standart normal dağılımın ihtimal yoğunluk fonksiyonu;

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

şeklindedir. Bu dağılımın ortalaması, $\mu=0$ ve varyansı, $\sigma^2=1$'dir. Z-dağılımı Şekil 7.1'de verildiği gibi çan eğrisi şeklindedir. Dağılım ortalama etrafında simetriktir, yani;

$$P(-Z_0<Z<0)=P(0<Z<Z_0)\text{'dır.}$$

Ortalama ile belirli Z-değerleri arasında kalan alanlar ihtimal yoğunluk fonksiyonunun integrali alınarak hesaplanmış ve tablo olarak düzenlenmiştir (Tablo A).



ŞEKİL 7.1. Standart normal dağılım

7.2. Z-Kontrolleri

Standart normal dağılımda değişkenin Z olduğu ve $(X-\mu_x)/\sigma_x$ olarak hesaplandığı Bölüm 3.3.2'de açıklanmıştı. Bundan yararlanarak populasyondan alınan bir gözlemin $(X_1<X<X_2)$ aralığında bulunması ihtimalinin hesaplanabileceği vurgulanmıştı. Aynı şekilde Bölüm 4.1'de verilen Örnek 5'te ortalaması, $\mu=60$ ve standart sapması, $\sigma=6.3$ olan normal dağılmış populasyondan çekilen ve 9 birey içeren (n=9) örneğin ortalamasının $\overline{X} = 56.4$ veya bundan daha düşük değerlerin, ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin, bu ortalamaya karşılık gelen Z-değeri $(Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}})$ hesaplanarak bulunabileceği gösterilmişti. Bu yapılan aslında bir hipotez kontrolüdür.

Populasyon varyansının bilindiği durumlarda Z-dağılımı kullanılarak hipotez kontrolleri yapılır.

Bu bölümde çeşitli istatistikler için Z-kontrolleri, Bölüm 6'da açıklanan hipotez kontrollerinin adımları, karşıt hipotez, karşıt hipoteze göre tek ve çift taraflı kontroller ve I. tip hata gösterilerek açıklanacaktır.

7.2.1. Ortalamaya ait Hipotez Kontrolü

Ortalaması ve varyansı bilinen bir populasyondan tamamen tesadüfen alındığı ileri sürülen bir örnekten hesaplanan ortalama ile populasyon ortalaması arasındaki farkın tesadüften ileri gelip gelmediği, yani söz konusu örneğin ele alınan populasyondan rastgele çekilen örneklerden biri olup olmadığına karar verilir. Bu karar verildiğinde I. ve II. tip hatalar en çok α ve β kadardır.

Örneğin Bölüm VI'da bir ilaç fabrikasındaki bir yönetici üretilen vitamin-mineral karması drajelerindeki B_1 vitamininin ortalaması μ_x=25 mg ve standart sapması σ_x=1.2 mg olan bir normal dağılım gösterdiğini biliyor olsun. Bu yönetici gerçekten üretilen drajelerdeki ortalama B_1 vitamininin 25 mg olup olmadığını araştırmak üzere farklı partilerden 16 drajelik bir örnek alarak ortalama B_1 vitamini miktarını 24.5 mg olarak hesaplamış olsun. Burada yöneticinin yapması gereken gerçekten ortalama B_1 vitamini miktarının 25 mg olarak kabul edilip edilemeyeceğini kontrol etmektir.

Hipotez kontrolü yapılırken izlenecek adımlar sırası ile aşağıdaki gibidir:

1. ADIM: İlk olarak araştırıcı kontrol ve karşıt hipotezlerini oluşturmalıdır. Kurulan hipotezlerin bir anlamı olmalı ve kontrol edilebilmelidir. Kurulacak olan karşıt hipotez yapılacak hipotez kontrolünün tek taraflı veya çift taraflı olduğunu belirler.

Kontrol hipotezi:

H_0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir.

Kaşıt hipotez araştırıcının amacı doğrultusunda 3 farklı şekilde oluşturulabilir.

a. H_1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilemez. Başka bir deyişle, örnek söz konusu populasyondan tesadüfen alınmış bir örnek değildir.

Bu şekilde kurulacak karşıt hipotez yapılacak hipotez kontrolünün çift taraflı olduğunu gösterir. Çünkü araştırıcı örnekten hesapladığı ortalamanın söz konusu populasyondan çekilen örneklerden elde edilecek ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olup olmadığı ile ilgilenmektedir.

b. H_1: Üzerinde çalışılan örnek, ortalaması söz konusu populasyonun ortalamasından daha küçük olan bir populasyondan tesadüfen alınmış bir örnektir.

Bu şekilde kurulacak karşıt hipotez yapılacak hipotez kontrolünün tek taraflı olduğunu gösterir (soldan test). Çünkü bu durumda araştırıcı örnekten hesaplanan istatistiğin ortalamaya ait örnekleme dağılımının ortalamasından küçük tarafa sapması ile ilgilenmektedir.

c. H_1: Üzerinde çalışılan örnek, ortalaması söz konusu populasyonun ortalamasından daha büyük olan bir populasyondan tesadüfen alınmış bir örnektir.

Bu karşıt hipotez de yapılacak hipotez kontrolünün tek taraflı olduğunu gösterir (sağdan test). Çünkü bu durumda da araştırıcı örnekten hesaplanan istatistiğin ortalamaya ait örnekleme dağılımının ortalamasından büyük tarafa sapması ile ilgilenmektedir.

2. ADIM: Örneğin çekildiği varsayılan populasyonun dağılımı belirlenir. Bu populasyon normal dağılıyor olabilir veya bilinen diğer dağılımlardan biri olabilir. Daha sonra üzerinde durulan örnekte ele alınan istatistiğin dağılımı belirlenir. Mesela ele alınan değişken normal dağılıyor olsun. Bu dağılımın ortalamasının μ_0, varyansının da σ^2 olduğu varsayılsın. Herhangi bir araştırma sonucu dokuz bireyden (n=9) elde edilen aritmetik ortalama $\overline{X}$ olsun. Belirlenen test hipotezi bu örneğin yukarıdaki populasyondan çekildiği şeklinde (H_0: $\mu_{\overline{X}} = \mu_0$) olabilir. Test hipotezinin geçerli olduğu durumda, ortalaması, μ_0 ve varyansı, σ_X^2 olan normal dağılımdan çekilmiş örnek ortalamasına ait dağılımın ortalaması, $\mu_{\overline{X}} = \mu_0$ ve standart sapması $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{9}}$ olan normal dağılım olacağı daha önce 4.1'de açıklanmıştı. Böylece örnek ortalamasının örnekleme dağılımı belirlenmiş olmaktadır.

3. ADIM: Bu adımda ise test birimi ve dağılımı belirlenir. Yani ele alınan istatistik test hipotezinin varlığı durumunda göstereceği birim ve dağılım belirlenir. Yukarıdaki örnekte ele alınan istatistik olan aritmetik ortalama ($\overline{X}$) standardize edildiğinde, yani test birimi olarak Z ele alındığında;

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

değeri hesaplandığında elde edilen sonuç Z'dir ve standart normal dağılım gösterir. Bu durumda test dağılımı standart normal dağılımdır.

4. ADIM: Bu adımda I. tip hata olasılığı (α) belirlenir. karşıt hipotez de dikkate alınarak test dağılımı kontrol edilen hipotez için kabul ve ret bölgelerine ayrılır. Ret bölgesinin olasılığı (α) kadardır. Karşıt hipotez tek taraflı ise test dağılımı bir taraftan kabul ve ret bölgelerine ayrılır (Şekil 6.2). Karşıt hipotez çift taraflı ise test dağılımı iki ucundan kabul ve ret bölgelerine ayrılır. Her iki taraftaki ret bölgelerinin olasılığı $\frac{\alpha}{2}$'dir (Şekil 6.1).

5. ADIM: Veriler toplanarak test istatistiği hesaplanır. Bu test istatistiğinin bölgelerden hangisine dahil olduğuna bakılarak H_0'ın reddedilip edilemeyeceğine karar verilir.

ÖRNEK 1.

Bir ilaç fabrikasındaki bir yönetici üretilen vitamin-mineral karması drajelerdeki B_1 vitamininin ortalaması μ_0=25 mg ve standart sapması σ=1.2 mg olan bir normal dağılım gösterdiğini bilmektedir. Bu yönetici gerçekten üretilen drajelerdeki ortalama B_1 vitamininin 25 mg olup olmadığını araştırmak üzere farklı partilerden rastgele alınan 16 drajelik bir örnekte B_1 vitamini miktarının ortalamasını 24.5 mg olarak bulmuş olsun. Bu örneğin, ortalaması μ_0=25 mg ve standart sapması σ=1.2 mg olan normal dağılmış bir populasyondan çekilen örneklerin oluşturduğu dağılıma dahil olup olmadığına aşağıda adım adım açıklanan hipotez kontrolü yapılarak karar verilir.

1. ADIM: Yapılacak hipotez kontrolünün çift taraflı mı yoksa tek taraflı mı olacağı sorudan anlaşılır. Buradaki örnekte yöneticinin ilgilendiği örnekten hesaplanan ortalamanın 25 mg kabul edilip edilemeyeceğidir. Yani ortalamaya ait örnekleme dağılımına dahil olup olmadığıdır. Bu nedenle de çift taraflı hipotez kontrolü yapılacaktır.

H_0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_0 = 25\,mg$'dır.

H_1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilemez. Başka bir deyişle, örnek söz konusu populasyondan tesadüfen alınmış bir örnek değildir ve söz konusu populasyonu temsil etmez. Yani, $\mu_0 \neq 25\,mg$'dır.

2. ADIM: Drajelerdeki B_1 vitamini miktarının normal dağıldığı bilinmektedir. Buna göre bu dağılımın ortalaması $\mu_0 = 25\,mg$ ve standart sapması σ=1.2 mg'dır. Bu dağılımdan çekilen 16'lık örneklerin ortalamasının dağılımı da normaldir ve parametreleri $\mu_{\bar{X}} = 25\,mg$ ve $\sigma_{\bar{X}} = \frac{1.2}{\sqrt{16}} = 0.3\,mg$'dır. Yani hipotez ile belirtilen dağılım ortalamaya ait örnekleme dağılımıdır.

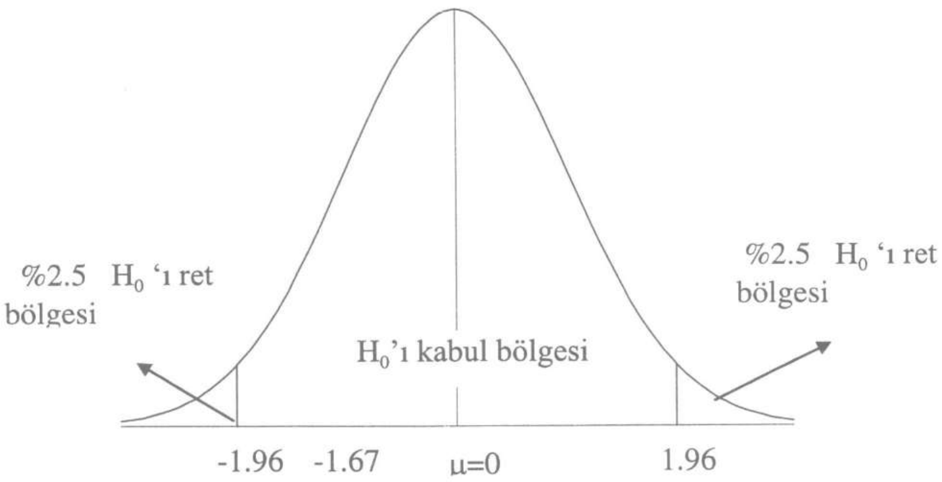
3. ADIM: Örnekte ele alınan istatistik ($\bar{X}$) 2. adımdaki şartlar dikkate alınarak standardize edildiği zaman Z dağılımı gösterir.

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{24.5 - 25.0}{0.3} \cong -1.67$$

Buna göre test dağılımı standart normal dağılımdır.

4. ADIM: Araştırıcı genellikle bu tip hipotez kontrollerinde yapıldığı gibi I. tip hata olasılığını, α=0.05 olarak kabul etmiş olsun. karşıt hipoteze göre test iki taraflıdır. Buna göre test dağılımı Şekil 7.1'deki gibi kabul ve ret bölgelerine ayrılır.

5. ADIM: Hesaplanan Z=-1.67'lik test istatistiği kabul bölgesinde olduğundan, kontrol hipotezi reddedilemez. Ele alınan 16'lık örnekten hesaplanan $\bar{X}$=24.5 ve daha fazla sapan değerlerin test hipotezi ile belirlenen populasyona dahil olma olasılığı 0.05'ten daha fazladır. Bu durum kısaca P>0.05 olarak ifade edilir.



ŞEKİL 7.1. Çift taraflı hipotez kontrolünde kontrol hipotezini ret ve kabul bölgeleri

ÖRNEK 2.

Bir meyve suyu fabrikasında üretilen portakal sularında C vitamini miktarının μ_0=17 mg/100 g ve σ_x^2=4.5 olan bir normal dağılım gösterdiği bilinmektedir. Yeni bir meyve suyu üretim tekniğinin portakal sularındaki C vitaminini artırdığını ileri sürülmektedir. Bu nedenle yeni teknikle üretilen meyve sularından, farklı partilerden tesadüfen alınan 25 portakal suyu şişesinde C vitamini incelenecektir. Yeni tekniğin portakal sularında C vitamini miktarını artırıp artırmadığını test etmek için Örnek 1'deki gibi aşağıdaki adımlar izlenir.

1. ADIM: Hipotezlerin kurulması:

H_0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_0 = 17\text{mg}/100\,\text{g}$'dır.

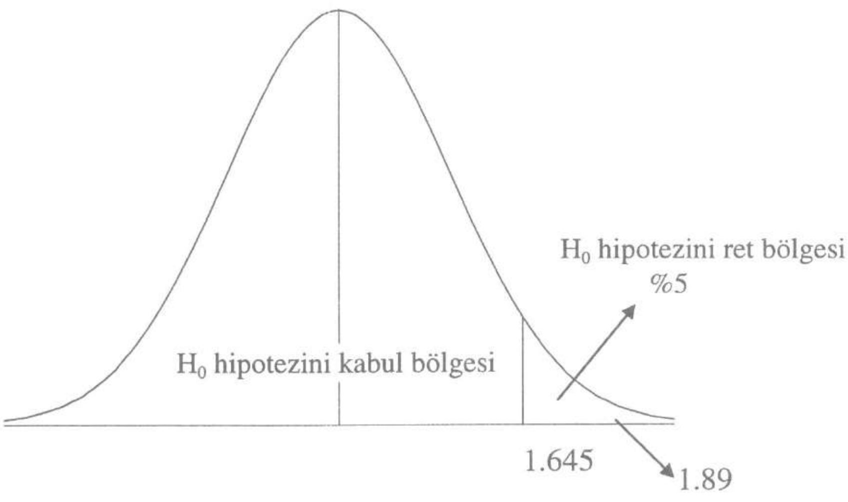
H_1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu yeni teknik portakal sularındaki C vitamini miktarını artırmıştır. Yani, $\mu_0 > 17\text{mg}/100\,\text{g}$'dır.

Burada yapılacak hipotez kontrolünün tek taraflı bir hipotez kontrolüdür. Çünkü bu durumda da araştırıcı örnekten hesaplanan istatistiğin ortalamaya ait örnekleme dağılımının ortalamasından büyük tarafa sapması ile ilgilenmektedir.

2. ADIM: Daha önceki analiz sonuçlarından üretilen portakal suyundaki C vitamini miktarlarının normal dağıldığı bilinmektedir. Bu dağılımın parametreleri de problemde verilmiştir. Test hipotezine göre bu populasyondan alınan 25'lik örnek ortalamaları da ortalaması 17 mg/100 g, standart sapması $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{4.5}{25}} \cong 0.424 \text{mg}/100 \text{ g}$ olan bir normal dağılım gösterir.

3. ADIM olarak ele alınan $\bar{X}$ istatistiği standardize edildiğinde, yani $\frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$ hesaplandığında standart normal dağılan Z değeri elde edilir. Buna göre test birimi Z, test dağılımı da standart normal dağılımdır.

4. ADIM: Araştırıcı I. tip hata ihtimalini, α=0.05 olarak belirlemiş olsun. Yapılan hipotez kontrolü tek taraflı hipotez kontrolü olduğu için, Şekil 7.2'de gösterildiği gibi, bu ihtimali ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu tarafta alır.



ŞEKİL 7.2. Tek taraflı hipotez kontrolünde kontrol hipotezini ret ve kabul bölgeleri

5. ADIM: Araştırıcı denemesini yürüterek 25 şişelik örneğinde C-vitamini ortalamasını 17.8 mg/100 g olarak bulmuş olsun.

Buna göre;

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{17.8 - 17.0}{0.424} \cong 1.887$$

olarak bulunur. Bu Z-değerine göre örnekten hesaplanan ortalama ve daha büyüklerin örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali 0.5-P(0<Z<1.887)'dir. Tablo A'dan, Z değerlerinin 0 ile yaklaşık 1.89 arasında olma ihtimali 0.4706 olarak bulunur. Ve bu durumda örnekten hesaplanan ve daha büyük ortalamaların örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali, 0.5-P(0<Z<1.89)= 0.5-0.4706=0.0294 olarak bulunur. Bu ihtimal I. tip hata ihtimalinden (%5'ten) daha küçük olduğu için kontrol hipotezi ret edilerek karşıt hipotez kabul edilir, yani yeni üretim tekniğinin portakal sularındaki C vitamini miktarını artırdığı söylenebilir.

Hangi hipotezin kabul edileceğine şu şekilde de karar verilebilir: Tablo A'da 0 ile 1.64 değeri arasında kalan alan %44.95, 0 ile 1.65 arasında kalan alan ise %45.05'dir. Burada bulunması gereken Z-değeri ise %45.0'lik alanı ayıran Z-değeridir. Bunun için interpolasyon yapılır. %44.95 ile %45.05'in tam orta noktası (yani yarısı) %45.0'e karşılık gelmektedir. Aynı şekilde 1.64 ile 1.65'in de orta noktası bulunur ise elde edilecek Z-değeri 1.645'tir. Bu değer Z-dağılımında %5'lik alanın başladığı noktadır. Hesaplanan test istatistiğinin (Z'nin) değeri ise 1.887'dir. Bu değer Şekil 7.2'de de görüldüğü gibi kontrol hipotezini ret bölgesine düşmektedir. Yani kontrol hipotezi reddedilir ve karşıt hipotez kabul edilir. Bu durumda verilen karar; yeni üretim tekniğinin portakal sularındaki C vitamini miktarını artırdığıdır. Bu durum $P<0.05$ olarak ifade edilir.

Eğer araştırıcı hipotez kontrolü yaparken I. tip hata ihtimalinin $\alpha=0.01$ olmasına karar vermiş ise bu durumda Tablo A'da 0 ile hangi Z-değerinin arasında kalan alanının %49 olduğunu bulması gerekir. Tablo A'ya bakıldığı zaman 0 ile 2.33 arasında kalan alanın %49.01 olduğu görülür. Araştırıcı 2.33'ü %1'lik alanı ayıran Z-değeri olarak kullanabilir veya interpolasyon yaparak tam %1'lik alanı ayıran Z-değerini hesaplayabilir. Bu örnekte eğer I.tip hata ihtimali %1 olarak kararlaştırılmış olsa idi, 5.adımda örnekten hesaplanan ortalamanın örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali %2.94 olarak hesaplanmıştı. Bu ihtimale göre kontrol hipotezi kabul edilecekti yani yeni üretim tekniğinin C-vitaminini artırmadığı kararı verilecekti. Ayrıca %1'lik alanının başladığı Z-değeri 2.33 olduğundan 1.89 değeri kabul bölgesine düşmektedir. Bu da H_0 hipotezinin reddedilmemesini gerektirir.

ÖRNEK 3:

Bir fakültede öğrencilerin bioistatistik dersinden aldıkları notların ortalaması 60 ve standart sapması 8 olan normal bir dağılım gösterdiği bilinmektedir. Fakülteye ders başlamadan 30 dakika önce gelen öğrencilerin daha ilgili ve başarılı öğrenciler olduğu öne sürülmektedir. Bu sebeple, ders başlamadan 30 dakika önce gelen öğrencilerden tesadüfen seçilen 16 öğrenci içeren bir örnekte not ortalaması incelenmiştir. Erken gelen öğrencilerin başarılı öğrenciler olup olmadığı aşağıdaki şekilde incelenir:

1.ADIM: Hipotezlerin kurulması:

H_0: Örnekten hesaplanan not ortalaması ile fakülte öğrencilerinin not ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Başka bir deyişle örneği oluşturan öğrenciler söz konusu fakültenin öğrencileridir. Yani $\mu_0 = 60$'tır.

H_1: Örnekten hesaplanan not ortalaması ile fakülte öğrencilerinin not ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilemez. Başka bir deyişle, erken gelen öğrencilerin bioistatistik dersi not ortalaması daha yüksektir. Yani $\mu_0 > 60$'tır.

2. ADIM: Örneğin çekildiği varsayılan populasyonun normal dağıldığı ve parametreleri problemde verilmiştir. Buradan rastgele alınan 16 öğrenci içeren örneklerin ortalamaları da normal dağılır ve parametreleri aşağıdaki gibidir:

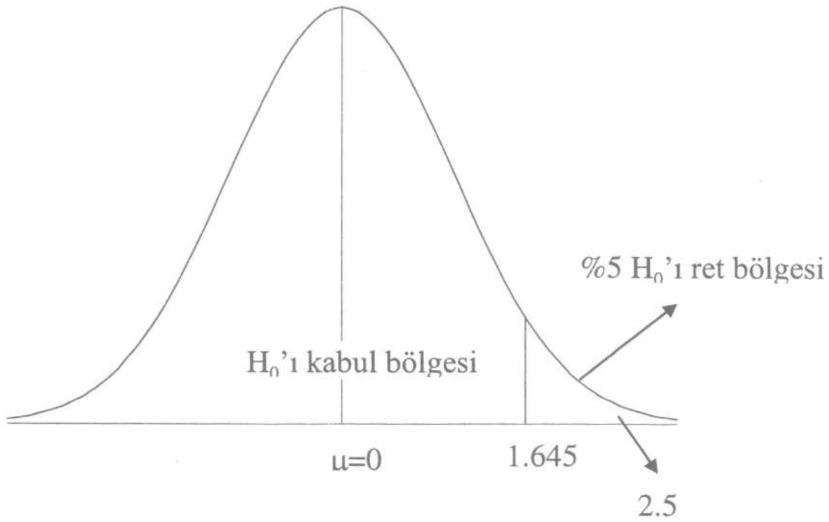
$$\mu_{\bar{x}} = 60$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

3. ADIM: Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen Z-istatistiği;

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

4. ADIM: Araştırıcı I. tip hata ihtimalini, α=0.05 olarak belirlemiş olsun. Yapılan hipotez kontrolü tek taraflı kontrol olduğu için, Şekil 7.3'de gösterildiği gibi, bu ihtimal ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu tarafta alınır.



ŞEKİL 7.3. Tek taraflı hipotez kontrolünde kontrol hipotezini ret ve kabul bölgeleri

5. ADIM: Erken gelen öğrencilerden oluşturulan 16 öğrencilik örnekte bioistatistik not ortalaması 65 olarak hesaplanmış olsun. Buna göre;

$$Z = \frac{65 - 60}{2} = 2.5$$

olarak bulunur. Bulunan bu Z-değerine göre örnekten hesaplanan ortalama ve daha fazla sapan değerlerin örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali 0.5-P(0<Z<2.5)'dir. Tablo A'dan, P(0<Z<2.5) = 0.4938 olarak bulunur. Ve 0.5-P(0<Z<2.5)= 0.5-0.4938=0.0062'dir. Bu ihtimal, I. tip hata ihtimalinden (%5'ten) daha küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilir, yani örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki 5 notluk fark sıfır olarak kabul edilemez. Derslere erken gelen öğrenciler daha çalışkan olduklarından not ortalamaları yüksektir. Örneğe giren 16 öğrenci çalışkan olanları kapsamaktadır.

7.2.2. Ortalamalar arası Farka ait Hipotez Kontrolü

Ortalamalar arası farkların hipotez kontrolünde izlenecek yol daha önce etraflı olarak adım adım açıklanan genel hipotez kontrolünde olduğu gibidir. Bu durum aşağıda bir örnek ile açıklanmıştır.

ÖRNEK 1:

Vitamin ve mineraller üreten bir ilaç fabrikasında uzun yıllar yapılan analizler sonucuna göre drajelerdeki B_1 vitamini içeriğine ait varyansın 4 olduğu bilinmektedir. Aynı miktar B_1 vitamini içeren, A ve B tipi kaplama şekli uygulanan ambalajlardan bir yıl sonra örnekler alınıp ortalamaları bulunmuştur. A ve B tipi kaplama uygulanan drajelerdeki B_1 vitamini miktarlarının bir yıl sonra farklı olup olmadığı kontrol edilmek isteniyor olsun. Yapılacak hipotez kontrolünde izlenecek yol aşağıdaki gibidir:

1. H_0: A ve B tipi kaplama uygulanan drajelerdeki bir yıl sonundaki B_1 vitamini miktarları farklı değildir. Yani kısaca

$\mu_{\bar{x}_A} = \mu_{\bar{x}_B} = \mu$ veya

$\mu_{\bar{x}_A} - \mu_{\bar{x}_B} = 0$

$\mu_{\bar{x}_A} - \mu_{\bar{x}_B} = \mu_D$ şeklinde gösterilirse test hipotezi $\mu_D = 0$ şeklinde de ifade edilebilir

. Karşıt hipotez ise;

$$H_1: \begin{array}{l} \mu_{\bar{x}_A} - \mu_{\bar{x}_B} \neq 0; \text{ veya kısaca} \\ \mu_D \neq 0 \end{array}$$

şeklinde olacaktır. Çünkü araştırıcı iki kaplama tipinin birbirinden farklı olup olmadığını araştırmaktadır. Daha denemeyi kurarken birinin diğerinden üstün olabileceği şeklinde bir iddiası yoktur.

2. Drajelerdeki B_1 vitamini miktarlarının normal dağılım gösterdiği ve varyansının 4 olduğu bilinmektedir. Kaplama şekline göre zamanla varyansın değişmediği varsayılmaktadır.

Buna göre test hipotezi geçerli olduğunda örnek ortalamaları arası farklar, ortalaması sıfır (0) ve standart sapması 4.3 numaralı eşitlikte verildiği gibi,

$\sigma_{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)} = \sigma_D = \sqrt{\sigma^2 \frac{n_A + n_B}{n_A n_B}}$ olan bir normal dağılım gösterir.

3. Ele alınan problemdeki istatistik, yani ortalamalar arası fark ($D = \overline{X}_A - \overline{X}_B$) standardize edildiğinde standart normal dağılım gösterir. Böylece test birimi Z, test dağılımı da standart normal dağılım olduğu kendiliğinden ortaya çıkmaktadır.

$$Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - (\mu_{\overline{X}_A} - \mu_{\overline{X}_B})}{\sigma_{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)}}$$ veya daha kısa olarak

$$Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - \mu_D}{\sigma_D}$$ 'dir.

4. Araştırıcı I. tip hata ihtimalini α=0.05 olarak belirlemiş olsun. Yapılan hipotez kontrolü çift taraflı olduğu için bu ihtimalin yarısı (%2.5'i) ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu tarafta diğer yarısını da ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu tarafta alır. Z-dağılımında %2.5'lik alanın başladığı değer ise 1.96'dır.

5. A ve B kaplama şekilleri uygulanan drajeler bir yıl süre ile aynı şartlarda muhafaza edilmiştir. Bir yıl sonra A tipi kaplama uygulanan 25 drajede yapılan analizlerde $\overline{X}_A = 22.0\,mg$, B tipi kaplama uygulanan 36 drajede ortalama $\overline{X}_B = 22.8\,mg$ bulunmuştur. Buna göre;

$$Z = \frac{22 - 22.8}{\sqrt{4(\frac{1}{25} + \frac{1}{36})}} = -1.5364 \cong -1.54$$ olarak bulunur.

Örnekten hesaplanan -1.54'lük test değeri kabul bölgesinde bulunmaktadır, yani kontrol hipotezi reddedilemez. Daha kısa olarak $|Z| < Z_\alpha$ veya $|-1.54| < 1.96$ olduğundan kontrol hipotezi reddedilemez.

Ele alınan ortalamalar arası fark olan 0.8 mg'lık farkın hipotezle belirlenen populasyona dahil olma olasılığı α'dan (0.05'ten) büyüktür (P>0.05).

7.2.3. Oranlara ait Hipotez Kontrolü

Araştırıcının üzerinde durduğu özellik binom dağılımı gösteren bir özellik olabilir, örneğin bozuk ve sağlam, başarılı ve başarısız, iyileşenler ve iyileşemeyenler gibi olaylar söz konusudur. Bu durumda üzerinde durulan olayın oluş ihtimali Bölüm 3.1'de açıklandığı şekilde binom dağılımının parametresi π ile tanımlanır. Ve araştırıcının amacı hesaplanan bir olasılık (p) ile ilgili hipotez kontrolü yapmak olabilir. Oranlara ait hipotez kontrolü yapılırken yerine getirilmesi gereken varsayımlar ve hipotez kontrolünde izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

Hipotez kontrolü yapılırken yerine getirilmesi gereken varsayımlar:

- **Örnekler, binom dağılımı için gerekli şartları yerine getirir.**
- **Örneklerden hesaplanan p'ler yaklaşık normal dağılım göstermelidir.**

Hipotez kontrolü yapılırken izlenecek adımlar sırası ile aşağıdaki gibidir:

1. ADIM: İlk olarak araştırıcı kontrol ve karşıt hipotezlerini oluşturmalıdır.

Kontrol hipotezi:

H_0: Örnekten hesaplanan olasılık (p) ile populasyona ait olasılık arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Yani $\mu_p=\pi$'dir.

Kaşıt hipotez araştırıcının amacı doğrultusunda 3 farklı şekilde oluşturulabilir.

a. H_1: Örnekten hesaplanan olasılık (p) ile populasyona ait olasılık arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Yani $\mu_p\neq\pi$'dir.

b. H_1: Örnekten hesaplanan olasılık (p), populasyona ait olasılıktan (π) daha büyük olasılığa sahip bir populasyonu temsil etmektedir. Yani $\mu_p>\pi$'dir.

Hesaplanan Z-değeri, %2.5'lik alanın başladığı 1.96 değerinden küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilemez. Diğer bir deyişle hesaplanan test değeri olan Z kabul bölgesindedir. Yani ele alınan örneğin hipotezle belirtilen örnekleme dağılımına dahil olma olasılığı 0.05'ten büyüktür (P>0.05).

ÖRNEK 2:

Bir fakültede öğrencilerin spor faaliyetlerine katılma oranının %45 olduğu bilinmektedir. Sporun insan sağlığı için önemini anlatan bir kampanyandan sonra bu oranda bir artış olup olmadığını araştırmak üzere 90 öğrenciye uygulanan anket sonucunda 52 öğrencinin spor faaliyetlerine katıldığı anlaşılmıştır. Acaba söz konusu fakültede öğrencilerin spor faaliyetlerine olan ilgisinin arttığı söylenebilir mi?

H_0: Söz konusu fakültede öğrencilerin spor faaliyetlerine katılma oranı 0.45 olarak kabul edilebilir. Gözlenen fark tesadüften ileri gelmektedir ve sıfır kabul edilebilir. Yani μ_p=0.45 'tir.

H_1: Söz konusu fakültede öğrencilerin spor faaliyetlerine katılma oranı artmıştır. Yani μ_p>0.45 'tir.

Bölüm 4.3'de açıklandığı gibi, eğer $\pi \leq 1/2$ ise oranlara ait örnekleme dağılımının normal dağılım göstermesi için $n\pi \geq 10$ olmalıdır. Bu örnekte söz konusu populasyona ait π=0.45 olup, 0.5'ten küçüktür. Bu populasyondan çekilen örneklerin genişliği en az, n(0.45)=10 yani $n \cong 23$ olmalıdır. Yapılan araştırmada üzerinde çalışılan örnek 90 öğrenci içerdiği için bu şart yerine getirilmiştir. Yani π=0.45 olan populasyondan tesadüfen alınan ve 90 birey içeren örneklerden elde edilecek oranlara ait örnekleme dağılımı, normal dağılım gösterir. Bu oranlara ait Z kontrolünün yapılması için gerekli varsayımın yerine getirilmiş olduğunu gösterir. Ve Z kontrolü aşağıda açıklandığı şekilde yapılır.

Söz konusu örnekten hesaplanan oranın, hipotezle belirtilen oranlara örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak için;

$$p = \frac{52}{90} = 0.578$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0.45(1-0.45)}{90}} = 0.0524$$

değerleri bulunur. Ve bu değerler kullanılarak, Z-değeri;

$$Z = \frac{(0.578 - 0.45)}{0.0524} \cong 2.4427 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Araştırıcı kararını verirken I. tip hata ihtimalini, $\alpha=0.01$, %1 olarak belirlemiş olsun. Karşıt hipotez tek taraflı kontrolü gerektirdiği için %1'in ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu tarafta alınır.

Standart normal dağılımda, Tablo A'ya bakıldığı zaman %1'lik alanın yaklaşık 2.33 değerinde başladığı görülür. Burada hesaplanan Z-değeri yaklaşık 2.44 olup, bu değer %1'lik H_0 ret bölgesine düşmektedir. Bu da H_0 hipotezinin reddedilmesini gerektirir. Yani söz konusu fakültedeki öğrencilerin spor faaliyetlerine katılma olasılığı artmıştır. Bu durum araştırma sonuçlarında kısaca $P<0.01$ olarak gösterilir.

7.2.4. Oranlar arası Farka ait Hipotez Kontrolü

Yapılan bir araştırmanın amacı üzerinde durulan ve binom dağılımı gösteren bir özellik bakımından iki farklı muameleyi, bölgeyi veya metodu karşılaştırmak olabilir. Örneğin araştırıcının amacı, herhangi bir hastalığı tedavi için kullanılan iki farklı ilacı, hastalığı iyileştirme oranları bakımından karşılaştırmak olabilir. Bu durumda yapılması gereken oranlar arası farka ait hipotez kontrolüdür.

Hipotez kontrolü yapılırken yerine getirilmesi gereken varsayımlar:

- **Örnekler, binom dağılmış populasyondan bağımsız ve tamamen tesadüfen alınmış örnekler olmalıdır.**
- **Örneklerdeki birey sayısı, örneklerden hesaplanan oranların normal dağılım göstermesini sağlayacak büyüklükte olmalıdır. Yani örneklerden hesaplanan**

oranlara ait örnekleme dağılımı normal dağılım göstermelidir.

İlk olarak araştırıcı kontrol ve karşıt hipotezlerini oluşturmalıdır.

Kontrol hipotezi:

H_0: İki oran arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Bu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{p1}=\mu_{p2}$ veya $\mu_{p1}-\mu_{p2}=0$ ($\pi_1 - \pi_2 = 0$)'dır.

Kaşıt hipotez araştırıcının amacı doğrultusunda 3 farklı şekilde oluşturulabilir.

a. H_1: İki oran arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Bu fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_{p1}\neq\mu_{p2}$ veya $\mu_{p1}-\mu_{p2}\neq 0$ ($\pi_1 - \pi_2 \neq 0$)'dır.

b. H_1: Birinci örneğin ait olduğu populasyondaki oran ikinci örneğin ait olduğu populasyondaki orandan daha büyüktür. Yani, $\mu_{p1}>\mu_{p2}$'dir.

c. H_1: Birinci örneğin ait olduğu populasyondaki oran ikinci örneğin ait olduğu populasyondaki orandan daha küçüktür. Yani, $\mu_{p1}<\mu_{p2}$'dir.

Kontrol hipotezi doğru olduğu zaman $\pi_1= \pi_2=\pi$ olacaktır. Bu durumda π'nin en iyi tahmini;

$$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \text{ olacaktır.}$$

Örneklerden hesaplanan oranların arası farkın, oranlar arası farka ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak için Z değeri;

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sigma_{(p1-p2)}} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Yukarıda verilen eşitlikte $\sigma_{(p1-p2)}$ ise aşağıda verilen eşitlik kullanılarak hesaplanır:

$$\sigma_{(p1-p2)} = \sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

Bölüm 7.2.1 ve 7.2.2'de açıklandığı şekilde araştırıcı I. tip hata ihtimalini, yani α'yı belirlemelidir.

Test istatistiği hesaplandıktan ve oranlar arası farkın söz konusu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali bulunduktan sonra yine Bölüm 7.2.1 ve 7.2.2'de açıklandığı şekilde karar verilir.

ÖRNEK 1:

Bir doktor, bir hastalığın tedavisinde kullanılan iki farklı ilacın hastalığın iyileşmesine etki bakımından farklı olup olmadığını araştırmak istemektedir. Bu nedenle aynı hastalığa yakalanmış 60 hastanın 34'ünü A ilacı ile tedavi ederek 28 hastanın iyileştiğini ve geri kalan hastaları B ilacı ile tedavi ederek 20 hastanın iyileştiğini tespit ediyor. Bu iki ilacın hastalığı iyileştirme oranları bakımından arasındaki farklılığın tesadüften ileri geldiği söylenebilir mi?

H_0: Hastalığı iyileştirme yüzdesi bakımından iki ilaç arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Bu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{pA}=\mu_{pB}$'dir.

H_1: Hastalığı iyileştirme yüzdesi bakımından iki ilaç arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Bu fark sıfır kabul edilemez. Yani $\mu_{pA}\neq\mu_{pB}$'dir.

Kontrol hipotezi doğru olduğu zaman $\pi_1= \pi_2=\pi$ olacağı için π'nin en iyi tahmini;

$$p = \frac{28+20}{34+26} = 0.8$$

A ve B ilaçları için hastalığı iyileştirme oranları ise;

$$p_A = \frac{28}{34} = 0.8235$$

$$p_B = \frac{20}{26} = 0.7692$$

Oranlar arası farka ait örnekleme dağılımının standart sapması ise:

$$\sigma_{(p_A - p_B)} = \sqrt{0.8(1-0.8)(\frac{1}{34}+\frac{1}{26})} = 0.1042$$

Oranlar arası farkın, söz konusu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak için Z değeri;

$$Z = \frac{0.8235 - 0.7692}{0.1042} = 0.5211 \text{ olarak bulunur.}$$

Araştırıcı I. tip hata ihtimalini, α=0.05 olarak belirlemiş olsun. Karşıt hipotez ile yapılacak hipotezin çift taraflı bir kontrol olduğu belirlendiğine göre I. tip hata ihtimali ortalamanın iki tarafında yarı yarıya alınır.

Z dağılımında %2.5'lik kontrol hipotezini ret bölgesi 1.96 değerinde başlamaktadır (Tablo A). Burada hesaplanan Z değeri 0.5211 olup 1.96 değerinden küçüktür yani H_0 hipotezini kabul bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilemez, yani hastalığı iyileştirme yüzdesi bakımından iki ilaç arasında fark tesadüften ileri gelmektedir. Söz konusu hastalığın tedavisinde iki ilaçtan biri rahatlıkla kullanılabilir.

7.2.5. Korelasyon Katsayısına ait Hipotez Kontrolü

Yapılan bir araştırmada üzerinde çalışılan örnekten iki özelliğe ait veri toplanabilir ve araştırıcı örneğin tamamen tesadüfen alındığı populasyona ait korelasyon katsayısı ile örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı arasındaki farkın tesadüfi olup olmadığını kontrol etmek isteyebilir. Bu durumda yapılması gereken korelasyon katsayısına ait hipotez kontrolüdür.

Hipotez kontrolü yapılırken araştırıcı ilk olarak kontrol ve karşıt hipotezlerini oluşturmalıdır.

Kontrol hipotezi:

H_0: Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ile populasyona ait korelasyon katsayısı arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve bu fark sıfır kabul edilebilir. Yani, μ_r=ρ'dur.

Kaşıt hipotez araştırıcının amacı doğrultusunda 3 farklı şekilde oluşturulabilir.

a. H_1: Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ile populasyona ait korelasyon katsayısı arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir ve bu fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_r \neq \rho$'dur.

b. H_1: Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı populasyona ait korelasyon katsayısından daha büyüktür. Yani, $\mu_r > \rho$'dur.

c. H_1: Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı populasyona ait korelasyon katsayısından daha küçüktür. Yani, $\mu_r < \rho$'dur.

Burada yapılması gereken örneklerden hesaplanan korelasyon katsayısının, korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin hesaplanmasıdır. Populasyona ait korelasyon katsayısının sıfırdan farklı olması durumunda, örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı için 5.9 numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanacak Z_r değerlerinin yaklaşık normal dağılım gösterdiği Bölüm 5.1'de etraflı olarak açıklanmıştı. Örnekten hesaplanacak korelasyon katsayısına karşılık gelen Z_r-değerleri Tablo B'de verilmiştir. Bu Z_r değerlerinin ortalaması 5.10 numaralı eşitlikte verildiği gibi;

$$\mu_{Z_r} = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

ve standart sapması 5.11 numaralı eşitlikte verildiği gibi;

$$\sigma_{Z_r} = \sqrt{\frac{1}{(n-3)}} \text{'tür.}$$

Örneklerden hesaplanan korelasyon katsayısının, korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin hesaplanması için test istatistiği (Z-değeri);

$$Z = \frac{Z_r - \mu_{Z_r}}{\sigma_{Z_r}} \text{ eşitliği kullanılarak hesaplanır.}$$

Yukarıda açıklanan yaklaşım örnek genişliğinin 50'den büyük olduğu durumlarda (ve hatta örnek genişliğinin 25'den büyük olduğu durumlarda da) kullanılabilir. Çünkü Z_r değerleri populasyon korelasyon katsayısı ne olursa olsun yaklaşık normal dağılım gösterecektir. Fakat örnek genişliğinin daha küçük, yapılan hipotez kontrolünün ve hesaplanan güven sınırlarının kritik olduğu durumlarda, yapılan hipotez kontrolünün ve bulunan güven sınırlarının güvenilirliği bakımından Hotelling bir başka transformasyon geliştirmiştir. Hottelling'in yaklaşımında;

$Z^* = Z_r - \dfrac{3Z_r + r}{4(n-1)}$ olarak verilir. Bu değerlerin standart sapması;

$\sigma_{Z^*} = \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)}}$ 'dir. Bu durumda test istatistiği;

$Z = \dfrac{Z^* - \mu_{Z^*}}{\sigma_{Z^*}} = (Z^* - \mu_{Z^*})(\sqrt{n-1})$ 'dir. Eşitlikte;

$\mu_{Z^*} = \mu_{Z_r} - \dfrac{(3\mu_{Z_r} + \rho)}{4n}$ 'dir.

Daha önceki bölümlerde açıklandığı şekilde araştırıcı I. tip hata ihtimalini, yani α'yı belirlemelidir.

Test istatistiği hesaplandıktan ve örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ve daha fazla sapanların söz konusu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali bulunduktan sonra yine daha önceki bölümlerde açıklandığı şekilde karar verilir.

ÖRNEK 1:

Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının (ρ'nun) 0.92 olduğu ileri sürülmüştür. Bunun doğruluğunu kontrol etmek üzere tamamen tesadüfen seçilen 7 bireyde yaş ve kan basıncı ölçümleri aşağıdaki gibi tespit edilmiştir.

Yaş (X)	Kan basıncı (Y)
35	117
40	121
72	160
56	142
64	158
31	111
73	166

Yaş ve kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısını hesaplayarak, örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ile populasyona ait korelasyon katsayısı arasındaki farkın tesadüfi olduğu söylenebilir mi?

7 bireyden elde edilen veriler kullanılarak, Bölüm 5.1'de açıklandığı şekilde işlemler yapılacak olursa korelasyon katsayısı 0.994 olarak bulunur. Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ile populasyon katsayısı arasındaki farkın tesadüfi olup olmadığı aşağıda açıklandığı şekilde hipotez kontrolü yapılarak kontrol edilir.

H_0: Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ile populasyona ait korelasyon katsayısı (ρ=0.92) arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve bu fark sıfır kabul edilebilir. Yani, μ_r=0.92'dir.

H_1: Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ile populasyona ait korelasyon katsayısı (ρ=0.92) arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir ve bu fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_r \neq$0.92'dir.

Örnekte korelasyon katsayısı 0.994 olarak bulunmuştur. Tablo B'de r=0.99'a karşılık gelen Z-değeri Z_r=2.6467 olarak bulunur. Veya 5.9 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$Z_r = \frac{1}{2}\log_e \frac{(1+0.994)}{(1-0.994)} = 2.9031 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Aradaki fark tablodan 0.99'un karşılığının kullanılmasından ileri gelmiştir. Günümüzde cepte taşınan hesap makinalarında bile logaritma ve antilogaritma alma imkanı olduğundan Z_r'nin hesapla bulunması daha doğrudur.

Bu Z-değerlerine ait ortalama;

$$\mu_{Z_r} = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+0.92}{1-0.92} = 1.589$$

ve standart sapma;

$$\sigma_{Z_r} = \sqrt{\frac{1}{(7-3)}} = 0.5\text{'tir.}$$

Örneklerden hesaplanan korelasyon katsayısının, korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin hesaplanması için test istatistiği (Z-değeri);

$$Z = \frac{2.9031 - 1.589}{0.5} = 2.6282 \text{ olarak bulunur.}$$

Araştırıcı I. tip hata ihtimalini, yani α'yı %5 olarak belirlemiş olsun. Karşıt hipotez, çift taraflı hipotez kontrolünü gerektirmektedir. Bu nedenle, yanılma ihtimali ortalamanın iki tarafında eşit miktarda alınır.

Hesaplanan test istatistiğinin değeri 2.6282 olup, Z dağılımında %2.5'lik alanın başladığı 1.96 değerinden büyüktür, yani ret bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi ret edilir, yani söz konusu örnek korelasyon katsayısı 0.92 olan populasyondan alınmamıştır. Yani yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının bu örneğin alındığı populasyonda 0.92 olduğu söylenemez.

Bu örnek için Hotelling yaklaşımı kullanılarak hipotez kontrolü ise aşağıdaki gibidir:

$$Z^* = 2.9031 - \frac{3(2.9031) + 0.994}{4(7-1)} = 2.499$$

$$\sigma_{z^*} = \frac{1}{\sqrt{(7-1)}} = 0.408$$

$$\mu_{z^*} = 1.589 - \frac{3(1.589) + 0.92}{4(7)} = 1.386$$

ve Z istatistiği;

$$Z = \frac{2.499 - 1.386}{0.408} = 2.728 \text{ olarak bulunur.}$$

Bulunan bu değer de kontrol hipotezinin reddedilmesini gerektirir.

7.2.6. Korelasyon Katsayıları arasındaki Farka ait Hipotez Kontrolü

İki örnekten hesaplanan korelasyon katsayıları arasındaki farkın tesadüften ileri gelip gelmediği kontrol edilmek istenebilir. Bu durumda korelasyon katsayıları arasındaki farka ait hipotez kontrolü yapılması gerekir.

Hipotez kontrolü yapılırken izlenecek adımlar sırası ile aşağıdaki gibidir:

İlk olarak araştırıcı kontrol ve karşıt hipotezlerini oluşturmalıdır.

Kontrol hipotezi:

H_0: Korelasyon katsayıları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve bu fark sıfır kabul edilebilir. Yani, $\rho_1=\rho_2$'dir.

Kaşıt hipotez araştırıcının amacı doğrultusunda 3 farklı şekilde oluşturulabilir.

1. H_1: Korelasyon katsayıları arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir ve bu fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\rho_1 \neq \rho_2$'dir.

2. H_1: Birinci örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ikinci örneğe ait korelasyon katsayısından daha büyüktür. Yani, $\rho_1>\rho_2$'dir.

3. H_1: Birinci örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı ikinci örneğe ait korelasyon katsayısından daha küçüktür. Yani, $\rho_1<\rho_2$'dir.

Örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları arası fark kadar ve daha fazla sapanların, korelasyon katsayıları arasındaki farka ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin hesaplanması için yine korelasyon katsayıları için Z_r değerleri hesaplanır veya Tablo B'den söz konusu korelasyon katsayılarına karşılık gelen Z_r değerleri bulunur.

Örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları arası fark kadar ve daha fazla sapanların, korelasyon katsayıları arası farka ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin hesaplanması için test istatistiği (Z-değeri);

$$Z = \frac{Z_{r1} - Z_{r2}}{\sqrt{\dfrac{1}{(n_1 - 3)} + \dfrac{1}{(n_2 - 3)}}}$$ şeklinde hesaplanır.

Daha önceki bölümlerde açıklandığı şekilde araştırıcı I. tip hata ihtimalini, yani α'yı belirlemelidir.

Test istatistiği hesaplandıktan ve örnekten hesaplanan korelasyon katsayıları arasındaki fark kadar ve daha fazla sapanların söz konusu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali bulunduktan sonra yine daha önceki bölümlerde açıklandığı şekilde karar verilir.

ÖRNEK 1:

Bir fakültede yapılan bir araştırmada, fakültenin birinci sınıf öğrencilerinden tamamen tesadüfen seçilen 50 kız öğrencide boy ile kilo arasındaki korelasyon katsayısı 0.60 ve yine tamamen tesadüfen seçilen 40 erkek öğrencide boy ile kilo arasındaki korelasyon katsayısı 0.45 olarak bulunmuştur. Boy ile kilo arasındaki korelasyon katsayıları bakımından iki cinsiyet arasındaki farklılığın önemli olup olmadığını kontrol ediniz.

Hipotezlerin oluşturulması;

H_0: İki cinsiyet için hesaplanan korelasyon katsayıları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve bu fark sıfır kabul edilebilir. Yani, $\rho_1=\rho_2$'dir veya $\rho_1-\rho_2=0$'dır.

H_1: İki cinsiyet için hesaplanan korelasyon katsayıları arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir ve bu fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\rho_1\neq\rho_2$'dir.

Örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları için Z_r değerleri hesaplanır (veya Tablo B'den söz konusu korelasyon katsayılarına karşılık gelen Z değerleri bulunur.).

$$Z_{r1} = 1.1513 \log \frac{(1+0.60)}{(1-0.60)} = 0.6931$$

$$Z_{r2} = 1.1513 \log \frac{(1+0.45)}{(1-0.45)} = 0.4847$$

olarak bulunur.

Örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları arası farkın, korelasyon katsayıları arası farka ait örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak için Z-değeri;

$$Z = \frac{0.6931 - 0.4847}{\sqrt{\frac{1}{(50-3)} + \frac{1}{(40-3)}}} = 0.948 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Araştırıcı I. tip hata ihtimalini, yani α'yı %5 olarak belirlemiş olsun. Karşıt hipotez, çift taraflı hipotez kontrolünü gerektirmektedir. Bu nedenle, yanılma ihtimali ortalamanın iki tarafında eşit miktarda alınır.

Hesaplanan test istatistiğinin değeri 0.948 olup, Z dağılımında %2.5'lik alanın başladığı 1.96 değerinden çok küçüktür, yani kontrol hipotezini kabul bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilemez, yani iki cinsiyet için hesaplanan korelasyon katsayıları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Yani boy ile kilo arasındaki ilişki cinsiyetlere göre değişmemektedir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta korelasyon katsayıları örnekten hesaplanmış olmasına karşın Z-kontrolü yapılmıştır. Çünkü örnek genişlikleri Z-dağılımını kullanmak için yeteri büyüklüktedir. Eğer korelasyon katsayılarının hesaplandığı örnek genişlikleri küçük ise bu durumda t-kontrolü yapılmalıdır. Bu, 8. bölümde açıklanacaktır.

7.3. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

7.2.1. numaralı bölümde ortalamaya ait hipotez kontrolü açıklanırken Örnek 1'de bir ilaç fabrikasında bir yöneticinin farklı partilerden aldığı 16 drajelik vitamin-mineral karmasında drajede B_1 vitamini ortalamasını 24.5 mg olarak hesaplamış olduğu verilmişti. Ve bu yöneticinin amacının drajelerdeki ortalama B_1 vitamini miktarının 25 mg olup olmadığını araştırmak olduğu belirtilmişti. Eğer yönetici analizlerini MINITAB paket programını kullanarak yapacak ise araştırıcının 16 drajenin her birinde bulduğu B_1 miktarını programa girmesi gerekir. Bu nedenle, söz konusu ilaç fabrikasındaki yöneticinin farklı partilerden alınan 16 drajedeki B_1 vitamini miktarları aşağıdaki gibi bulunmuş olsun.

26 22 25 23 24 24 25 23 23 24 25 25 25 25 26 26

Daha sonra araştırıcı 16 verisini C1 sütununa işlemiş olsun. B_1 vitamini miktarının ortalaması 25 mg ve standart sapması 1.2 mg olan normal bir dağılım gösterdiği bilindiğine göre araştırıcı Z-kontrolü yapacaktır. Bu nedenle aşağıdaki gibi "ZTest 25 1.2 C1" komutunu verir. Bu komut ile C1 sütununa işlenmiş olan verilerin ortalaması 25 ve standart sapması 1.2 mg olan bir normal dağılım gösteren populasyonu temsil edip etmediği kontrol edilecektir. "ZTest 25 1.2 C1" komutundan sonra ";" konarak verilen alt komut "Alternative 0" ise yapılacak kontrolün çift taraflı bir hipotez kontrolü olduğunu belirtilir. Bu komutlar verildikten sonra MINITAB aşağıdaki sonuçları verecektir.

Aşağıda MINITAB paket programının verdiği sonuçlar incelenecek olursa "populasyon ortalamasının 25 olduğu" kontrol hipotezinin "populasyon ortalamasının 25 olmadığı" karşıt hipotezine karşı test edildiği belirtilmektedir. Daha sonra ise 16 veriye ait ortalama ve standart sapma verilmiştir. Kabul edilen standart sapmanın 1.2 olduğu belirtilerek ortalamaya ait standart sapma 7.2.1. numaralı bölümde örnek çözümlenirken bulunduğu gibi 0.3 olarak verilmiştir.

```
MTB > ZTest 25 1.2 C1;
SUBC>  Alternative 0.

TEST OF MU = 25.000 VS MU N.E. 25.000
The assumed sigma = 1.20

        N    MEAN    STDEV   SE MEAN      Z    P VALUE
C1     16   24.437   1.209    0.300     -1.87   0.061
```

Z-değerinin ise -1.87 olduğu sonuçlardan görülmektedir (eğer 16 verinin ortalaması tam 24.5 olarak bulunmuş olsaydı Z-değeri -1.67'ye eşit olacaktı.) MINITAB paket programı hesaplanan Z-değerinin hesaplanan ±1.87'yi aşma ihtimalini de 0.061 olarak vermiştir. Bu durumda araştırıcı bu ihtimal %5'den büyük olduğu için kontrol hipotezini kabul eder ve 16 drajelik örnekte hesaplanan B_1 vitamini ortalamasının 25 mg olarak kabul edilebileceği kararına varır.

ÖRNEK 2:

7.2.1. numaralı bölümde bir meyve suyu fabrikasında üretilen portakal sularında ortalama C vitamini miktarının 17 mg/100 g ve varyansının 4.5 olan bir normal dağılım gösterdiği belirtilmişti. Bir araştırıcı yeni bir üretim tekniğinin portakal sularında C vitamini miktarını artırıp artırmadığını kontrol etmek için yeni üretim tekniği ile üretilen meyve sularından farklı partilerden alınan 25 portakal suyu şişesinde C vitamini miktarları aşağıdaki gibi bulunmuş olsun.

15 25 23 25 28 21 10 23 19 15 11 17 22
12 14 19 16 18 24 16 17 12 21 12 10

Yeni üretim tekniğinin C vitamini miktarını artırıp artırmadığına ait kontrolü MINITAB paket programını kullanarak yapmak isteyen araştırıcı verilerini C1 sütununa işlemiş ve gerekli komutları vermişse MINITAB çıktısı aşağıdaki gibi olacaktır. "Alternative 1." şeklinde verilen alt komut yapılacak hipotez kontrolünün tek taraflı kontrol olduğunu belirtir.

```
MTB > ZTest 17 2.1213 C1;
SUBC> Alternative 1.

TEST OF MU = 17.000 VS MU G.T. 17.000
The assumed sigma = 2.12

         N    MEAN   STDEV  SE MEAN      Z  P VALUE
C1      25  17.800   5.196    0.424   1.89    0.030
```

Yukarıdaki sonuçlarda görüldüğü gibi "popualasyon ortalamasının 17" olduğu kontrol hipotezi "populasyon ortalamasının 17'den büyük olduğu" karşıt hipotezine karşı test edilmiştir. Sonuçlar incelendiği zaman 7.2.1 numaralı bölümde bulunan sonuçlara varıldığı görülür. MINITAB çıktısı hesaplanan Z-değeri ve daha büyük Z-değerlerinin oluş ihtimalinin 0.03 olduğunu vermektedir. Bu ihtimal araştırıcının kararlaştırmış olduğu 0.05'lik I. tip hata ihtimalinden küçük olduğu için kontrol hipotezi ret edilerek yeni üretim tekniğinin portakal sularındaki C vitaminini artırdığı karşıt hipotezi kabul edilir.

ÖRNEK 3:

7.2.1. numaralı bölümde Örnek 3'ün MINITAB paket programı kullanılarak analizi için tesadüfen seçilen 16 öğrencinin bioistatistik dersinden aldıkları notlar şöyle olsun.

55 71 61 72 72 67 65 72 66 68 59 69 54 55 63 70

Bu öğrencilerin ortalaması 60 ve standart sapması 8 olan normal bir dağılım gösteren öğrenci populasyonunu temsil edip etmediğini kontrol için bu veriler C1 sütununa işlenmişse ve gerekli komutlar verilmişse MINITAB'den alınacak sonuçlar aşağıdaki gibidir.

```
MTB > ZTest 60 8 C1;
SUBC>  Alternative 0.

TEST OF MU = 60.00 VS MU N.E. 60.00
The assumed sigma = 8.00

        N     MEAN    STDEV   SE MEAN      Z   P VALUE
C1     16    64.94     6.40      2.00   2.47     0.014
```

Yukarıdaki sonuçlar incelendiği zaman ilgili bölümde bulunan sonuçlara varıldığı görülür. MINITAB paket programından alınan sonuçlarda verilen Z-değerini aşma ihtimali, araştırıcının kararlaştırdığı %5'lik I. tip hata ihtimalinden küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilir.

BÖLÜM VIII
t DAĞILIMI ve bu DAĞILIM ile İLGİLİ HİPOTEZ KONTROLLERİ

8.1. t Dağılımı

Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir normal populasyondan tamamen tesadüfen alınan ve n birey içeren örneklerden hesaplanan ortalamaların normal bir dağılım gösterdiği ve bunun ortalamaya ait örnekleme dağılımı olarak adlandırıldığı Bölüm 4.1'de verilmişti. n birey içeren örnekten hesaplanan ortalamaların ($\overline{X}$), standartlaştırılmış değerlerinin Z-dağılımı gösterdiği daha önceki bölümlerde açıklanmıştı. Fakat çoğu zaman populasyonun varyansı bilinmez. Bu sebeple de populasyon varyansı yerine örnekten tahmin edilen varyansın kullanılması gerekir. Varyansı bilinmeyen normal bir populasyondan rastgele çekilen (n) hacimli örnek ortalamalarının populasyon ortalamasından farkları kendi standart hatalarına bölündüğünde bulunan değerler Z dağılımı göstermez. Bu problem Guinness Brewing şirketinde çalışan istatistikçi W. S. Gosset tarafından çözülmüştür. Gosset, varyansı bilinmeyen normal populasyondan alınan örnekler için $\dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_{\overline{X}}}$ değerlerinin dağılımını bulmuş ve bulduğu istatistiğe Z yerine "t" demiştir. Bu istatistik örnek genişliği küçük olduğu ve populasyona ait varyans bilinmediği zaman hipotez kontrollerinde kullanılır. Çalıştığı şirket kendi adı ile yayın yapmasına izin vermediğinden Gosset dağılımını "Student" takma adı ile yayınlamıştır. Onun için bu dağılım Student'in t dağılımı olarak bilinir.

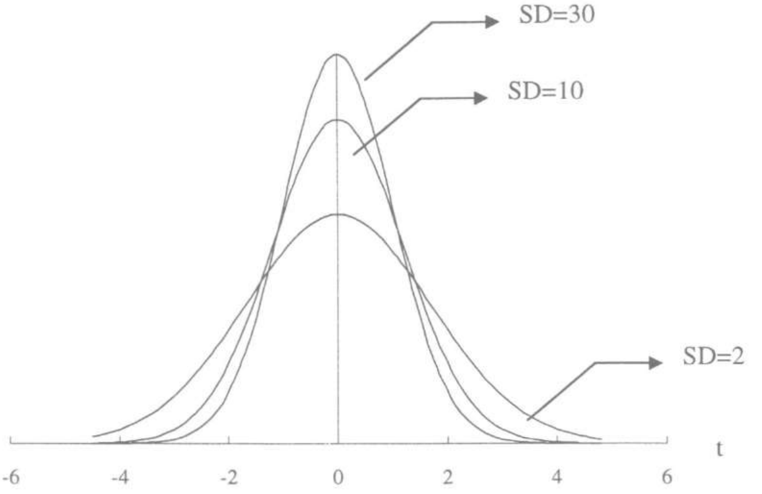
$$t = \frac{\overline{X} - \mu_X}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\frac{S_X}{\sqrt{n}}} \tag{8.1}$$

8.1 numaralı eşitlikte $S_{\overline{X}}$, 4.2 numaralı eşitlikte verildiği gibi $\frac{S_x}{\sqrt{n}}$ şeklinde hesaplanır ve ortalamaya ait örnekleme dağılımının örnekten hesaplanan standart sapmasıdır, yani kısaca ortalamanın standart hatasıdır. Burada S_x, örnekten hesaplanan (n-1) serbestlik dereceli standart sapmadır. t-dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılımdır. v serbestlik dereceli t-dağılımının yoğunluk fonksiyonu;

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v}\ \Gamma(\frac{v}{2})} (1+\frac{t^2}{v})^{-(\frac{v+1}{2})} \tag{8.2}$$

şeklindedir.

t-dağılımı Z-dağılımı gibi simetrik bir dağılım olup ortalaması sıfırdır. Yani, -t ile 0 arasındaki alan 0 ile t arasındaki alana eşittir. Z-dağılımı hesaplanırken populasyona ait standart sapma kullanıldığı için tek bir Z-dağılımı vardır. Fakat her serbestlik derecesi için bir t-dağılımı vardır. Serbestlik derecesi arttıkça t-dağılımının varyansı azalır (Şekil 8.1) ve 1'e yaklaşır. t-dağılımının varyansı (n-1)/(n-3) olarak belirtilebilir. Serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman t-dağılımı ve Z-dağılımı çakışır.



ŞEKİL 8.1. Farklı serbestlik dereceli t-dağılımları

Tablo C'de farklı serbestlik dereceleri için belirli ihtimalleri sınırlayan t-değerleri verilmiştir. Örneğin, Tablo C'de 5 serbestlik dereceli örneklerden hesaplanan t-değerlerinin %2.5'nin 2.571 değerinden büyük değere sahip olduğu görülür. %2.5'i de -2.571 değerinden küçüktür. Yine aynı tablodan 15 serbestlik dereceli örneklerden hesaplanacak t-değerlerinin %2.5'inin 2.131'den daha büyük olduğu görülür. 20 serbestlik dereceli örnekler için t-değerlerinin %2.5'i 2.086'dan, 30 serbestlik dereceli örnekler için t-değerlerinin %2.5'inin 2.042'den daha büyük t-değerine sahip olduğu Tablo C'den görülmektedir. Serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman ise bu değer 1.96 olmaktadır ki Z-dağılımında %2.5'lik alanı ayıran Z-değeri de 1.96'dır. Serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman %5'lik alanı ayıran t-değeri 1.645 (Tablo C) olup Z-değeri ile aynıdır. Görüldüğü gibi serbestlik derecesi arttıkça söz konusu ihtimale karşılık gelen t-değeri Z'ye yaklaşmaktadır.

8.2. t-Dağılımı ile ilgili Hipotez Kontrolleri

Bölüm VII'de normal populasyonlarda varyans bilindiği zaman test istatistiği olarak Z'nin kullanıldığı açıklanmıştı. Fakat 8.1 numaralı bölümde açıklandığı gibi çoğu zaman populasyon parametreleri, özellikle varyans, bilinmez. Bunun örnekten tahmin edilmesi gerekir. Bu durumda test istatistiği olarak t hesaplanır ve hipotez kontrolü için t-dağılımından yararlanılır.

t-dağılımı ile ilgili hipotez kontrolleri yapılırken izlenecek adımlar Bölüm VII'de açıklandığı gibidir: Araştırıcı hipotezlerini kurar, I.tip hata ihtimalini belirler ve Tablo C'den söz konusu serbestlik dereceli t-dağılımında yanılma ihtimaline karşılık gelen t-değerini bulur, verilerini toplar, test istatistiğini (t-değerini) hesaplar ve hangi hipotezi kabul edeceğine karar verir.

Bu bölümde, çeşitli istatistiklere ait t-dağılımı ile hipotez kontrolü örnekler ile açıklanacaktır.

8.2.1. Ortalamaya ait Hipotez Kontrolü

ÖRNEK 1:

Sağlıklı bireylerde hematokrit düzeyinin (kansızlık göstergesi) ortalaması 39 olan normal bir dağılım gösterdiği bilinmektedir. Tesadüfen seçilen 20 bireyde hematokrit düzeyi ortalaması, $\overline{X} = 36.5$ ve standart sapması $S_x = 4.5$ olarak bulunuyor. Örneği oluşturan bireylerin sağlıklı bireyler olduğu söylenebilir mi?

H_0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\overline{X}} = 39$'dur.

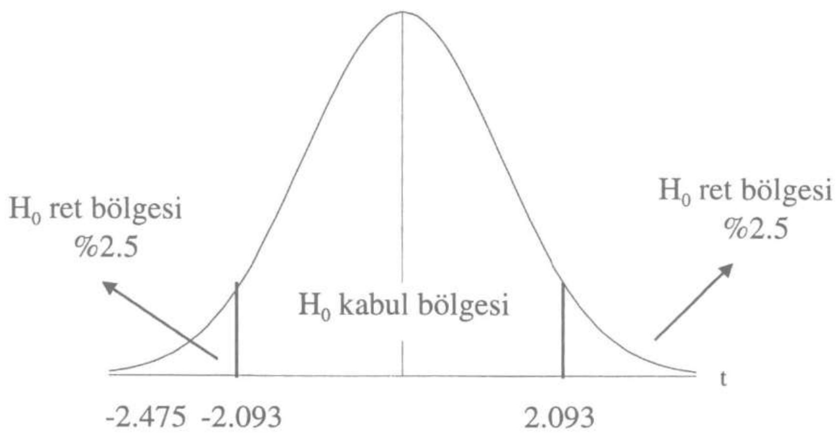
H_1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilemez. Başka bir deyişle, örnek sağlıklı bireylerin oluşturduğu populasyonu temsil etmez. Yani, $\mu_{\overline{X}} \neq 39$'dur.

Araştırıcı I.tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun.

Hipotez ile belirtilen örnekleme dağılımı ortalamaya ait örnekleme dağılımıdır. burada populasyona ait varyans bilinmediği için örnekten hesaplanan standart sapma kullanılarak t-değeri hesaplanacaktır. 4.2 numaralı eşitlik kullanılarak; $S_{\overline{X}} = \dfrac{4.5}{\sqrt{20}} \cong 1.01$'dir. ve 8.1 numaralı eşitlikten t-değeri;

$$t = \frac{36.5 - 39}{1.01} = -2.475 \text{ bulunur.}$$

Bu örnekte serbestlik derecesi S.D.=(20-1)=19'dur. 19 serbestlik dereceli t-dağılımında değerlerin (Tablo C) %2.5'i, -2.093'ten daha küçüktür. Şekil 8.2'de gösterildiği gibi -2.475 değerinin 19 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten daha azdır. Ve H_0 hipotezinin reddedilmesini gerektirir. Veya Şekil 8.2'de görüldüğü gibi hesaplanan t-değeri H_0 hipotezini ret bölgesine düşmektedir ki bu H_0 hipotezinin reddedilmesini gerektirir. Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, yani örneği oluşturan bireylerin sağlıklı bireyler olduğu söylenemez.



ŞEKİL 8.2. 19 serbestlik dereceli t-dağılımında çift taraflı kontrolde, kontrol hipotezini ret ve kabul bölgeleri

ÖRNEK 2:

Hemoglobin ortalaması 15 olarak bilinen ve normal bir dağılım gösteren populasyondan alındığı ileri sürülen 9 bireylik bir örnekte aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Örneğin gerçekten bu populasyonu temsil ettiği söylenebilir mi?

Gözlemler: 14 12 13 14 9 10 15 18 11

H_0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\bar{X}} = 15$'dir.

H_1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu örnek hemoglobin ortalaması 15'den daha küçük olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, $\mu_{\overline{X}} < 15$'dir.

Araştırıcı I.tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun.

$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{\dfrac{S_X}{\sqrt{n}}}$ eşitliği kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için örneğin ortalaması ve standart hatası hesaplanmalıdır.

$$\overline{X} = \frac{14+12+13+14+9+10+15+18+11}{9} = 12.89$$

$$S_X = \sqrt{\frac{1556 - \dfrac{(116)^2}{9}}{(9-1)}} = 2.759$$

$$S_{\overline{X}} = \frac{2.759}{\sqrt{9}} = 0.9196$$

t-değeri (8.1 numaralı eşitlik kullanılarak);

$t = \dfrac{12.89 - 15}{0.9196} = -2.2945$ olarak bulunur. Örnekte serbestlik derecesi, S.D.=9-1=8'dir. Tablo C'den 8 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik kontrol hipotezini ret bölgesinin başladığı t-değerinin -1.86 olduğu görülür. Yukarıda hesaplanan t-değeri -2.2945 olup tablodan bulunan kritik t-değerinden (-1.86) küçüktür, yani ret bölgesine düşer. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani bu örnek hemoglobin ortalaması 15 olan populasyonu temsil etmemektedir.

8.2.2. Ortalamalar arası Farka ait Hipotez Kontrolü

8.2.2.1. Bağımsız İki Grubun Karşılaştırılması

Populasyon varyansı bilindiğinde iki grup ortalamasının aynı populasyondan çekilen örneklere ait olup olmadığı 7. bölümde açıklanmıştı. Ortalamaları karşılaştırılacak iki örnek söz konusu olduğunda ve kontrol hipotezine göre çekildikleri populasyon varyansı bilinmediğinde örneklerden bu varyans tahmin edilir. Bu örneklerin aynı populasyondan çekildikleri varsayıldığına göre her örneğin varyansı populasyon varyansının (σ^2) bir tahminidir. Ortada iki tahmin olduğuna göre bunların serbestlik dereceleri ile alınan tartılı ortalaması populasyon varyansının daha iyi bir tahminini verir. Bu da 4.2 numaralı bölümde açıklanan toplanmış varyanstır. Burada dikkat edilmesi gereken örnek varyanslarının birbirinden farkı (kabul edilen olasılık düzeyinde) aynı populasyondan çekilen örneklerden hesaplanan varyanslarınki kadar olmalıdır. Diğer bir deyişle varyanslar homojen olmalıdır. Varyanslara ait homojenlik kontrolünün nasıl yapılacağı Bölüm XII'de açıklanacaktır. Burada verilen örneklerde varyansların homojenlik varsayımı yerine getirilmiştir.

ÖRNEK 1:

5 tane sağılıklı (A grubu) ve 9 tane kronik böbrek yetmezliği olan (B grubu) bireyde kan değerleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

A grubu	B grubu
38	29
42	29
41	31
40	30
39	30
	27
	33
	32
	31

Kan değerleri bakımından, sağlıklı ve kronik böbrek yetmezliği olan bireyler arasındaki farklılığın önemli olup olmadığını kontrol ediniz.

H_0: Kan değerleri bakımından sağlıklı ve hasta bireyler arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} = 0$; yani $\mu_D = 0$'dır.

H_1: Kan değerleri bakımından sağlıklı ve hasta bireyler arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} \neq 0$; yani $\mu_D \neq 0$'dır.

Burada hipotez ile belirtilen dağılım, ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımıdır. Örnek ortalamalarından hesaplanan farkın söz konusu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplamak için t-değeri bulunur. Çünkü örneklerin geldiği populasyonların varyansı bilinmemektedir;

$$t = \frac{(\mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B}) - \mu_D}{S_D} \qquad \ldots(8.3)$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlikte S_D, 4.7 numaralı eşitlikten;

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum d_A^2 + \sum d_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

t-değerinin bulunabilmesi için örneklere ait ortalamaların ve kareler toplamlarının hesaplanması gerekir.

$$\overline{X}_A = \frac{38 + 42 + 41 + 40 + 39}{5} = \frac{200}{5} = 40$$

$$\sum d_A^2 = 8010 - \frac{200^2}{5} = 10.0$$

$$\overline{X}_B = \frac{29 + 29 + 31 + 30 + 27 + 33 + 32 + 31 + 30}{9} = \frac{272}{9} = 30.2$$

$$\sum d_B^2 = 8246 - \frac{272^2}{9} = 25.56$$

$$S_D = \sqrt{\frac{10 + 25.56}{(5-1) + (9-1)} \frac{5+9}{(5)(9)}} = 0.960$$

Bu değerler hesaplandıktan sonra 8.3 numaralı eşitlik kullanılarak t-değeri;

$$t = \frac{40 - 30.2}{0.960} = 10.208 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi örneklere ait serbestlik derecelerinin toplamıdır, yani S.D.=(5-1)+(9-1)=12'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 12 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın (çünkü hipotez kontrolü çift taraflıdır) başladığı t-değeri ±2.179'dur. Bu değere göre hesaplanan t-değerinin 12 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten çok küçüktür, hatta 0.01'den de küçüktür. ($P<0.01$). Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani sağılıklı ve kronik böbrek yetmezliği olan bireyler arasında kan değerleri bakımından fark istatistik olarak önemlidir.

ÖRNEK 2:

A firmasından farklı partilerden alınan 10 vitamin drajesinde E vitamini ortalaması ve standart hatası 12.1±0.1 ve B firmasından farklı partilerden alınan 12 drajede E vitamini ortalaması ve standart hatası 13.5±0.2 olarak bulunmuştur. İki firma arasında drajelerdeki E vitamini bakımından farklılığının önemli fark olup olmadığına karar veriniz.

H_0: Drajelerdeki E vitamini miktarı bakımından iki firma arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} = 0$; yani $\mu_D = 0$'dır.

H_1: Drajelerdeki E vitamini miktarı bakımından iki firma arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} \neq 0$; yani $\mu_D \neq 0$'dır.

Burada hipotez ile belirtilen dağılım, ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımıdır ve örnek ortalamalarından hesaplanan farkın söz konusu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplamak için t-değeri yani 8.3 numaralı eşitlik kullanılır. Çünkü örneklerin geldiği populasyonların varyansı bilinmemektedir;

$t = \frac{\mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B}}{S_D}$'dir. Ve daha önce belirtildiği gibi S_D, aşağıda verildiği şekilde hesaplanır.

$$S_D = \sqrt{\frac{\Sigma d_A^2 + \Sigma d_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}}$$

Ortalamalar arası farka ait standart sapmanın hesaplanabilmesi için önce her bir örnek için kareler toplamının bulunması gerekir.

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \Rightarrow (S_{\bar{x}})^2 = (\frac{S_x}{\sqrt{n}})^2 = S_x^2 = S_{\bar{x}}^2.n$$

$$S_x^2 = \frac{\Sigma d_x^2}{(n-1)}$$ olduğuna göre;

$$\frac{\Sigma d_x^2}{(n-1)} = S_{\bar{x}}^2.n \Rightarrow \Sigma d_x^2 = S_{\bar{x}}^2.n.(n-1)\text{'dir.}$$

Benzer şekilde;

$$\Sigma d_A^2 = S_{\bar{A}}^2.n_A.(n_A - 1)$$
$$\Sigma d_B^2 = S_{\bar{B}}^2.n_B.(n_B - 1)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilen eşitlikler kullanılarak Örnekler için kareler toplamları ve t-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\Sigma d_A^2 = (0.1)^2.10.(10-1) = 0.9$$
$$\Sigma d_B^2 = (0.2)^2.12.(12-1) = 5.28$$
$$S_D = \sqrt{\frac{0.9 + 5.28}{(10-1) + (12-1)} \frac{10+12}{(10)(12)}} = 0.238$$

ve t – değeri

$$t = \frac{12.1 - 13.5}{0.238} = -5.882 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi örneklere ait serbestlik derecelerinin toplamıdır, yani S.D.=(10-1)+(12-1)=20'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 20 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın (çünkü kontrol çift taraflıdır) başladığı t-değeri 2.086'dır. Bu değere göre hesaplanan t-değerinin (-5.882), 20 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten çok küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani, iki firma arasında drajelerdeki E vitamini bakımından farklılık önemlidir.

8.2.2.2. Bağımlı İki Grubun Karşılaştırılması

Birçok araştırmada iki grup birbirine bağımlı olabilir. Bazı durumlarda birinci ve ikinci gruptaki bireyler aynı bireylerdir. Örneğin belirli sayıdaki hastadan üzerinde durulan özellik için tedavi öncesi ve tedavi sonrası ölçümler yapıldığında bu durum vardır. Aynı petri kabı içinde gelişme hızı araştırılan iki mikroorganizma türünden elde edilen sonuçlar da bağımlıdır. Bu şekilde düzenlenmiş denemelerde iki grubun karşılaştırılması için kullanılan t-testine, Eş-yapma-t-testi denir. Burada kurulan kontrol hipotezi, eşler arasındaki farkların, yani $D_i = x_{1i} - x_{2i}$ değerlerinin, ortalamasının ($\overline{D}$), ortalaması sıfır olan populasyondan çekilen örnekten hesaplandığı şeklindedir. Eşler arası farkın ortalamasının söz konusu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplamak için test istatistiği t'dir (populasyon varyansı bilinmediği için);

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{\overline{D}}}{S_{\overline{D}}} \qquad ...(8.4)$$

8.4 numaralı eşitlikte $S_{\overline{D}}$ aşağıda verildiği şekilde hesaplanır ve eşler arası farka ait dağılımın örnekten hesaplanan standart sapmasıdır veya kısaca standart hatasıdır;

$$S_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum d_D^2}{(n-1)}}}{\sqrt{n}}$$

Eşitlikte $\sum d_D^2$, eşler arası farka ait kareler toplamı olup, $\sum d_D^2 = \sum D_i^2 - \frac{(\sum D_i)^2}{n}$ şeklinde hesaplanır. Hipotez kontrolü yapılırken t-dağılımı için serbestlik derecesi ise, S.D.=(n-1)'dir.

ÖRNEK 1:

Yüksek tansiyonu olan 10 hastanın tedaviden önceki ve sonraki kan basınçları (mm) aşağıdaki gibi bulunmuştur. Yüksek tansiyonlu hastalara uygulanan tedavinin tansiyonu düşürüp düşürmediğini kontrol ediniz.

Hasta	Tedavi öncesi (x_{1i})	Tedavi sonrası (x_{2i})	$D_i=X_{1i}-X_{2i}$	D_i^2
1	155	142	13	169
2	166	160	6	36
3	184	179	5	25
4	155	150	5	25
5	178	142	36	1296
6	181	170	11	121
7	165	150	15	225
8	179	145	34	1156
9	189	170	19	361
10	148	148	0	0
		Toplam	144	3414

H_0: Hastalara uygulanan tedavi etkili olmamıştır. Tedavi öncesi ve sonrası ölçülen tansiyonlar arasındaki farklar ortalaması tesadüften ileri gelmektedir, sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\overline{D}} = 0$'dır.

H_1: Hastalara uygulanan tedavi etkili olmuştur. Tedavi öncesi ve sonrası ölçülen tansiyonlar arasındaki pozitif fark tesadüften ileri gelmemektedir, ortalaması sıfırdan büyüktür. Yani $\mu_{\overline{D}} > 0$'dır.

Test istatistiğinin hesaplanması aşağıdaki gibidir:

$$\overline{D} = \frac{13+6+5+5+36+11+15+34+19+0}{10} = \frac{144}{10} = 14.4$$

$$\Sigma d_D^2 = 3414 - \frac{(144)^2}{10} = 1340.4$$

$$S_D^2 = \frac{1340.4}{10-1} = 148.93$$

$$S_D = \sqrt{(148.93)} = 12.203$$

$$S_{\overline{D}} = \frac{12.203}{\sqrt{10}} = 3.859$$

ve t − istatitği;

$$t = \frac{14.4}{3.859} = 3.732 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi, S.D.=(10-1)=9'dur. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 9 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alanın (çünkü kontrol tek taraflıdır) başladığı t-değeri 1.834'tür. Bu değere göre hesaplanan t-değeri (3.732) ve daha fazla sapanların, 9 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten çok küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani, tedavi hastaların yüksek tansiyonunu düşürmüştür kararı verilir.

8.2.3. Korelasyon Katsayısına ait Hipotez Kontrolü

ÖRNEK 1:

18 bireylik bir örnekte X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayısı, r_{xy}=-0.453 olarak bulunmuştur. Üzerinde durulan iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenebilir mi?

H_0: İki özellik arasında hesaplanan korelasyon katsayısı tesadüften ileri gelmektedir, iki özellik arasında doğrusal bir ilişki yoktur. Örnek, korelasyon katsayısı 0 olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, ρ_{xy}=0'dır.

H_1: İki özellik arasında hesaplanan korelasyon katsayısı tesadüften ileri gelmemektedir, iki özellik arasında doğrusal bir ilişki vardır. Örnek, korelasyon katsayısı 0'dan farklı olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, ρ_{xy}≠0'dır.

Kontrol hipotezi geçerli olduğu zaman yani ρ=0 olduğunda örneklerden hesaplanan korelasyon katsayılarının yaklaşık normal dağılım gösterdiği daha önce açıklanmıştı. Bulduğumuz korelasyon katsayısının ρ=0 olan bir populasyondan geldiğini kontrol etmek için hesaplanan t-istatistiği;

$$t = \frac{r - \rho}{S_r} \qquad \text{...(8.5)}$$

dir. Eşitlikte S_r, korelasyon katsayına ait örnekleme dağılımının örnekten tahmin edilen standart sapması (korelasyon katsayısının standart hatası) olup aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$S_r = \sqrt{\frac{(1 - r^2)}{(n-2)}}$$

t-istatistiğinin hesaplanması;

$$S_r = \sqrt{\frac{(1-(-0.453)^2}{(18-2)}} = 0.2229 \text{ ve 8.5 numaralı eşitlik kullanılarak;}$$

$$t = \frac{-0.4530}{0.2229} = -2.0323 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi, S.D.=(18-2)=16'dır. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 16 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın başladığı t-değeri mutlak olarak 2.120'dir. Bu değere göre hesaplanan t-değeri (-2.0323) ve daha fazla sapanların, 16 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten büyüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilemez. Yani, üzerinde durulan iki özellik arasında doğrusal bir ilişki yoktur.

8.2.4. Regresyon Katsayısına Ait Hipotez Kontrolü

ÖRNEK:

Yapılan bir araştırmada 10 bireyin yaş ve kolesterol (mg/10ml) aşağıdaki gibi bulunmuştur.

X (Yaş)	Y(Kolesterol düzeyi)	X^2	Y^2	XY
47	17	2209	289	799
51	22	2601	484	1122
38	17	1444	289	646
64	24	4096	576	1536
54	25	2916	625	1350
32	19	1024	361	608
48	11	2304	121	528
75	33	5625	1089	2475
70	21	4900	441	1470
40	10	1600	100	400

Toplam: 519.0 199.0 28719.0 4375.0 10934.0

Kolesterolün yaşa göre regresyon katsayısını hesaplayarak, bulunan regresyon katsayısının tesadüften ileri gelip gelmediğini kontrol ediniz.

$$\sum d_x^2 = 28719 - \frac{(519)^2}{10} = 1782.9$$

$$\sum d_y^2 = 4375 - \frac{(199)^2}{10} = 414.9$$

$$\sum d_x d_y = 10934 - \frac{(519)(199)}{10} = 605.9$$

$$b_{yx} = \frac{605.9}{1782.9} = 0.3398$$

H_0: Yaş ile kolesterol düzeyleri arasında bulunan regresyon katsayısı tesadüften ileri gelmektedir. Örnek, regresyon katsayısı 0 olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, β_{yx}=0'dır.

H_1: Yaş ile kolesterol düzeyleri arasında bulunan regresyon katsayısı tesadüften ileri gelmemektedir. Örnek, regresyon katsayısı 0'dan farklı olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, $\beta_{yx} \neq 0$'dır.

Kontrol hipotezi ile belirtilen dağılım, regresyon katsayısına ait örnekleme dağılımıdır ve bu dağılıma örnekten hesaplanan regresyon katsayısının dahil olma ihtimalini bulmak için t-değeri (populasyona ait regresyon katsayısı bilinmediği için) aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$t = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{S_b} \qquad ...(8.6)$$

$$\sum d_e^2 = 414.9 - \frac{(605.9)^2}{1782.9} = 208.99$$

$$S_e^2 = \frac{208.99}{(10-2)} = 26.124$$

$$S_b = \sqrt{\frac{26.124}{1782.9}} = 0.121$$ olarak bulunur. Ve 8.6 numaralı eşitlik kullanıalarak;

$$t = \frac{0.3398}{0.121} = 2.808$$ olarak bulunur.

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi, S.D.=(10-2)=8'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 8 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın başladığı t-değeri mutlak olarak 2.306'dır. Bu değere göre hesaplanan t-değerinin (2.808), 8 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani, üzerinde durulan iki özellik arasında hesaplanan regresyon katsayısı tesadüften ileri gelmemiştir ve sıfır kabul edilemez.

8.3. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

8.2.1. numaralı bölümde Örnek 1'de bir araştırıcının hemoglobin ortalaması 15 olan normal dağılım gösteren bir populasyondan alındığı ileri sürülen 9 bireylik örnekte aşağıdaki verileri topladığı verilmişti.

14 12 13 14 9 10 15 18 11

Araştırıcı gerçekten 9 bireylik bu örneğin ortalaması 15 olan populasyonu temsil edip etmediğini kontrol etmek için verilerini MINITAB paket programında C1 sütununa işlemiş ise aşağıdaki şekilde komutunu verir. 'TTEST 15 C1' komutu C1 sütunundaki verilerin 15'ten olan farklılığının tesadüfi olup olmadığını kontrol eder. Daha sonra ";" koyarak verdiği "Alternative -1" alt komutu ile C1 sütununa kaydettiği 15 verinin "ortalamasının 15 kabul edilebileceğine" dair kontrol hipotezini "örnek ortalamasının 15'ten küçük olduğu" karşıt hipotezine karşı test edileceğini belirtir.

Bu komutlar verildikten sonra MINITAB çıktıları aşağıda verildiği gibidir.

```
MTB > TTest 15 C1;
SUBC> Alternative -1.

TEST OF MU = 15.000 VS MU L.T. 15.000

     N   MEAN    STDEV   SE MEAN    T     P VALUE
C1   9   12.889  2.759   0.920     -2.30  0.025
```

Bu verilen sonuçlar söz konusu bölümde örnek çözülürken bulunmuş olan sonuçlardır. MINITAB çıktılarından görüldüğü gibi hesaplanan t-değerinin olasılığı 0.025'tir. Araştırıcı I.tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmış ise verilen bu olasılığa göre kontrol hipotezini reddedecektir.

ÖRNEK 2:

5 tane sağlıklı (A) ve 9 tane kronik böbrek yetmezliği olan hastada (B) kan değerleri aşağıdaki gibi MINITAB paket programına işlenmiş olsun.

```
MTB > PRINT C2 C3

ROW   A   B
 1   38  29
 2   42  29
 3   41  31
 4   40  30
 5   39  27
 6       33
 7       32
 8       31
 9       30
```

A ve B grupları arasında kan değeri bakımından fark olup olmadığını araştırmak isteyen araştırıcı MINITAB paket programında "TWOSAMPLE C2 C3" komutunu kullanmalıdır. Bu komuttan sonra ";" konarak verilen "POOLED" alt komutu C2 ve C3 sütunlarında verileri işlenmiş olan grupların varyanslarının homojen olduğunu belirtir.

Bu komutlar verildiği zaman aşağıdaki çıktılarda görüldüğü gibi önce gruplara ait tanıtıcı istatistikler hesaplanır. Daha sonra %95 ihtimal ile iki grup ortalaması arası farkın güven sınırları görülmektedir (Bu konu hakkında detaylı bilgi için BÖLÜM 9'a bakınız.).

Ortalamalar arası farka ait güven sınırları verildikten sonra "A ve B gruplarının temsil ettiği populasyon ortalamalarının eşit olduğu" kontrol hipotezinin "populasyon ortalamalarının eşit olmadığı" karşıt hipotezine karşı test edildiği belirtilir.

```
MTB > TWOSAMPLE C2 C3;
SUBC> POOLED.

TWOSAMPLE T FOR A VS B
        N    MEAN    STDEV   SE MEAN
A       5    40.00    1.58     0.71
B       9    30.22    1.79     0.60

95 PCT CI FOR MU A - MU B: ( 7.69, 11.87)

TTEST MU A = MU B (VS NE): T= 10.18  P=0.0000  DF=  12

POOLED STDEV =      1.72
```

Kontrol edilen hipotezler de belirtildikten sonra hesaplanan t-değeri, serbestlik derecesi ve bu t-değerinin oluş ihtimali çıktılarda sunulmaktadır. Hesaplanan t-değerinin 12 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali 0'a çok yakın olduğu için araştırıcı kontrol hipotezini reddeder. Yani A ve B gruplarının ortalamaları arasındaki farklılığın tesadüfi olmadığı sonucuna varır.

ÖRNEK 3:

8.2.2.2 numaralı bölümde bağımlı iki grubun karşılaştırılması için 10 hastanın tedavi öncesi ve tedavi sonrası kan basınçları için verilen örneği araştırıcı MINITAB paket programını kullanarak çözmek isterse doğrudan kullanabileceği bir komut yoktur. Bunun yerine ilk olarak "tedavi sonrası" ölçülen kan basınçları ile "tedavi öncesi" ölçülen kan basınçları arasındaki farkları "LET C7=C6-C5" komutunu vererek C7 sütununa kaydeder. Daha sonra ise bu sütunlara aşağıda görüldüğü gibi "ONCE", "SONRA" ve "FARK" isimlerini vermiş olabilir.

```
MTB > PRINT C5-C7
ROW   ONCE  SONRA   FARK

  1    155    142    -13
  2    166    160     -6
  3    184    179     -5
  4    155    150     -5
  5    178    142    -36
  6    181    170    -11
  7    165    150    -15
  8    179    145    -34
  9    189    170    -19
 10    148    148      0
```

Daha sonra araştırıcının yapacağı kontrol bu farklara ait ortalamanın sıfır kabul edilip edilemeyeceğidir. Bunun için de aşağıda görüldüğü gibi "TEST 'FARK'" komutunu verir. Bu komut ile yapılacak kontrol "FARK" ismi verilen sütundaki değerlerin ortalamasının sıfır olup olmadığıdır".

Araştırıcı bu komutu verdiği zaman MINITAB paket programından alınacak sonuçlar aşağıdaki gibidir.

```
MTB > TTEST 'FARK'
TEST OF MU = 0.00 VS MU N.E. 0.00

       N    MEAN   STDEV  SE MEAN      T  P VALUE
C7    10  -14.40   12.20     3.86  -3.73   0.0047
```

Yukarıdaki sonuçlar 8.2.2.2 numaralı bölümde örnek çözülürken de bulunmuştu. MINITAB çıktısı araştırıcıya (-3.73) olarak hesaplanan t-değerinin olasılığını da (0.0047) vermektedir. Bunun için araştırıcı bu olasılık %5'ten küçük olduğu için kontrol hipotezini reddederek karşıt hipotezi, yani tedavinin etkili olduğu hipotezini kabul eder.

BÖLÜM IX
GÜVEN ARALIĞI

9.1. GİRİŞ

Örneklerden hesaplanan istatistikler, kendilerine karşılık gelen parametrelerin tahminidirler. Bunlara nokta tahminleri de denir. Örnekleme dağılımları konularında da belirtildiği gibi aynı şartlarda elde edilen başka örneklerde de aynı parametrelerin başka istatistikleri (tahminleri) hesaplanabilir. Bunların dağılımlarına örnekleme dağılımı dendiği ve bunların fonksiyonları "**örnekleme dağılımı**" başlığı altında 4. bölümde incelenmişti. Fonksiyonları tanımlanan örnekleme dağılımlarından yararlanarak bilinmeyen parametrelerin belirlenen güvenilirlik derecesiyle (genellikle 0.95 ve 0.99) içinde bulunduğu aralık belirlenebilir. Bu aralığa "**güven aralığı**" denir. Bu bölümde kolay anlaşılması için önce özel hallerden hareket edilerek güven aralıkları açıklanmıştır.

9.2. Ortalamanın Güven Aralığı

Ortalaması bilinmeyen fakat varyansı bilinen bir normal dağılım ele alınsın. Bu dağılımdan çekilen n hacimli örnek ortalamalarının da ortalaması μ, standart sapması $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ olan bir normal dağılım gösterdiği daha önce açıklanmıştı. Bu aritmetik ortalamalar $(\overline{X}_j)$ standartlaştırıldığında $\left(\frac{\overline{X}_j - \mu_x}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$ elde edilen sonuçların standart normal dağılım gösterdiği de açıklanmıştı. Ancak ele alınan özel durumda X değişkeninin standart sapması σ olan bir normal dağılım gösterdiği bilinmektedir. Standart sapmasının bilinmesine karşılık ortalaması bilinmemektedir. Bu populasyondan çekilmiş n hacimli bir örneğin ortalaması ($\overline{X}$) bilinmektedir. Standart normal dağılımda Z'lerin belirlenen bir α olasılığı ile dışında bulunduğu sınırları Z tablosu kullanılarak belirlemek mümkündür. (1-α) güvenilirlik ile de Z değerleri bulunan sınırlar içindedir. α=0.05 alındığında Z değerlerinin mutlak değer olarak eşit ve büyük olduğu değer 1.96'dır. Z-değerlerinin 1-α=0.95 güvenilirlik derecesiyle içinde bulunduğu sınırlar aşağıdaki gibidir:

$$(-1.96 < Z < 1.96)$$

Burada Z-değerlerinin yerine ortalamanın standartlaştırılmış eşitliği konabilir.

$$(-1.96 < \frac{\overline{X}_j - \mu_x}{\sigma_{\overline{X}}} < 1.96) = 0.95$$

Ele alınan duruma göre $\overline{X}$ ve $\sigma_{\overline{X}}$ bilinmektedir. Bilinmeyen ise populasyon ortalaması (μ)'dır. Yukarıdaki eşitlikte bilinmeyen populasyon ortalamasını yalnız bırakacak şekilde düzenlemeler yapılırsa, 0.95 güvenilirlik derecesi ile populasyon ortalamasının içinde bulunduğu aralık aşağıdaki gibidir:

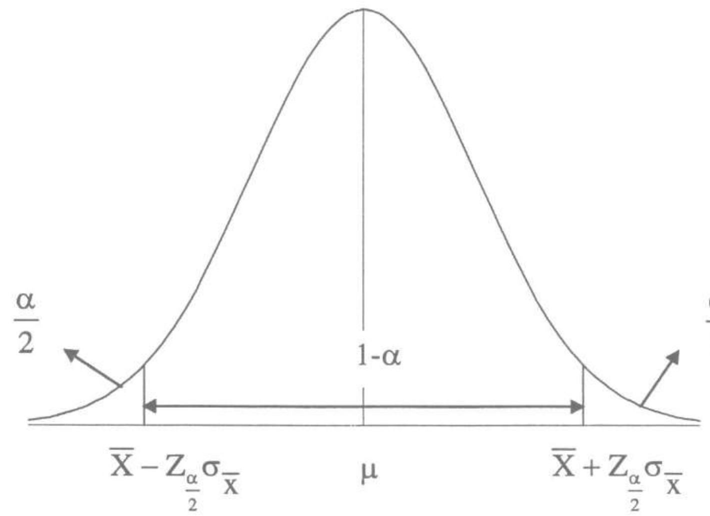
$$\overline{X} - 1.96\sigma_{\overline{X}} < \mu_x < \overline{X} + 1.96\sigma_{\overline{X}}$$

Böylece, bilinmeyen populasyon ortalamasının 1-α güvenilirlik derecesi ile içinde bulunduğu aralık belirlenmiş olur. Buna populasyon ortalamasının güven aralığı denir. Genel olarak güven aralığı 9.1 numaralı eşitlikte verildiği gibi yazılabilir.

$$(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\overline{X}} < \mu_x < \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\overline{X}}) = 1 - \alpha \qquad ...(9.1)$$

Z-değerlerinin yerine $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ yazılmasının sebebi, belirlenen α güvenilirlik derecesi ile Z-değerlerinin dışında bulunduğu sınırlar belirlendiğinde $\alpha/2$'si bu sınırların pozitif değerlisinden büyük, $\alpha/2$'si de negatif değerlisinden küçük olmalıdır.

Güven aralığı hesaplandığı zaman, bunun normal dağılımdaki sınırları ve olasılıkları Şekil 9.1'de görülmektedir.



ŞEKİL 9.1. 1-α güvenilirlikle ile ortalamanın güven aralığı

Böylece bilinmeyen populasyon ortalamasının 1-α olasılıkla içinde bulunduğu bir alt sınır $(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}})$ ve bir üst sınır $(\overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}})$ belirlenmiş olmaktadır. Alt sınır(μ_{X1}), üst sınır (μ_{X2}) ile gösterilirse güven aralığı $\mu_{x1,2} = \overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$ şeklinde de yazılabilir.

ÖRNEK 1:

120 cm^3'lük şişelere 100 cm^3 öksürük şurubu doldurulmakta olan bir ilaç fabrikasında, daha önceki ölçümlerden şişelerdeki öksürük şurubu miktarına ait standart sapmanın σ_x=1.2 cm^3 olduğu bilinmektedir. Dolumlara ara verildikten bir müddet sonra yeniden imalata başlanmıştır. Ambalajların üzerinde şişelerdeki şurup miktarının 100 cm^3 olduğu yazılmaktadır. Yeni doluma başlandıktan sonra rastgele alınan 9 şişedeki ortalama şurup miktarı $\overline{X} = 98.2$ cm^3

bulunuyor. Acaba imalat bu şekilde devam etse bütün şişelerdeki ortalama şurup miktarı (μ_x) 0.95 güvenilirlikle hangi aralıklarda bulunur?

Sorunun cevabı bilinmeyen populasyon ortalamasının güven aralığıdır. $Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ olduğuna göre güven aralığı,

$$\mu_{x1,2} = 98.2 \pm 1.96(\frac{1.2}{3})$$

$$\mu_{x1} = 98.2 - 1.96(\frac{1.2}{3}) = 97.416$$

$$\mu_{x2} = 98.2 + 1.96(\frac{1.2}{3}) = 98.984$$

Güven aralığı α=0.05 alındığında aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$97.416 < \mu_x < 98.984$$

Görüldüğü gibi güven aralığında ambalajın üzerinde yazan ve bulunması gereken 100 yoktur. Eğer imalat bu şekilde devam ederse şurupların satışına izin verilmez. İmalatı yöneten eczacı şişelere biraz daha fazla şurup dolduracak şekilde makinaları ayarlatmak durumundadır. Yukarıda yapılan aslında bir kalite kontrol işlemidir.

Populasyona ait standart sapmanın bilinmediği durumlarda (genellikle böyle durumlarla karşılaşılır) bu değer örnekten tahmin edilir. Bu durumda da ortalamanın standart hatasını hesaplamak mümkündür. Aritmetik ortalamalar da kendi standart hataları kullanılarak standartlaştırıldığı zaman elde edilen değerlerin t-dağılımı gösterdiği 8. bölümde görülmüştü. Bu durumda α seviyesi için güven aralığı Z yerine t konarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\pm t = \frac{\overline{X} - \mu_X}{S_{\overline{X}}}$$

t-dağılımı serbestlik derecesine bağlı olduğundan 10 serbestlik dereceli t-dağılımında t'lerin %95'i -2.228 ile 2.228 arasındadır. Diğer bir ifade ile;

$$P(-2.228 < t < 2.228) = 0.95\text{'tir.}$$

t'nin eşiti yerine konduğunda;

$$P(-2.228 < \frac{\overline{X} - \mu_X}{S_{\overline{X}}} < 2.228) = 0.95$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$P(\overline{X} - 2.228 S_{\overline{x}} < \mu_x < \overline{X} + 2.228 S_{\overline{x}}) = 0.95$$

Genel olarak herhangi bir serbestlik derecesi için 9.2 numaralı eşitlik yazılabilir.

$$(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\overline{x}} < \mu_x < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\overline{x}}) = (1-\alpha) \qquad ...(9.2)$$

Bilinmeyen populasyon ortalaması $1-\alpha$ güvenilirlik derecesiyle 9.2 numaralı eşitlikte verilen aralık içindedir.

Güven aralığı ise $\mu_{x1,2} = \overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\overline{x}}$ şeklinde verilebilir.

ÖRNEK 2:

Parametreleri bilinmeyen bir populasyondan tesadüfen seçilen 20 bireyde hematokrit düzeyi ortalaması, $\overline{X} = 36.5$ ve standart sapması $S_x = 4.5$ olarak bulunuyor (Bölüm 8.2.1, Örnek 1). Söz konusu populasyon ortalamasının %95 güvenilirlik derecesi ile hangi sınırlar arasında olduğunu hesaplayınız.

Örnekten hesaplanan standart sapma kullanılarak ortalamanın standart hatası, $S_{\overline{x}} = \frac{4.5}{\sqrt{20}} \cong 1.01$ olarak bulunur. Soruda %95 güvenilirlik derecesi ile ortalamanın hangi sınırlar arasında olduğu sorulduğuna göre SD=20-1=19 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın başladığı t-değeri Tablo C'den 2.093 olarak bulunur (%5'lik I. tip hata ihtimalinin yarısı ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu, diğer yarısı da ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu tarafta alınmalıdır (Şekil 9.1)). 9.1 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\pm 2.093 = \frac{36.5 - \mu_x}{1.01} \Rightarrow \mu_{x_1} = 36.5 - 2.093(1.01) = 34.86$$

$$\mu_{x_2} = 36.5 + 2.093(1.01) = 38.61$$

olarak bulunur. Yani, söz konusu populasyonun ortalaması %95 güvenilirlikle 34.86 ile 38.61 sınırları arasındadır veya %5 ihtimal ile bu sınırlar dışındadır demektir.

Populasyon için %95 güvenilirlik derecesiyle güven aralığı hesaplandıktan sonra eğer "bu örneğin ortalaması 39 olan bir populasyondan tesadüfen alınmış olduğu" kontrol hipotezi "bu örneğin ortalaması 39 olan bir populasyondan tesadüfen alınmış bir örnek değildir" karşıt hipotezine karşı kontrol edilecek olsa idi kabul edilecek hipotez karşıt hipotezdir. Çünkü %95 güvenilirlikle hesaplanan güven aralığı 34.86 ile 38.61 değerleri arasındadır ve 39'u içermez.

ÖRNEK 3:

Bir araştırmada herhangi bir bölgede rastgele toplanan 15 ilaç bitkisinde kurumaddede etkili madde oranı yüzde olarak 1.2±0.06 olarak bulunduğu bildirilmiştir. Anılan bölgede bulunan bitki populasyonunun ortalamasının %99 güvenilirlik derecesi ile bulunduğu sınırların belirlenmesi aşağıda açıklanmıştır:

Belirlenen ortalama ve standart hatası 15 bitkiden bulunduğuna göre serbestlik derecesi 14'tür. Tablo C'den $t_{\frac{\alpha}{2}}=2.977$ olarak bulunur. Buna göre güven aralığı;

$\mu_{x1,2}=1.2 \pm (2.977)(0.06)$ eşitliğinden;

$\mu_{x1}=1.021$ ve $\mu_{x2}=1.379$ olarak bulunur.

9.2 numaralı eşitlik doğrultusunda, bitki populasyonunun ortalamasının %99 güvenilirlik derecesi ile içinde ulunduğu sınırlar aşağıdaki şekilde verilir;

$$1.021 < \mu_x < 1.379$$

9.3. Ortalamalar Arası Farkın Güven Aralığı

Ortalaması ve varyansı bilinmeyen bir populasyondan rastgele n_A ve n_B birey içeren örnekler çekildiğinde bunlar arasındaki farkın standartlaştırılması ile elde edilen sonuçların da t-dağılımı gösterdiği Bölüm 8.2.2'de belirtilmişti. Eğer kontrol hipotezi yukarıdaki durum geçerli ise gözlenen ortalamalar arası farkın (D) güven aralığında sıfır değerinin de bulunması gerekir. Ortalamalar arasında gözlenen farkın $[(\overline{X}_A - \overline{X}_B)$ veya kısaca D] güven aralığı 9.3 numaralı eşitlikteki gibi verilebilir;

$$((\overline{X}_A - \overline{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)} < \mu_D < (\overline{X}_A - \overline{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\overline{X}_A - \overline{X}_B}) = (1-\alpha) \quad ...(9.3)$$

Daha kısa gösterimle,

$$(D - t_{\frac{\alpha}{2}} S_D < \mu_D < D + t_{\frac{\alpha}{2}} S_D) = (1-\alpha)$$

şeklinde de yazılabilir.

ÖRNEK 1:

Bölüm 8.2.2.1 ve Örnek 1'de;

$n_A = 5 \quad \overline{X}_A = 40 \quad \sum d_A^2 = 10.0$

$n_B = 9 \quad \overline{X}_B = 30.2 \quad \sum d_B^2 = 25.56$ olarak bulunmuştu. %95 güvenilirlik derecesiyle iki ortalama arasındaki farkların ortalamasına ait güven aralığını hesaplayınız.

Ortalamalar arası farkın örnekten hesaplanan standart sapması 4.7 numaralı eşitlikten, $S_D = \sqrt{\frac{10 + 25.56}{(5-1)+(9-1)} \frac{5+9}{5.9}} = 0.960$ olarak hesaplanır. Örnek için serbestlik derecesi, SD=(5-1)+(9-1)=12'dir. %95 güvenilirlikle güven aralığı istendiği için Tablo C'den $t_{(0.025,12)}$=2.179 olarak bulunur. 9.3 numaralı eşitlikten %95 güvenilirlikle ortalamalar arası farkın ortalamasına ait güven aralığı;

$$[(40-30.2)-2.179(0.96)] < \mu_D < [(40-30.2)+2.179(0.96)]$$

ve; $7.71 < \mu_D < 11.89 = 0.95$ olarak bulunur. Yani ortalamalar arası fark ($\mu_D = \mu_{\overline{X}_A} - \mu_{\overline{X}_B}$), %95 güvenilirlik derecesiyle 7.71 ile 11.89 değerleri arasındadır. Verilen örnekten hesaplanan ortalamalar arası farkın, ortalaması sıfır olan bir örnekleme dağılımını temsil ettiği söylenemez. Çünkü %95'lik güven aralığı sıfır değerini içermemektedir. Zaten kontrol hipotezi de reddedilmişti.

9.4. Korelasyon Katsayısının Güven Aralığı

8.2.3 numaralı bölümde $\rho=0$ olduğunda örneklerden hesaplanan korelasyon katsayısının yaklaşık normal dağıldığı belirtilmişti. Eğer $\rho \neq 0$ ise örneklerden hesaplanan korelasyon katsayılarının Z_r değerlerine standart normal dağılım uygulanabilir. Bunlar göz önünde bulundurularak örnekten hesaplanan herhangi bir korelasyon katsayısına ait parametrenin (ρ) güven aralığını hesaplamak için önce normal dağılma dönüştürülmüş (transforme edilmiş) değerler için güven aralığı bulunur. sonra bu aralıklar geriye dönüşümle korelasyon katsayısına çevrilir.

Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısının normal dağılmış değere dönüştürülmüş hali Z_r, bu örneğin alındığı populasyondaki korelasyon katsayısının (ρ) dönüştürülmüş eşiti μ_{Z_r} ise bunların standartlaştırılmış halleri Z-dağılır. Yani,

$$\pm Z = \frac{Z_r - \mu_{Z_r}}{\sigma_{Z_r}}$$

dir. Buradan güven aralıkları 9.4 numaralı eşitlikte verildiği gibi yazılabilir:

$$\mu_{Z_{r1,2}} = Z_r \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_r \qquad ...(9.4)$$

Eğer örnek genişliği 50'den küçük ise daha duyarlı olarak çalışmak için Z_r'ye dönüşümünde 7.2.5 numaralı bölümde açıklanan

Hotelling düzeltmesi yapılarak Z_r^* hesaplanabilir. Birçok geri transformasyon gerektirdiği için verilen örneklerde bu durum dikkate alınmamıştır. Böyle düzeltmeye gidilmesi bu kitabın kapsamı dışında görülmüştür.

ÖRNEK:

18 erkek öğrencinin ağırlığı ile 100 metre mesafeyi koşma süreleri arasındaki korelasyon katsayısı r_{xy}=-0.453 olarak bulunmuştur. Öğrencilerin temsil ettiği populasyondaki korelasyon katsayısının %95 güvenilirlikle içinde bulunduğu sınırlar aşağıdaki şekilde hesaplanır:

10 tabanına göre logaritma kullanarak;

$$\begin{aligned} Z_r &= 1.1513 \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \\ &= 1.1513 \log\left[\left(\frac{1+(-0.453)}{1-(-0.453)}\right)\right] \\ &= 1.1513 \log\left(\frac{0.547}{1.453}\right) \\ Z_r &= -0.4885 \end{aligned}$$

$$\sigma_{Z_r} = \frac{1}{\sqrt{(n-3)}} = \frac{1}{\sqrt{(18-3)}} = 0.2583$$

$$\mu_{Z_{r1,2}} = -0.4885 \pm (1.96)(0.2583)$$

$$\mu_{Z_{r1}} = -0.4885 - (1.96)(0.2583) = -0.9948$$

$$\mu_{Z_{r2}} = -0.4885 + (1.96)(0.2583) = 0.0178$$

Bunların r_1 ve r_2 geri transformasyonla aşağıdaki eşitlik kullanılarak bulunur.

$$r = \frac{\text{antilog}(\frac{Z_r}{1.1513}) - 1}{\text{antilog}(\frac{Z_r}{1.1513}) + 1}$$

Yukarıdaki örnekte;

$$r = \frac{\text{antilog}(\frac{-0.9948}{1.1513}) - 1}{\text{antilog}(\frac{-0.9948}{1.1513}) + 1} = -0.7593$$

$$r = \frac{\text{antilog}(\frac{0.0178}{1.1513}) - 1}{\text{antilog}(\frac{0.0178}{1.1513}) + 1} = 0.0178$$

Buna göre populasyondaki korelasyon katsayısı (ρ) %95 güvenilirlik derecesiyle -0.7593 ile 0.0178 değerleri arasındadır. Eğer Hotelling düzeltmesi yapılsa idi bu değerler -0.763 ile 0.055 olarak bulunacaktı.

Z_r değerlerinden korelasyon katsayıları Tablo B tersine kullanılarak yaklaşık olarak da bulunabilir. Yukarıdaki örnekte $\mu_{Z_{r1}} = -0.9948$ idi. Bu değer tablodan aranır, en yakın Z-değeri 0.9962'dir. Buna karşılık gelen korelasyon katsayısı 0.76'dır. İşareti (-) olduğundan r_1=-0.76'dır. $\mu_{Z_{r2}} = 0.0178$ değerine en yakın değer 0.01'dir. Buna karşılık gelen korelasyon katsayısı r_2=0.02'dir. Görüldüğü gibi bunlar hesapla bulunanlara çok yakındır.

9.5. Regresyonda Güven Aralığı

$\hat{Y}_i = a + b_{yx}X_i$ gibi doğrusal bir regresyon eşitliğinden herhangi bir X_i noktasına karşılık gelen $\hat{Y}_i$ tahminin standart hatasının $S_{\hat{Y}_i}$ eşiti 5.17 numaralı eşitlikte verilmişti. Buna göre herhangi bir X_i noktası için yapılan tahminin populasyon değerinin 1-α güvenilirlik derecesiyle içinde bulunduğu sınır, yani güven aralığı eşitlik 9.5'teki gibidir.

$$(\hat{Y}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{Y}_i} < \mu_{\hat{Y}_i} < \hat{Y}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{Y}_i}) \qquad \ldots(9.5)$$

$S_{\hat{Y}_i}$ 'nin değeri yerine konacak olursa eşitlik 9.6 elde edilir.

$$[\hat{Y}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} (S_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\Sigma d_x^2}}) < \mu_{\hat{Y}_i} < \hat{Y}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} (S_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\Sigma d_x^2}})] = 1 - \alpha \qquad \ldots(9.6)$$

Yaş halkaları genişliğinden o yılki yağış miktarı tahmin örneğinde eşitlik;

$$\hat{Y}_i = 203.1 + 77.15X_i$$

olarak bulunmuştu. x_i=3.8 mm yaş halkası genişliği için o yıldaki yağış miktarı tahmini $\hat{Y}_{3.8} = 496.31$ mm hesaplanmıştı. Bu tahminin standart hatası da $S_{\hat{Y}_{3.8}} = 16.78$ idi.

Rasat yapılmayan o yıldaki yağış miktarının %95 güvenilirlikle içinde bulunduğu sınırı belirlemek için öncelikle $t_{\frac{\alpha}{2}}$ 'nin tablodan bulunması gerekir. Ele alınan örnekte n=10 olduğu için 10-2=8 serbestlik dereceli t dağılımının $\alpha/2$=0.025 noktasındaki $t_{\frac{\alpha}{2}}$ değeri 2.306 olarak tablo C'den bulunur. Buna göre güven aralığı;

$\mu_{\hat{Y}(3.8)1,2} = 496.1 \pm (2.306)(16.78)$ olarak yazılabilir. Buradan;

$$\mu_{\hat{Y}(3.8)1} = 496.1 - (2.306)(16.78) = 457.41 \text{ mm}$$

$$\mu_{\hat{Y}(3.8)2} = 496.1 + (2.306)(16.78) = 534.79 \text{ mm}$$

olarak bulunur. 3.8 mm yaş halkasının ölçüldüğü yıldaki yağış miktarı %95 güvenilirlik derecesiyle 457.41 ile 534.79 mm arasındadır. Bu ifade kısaca ;

$$(457.41<\mu_{\hat{Y}(3.8)}<534.79)$$

olarak gösterilebilir. Bu noktadaki güven aralığını bulmak için tahmine (2.306)(16.78)=38.69 değeri bir eklenip bir çıkarılmıştır. Eklenip çıkarılan bu değer $\overline{X}$ noktasında en küçüktür. Ortalamadan uzaklaştıkça büyür, dolayısıyla aynı olasılıkta güven aralığı genişler.

$\overline{X} = 3.17$ halkası için tahmin

$\hat{Y} = 203.14 + (7.15)(3.17) = 447.17$ mm'dir.

Bu tahminin standart hatası ise

$$S_{\hat{Y}(3.17)} = 13.79\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(3.17-3.17)^2}{1.041}} = 14.46\text{'dır.}$$

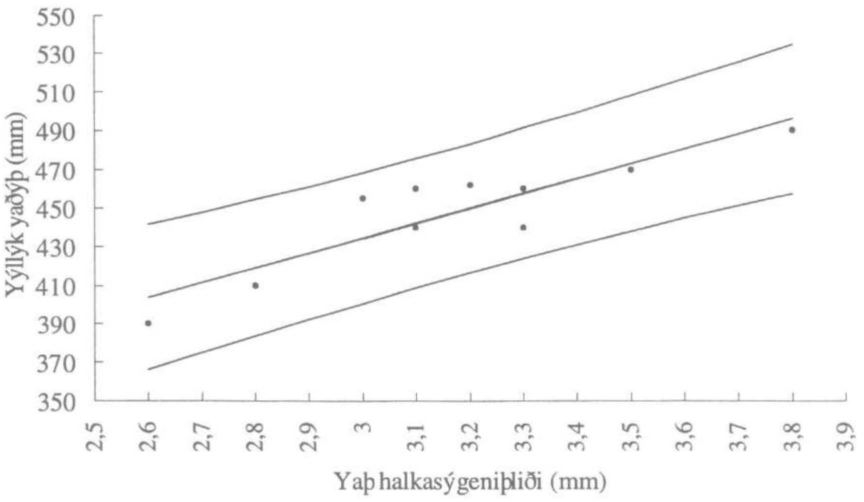
Bu noktadaki tahmin 447.71 ± 14.46 olarak gösterilir. Bu noktadaki α=0.05 için güven aralığı

$$\mu_{\hat{Y}(3.17)1,2} = 447.71 \pm (2.306)(14.46)$$

$$\mu_{\hat{Y}(3.17)1} = 447.71 - (2.306)(14.46) = 414.36 \text{ mm}$$

$$\mu_{\hat{Y}(3.17)2} = 447.71 + (2.306)(14.46) = 481.05 \text{ mm'dir.}$$

Bütün $\mu_{\hat{y}}$ noktalarını regresyon doğrusunun etrafındaki bir hiperbol temsil eder. Hiperbolün arası da regresyon doğrusunun güven aralığıdır (Şekil 9.2).



ŞEKİL 9.2. Regresyon doğrusu ve α=0.05 için güven aralığı

5. bölümdeki pik alanı ile ilgili örnekte 6.2 pik alanı için konsantrasyon $\hat{X}_{6.2} = 4.58$ olarak bulunmuştu. Bunun standart hatası da $S_{\hat{X}_{6.2}} = 0.186$ olarak hesaplanmıştı. Yani tahmin kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$4.58 \pm 0.186$$

Bu tahminin güven aralığı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mu_{\hat{X}(6.2)1,2} = 4.58 \pm (2.571)(0.186)$$

$$\mu_{\hat{X}(6.2)1} = 4.58 - (2.571)(0.186) = 4.10$$

$$\mu_{\hat{X}(6.2)2} = 4.58 + (2.571)(0.186) = 5.06$$

Y=6.2 pik alanı noktasındaki konsantrasyon %95 güvenilirlikle 4.10 ve 5.06 aralığındadır.

9.6. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

5 tane sağlıklı (A) ve 9 tane kronik böbrek yetmezliği olan hastada (B) kan değerleri aşağıdaki gibi MINITAB paket programına işlenmiş olsun.

```
MTB > PRINT C2 C3
 ROW    A   B
  1    38  29
  2    42  29
  3    41  31
  4    40  30
  5    39  27
  6        33
  7        32
  8        31
  9        30
```

8.4 numaralı bölümde belirtilen komutlar verildiği zaman MINITAB çıktısı aşağıdaki şekilde olacaktır.

```
MTB > TWOSAMPLE C2 C3;
SUBC> POOLED.

TWOSAMPLE T FOR A VS B
        N   MEAN   STDEV  SE MEAN
A       5   40.00   1.58    0.71
B       9   30.22   1.79    0.60

95 PCT CI FOR MU A - MU B: ( 7.69, 11.87)

TTEST MU A = MU B (VS NE): T= 10.18  P=0.0000  DF= 12

POOLED STDEV =     1.72
```

MINITAB çıktısına bakıldığı zaman %95 güvenilirlikle ortalamalar arası farkın güven sınırlarının 7.69 ve 11.87 olduğu görülür. Bu sonuçlar 9.3 numaralı bölümde verilen örnekteki hesaplanan sınırlardır. Orada hesaplanan sınırlar ile burada verilenler arasındaki çok küçük farklılıklar hesaplamalar sırasındaki yuvarlaklaştırmadan kaynaklanmıştır.

ÖRNEK 2:

Eğer araştırıcı 8.2.1 numaralı bölümde örnek 1'de verilen 9 bireylik örneği için hesaplanacak ortalamanın %95 güvenilirlik derecesiyle hangi sınırlar arasında olduğunu hesaplatmak isterse bu durumda "TInterval 95.0 C1" komutunu vermelidir. Bu komut verildiği zaman aşağıdaki sonuçlar alınır.

```
MTB > TInterval 95.0 C1.

      N   MEAN   STDEV SE MEAN   95.0 PERCENT C.I.
C1    9  12.889  2.759   0.920   ( 10.768, 15.010)
```

Yukarıda sonuçlarda görüldüğü gibi araştırıcıya örneğindeki birey sayısı, örneğin ortalaması, ortalamanın standart hatası ve %95'lik güven sınırları çıktıda verilecektir.

BÖLÜM X
SAPAN DEĞERLER (OUTLIERS)

Araştırma yapan herhangi bir kimse topladığı rakamları yakından incelediğinde bazılarının incelediği gruptan olup olmadığından veya doğru toplanıp toplanmadığından kuşkulanabilir. Bu gibi değerlere İngilizce'de "**OUTLIER**" denir. Bunun Türkçe karşılığı olarak "**sapan değer**" ve "**kuşkulu gözlem**" denmektedir. Her ikisi de uygun karşılıktır.

Deneme yürütülmesinde esas olanın doğru ve tarafsız rakam toplamak olduğu daha kitabın başında belirtilmişti. Ancak toplanmış rakamlar arasında bir veya birkaçından araştırıcı kuşkulanıyorsa bunları incelemeye almalıdır. Eğer veriler bir analiz sonucu elde edilmişse ve numuneleri halen elde varsa kuşkulanılan rakamlara ait analizleri tekrarlamak en doğrusudur. Yine aynı sonuçlar elde edilebilir. Ancak numunelerin numaralarının karıştığından kuşkulanabilir. Bazen toplanmış olan veriler arasından kuşkulanılanların tekrarlanma imkanı olmayabilir. Bu gibi gözlemleri dikkate almayın demek de doğru olmaz. Çünkü herkesin şüphe derecesi aynı değildir. Ayrıca araştırıcının eğilimi de kuşkulanma derecesini etkiler.

Araştırıcılar sapan değerler problemi ile çok eski tarihlerden beri ilgilenmişlerdir. Bu konu ile ilgili birçok araştırma ve teorik çalışmalar yapılmıştır. Konuyu etraflıca inceleyen kitaplar yazılmıştır.

Bütün çalışmalarda amaç, eğer kuşkulanılan gözlemin ele alınan gruba dahil olma olasılığı çok düşük ise (kabul edilen α olasılığından az ise) bu rakamı değerlendirmelerde dikkate almamaktır. Eğer ele alınan gruba dahil olma olasılığı önceden kabul edilen olasılıktan fazla ise şüphelenilen rakam değerlendirme dışı bırakılmamalıdır.

Şüphelenilen rakam birden fazla da olabilir, bu sıralanmış verilerde büyük tarafta veya her iki tarafta olabilir, veya çok değişkenli olarak ele alınan verilerde sapan değer problemi ortaya çıkabilir. Bunlar ve burada sayılmayan çok çeşitli durumları ele alan çalışmalar yapılmıştır.

Biyoistatistiğin böyle bir konusu olduğunu da hatırlatmak ve karşılaşılabilecek birkaç duruma çözüm getirmek amacı ile konu çok sınırlı olarak bu kitabın kapsamına alınmıştır.

10.1. Gözlenen Bir Grupta Sapan Değerler

Yukarıdaki paragraflardaki ifadelerden de anlaşılabileceği gibi herhangi bir rakamın sapan değer olup olmadığına karar verme işlemi bir hipotez kontrolüdür.

Eldeki veriler büyüklüklerine göre sıralandığında küçük tarafta veya büyük taraftaki bir gözlemden kuşkulanılmış ise bu değerleri kolayca test edecek iki yol vardır:

a. Kuşkulanılan gözlem X_q, ele alınan verilerin ortalaması $\overline{X}$, standart sapması S ise test değeri (T_n) 10.1 numaralı eşitlikteki gibi hesaplanır.

$$T_n = \frac{|X_q - \overline{X}|}{S} \qquad \text{...(10.1)}$$

Gözlem sayısına ve α olasılığına göre rastgele test değerleri Tablo 10.1'de verilmiştir. Eğer hesaplanan T_n değeri Tablo 10.1'de verilen $T_{n(\alpha)}$ değerinden büyük ise X_q'nun sapan değer olduğuna karar verilir. Aksi halde sapan değer değildir.

TABLO 10.1. α=0.05 ve 0.01 için T_n değerleri

n	%5	%1
3	1.15	1.15
4	1.46	1.49
5	1.67	1.75
6	1.82	1.94
7	1.94	2.10
8	2.03	2.22
9	2.11	2.32
10	2.18	2.41
12	2.29	2.55
14	2.37	2.66
15	2.41	2.71
16	2.44	2.75
18	2.50	2.82
20	2.56	2.88
30	2.74	3.10
40	2.87	3.24
50	2.96	3.34
60	3.03	3.41
100	3.21	3.60
120	3.27	3.66

ÖRNEK:

Sıraya konmuş gözlemler aşağıdaki gibi olsun.

60 65 72 75 85 87 96 115

Bu örnekte n=8, $\overline{X} = 82.125$ ve S=17.796'dır.

H_0: 115 (X_q) sapan değer değildir.
H_1: X_q sapan değerdir.

$$T_n = \frac{|(115) - 82.125|}{17.796} = 1.85$$

$T_n < T_{n(0.05)}$ veya 1.85 < 2.03 olduğu için X_q=115 sapan değer olarak kabul edilemez. Yani kontrol hipotezi kabul edilir.

b. Test birimi olarak, sıraya konmuş verilerde sapan değer olduğundan kuşkulanılan gözlem (X_q) ile ona en yakın değer (X_h) arasındaki farkın değişim genişliğine (D.G.) bölümü de (Q) alınabilir. Buna göre test birimi olan Q'nun eşiti 10.2 numaralı eşitlikte verildiği gibidir:

$$Q = \frac{|X_q - X_h|}{D.G.} \qquad ...(10.2)$$

Değişim genişliği

Kontrol hipotezi geçerli olduğunda yani X_q'nun sapan değer olmadığı durumda Q değerlerinin dağılımında %5 ve %1'nin dışında olduğu $Q_{\alpha,n}$ değerleri Tablo 10.2'de verilmiştir. Eğer hesaplanan Q değeri $Q_{\alpha,n}$ değerinden büyük ise kontrol hipotezi reddedilir. Aksi halde, yani küçük ve eşit ise kontrol hipotezi kabul edilir.

ÖRNEK:

a'da verilen örnek dikkate alınırsa, burada değişim genişliği;

D.G.=115-60=55'tir. Buna göre 10.2 numaralı eşitlikten;

$$Q = \frac{|115 - 96|}{55} = 0.345$$

olarak bulunur. Test ve karşıt hipotez (a) şıkkında olduğu gibi alınsa, $Q_{(0.05,8)}$=0.717 ve hesapla örnekten bulunan Q değeri (0.345) bundan küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilemez. Yani X_q=115 sapan değer değildir.

TABLO 10.2. α=0.05 ve 0.01 için $Q_{\alpha,n}$ değerleri

N	%5	%1
3	0.974	0.995
4	0.894	0.957
5	0.830	0.912
6	0.782	0.875
7	0.746	0.845
8	0.717	0.821
9	0.694	0.800
10	0.675	0.783
11	0.658	0.768
12	0.644	0.755
13	0.631	0.743
14	0.620	0.733
15	0.610	0.724
16	0.601	0.715
17	0.593	0.707
18	0.586	0.700
19	0.579	0.694
20	0.573	0.687
21	0.567	0.682

SORUMLU DEĞİLSİN

10.2. Doğrusal Regresyonda Sapan Değerler

Bir bağımlı ve bir bağımsız değişkenin söz konusu olduğu doğrusal regresyon modellerinde de sapan değerlerle ilgili testler söz konusudur. Ele alınan doğrusal model regresyon bölümünde açıklandığı gibi Y=a+bX şeklinde olabilir. Bazı hallerde de orijinden geçer ve model Y=bX olur. Her iki model için de test değerleri Tablo 10.3'te verilmiştir.

TABLO 10.3. α=0.05 ve 0.01 için Y=bX ve Y=a+bX modellerine ait $t'_{\alpha,n}$ değerleri

	Y=bX (1)		Y=a+bX (2)	
n	%1	%5	%1	%5
5	1.92		1.98	
6	2.07	1.93	2.17	1.98
7	2.19	2.08	2.32	2.17
8	2.28	2.20	2.44	2.32
9	2.35	2.29	2.54	2.44
10	2.42	2.37	2.62	2.55
12	2.52	2.49	2.76	2.70
14	2.61	2.58	2.86	2.82
16	2.68	2.66	2.95	2.92
18	2.73	2.72	3.02	3.00
20	2.78	2.77	3.08	3.06
25	2.89	2.88	3.21	3.19
30	2.96	2.96	3.30	3.29
35	3.03	3.02	3.37	3.36
40	3.08	3.08	3.43	3.42
45	3.13	3.12	3.48	3.47
50	3.17	3.16	3.52	3.52
60	3.23	3.23	3.60	3.59
70	3.29	3.29	3.65	3.65
80	3.33	3.33	3.70	3.70
90	3.37	3.37	3.74	3.74
100	3.41	3.41	3.78	3.78

Regresyonla ilgili çalışmalarda ele alınan modelden mutlak olarak en çok sapma gösteren gözlemlerin sapan değer olduğundan kuşkulanılır. Bunun için doğrusal regresyonda her gözlem için $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ değerlerinin hesaplanması gerekir. Bunlardan mutlak değeri en büyük olanı, regresyon modeli standart sapmasına bölünerek test birimi (eşitlik 10.3) t' hesaplanır. Yani;

$$t' = \frac{|Y_i - \hat{Y}_i|}{S_e} \qquad \text{...(10.3)}$$

Burada da hipotezler aşağıdaki gibidir:

H_0: X_q, Y_q gözlem çifti sapan değer değildir.
H_1: X_q, Y_q gözlem çifti sapan değerdir.

Kontrol hipotezinin geçerli olduğu durumlarda değişik n değerleri için kritik t' değerleri Tablo 10.3'te verilmiştir. Tablodaki, 1 numaralı sütun Y=bX modeli için, 2 numaralı sütun ise Y=a+bX modeli içindir.

ÖRNEK:

Bölüm 5'teki Örnek 3 için regresyon eşitliği $\hat{Y} = 0.16 + 1.32X$ ve S_e=0.119 olarak hesaplanmıştı. X_i değerleri regresyon eşitliğinde yerine konarak her nokta için $\hat{Y}_i$ tahminleri bulunup $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ hesaplandığında Tablo 10.4 elde edilir.

TABLO 10.4. %konsantrasyon ve pik alanları ile ilgili örnek için X_i, Y_i, $\hat{Y}_i$ ve e_i değerleri

% konsantrasyon X_i	Pik alanı Y_i	$\hat{Y}_i$	e_i
1	1.5	1.48	0.020
2	2.7	2.80	-0.100
3	4.0	4.12	-0.120
4	5.4	5.44	-0.040
5	7.2	6.76	0.440
6	8.0	8.08	-0.080
7	9.2	9.40	-0.200

Tablo 10.4'ten görüleceği gibi mutlak değeri en büyük olan e_i değeri 0.44'tür. Buna karşılık gelen X,Y gözlem çifti (5, 7.2)'dir. Bunların sapan değer olup olmadığının testi için hipotezler aşağıdaki gibidir.

H_0: 5,7.2 gözlem çifti sapan değer değildir.
H_1: 5,7.2 gözlem çifti sapan değerdir.

Test birimi olan t' 10.3 numaralı eşitlikten;

$t' = \dfrac{0.44}{0.229} = 1.9214$ olarak bulunur. Bu sonuç $\alpha=0.05$ ve $n=7$ için Tablo 10.3'te 2. sütundaki t' değeri ile karşılaştırılacaktır. Çünkü ele alınan regresyon modeli Y=a+bX şeklindedir. Buna göre $t'_{(0.05,7)} = 2.08$'dir. Hesaplanan t' sonucu 1.9214 olduğundan, yani $t' < t'_{(\alpha,n)}$ olduğundan kontrol hipotezi reddedilemez. Yani 5,7.2 gözlem çifti sapan değer değildir sonucuna varılır.

BÖLÜM XI

Kİ-KARE (χ^2) DAĞILIMI ve bu DAĞILIM ile İLGİLİ TESTLER

11.1. Ki-Kare (χ^2) Dağılımı

İstatistikte önemli diğer bir sürekli dağılım ki-kare dağılımıdır. Ki-kare değişkeni 0 ile sonsuz arasında dağılım gösteren tek taraflı bir değişkendir.

Ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılan bir populasyondan çekilen her bir X değeri için $\frac{X-\mu}{\sigma}$ şeklinde hesaplanacak r tane bağımsız Z-değerinin karelerinin toplamının gösterdiği dağılım ki-kare (χ^2) dağılımı olarak adlandırılır (eşitlik 11.1).

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + ... + Z_r^2 = \sum_{i=1}^{r} Z_i^2 \qquad ...(11.1)$$

Bu dağılımın fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\,\Gamma(\frac{r}{2})}(\chi^2)^{\frac{(r-2)}{2}}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} \qquad ...(11.2)$$

(11.2) numaralı eşitlikte, r, serbestlik derecesidir yani χ^2-değerini oluşturan bağımsız Z-değerlerinin sayısıdır.

Üzerinde durulan bir özelliğin değişik hallerini (kırmızı, beyaz, yeşil gibi) bilinen oranlarda barındıran bir populasyondan geri iadeli olarak rastgele alınan n hacimli örneklerdeki sayıları (frekansları) ile bilinen oranlara göre bulunması gereken frekanslardan 11.3 numaralı eşitlikten hesaplanan değerler de χ^2-dağılımı gösterirler. χ^2-dağılımı istatistik testlerde daha çok bu özelliğinden yararlanarak kullanılır.

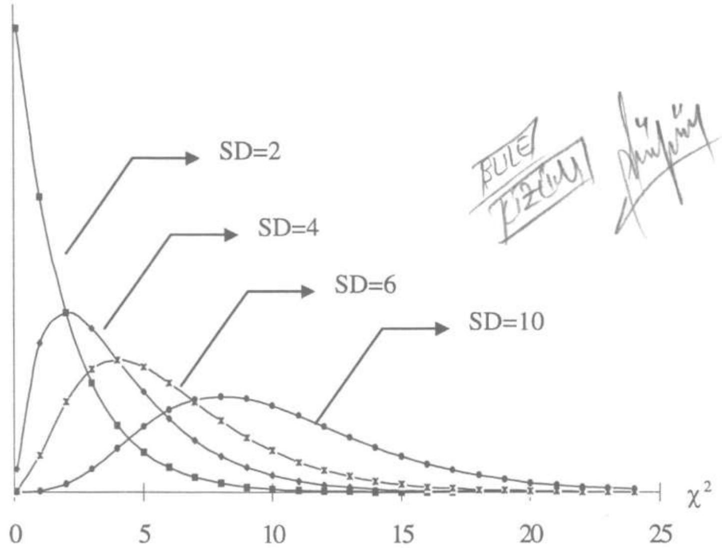
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(\text{Gšzlenenfrekans(f)} - \text{Beklenenfrekans(f}'))^2}{\text{Beklenenfrekans(f}'\text{)}} = \chi^2 \qquad ...(11.3)$$

(11.3) numaralı eşitlikte, k, sınıf sayısı, f=her bir sınıfta gözlenen frekans, f', öne sürülen hipoteze göre her sınıfta olması beklenen frekanstır. (11.3) numaralı eşitliğe göre hesaplanan ki-kare değerinin serbestlik derecesi, ki-kare değerinin hesaplanması sırasında parametre yerine kullanılan istatistik sayısına bağlı olarak (k-1), (k-2), (k-3)...vs. olabilir. Bununla ilgili örnekler 11.3 numaralı bölümde verilecektir.

(11.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan istatistiğin ki-kare dağılımı göstermesi için sınıf sayısının yeterli olması ve belirlenen hipoteze göre sınıflar için hesaplanacak beklenen frekansın 5'ten küçük olmaması gerekir. Serbestlik derecesi 1 olduğunda hesaplanan χ^2-değerlerinin teorik χ^2-değerine daha iyi yaklaşması için YATES düzeltmesi yapılarak (11.4) numaralı eşitlikten χ^2-değerinin hesaplanması gerekir.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\left|(f - f')\right| - 0.5\right)^2}{(f')} = \chi^2 \qquad ...(11.4)$$

(11.2) numaralı fonksiyondan da görülebileceği gibi χ^2-dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılımdır (Şekil 11.1).



ŞEKİL 11.1. Farklı serbestlik dereceli ki-kare dağılımları

Her serbestlik derecesi için farklı bir χ^2-dağılımı vardır. Farklı serbestlik dereceli χ^2-dağılımlarında belirli yüzdelere karşılık gelen χ^2-değerleri Tablo D'de verilmiştir.

Şekil 11.1'de görüldüğü gibi 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımının tepe değeri yoktur. χ^2-dağılımı sıfırdan başlar, sonsuza kadar devam eder ve sonsuzda χ^2-eksenine asimptot olur. Bu dağılımlarda, (SD-2) değeri tepe değeridir. χ^2-dağılımının ortalaması, serbestlik derecesine (SD'ye) ve varyansı serbestlik derecesinin iki katına (2SD'ye) eşittir.

11.2. Ki-Kare Kontrolleri

Bir örnekten elde edilen veriler belirtilen özelliklerine göre sınıflandırılabilir. Ve bir araştırıcı öne sürülen bir hipoteze göre her sınıfta olması beklenen frekans ile gözlenen frekanslar arasında uyum olup olmadığını kontrol etmek isteyebilir. Ki-kare kontrolleri 3 grup altında incelenebilir:

1. Homojenlik Kontrolleri
2. Dağılımlara Uyum Kontrolleri
3. Bağımsızlık Kontrolleri

Ki-kare kontrollerinde izlenecek adımlar Z- ve t-kontrollerinde anlatıldığı şekildedir. Araştırıcı ilk olarak hipotezlerini oluşturmalı, I. tip hata ihtimalini belirlemeli, test istatistiğini hesaplamalı ve Tablo D'den örneği için geçerli olan serbestlik dereceli ki-kare dağılımında, I. tip hata ihtimaline karşılık gelen χ^2-değeri ile hesapladığı χ^2-değerini karşılaştırarak hangi hipotezi kabul edeceğine karar vermelidir.

11.2.1. Homojenlik Kontrolleri

ÖRNEK 1:

Bir eczaneye bir hafta içinde gelen müşterilerin günlere göre dağılımı aşağıdaki gibi bulunmuştur. Söz konusu eczaneye gelen müşterilerin sayısı günlere göre değişmekte midir?

Günler	Gözlenen frekans	Beklenen frekans	$(f-f')^2/f'$
1	22	26	0.615
2	29	26	0.346
3	31	26	0.962
4	21	26	0.962
5	27	26	0.038
6	26	26	0.000
Toplam	156	156	$\chi^2=2.923$

Araştırıcı yine Bölüm 7 ve 8'de açıklandığı gibi hipotezlerini kurmalıdır.

H_0: Eczaneye bir hafta boyunca gelen müşterilerin günlere dağılımı homojendir. Günler arasında eczaneye gelen müşteri sayısı bakımından fark önemli değildir.

H_1: Eczaneye bir hafta boyunca gelen müşterilerin günlere dağılımı homojen değildir. Günler arasında eczaneye gelen müşteri sayısı bakımından fark önemlidir.

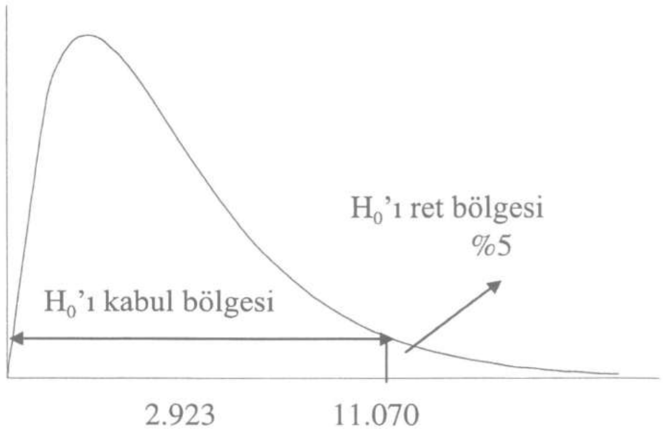
Burada hangi hipotezi kabul edeceğine karar vermek için araştırıcının χ^2-değerini 11.3 numaralı eşitliği kullanarak hesaplaması gerekir. Bunun için de haftanın her günü için beklenen müşteri sayısının bulunması lazımdır. Kontrol hipotezi ile araştırıcı müşteri sayısı bakımından haftanın günlerinin homojen olduğunu öne sürdüğüne göre, toplam müşteri sayısı (156) haftanın günlerine eşit olarak dağılmalıdır. Yani her gün için beklenen frekans 156/6=26'dır. Beklenen frekanslar bulunduktan sonra 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak χ^2-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\chi^2 = \frac{(22-26)^2}{26} + \frac{(29-26)^2}{26} + \frac{(31-26)^2}{26} + \frac{(21-26)^2}{26} + \frac{(27-26)^2}{26}$$

$$+ \frac{(26-26)^2}{26} = 0.615 + 0.346 + 0.962 + 0.962 + 0$$

$$= 2.923 \text{olarak bulnur.}$$

Araştırıcı 1. tip hata ihtimalini %5 olarak kararlaştırmış olsun. Son olarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek gerekir. Bölüm 11.1'de açıklandığı gibi ki-kare dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılımdır. Bu örnekte serbestlik derecesi, SD= 6-1 (gün sayısı-1)=5'tir. Tablo D'de, 5 serbestlik dereceli χ^2-dağılımında %5'lik alanın başladığı χ^2-değeri 11.070'tir (Şekil 11.2). Şekil 11.2'de görüldüğü gibi hesaplanan ki-kare değerinin 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma ihtimali %5'den büyüktür. Yani hesaplanan χ^2-değeri kabul bölgesindedir. Böylece kontrol hipotezi reddedilemez, yani eczaneye bir hafta boyunca gelen müşterilerin günlere dağılımı homojendir ve günler arasında eczaneye gelen hasta sayısı bakımından fark önemli değildir.



ŞEKİL 11.2. 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında H_0 hipotezini ret ve kabul bölgeleri

ÖRNEK 2:

Bir kliniğe bir yıl içinde gelen 240 hastanın aylara göre dağılımı aşağıdaki gibi bulunmuştur. Kliniğe gelen hastaların aylara göre dağılımı homojen midir?

Aylar	Gözlenen hasta sayısı (f)	Beklenen hasta sayısı (f')	$(f-f')^2/f'$
1	32	20	7.2
2	30	20	5.0
3	24	20	0.8
4	22	20	0.2
5	19	20	0.05
6	14	20	1.8
7	12	20	3.2
8	12	20	3.2
9	14	20	1.8
10	18	20	0.2
11	22	20	0.2
12	21	20	0.05
Toplam	240	240	$\chi^2=23.7$

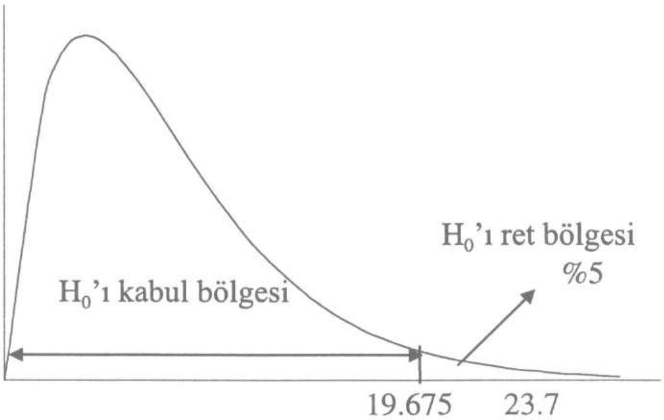
H_0: Hastaneye bir yıl boyunca gelen hastaların aylara göre dağılımı homojendir. Aylar arasında hastaneye gelen hasta sayısı bakımından fark önemli değildir.

H_1: Hastaneye bir yıl boyunca gelen hastaların aylara göre dağılımı homojen değildir. Aylar arasında hastaneye gelen hasta sayısı bakımından fark önemlidir.

Burada hangi hipotezi kabul edeceğine karar vermek için araştırıcının χ^2-değerini 11.3 numaralı eşitliği kullanarak hesaplaması gerekir. Bunun için de her ay beklenen hasta sayısının bulunması lazımdır. Kontrol hipotezi ile araştırıcı hasta sayısı bakımından ayların homojen olduğunu öne sürdüğüne göre, her ay için beklenen frekans 240/12=20'dir. Beklenen frekanslar bulunduktan sonra 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak χ^2-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\chi^2 = \frac{(32-20)^2}{20} + \frac{(30-20)^2}{20} + \ldots + \frac{(21-20)^2}{20} = 7.2 + 5.0 + \ldots + 0.05$$
$$= 23.7$$

Araştırıcı 1. tip hata ihtimalini %5 olarak kararlaştırmış olsun. Burada serbestlik derecesi, SD=12-1=11'dir. Tablo D'de, 11 serbestlik dereceli χ^2-dağılımında %5'lik alanın başladığı χ^2-değeri 19.675'tir (Şekil 11.3). Şekil 11.3'de görüldüğü gibi hesaplanan ki-kare değerinin 11 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma ihtimali %5'den küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir.



ŞEKİL 11.3. 11 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında H_0 hipotezini ret ve kabul bölgeleri

11.2.2. Uyum Kontrolleri

Bölüm III'te en çok rastlanan dağılımların binom, Poisson ve normal dağılım olduğu belirtilmişti. Araştırıcı üzerinde çalıştığı örneği oluşturan verilerin en çok rastlanan bu üç dağılımdan birine uyum gösterip göstermediğini kontrol etmek için de ki-kare dağılımını kullanabilir. Dağılımlara uyum kontrolleri Bölüm 3'te verilen örnekler için açıklanacaktır.

11.2.2.1. Binom Dağılımına Uyum Kontrolü

ÖRNEK 1:

Bir bölgeden seçilen 5 çocuklu 300 ailenin kız çocuk sayısı bakımından dağılımı aşağıdaki gibi bulunmuştur. 300 ailenin kız çocuk sayısı bakımından dağılımının $\pi=1/2$ olan binom dağılımına uygun olduğu söylenebilir mi?

Sınıflar (kız çocuk sayısı)	0	1	2	3	4	5
Aile sayısı	10	56	83	96	43	12

Örnekte gözlenen dağılımın binom dağılımına uygunluğunu kontrol etmek için beklenen frekansların bulunması gerekir. Bölüm 3.1'de açıklandığı şekilde 5 çocuktan hiçbirinin, 1'nin, 2'sinin, 3'ünün, 4'ünün ve hepsinin kız olma ihtimalleri bulunmalıdır. Bu ihtimaller binom ihtimal fonksiyonu kullanılarak veya $(p+q)^5$ binomu açılarak bulunabilir. $(p+q)^5$ binomu açıldığı zaman;

$$(\pi+(1-\pi))^5 = \pi^5+5\pi^4(1-\pi)+10\pi^3(1-\pi)^2+10\pi^2(1-\pi)^3+5\pi^4(1-\pi)+(1-\pi)^5$$

terimleri elde edilir. Birinci terim 5 çocuğun kız, 2. terim 4, 3. terim 3, 4. terim 2, 5. terim 1 ve 6. terim 0 kız çocuk ihtimalini verir. Bir aile için bulunan bu ihtimaller, örnekte 300 aile olduğu için 300 ile çarpılırsa her bir sınıf için beklenen frekanslar bulunur. Gözlenen frekanslar, olasılıklar ve beklenen frekanslar Tablo 11.1'de verilmiştir.

TABLO 11.1. Binom dağılımına uyum kontrolü ile ilgili hesaplamalar

Sınıflar	Olasılık	f	f'	$(f-f')^2/f'$
0	0.03125	10	9.375	0.0417
1	0.15625	56	46.875	1.7763
2	0.31250	83	93.750	1.2327
3	0.31250	96	93.750	0.0540
4	0.15625	43	46.875	0.3203
5	0.03125	12	9.375	0.7350
Toplam	1.00	300	300	$\chi^2=4.160$

H_0: Üzerinde çalışılan örnekte, istenen olayın ihtimali 0.5 olan bir binom dağılımına uygun dağılmaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: Üzerinde çalışılan örnekte, istenen olayın ihtimali 0.5 olan bir binom dağılımına uygun dağılmamaktadır. Örneğin bu populasyondan tesadüfen alınmış bir örnek olduğu söylenemez. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Tablo 11.1'de verildiği gibi bu örnek için χ^2-değeri 4.16 olarak bulunmuştur. Araştırıcı kontrolünü %1 seviyesinde yapmayı kararlaştırmış olsun. Bu örnekte serbestlik derecesi, bir önceki örnekten farklı olarak (sınıf sayısı-1)'dir. Çünkü bu örnekte populasyona ait olasılık (π=1/2) bilinmektedir ve sadece hesaplamalarda örnek genişliği (300) kullanılmıştır. Bunun için SD=6-1=5'tir. Tablo D'den 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %1'lik alan 15.086 değerinden başladığı bulunur. Hesaplanan χ^2-değeri (4.16), 15.086 değerinden küçüktür ve kontrol hipotezini kabul bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilemez, örneğin kız çocuk sayısı bakımından π=1/2 olan bir binom dağılımına uyum gösterdiği söylenir.

ÖRNEK 2:

Tablo 3.1'de verilen sigara içmeyen öğrencilerin gözlenen ve π=0.75 olan binom dağılımına göre beklenen sayıları verilmişti. Örneğin, üzerinde durulan olayın oluş ihtimali 0.75 olan binom dağılımına uyum gösterdiği söylenebilir mi?

<table>
<tr><th>Sigara içmeyen öğrenci sayısı</th><th colspan="2">F</th><th colspan="2">f'</th><th>(f-f')²/ f'</th></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td rowspan="2">14</td><td>0.8</td><td rowspan="2">10.2</td><td rowspan="2">1.416</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td><td>9.4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>45</td><td></td><td>42.2</td><td></td><td>0.186</td></tr>
<tr><td>3</td><td>80</td><td></td><td>84.4</td><td></td><td>0.229</td></tr>
<tr><td>4</td><td>61</td><td></td><td>63.2</td><td></td><td>0.077</td></tr>
<tr><td>Toplam</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td><td>χ^2=1.908</td></tr>
</table>

H_0: Üzerinde çalışılan örnek, π=0.75 olan bir binom dağılımına uygun dağılmaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: Üzerinde çalışılan örnek, π=0.75 olan bir binom dağılımına uygun dağılmamaktadır. Örneğin bu populasyondan tesadüfen alınmış bir örnek olduğu söylenemez. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Ki-kare değeri hesaplanırken birinci sınıf için beklenen frekans 5'ten küçük olduğu için birinci ve ikinci sınıf birleştirilmiştir. Çünkü, hatırlanacağı üzere Bölüm 11.1'de ki-kare dağılımına uyum için beklenen frekansın 5'ten büyük olması gerektiği belirtilmişti. İlk iki sınıf birleştirildiği için toplam sınıf sayısı 4 olmuştur. Bu örnek için χ^2-değeri 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\chi^2 = \frac{(14-10.2)^2}{10.2} + \frac{(45-42.2)^2}{42.2} + \frac{(80-84.4)^2}{84.4} + \frac{(61-63.2)^2}{63.2}$$
$$= 1.908 \text{ olarak bulunur.}$$

Araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun. Bu örnekte serbestlik derecesi SD=4-1=3'tür. Hesaplamalarda örnek genişliği (200) kullanılmıştır. Tablo D'den 3 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 7.815 değerinden başladığı bulunur. Hesaplanan χ^2-değeri (1.908), 7.815 değerinden küçüktür ve kabul bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi yani, örneğin π=0.75 olan bir binom dağılımına uyum gösterdiği kabul edilir.

11.2.2.2. Poisson Dağılımına Uyum Kontrolü

ÖRNEK:

300 tablet bulunan 200 ambalaj için gözlenen ve ortalaması 1.23 olan Poisson dağılımına göre beklenen frekanslar Tablo 3.4'te verilmişti. 200 ambalajlık örneğin ortalaması 1.23 olan Poisson dağılımı gösterdiği söylenebilir mi?

<table>
<tr><th>Kırık tablet sayısı</th><th colspan="2">f</th><th colspan="2">f'</th><th>$(f-f')^2/f'$</th></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="2">56</td><td colspan="2">58.46</td><td>0.104</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">77</td><td colspan="2">71.91</td><td>0.360</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">40</td><td colspan="2">44.22</td><td>0.403</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">18.13</td><td>0.193</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td rowspan="2">7</td><td>5.58</td><td rowspan="2">7.28</td><td rowspan="2">0.0108</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>1.70</td></tr>
<tr><td>Toplam</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td><td>$\chi^2=1.07$</td></tr>
</table>

H_0: Ambalajlardaki kırık tablet sayısı ortalaması 1.23 olan Poisson populasyona uygun bir dağılım göstermektedir.

H_1: Ambalaj kırık tablet sayısı ortalaması 1.23 olan Poisson populasyona uygun bir dağılım göstermemektedir.

Ki-kare değeri hesaplanırken son sınıf için beklenen frekans 5'ten küçük olduğu için son iki sınıf birleştirilmiştir. Son iki sınıf birleştirildiği için toplam sınıf sayısı 5 olmuştur. Bu örnek için χ^2-değeri 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\chi^2=\frac{(56-58.46)^2}{58.46}+\ldots+\frac{(7-7.28)^2}{7.28}=1.07 \text{ olarak bulnur.}$$

Araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun. Bu örnekte serbestlik derecesi SD=5-2=3'tür. Çünkü bu örneğin alındığı populasyon için ortalama kırık tablet sayısı örnekten tahmin edilmiştir. Ve ayrıca hesaplamalarda örnek genişliği (200) kullanılmıştır. Tablo D'den 3 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 7.815 değerinden başlamaktadır. Hesaplanan χ^2-değeri (1.0708), 7.815 değerinden küçüktür ve kabul bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi, örneğin kırık tablet sayısı 1.23 olan Poisson bir dağılıma uyum gösterdiği kabul edilir.

11.2.2.3. Normal Dağılıma Uyum Kontrolü

ÖRNEK:

Tablo 3.4'te 120 bebeğin doğum ağırlığı için gözlenen ve ortalaması 3.414 ve standart sapması 0.2152 olan normal dağılıma göre olması beklenen frekansları verilmişti. Bebeklerin doğum ağırlığının normal dağılıma uygun bir dağılım gösterdiği söylenebilir mi? $\bar{X} = 3,414$ $S_x \sim 0,2152$

Sınıflar	F		f'		$(f-f')^2/f'$
2.85-2.94	1	3	1.750	5.23	0.951
2.95-3.04	2		3.480		
3.05-3.14	9		7.440		0.327
3.15-3.24	15		13.104		0.274
3.25-3.34	19		19.164		0.001
3.35-3.44	24		21.744		0.234
3.45-3.54	19		20.808		0.157
3.55-3.64	14		15.432		0.133
3.65-3.74	8		9.660		0.285
3.75-3.84	5	9	4.680	7.416	0.338
3.85-3.94	3		1.920		
3.95-4.04	1		0.816		
Toplam	220		119.998		$\chi^2 = 2.701$

Ser. Der = 9-3=6

örnek gen

M yerine $\bar{X}$

σ S_x

H_0: Örnekteki bebeklerin doğum ağırlığı normal dağılım göstermektedir. Gözlenen ve beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: Örnekteki bebeklerin doğum ağırlığı normal dağılım göstermemektedir. Gözlenen ve beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Ki-kare değeri hesaplanırken beklenen frekans 5'ten küçük olduğu için ilk iki sınıf ve son 3 sınıf birleştirilmiştir. Birleştirme işleminde sonra χ^2-değerinin hesaplanmasında toplam sınıf sayısı 9 olmuştur. Bu örnek için χ^2-değeri 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\chi^2 = \frac{(3-5.23)^2}{5.23} + \frac{(9-7.44)^2}{7.44} + ... + \frac{(9-7.416)^2}{7.416} = 2.701 \text{ olarak bulnur.}$$

Araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun. Bu örnekte serbestlik derecesi daha önce verilen örneklerden farklı olarak (sınıf sayısı-3)'tür. Serbestlik derecesi bulunurken 3 çıkarılmasının nedeni, hesaplamalar yapılırken;

1.Örnek genişliği kullanılmıştır.

2.Populasyon ortalaması bilinmediği için örnekten hesaplanan (3.414) ortalama kullanılmıştır.

3.Populasyona ait standart sapma bilinmediği için örnekten hesaplanan (0.2152) standart sapma kullanılmıştır.

Bu sebeple de serbestlik derecesi hesaplanırken sınıf sayısından 3 çıkarılmıştır.

****Yapılan açıklamalardan anlaşılacağı üzere, eğer populasyona ait ortalama ve standart sapma biliniyorsa serbestlik derecesi hesaplanırken sınıf sayısından bir çıkarılır.*****

Söz konusu örnek için serbestlik derecesi SD=9-3=6'dır. Tablo D'den 6 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 12.592 değerinden başlamaktadır. Hesaplanan χ^2-değeri (2.701), 12.592 değerinden küçüktür ve kontrol hipotezini kabul bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi, yani bebeklerin doğum ağırlığının normal dağılım göstermekte olduğu kararına varılır.

11.2.3. Bağımsızlık Kontrolleri

Yapılan bir araştırmada toplanan veriler iki özelliğin çeşitli hallerine göre sınıflandırılarak iki yanlı tablolar oluşturulabilir. Bu gibi durumlarda amaç, üzerinde çalışılan örnekten elde edilen verilerde bir özelliğin çeşitli hallerine göre dağılımın, diğer özelliğin bütün halleri için aynı olup olmadığını kontrol etmek, yani kısaca söz konusu iki özellik arasında bir bağımlılığın olup olmadığını araştırmak olabilir. Özelliklerin iki veya daha fazla hali olabilir. Özelliklerin hal sayısına bağlı olarak oluşturulan tablolar 2x2, 2xC veya RxC tabloları olabilir (C, İngilizce Column (sütun), R, Row (sıra)). Bağımsızlık kontrollerinin nasıl yapıldığı örnekler ile açıklanacaktır.

ÖRNEK 1:

Bir hastalığı tedavi için geliştirilen bir ilacı denemek amacı ile yürütülen bir araştırma sonucunda elde edilen veriler, kullanılan ilaçlara ve hastaların iyileşip iyileşmemelerine göre sınıflandırılarak aşağıdaki şekilde verilmiştir. Hastaların iyileşip iyileşmemelerinin kullanılan ilaca göre değiştiği söylenebilir mi?

	İyileşen hastalar	İyileşemeyen hastalar	Toplam
Kullanılmakta olan ilaç	$f_{11}=40$	$f_{12}=15$	$f_{1.}=55$
Yeni geliştirilen ilaç	$f_{21}=58$	$f_{22}=7$	$f_{2.}=65$
Toplam	$f_{.1}=98$	$f_{.2}=22$	$f_{..}=120$

H_0: Hastaların iyileşip iyileşmemeleri kullanılan ilaca göre değişmemektedir. Hastalığın iyileşme durumu ile kullanılan ilaçlar birbirinden bağımsızdır. Yani $f-f'=0$'dır.

H_1: Hastaların iyileşip iyileşmemeleri kullanılan ilaca göre değişmektedir. Hastalığın iyileşme durumu ile kullanılan ilaçlar birbirine bağımlıdır. Yani $f-f' \neq 0$'dır.

Araştırıcı bu şekilde hipotezlerini oluşturduktan sonra 11.3 numaralı eşitliği kullanarak χ^2-değerini hesaplamalıdır. Bunun için önce beklenen frekansların bulunması gerekir.

Yukarıda verildiği gibi araştırmada 120 hasta bulunmaktadır. Bu hastalardan 55 tanesi kullanılmakta olan ilaç ile, 65 tanesi yeni geliştirilen ilaç ile tedavi edilmiştir. Yine verilerden görüleceği gibi 120 hastanın 98 tanesi iyileşmiş, 22 tanesi iyileşememiştir. Araştırıcının kontrol hipotezi geçerli ise iyileşme oranı kullanılan ilaca göre değişmemektedir. Yani 120 hastanın 98 tanesi iyileştiğine göre iyileşme oranı $98/120 \cong 0.8167$'dir ve bu oran ilaçlara göre değişmemektedir. İyileşme oranı 0.8167 olarak bulunduğuna göre iyileşmeme oranı $1-0.8167=0.1833$ veya iyileşmeyen hasta sayısı 22 olduğuna göre $22/120=0.1833$'tür. Bu durumda kullanılmakta olan ilaç ile tedavi edilen 55 hastanın %81.67'sinin iyileşmiş olması beklenir, yani bu örnekte tedavi edilen herhangi bir hastanın iyileşme olasılığı %81.67'dir.

Diğer taraftan hastaların 55'i kullanılmakta olan ilaç ile tedavi edilmiştir. Bunun toplam hastalara oranı $\frac{55}{120} = 0.4583$'tür. Diğer bir deyişle örnekte ele alınan herhangi bir hastanın kullanılmakta olan ilaç grubundan olma olasılığı 0.4583'tür. Kontrol hipotezine göre hastaların iyileşip iyileşmediği kullanılmakta olan ilaçlardan bağımsız olduğuna göre, herhangi bir hastanın hem kullanılmakta olan ilaç grubundan ve hem de iyileşen gruptan olma olasılığı (0.8167)(0.4583)=0.3743'tür. Çünkü bağımsız olayların birlikte olma olasılığı, bunların olasılıklarının çarpımına eşittir. Kontrol hipotezine göre kullanılmakta olan ilaç grubundan iyileşenlerin beklenen sayısı (120)(0.3743)=44.92'dir. Yani $f'_{11} = 44.92$'dir. Bu teorik frekans olasılıklar yerine frekansların oranları konarak da hesaplanabilir. Yani;

$$f'_{11} = \left(\frac{98}{120}\,\frac{55}{120}\right)120$$

kısaltma yapılarak $f'_{11} = \frac{(98)(55)}{120}120 = 44.92$ olarak bulunabilir.

Genel olarak;

$f'_{11} = \left(\frac{f_{1.}}{f_{..}}\right)\left(\frac{f_{.1}}{f_{..}}\right)f_{..}$ eşitliği $f'_{11} = \frac{f_{1.}f_{.1}}{f_{..}}$ şeklinde yazılabilir.

Burada 98, beklenen frekansın hesaplanacağı gözün bulunduğu sütunun toplamı, 55, beklenen frekansın hesaplanacağı gözün bulunduğu sıranın toplamı, 120 ise genel toplamdır. O halde beklenen frekansı daha kolay hesaplamak için 11.5 numaralı eşitlik kullanılabilir:

$$\text{Beklenen frekans} = \frac{\text{Sıra toplamı x Sütun toplamı}}{\text{Genel toplam}} \qquad ...(11.5)$$

2 x 2 tablolarında, beklenen frekanslar hesaplanırken farkında olunması gereken bir nokta şudur: Gözlerden herhangi biri için beklenen frekans hesaplandıktan sonra, diğer gözlerin beklenen frekansı satır ve sütun toplamlarından bunu çıkararak bulunabilir. Örneğin kullanılmakta olan ilaç ile tedavi edilen hastalardan 44.92 tanesinin iyileşmesi beklenmektedir. Bu ilaç ile tedavi edilen toplam hasta sayısı 55 olduğuna göre iyileşememesi beklenen hasta sayısı 55-44.92=10.08'dir. Aynı şekilde iyileşen hasta sayısı 98'dir. Bunlardan 44.92 tanesi kullanılmakta olan ilaç ile tedavi edilen ve iyileşmesi beklenen hasta sayısı olduğuna göre yeni ilaç ile tedavi ilen ve iyileşmesi beklenen hasta sayısı 98-44=53.08'dir. Yeni ilaç ile tedavi edilip iyileşememesi beklenen hasta sayısı, ya kullanılmakta olan ilaç ile tedavi edilip iyileşememesi beklenen hasta sayısını 22'den çıkararak ya da yeni ilaç ile tedavi edilip iyileşmesi beklenen hasta sayısını 65'den çıkararak bulunabilir.

Beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra χ^2-değeri 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\chi^2 = \frac{(40-44.92)^2}{44.92} + \frac{(15-10.08)^2}{10.08} + \frac{(58-53.08)^2}{53.08} + \frac{(7-11.92)^2}{11.92}$$

$$= 0.539 + 2.401 + 0.456 + 2.031 = 5.427 \text{ olarak bulnur.}$$

χ^2-değeri hesaplandıktan sonra araştırıcının yapması gereken hangi hipotezi kabul edeceğine karar vermesidir. Bunun önce örneği için serbestlik derecesini bulmalıdır. 2x2 tablolarında serbestlik derecesi 1'e eşittir. Çünkü yukarıda açıklandığı şekilde araştırıcı bir göz için beklenen frekansı hesaplamış ise buna bağlı olarak diğerlerini bulabilir. Fakat 2xC ve RxC tablolarında (2x2 tabloları dahil) serbestlik derecesini daha kolay bulmak için 11.6 numaralı eşitlik kullanılabilir.

Serbestlik derecesi = (Satır sayısı - 1)x(Sütun sayısı - 1) ...(11.6)

Örnek için 11.6 numaralı eşitlik kullanılacak olursa serbestlik derecesi yine SD=(2-1)x(2-1)=1 olarak bulunur. Tablo D'de 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 3.841 değerinden başlamaktadır. Hesaplanan χ^2-değeri (5.427), 3.841 değerinden büyüktür ve kontrol hipotezini ret bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir, yani hastaların iyileşip iyileşmemeleri kullanılan ilaca göre değişmektedir. Araştırıcı, hastalığın iyileşme durumu ile kullanılan ilaçların birbirine bağımlı olduğu kararına varır.

ÖRNEK 2:

Sigara kullanma alışkanlığının bölgelere göre değişip değişmediğini araştırmak üzere 5 bölgede uygulanan anket sonuçları aşağıdaki gibi bulunmuştur. Sigara kullanma alışkanlığı bölgeden bölgeye göre değişmekte midir?

BÖLGELER	Sigara kullanma alışkanlığı olanlar		Sigara kullanma alışkanlığı olmayanlar		Toplam
Bölge 1	$f_{11}=44$	$f'_{11}=51.13$	$f_{12}=30$	$f'_{12}=22.87$	$f_{1.}=74$
Bölge 2	$f_{21}=120$	$f'_{21}=107.1$	$f_{22}=35$	$f'_{22}=47.90$	$f_{2.}=155$
Bölge 3	$f_{31}=55$	$f'_{31}=46.98$	$f_{32}=13$	$f'_{32}=21.02$	$f_{3.}=68$
Bölge 4	$f_{41}=19$	$f'_{41}=41.46$	$f_{42}=41$	$f'_{42}=18.54$	$f_{4.}=60$
Bölge 5	$f_{51}=75$	$f'_{51}=66.33$	$f_{52}=21$	$f'_{52}=29.67$	$f_{5.}=96$
Toplam	$f_{.1}=313$	$f'_{.1}=313$	$f_{.2}=140$	$f'_{.2}=140$	453

H_0: Sigara içme alışkanlığı bölgelere göre değişmemektedir. Kişilerin sigara içme alışkanlığı oturduğu bölgelerden bağımsızdır.

H_1: Sigara içme alışkanlığı bölgelere göre değişmektedir. Kişilerin sigara içme alışkanlığı oturduğu bölgelerden bağımsız değildir.

Hipotezler kurulduktan sonra 11.3 numaralı eşitlik kullanılarak χ^2-değerinin hesaplanması gerekmektedir. χ^2-değerinin hesaplanması için gerekli olan beklenen frekanslar 11.5 numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$f'_{11} = \frac{313x74}{453} = 51.13 \qquad f'_{12} = \frac{140x74}{453} = 22.87$$

$$f'_{21} = \frac{313x155}{453} = 107.1 \qquad f'_{22} = \frac{140x155}{453} = 47.90$$

$$f'_{31} = \frac{313X68}{453} = 46.98 \qquad f'_{32} = \frac{140x68}{453} = 21.02$$

$$f'_{41} = \frac{313x60}{453} = 41.46 \qquad f'_{42} = \frac{140x60}{453} = 18.54$$

$$f'_{51} = \frac{313x96}{453} = 66.33 \qquad f'_{52} = \frac{140x96}{453} = 29.67$$

Beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra χ^2-değeri;

$$\chi^2 = \frac{(44-51.13)^2}{51.13} + \frac{(30-22.87)^2}{22.87} + ... + \frac{(21-29.67)^2}{29.67} = 55.716$$

olarak bulunur.

Örnek için serbestlik derecesi 11.6 numaralı eşitlik kullanılarak, SD=(5-1)x(2-1)=4 olarak bulunur. Bunun anlamı, eğer araştırıcı 5x2 tablosunda 10 gözden farklı sıralarda olan 4'üne ait beklenen frekansları bulmuş ise yukarıda verildiği gibi her göz için ayrı ayrı beklenen frekansları bulmak yerine 4 göz için hesaplanan beklenen frekansları satır ve sütun toplamlarından çıkararak diğer gözler için beklenen frekansları bulabilir. Tablo D'de 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 9.488 değerinden başlamaktadır. Hesaplanan χ^2-değeri (55.716), 9.488 değerinden büyüktür ve ret bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir, yani sigara içme alışkanlığı bölgelere göre değişmektedir. Kişilerin sigara içme alışkanlığı oturduğu bölgelerden bağımsız değildir. Anket sonucunda elde edilen veriler incelenecek olursa, kontrol hipotezinin doğru olması durumunda 4. bölgeden ankete katılan 60 kişiden 41.46 kişinin sigara içmesi beklenirken 19 kişinin sigara içme alışkanlığı olduğu gözlenmiştir. Aynı şekilde bu bölgede 60 kişiden 18.54'ünün sigara içmemesi beklenirken anket sonucunda sigara içme alışkanlığı olmayan 41 kişi olduğu gözlenmiştir. Kontrol hipotezinin reddedilmesine sebep bu gibi farklılıklardır.

11.2.3.1. Bağımlılık (Contingency) Katsayısı

İki yanlı tablolarda χ^2-kontrolü yapılarak H_0 hipotezi reddedilmiş ise üzerinde durulan iki özellik bağımlı demektir. İki yanlı tablolarda bağımlılığın derecesini belirtmek için en yaygın olarak kullanılan Pearson'un "**contingency**" katsayısıdır. Kısaca CC (coefficient of contingency) olarak gösterilir ve 11.7 numaralı eşitlikte verildiği gibi hesaplanır.

$$CC = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} \qquad \ldots(11.7)$$

2 numaralı örnekte hesaplanan χ^2-değerine göre sigara içme alışkanlığının bölgelere göre değiştiğine, yani kişilerin sigara içme alışkanlığı ile oturduğu bölgelerin bağımlı olduğuna karar verilmişti. Bu örnek için iki özellik arasındaki bağımlılığın derecesi;

$$CC = \sqrt{\frac{55.716}{453+55.716}} = 0.331,$$ yani %33.1 olarak bulunur.

Sigara içme alışkanlığı ile oturulan bölge arasında %33.1'lik bir bağımlılık vardır denir.

Contingency katsayısı sadece iki özellik arasındaki bağımlılığın derecesini verir. Fakat bu bağımlılığın yönü hakkında bir bilgi vermez. Üzerinde durulan iki özellik tam bağımlı olsa bile bu katsayısı, 11.7 numaralı eşitlikten görülebileceği gibi, 1 değerine ulaşmaz. Örneğin, 100 bireylik bir örnekten toplanan veriler 2'şer hali olan "a" ve "b" gibi iki özelliğe göre aşağıdaki gibi sınıflandırılmış olsun.

	B1	B2	Toplam
A1	f_1=0	f_3=50	50
A2	f_2=50	f_4=0	50
Toplam	50	50	100

Bu verilerde bir özelliğin çeşitli hallerine göre dağılım, diğer özelliğin hallerine tamamen bağımlıdır. Her göz için beklenen frekans 25 ve bulunacak χ^2-değeri 100'dür.

Bu örnek için contingency katsayısı;

$CC = \sqrt{\frac{100}{100+100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707$ olarak bulunur. Bu değer, 2x2 tablolarında iki özellik tam olarak bağımlı ise bulunacak maksimum değerdir. Bunun için de hesaplanan contingency katsayısının, RxC tablolarında contingency katsayısının alabileceği en büyük değere göre düzeltilmesi gerekir. 2x2 tablolarında contingency katsayısının alabileceği maksimum değer belirtildiği gibi;

$$CC_{max} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707 \text{ 'dir.}$$

Bu değer hesaplandıktan sonra CC, maksimum contingency katsayısına bölünerek düzeltilmiş CC hesaplanır.

RxC tablolarında contingency katsayısının alabileceği en büyük değer ise 11.8 numaralı eşitlikte verildiği gibi hesaplanır.

$$CC_{max} = \sqrt{\frac{R-1}{R}} \quad \text{eðer } R < C \text{ ise}$$

$$CC_{max} = \sqrt{\frac{C-1}{C}} \quad \text{eðer } C < R \text{ ise} \qquad \ldots(11.8)$$

CC_{max} hesaplandıktan sonra $CC_{düz.}=CC/CC_{max}$ şeklinde hesaplanır.

İkinci örnek için CC=0.331 olarak bulunmuştu. Örnekteki 5x2 tablosu için hesaplanacak en büyük değer;

$$CC_{max} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707 \text{ 'dir.}$$

Bu durumda $CC_{düz.}$=0.331/0.707=0.468 olarak bulunur.

Birçok kitapta RxC tablolarında satır sayısı sütun sayısına eşit olmadığı zaman, küçük olanı kullanmak yerine her ikisine göre maksimum CC hesaplanmakta, bunların ortalaması CC_{max} olarak kullanılmaktadır. Yani, yukarıda verilen örnek için;

Satır sayısına göre; $CC_{max} = \sqrt{\frac{5-1}{5}} = 0.894$

Sütun sayısına göre; $CC_{max} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = 0.707$

Düzeltilmiş CC'nin hesaplanması için CC_{max};

CC_{max}=(0.894+0.707)/2=0.801 olarak bulunur.

Buna göre düzeltilmiş CC ise $CC_{düz.}$=0.331/0.801=0.413 olarak hesaplanır.

11.3. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1.

Bağımsızlık kontrollerinde Örnek 1'de, yeni geliştirilen bir ilacı denemek amacı ile yürütülen bir araştırma sonucunda elde edilen verilerin analizi açıklanmıştı. Bu örneğin MINITAB paket programı kullanılarak çözümlenmesi ise aşağıdaki gibidir.

Araştırıcı ilk olarak verilerini C1 ve C2 sütunlarına işler ve "IYILESEN" ve "IYILESME" olarak sütunları adlandırabilir. PRINT komutu kullanılarak işlenen veriler aşağıdaki gibi görüntülenir. 1. satır kullanılmakta olan ilaç ile, 2. satır ise yeni geliştirilen ilaç ile tedavi edilen hastalardır.

MTB > PRINT C1 C2

ROW	IYILESEN	IYILESME
1	40	15
2	58	7

Veriler C1 ve C2 sütununa işlendikten sonra ki-kare kontrolünün yapılması için kullanılacak komut CHISQUARE'dir. Veya MINITAB paket programından bir komutun ilk dört harfini vermek yeterli olduğu için "CHIS" komutu verilir. Komut verildikten sonra ise aşağıda görüldüğü gibi verilerin işlendiği sütun adları belirtilir. Aşağıdaki gibi komut verildiğinde MINITAB paket programı her göz için beklenen frekansları, $(f-f')^2/ f'$ değerlerini, ki-kare test değerini ve serbestlik derecesini verir. Araştırıcı Tablo D'yi kullanarak hangi hipotezi kabul edeceğine daha önce açıklandığı şekilde karar verir.

```
MTB > CHIS C1 C2

Expected counts are printed below observed counts

    IYILESEN  IYILESME     Total
 1      40        15          55
     44.92     10.08

 2      58         7          65
     53.08     11.92

Total   98        22         120

ChiSq =  0.538 + 2.397 +
         0.455 + 2.029 = 5.420
df = 1
```

ÖRNEK 2.

Bağımsızlık kontrollerinde Örnek 2'de verilen sigara kullanma alışkanlığının bölgelere göre değişip değişmediğinin araştırıldığı anket sonuçlarının MINITAB paket programı kullanılarak değerlendirilmesi:

PRINT komutu ile MINITAB paket programına işlenen veriler aşağıdaki gibidir. Sütunlar sigara kullanan ve kullanmayan kişiler, satırlar ise bölgelerdir.

```
MTB > PRINT C1 C2

 ROW  KULLANAN  KULLANMA

   1       44        30
   2      120        35
   3       55        13
   4       19        41
   5       75        21
```

MTB > CHIS C1 C2

Expected counts are printed below observed counts

	KULLANAN	KULLANMA	Total
1	44	30	74
	51.13	22.87	
2	120	35	155
	107.10	47.90	
3	55	13	68
	46.98	21.02	
4	19	41	60
	41.46	18.54	
5	75	21	96
	66.33	29.67	
Total	313	140	453

```
ChiSq =  0.994 +  2.223 +
         1.555 +  3.475 +
         1.367 +  3.057 +
        12.165 + 27.197 +
         1.133 +  2.533 = 55.700
df = 4
```

Sonuçları alan araştırıcı en önemli farklılığın 4. bölgeden kaynaklandığını görecektir.

BÖLÜM XII

F-DAĞILIMI ve VARYANS ANALİZİ TEKNİĞİ

12.1. GİRİŞ

7. ve 8. bölümlerde iki grup ortalaması arasındaki farklılığın tesadüfi (rastgele) olup olmadığına Z- veya t-kontrolleri yapılarak nasıl karar verileceği açıklanmıştı. Fakat birçok araştırmada incelenen özellik üzerine etkisi olan ikiden fazla faktör (muamele) dikkate alınabilir. Bu gibi durumlarda araştırıcının eğilimi denemede dikkate alınan muameleleri ikişer ikişer t-kontrolü yaparak karşılaştırmak olabilir. Eğer kurulan bir denemede araştırılan özellik üzerine etkisi olan 5 muamele dikkate alınmışsa ve araştırıcı bu muameleler arasında söz konusu özelliğe etki bakımından fark olup olmadığına t-kontrolü yaparak karar vermek düşüncesinde ise bu durumda araştırıcının yapacağı karşılaştırma sayısı, 5'in 2'li kombinasyonlarının sayısı kadardır. Yani, $C(5,2)=\dfrac{5!}{(5-2)!2!}=10$ 'dur.

Bu sayıda karşılaştırma yapmak hem zaman hem de bilgi kaybıdır. Çünkü, önceki bölümlerden hatırlanacağı gibi, her karşılaştırmada araştırıcı önceden belirlediği bir I. tip hata olasılığı kadar hata yapacaktır. Kontrol hipotezi geçerli olduğu halde yanlış karar verme olasılığı kabul edilen α (0.05 veya 0.01) kadardır. Bu durum sadece iki grup karşılaştırılırsa geçerlidir. Karşılaştırılacak grup sayısı 2'den fazla ise ve bunlar ikişer ikişer t veya Z kontrolü ile karşılaştırılırsa I. tip hata olasılığı grup sayısına bağlı olarak artar. Bu durumda araştırıcının "**Varyans Analizi**" tekniğini kullanarak denemesinde dikkate aldığı muameleler arasında, incelenen özellik üzerine etki bakımından fark olup olmadığını araştırması gerekir.

Varyans analizi tekniğine geçilmeden önce bir denemenin kurulması sırasında dikkate edilmesi gereken noktalar, varyans analizi tekniğinde karar vermek için kullanılan F-dağılımı ve varyans analizi ile varılan kararların güvenilir olması için elde edilen verilerin sahip olması gereken varsayımlar (varyans analizinin ön şartları) hakkında kısaca bilgi verilecektir. Ayrıca denemede dikkate alınan gruplardan hangileri arasındaki farklılığın önemli olduğunu kontrol etmek için yaygın olarak kullanılan çoklu karşılaştırma yöntemleri örnekler verilerek açıklanacaktır.

12.2. F-Dağılımı

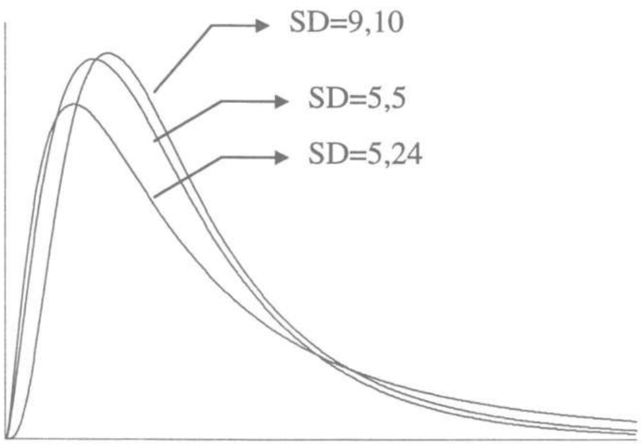
İstatistikte önemli diğer sürekli bir dağılım da F-dağılımıdır. Aynı normal populasyondan çekilen veya aynı varyanslı normal populasyonlardan çekildiği varsayılan iki örnekten hesaplanan varyansların birbirine oranının (eşitlik 12.1) 1'e eşit olması beklenir.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad ...(12.1)$$

Fakat bu her zaman gerçekleşmez ve bir dağılım gösterir. Bu oranların dağılımı F-dağılımı olarak bilinir. Sıfır ile $+\infty$ arasında değişim gösteren bir dağılımdır ve Şekil 12.1'de görüldüğü gibi bir dağılım gösterir. 12.1 numaralı eşitlikte görüldüğü gibi, F-değeri örneklerden hesaplanan varyansların birbirine oranı olduğu için, F-dağılımı iki serbestlik derecesine bağlı bir dağılımdır. F-dağılımı 12.2 numaralı eşitlikte verilen yoğunluk fonksiyonu ile belirlenir.

$$f(F) = \frac{\Gamma(\frac{r_1 + r_2}{2})}{\Gamma(\frac{r_1}{2})\Gamma(\frac{r_2}{2})} F^{(\frac{r_1}{2}-1)} (1 + \frac{r_1 F}{r_2})^{-(\frac{r_1+r_2}{2})} \qquad ...(12.2)$$

12.2 numaralı eşitlikte r_1 ve r_2 serbestlik dereceleridir. Bu serbestlik derecelerine bağlı olarak farklı F-dağılımları vardır. Tablo E ve F'de, farklı serbestlik dereceli F-dağılımlarında %5 ve %1'lik alanları ayıran F-değerleri verilmiştir.



ŞEKİL 12.1. Farklı serbestlik dereceli F-dağılımları

İki örneğin varyansları bilindiği zaman, F-değerini bulmak için örnek varyanslarından büyük olanı küçük olana bölünür. F-dağılımı, daha sonraki bölümlerde açıklanacağı gibi, varyans analizinde ve iki örnek varyansının homojenlik kontrolünde kullanılır.

12.3. Deneme Tertiplenmesi Sırasında Dikkat Edilecek Noktalar

Bir denemenin tertiplenmesi sırasında araştırıcının dikkat etmesi gereken noktalar bir örnek ile açıklanacaktır.

ÖRNEK:

Bir araştırmada A, B ve C gibi 3 değişik ilaç arasında serum kolesterolünü düşürme açısından önemli bir fark bulunup bulunmadığı araştırılıyor olsun. Böyle bir deneme tertiplenirken belirli sayıda bireye (deneme hayvanına) A ilacı, belirli sayıda bireye B ilacı ve belirli bir sayıda bireye C ilacı verilir. Burada A, B ve C, serum kolesterolü üzerine etkisi olan muamele gruplarıdır. Aynı ilaç ile tedavi edilen, yani aynı muameleye tabi tutulan birey sayısına da "**TEKERRÜR (replication)**" denir. Bireylerin serum kolesterolü düzeyi ise araştırılan özelliktir. Burada belirtilmesi gereken nokta, araştırıcının her muamele grubunda eşit sayıda tekerrür bulundurması zorunda olmadığıdır. Eğer denemede dikkate alınan bütün muamele gruplarında eşit sayıda (n tane) deney ünitesi varsa, kısaca deneme n tekerrürlü kurulmuştur denir. Fakat denemede dikkate alınan muamele gruplarında eşit sayıda deney ünitesi olmayabilir.

Böyle bir deneme kurulurken elde edilen sonuçların güvenilirliği bakımından, muamele gruplarındaki bireylerin benzer olması gerekir. Yani, eğer üzerinde durulan özellik cinsiyetten etkileniyorsa tüm bireyler aynı cinsiyetten, yaştan etkileniyorsa tüm bireyler aynı yaştan, aynı yaşam seviyesinden bireyler olmalıdır. Denemeye alınan bireylere, yani denemede dikkate alınan muamelelerin uygulandığı ünitelere "**deney ünitesi**" denir. Deney ünitelerinin bir örnekliği (homojenliği, benzerliği) elde edilecek sonuçların güvenilirliğini artırır.

Araştırıcı denemesini kurarken ne kadar homojen deneme materyali kullanırsa kullansın kontrol edilemeyen özellikler bakımından bireyler arasında farklılık olacaktır. Bu sebeple aynı muameleye tabi tutulan bireylerden elde edilecek veriler arasında tesadüften ileri gelen farklılıklar olacaktır. Bu farklılıklara "**deneysel hata**" denir. Deney üniteleri kontrol edilebilir özellikler bakımından ne kadar homojen ise deneysel hata (tekerrürler arası fark) o kadar az olacaktır. Deneysel hatayı azaltmanın diğer bir yolu da tekerrür sayısını artırmaktır. Tekerrür sayısı artırılırken araştırıcı ünitelerinin homojenliğinin bozulmamasına dikkat etmelidir.

Araştırıcının dikkate etmesi gereken bir diğer nokta muamelelerin bireylere tamamen tesadüfi olarak uygulanmasıdır. Yani araştırıcı ilaçları denemeye aldığı bireylere tamamen tesadüfi olarak dağıtmalıdır. Muamelelerin deney ünitelerine tesadüfi olarak dağıtılması ya kur'a yolu ile veya tesadüf sayıları tablosu kullanılarak yapılır. Kur'a yolu ile dağıtım yapılırken araştırıcı deney ünitelerini numaralandırır. Bu numaraları kağıt üzerine yazarak karıştırır ve bunlardan hangisine hangi muamele uygulanacağını kur'a yolu ile belirler. Tesadüf sayıları kullanılarak tesadüfi dağıtımın nasıl yapılacağı bu kitabın kapsamı içine alınmamıştır.

Elde edilen sonuçların güvenirliliği için diğer çok önemli olan bir nokta araştırıcının dürüstlüğüdür. Deneme süresince araştırıcı tarafsız olarak ölçümlerini yapmalı, literatürde konusu ile ilgili verilen sonuçlardan etkilenmemelidir.

12.4. Varyans Analizi Tekniği

Varyans analizi tekniği kullanılarak grup ortalamaları arasındaki farklılığın önemli olup olmadığını anlamak isteyen araştırıcı daha önceki bölümlerde de açıklandığı gibi ilk olarak hipotezlerini oluşturmalıdır.

Bir araştırmada, k tane muamelenin n tekerrürlü (yani her muamele grubunda n tane deney ünitesi kullanılarak) araştırıldığını ve deneme sonunda elde edilen verilerin Tablo 12.1'deki gibi özetlendiğini kabul edelim. Bu denemeyi tertipleyen araştırıcının amacı k tane muamele arasında üzerinde durulan özelliğe etki bakımından bir farklılığın olup olmadığını araştırmaktır. Bu durumda araştırıcının kontrol ve karşıt hipotezlerini aşağıdaki şekilde kurması gerekir.

H_0: Muamelelerin temsil ettiği populasyon ortalamaları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Muamele ortalamaları arsında gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani;

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 =...= \mu_k$'dır.

H_1: En az iki muamele grubunun ortalaması arasında gözlenen fark tesadüften ileri gelmemektedir. En az iki muamele grubunun incelenen özellik üzerine olan etkileri birbirinden farklıdır, yani aralarındaki fark istatistik olarak önemlidir.

Karşıt hipotez kurulurken "en az iki muamele arasındaki fark önemlidir" denemektedir. Çünkü kontrol hipotezinin yapılan analiz sonucunda reddedilmesi için denmede dikkate alınan k tane muamelenin birbirinden farklı olması gerekmez. En az iki muamele arasındaki farklılık kontrol hipotezinin reddedilmesine sebep olabilir.

Yapılan hipotez kontrolü sonucunda karşıt hipotez kabul edilmiş ise bu en az iki grup ortalaması arasındaki farklılığın önemli olduğu anlamına gelir. Hangi grup ortalamaları arasındaki farklılığın önemli olduğu "çoklu karşılaştırma yöntemleri" kullanılarak araştırılır. Bu amaçla kullanılan çok sayıda farklı yöntem vardır. Bu kitapta çoklu karşılaştırma yöntemlerinden "Asgari Önemli Fark", "Duncan" ve "Tukey(a)" metotları açıklanacaktır.

Hipotezlerini oluşturan araştırıcının hangi hipotezi kabul edeceğine karar vermesi için F-değerini hesaplaması gerekir. Bunun için de önce gruplar arası ve gruplar içi kareler toplamlarının bulunması gerekir.

Önce araştırıcı denemesinde topladığı rakamlarını Tablo 12.1'de verildiği şekilde özetler. Elde edilen bu veriler arasında farklılıklar vardır. Bu veriler arasındaki varyasyonun bir sebebi denemede k tane farklı muamelenin denenmiş olmasıdır. Üzerinde durulan özelliğe her muamelenin etkisi farklı olabilir. Bu da veriler arasında gözlenen farklılığın sebeplerinden biridir. Diğer bir sebep ise 12.3 numaralı bölümde açıklandığı gibi deneysel hata yani aynı muameleye tabi tutulan bireyler arasında tesadüften ileri gelen farklılıklardır. Bu açıklamalardan anlaşılacağı gibi tüm gözlemeler arasındaki farklılığın (genel kareler toplamı) iki kaynağı vardır: muamelelerin farklı olması (gruplar arası kareler toplamı) ve deneysel hata (gruplar içi kareler toplamı)'dır.

TABLO 12.1. k muamelenin n tekerrürlü denendiği bir denemeden elde edilen verilerin özetlenmesi

	1	2	3......	k	
	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{k1}	
	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{k2}	
	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{k3}	
	.	.	.	.	
	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	x_{kn}	
Toplam	T_1	T_2	T_3	T_k	$T_{..}$
Ortalama	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_k$	$\bar{\bar{X}}$

Araştırıcı denemesinden elde ettiği verileri 12.3 numaralı eşitlikte verilen model ile tanımlayabilir.

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \qquad ...(12.3)$$

Bu modelde μ, genel ortalama, yani populasyon ortalamasıdır. Tablo 12.1'de verilen $\overline{X}$, μ'nün bir tahminidir. α_i, (i=1,...,k), i. muamelenin etkisi, e_{ij} (j=1,...,n) ise deneysel hatadır. Muamele etkisi i. muamele grubunun, genel ortalamadan olan sapmasıdır. Deneysel hata ise, i. muamele grubundaki her bir gözlemin kendi grup ortalamasından olan sapmasıdır. Gözlemlerin genel ortalamadan sapmalarının karelerinin toplamı genel kareler toplamına, muamele gruplarının ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarının kareler toplamı gruplar arası kareler toplamına ve her gruptaki gözlemlerin kendi ortalamalarından sapmalarının karelerinin toplamı gruplar içi kareler toplamına eşittir ve 12.4, 12.5 ve 12.6 numaralı eşitliklerde verildiği şekilde hesaplanır:

$$\text{Genel kareler toplamı(GKT)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{\overline{X}})^2 \qquad ...(12.4)$$

$$\text{Gruplar arası kareler toplamı (GAKT)} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{.i}-\overline{\overline{X}})^2 \qquad ...(12.5)$$

$$\text{Gruplar içi kareler toplamı (GIKT)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 \qquad ...(12.6)$$

12.4, 12.5 ve 12.6 numaralı eşitliklerden 12.7 numaralı eşitlik yazılabilir, yani gruplar arası kareler toplamı ile gruplar içi kareler toplamının toplamı genel kareler toplamına eşittir.

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{\overline{X}})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i-\overline{\overline{X}})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 \qquad ...(12.7)$$

ÖRNEK 1:

Vitamin karması draje üreten bir fabrikada 3 farklı draje kaplama yönteminin, drajelerdeki B_1 vitaminin muhafazası üzerine etkisini araştırmak için 3 tekerrürlü olarak bir deneme düzenlemiş ve deneme sonunda aşağıdaki veriler elde edilmiş olsun.

	Kaplama1	Kaplama2	Kaplama3	
	24	19	26	
	25	21	28	
	26	23	30	
Toplam	75	63	84	222
Ortalama	25.0	21.0	28.0	24.67

Bu denemede araştırıcı 3 muameleyi 3 tekerrürlü olarak denemiştir. Bu denemede toplam gözlem sayısı 9'dur. 9 tane gözlem arasındaki varyasyonun sebepleri muamelelerin farklılığı ve muameleler içindeki gözlemler arasındaki farklılık (deneysel hata)'tır. 12.4, 12.5 ve 12.6 numaralı eşitlikler kullanılarak kareler toplamı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:
9 gözleme ait genel ortalama 24.67'dir.

12.4 numaralı eşitlik kullanılarak genel kareler toplamı;

$$\begin{aligned}\mathbf{GKT} = {} & (24-24.67)^2+(25-24.67)^2+(26-24.67)^2+(19-24.67)^2+ \\ & (21-24.67)^2+(23-24.67)^2+(26-24.67)^2+(28-24.67)^2+ \\ & (30-24.67)^2=92.0\end{aligned}$$

12.5 numaralı eşitlik kullanılarak gruplar arası kareler toplamı;

$$\mathbf{GAKT}=3[(25-24.67)^2+(21-24.67)^2+(28-24.67)^2]=74.0$$

12.6 numaralı eşitlik kullanılarak gruplar içi kareler toplamı;

$$\begin{aligned}\mathbf{GKT} = {} & (24-25)^2+(25-25)^2+(26-25)^2+(19-21)^2+(21-21)^2+ \\ & (23-21)^2+(26-28)^2+(28-28)^2+ (30-28)^2=18.0\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yapılan hesaplamalardan görüldüğü ve 12.7 numaralı eşitlikte verildiği gibi gruplar arası kareler toplamı ile gruplar içi kareler toplamının toplamı genel kareler toplamına eşittir. Yani;

GKT=GAKT+GIKT'dır.

Denemede dikkate alınan muamele sayısı ve muamele gruplarındaki gözlem sayısı arttıkça 12.4, 12.5 ve 12.6 numaralı eşitlikleri kullanılarak kareler toplamlarının hesaplanması zaman alır. Aynı zamanda eğer ortalamalar hesaplanırken yuvarlaklaştırma yapılmış ise bilgi kaybına neden olur. Bunun için, pratikte kareler toplamlarının hesaplanması için 12.8, 12.9 ve 12.10 numaralı eşitlikler kullanılır.

$$GKT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{(T_{..})^2}{N}, \text{ yani}$$

$$GKT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{N} \qquad \text{...(12.8)}$$

$$GAKT = \sum_{i=1}^{k} \frac{(T_{.i})^2}{n_i} - \frac{(T_{..})^2}{N}, \text{yani}$$

$$GAKT = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{N} \qquad \text{...(12.9)}$$

$$GIKT = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{n} \right) \qquad \text{...(12.10)}$$

12.8 ve 12.9 numaralı eşitliklerde, $\frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{N}$ terimine "**düzeltme terimi (correction term)**" denir ve tüm gözlemlerin toplamının karesinin toplam gözlem sayısına bölümü olarak hesaplanır. 12.10 numaralı eşitlikten görülebileceği gibi gruplar içi kareler toplamı, her gruba ait kareler toplamının toplamıdır. Bu şekilde hesaplanabileceği gibi, genel kareler toplamından gruplar arası kareler toplamı çıkarılarak da hesaplanabilir. 12.8, 12.9 ve 12.10 numaralı eşitlikler kullanılarak kareler toplamları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$GKT = (24^2 + 25^2 + 26^2 + ... + 28^2 + 30^2) - \frac{(24 + 25 + ... + 28 + 30)^2}{9}$$

$$= 5568 - \frac{(222)^2}{9} = 92$$

$$GAKT = \frac{(75)^2}{3} + \frac{(63)^2}{3} + \frac{(84)^2}{3} - \frac{(222)^2}{9} = 5550 - 5476 = 74$$

$$GIKT = (24^2 + 25^2 + 26^2 - \frac{(24 + 25 + 26)^2}{3}) +$$

$$(19^2 + 21^2 + 23^2 - \frac{(19 + 21 + 23)^2}{3}) +$$

$$(26^2 + 28^2 + 30^2 - \frac{(26 + 28 + 30)^2}{3}) = 2.0 + 8.0 + 8.0 = 18.0$$

veya gruplar içi kareler toplamı, genel kareler toplamından gruplar arası kareler toplamı çıkarılarak, GIKT=92.0-74.0=18.0, bulunur. Gruplar içi kareler toplamı toplanmış varyans olup, aynı muameleye tabi tutulan bireyler arası farklılığın, yani deneysel hatanın ölçüsüdür.

Kareler toplamlarını hesaplayan araştırıcının bir sonraki adımda yapması gereken iş, varyans analizi tablosunu oluşturmaktır. Varyans analizi tablosu oluşturulurken kareler ortalamasının bulunması gerekir. Gruplar arası ve gruplar için kareler ortalamasının bulunması için daha önce hesaplanan kareler toplamları serbestlik derecelerine bölünür. Genel serbestlik derecesi, toplam gözlem sayısından 1 çıkarılarak bulunur. Gruplar arası serbestlik derecesi, grup sayısının 1 eksiği (yani, k-1), gruplar içi serbestlik derecesi ise gruplardaki serbestlik derecelerinin toplamıdır. Genel kareler toplamı için yazılan eşitlik serbestlik dereceleri için de geçerlidir. Yani;

GSd=GASd+GISd'dir.

Bu hesaplamalar yapıldıktan sonra varyans analizi tablosu Tablo 12.2'de verildiği gibi düzenlenir. Varyans analizi tablosu düzenlenirken genel kareler ortalaması hesaplanamaz. Çünkü zaten genel kareler toplamı, bunu meydana getiren kaynaklarına ayrılarak analiz edilmektedir.

TABLO 12.2. Varyans analizi tablosu

Varyasyon kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F-değeri
Muameleler arası	k-1	$\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}})^2$	$\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}})^2 /(k-1)$	$\dfrac{[\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}})^2 /(k-1)]}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2 /(k(n-1))}$
Muameleler içi (Hata)	k(n-1) $\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2 /(k(n-1))$	
Genel	nk-1	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{\overline{X}})^2$	----	

$\sum_{i=1}^{k} n_i - 1$

Örnek 1 için yapılan hesaplamalardan sonra düzenlenen varyans analizi tablosu Tablo 12.3'de verilmektedir.

TABLO 12.3. 3 Farklı draje kaplama yöntemlerinin denendiği denemeden elde edilen veriler için düzenlenen varyans analizi tablosu

Varyasyon kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler rtalaması
Gruplar arası	3-1 =2	74.0	37.0
Gruplar içi	3(3-1) =6	18.0	3.0
Genel	(3)(3)-1=8	92.0	

Araştırıcının kontrol ve karşıt hipotezlerini de aşağıdaki verildiği şekilde oluşturmuş olması gerekir.

H_0: Drajelerdeki B_1 vitamininin muhafazası üzerine etki bakımından 3 farklı draje kaplama yöntemini arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. 3 kaplama yöntemi kullanılarak gözlenmiş B_1 vitamini ortalamaları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve sıfır kabul edilebilir. Yani; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$'tür.

H_1: En az iki draje kaplama yönteminin, drajelerdeki B_1 vitamininin muhafazası üzerine etki bakımından aralarındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

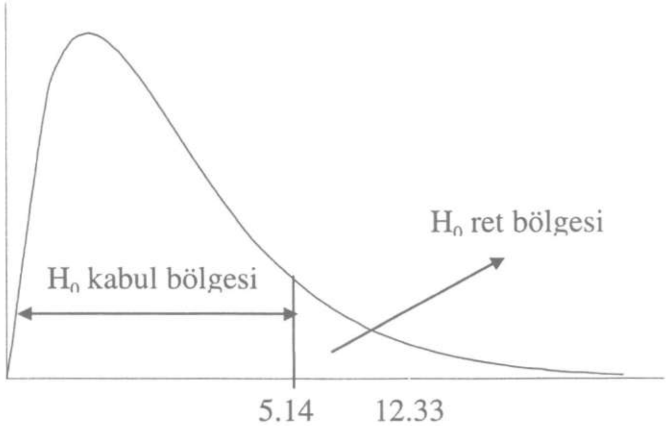
Hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek için F-değerinin hesaplanması gerekir. Varyans analizi tablosu düzenlendikten sonra F-değeri 12.11 numaralı eşitlikte verildiği şekilde hesaplanır.

$$F = \frac{GAKO}{GIKO} \qquad ...(12.11)$$

Eğer kaplama yöntemleri arasında farklılık yoksa, yapılan ölçümler arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Bu durumda F-değerinin 1 olması veya 1'den olan sapmalarının tesadüften ileri gelebilecek farklılık kadar olması beklenir. Bu örnek için F-değeri 12.11 numaralı eşitlikten;

$$F = \frac{37.0}{3.0} \cong 12.33 \text{ olarak bulunur.}$$

F-dağılımının iki serbestlik derecesine bağlı bir dağılım olduğu daha önce belirtilmişti. Tablo 12.3'te görüldüğü gibi GAKO'sına ait serbestlik derecesi 2 ve gruplar içi kareler ortalamasına ait serbestlik derecesi 6'dır. Yani, burada araştırıcıyı ilgilendiren 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımıdır. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmışsa, Tablo E'den 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımında %5'lik H_0 hipotezini ret bölgesinin 5.14 değerinde başladığını belirler. Şekil 12.2'de görüldüğü gibi hesaplanan F-değeri H_0 hipotezini ret bölgesine düşmektedir. Bu durumda, araştırıcı H_0 hipotezini reddeder. Yani, en az iki draje kaplama yönteminin, drajelerdeki B_1 vitaminini muhafaza üzerine etki bakımından aralarındaki fark tesadüften ileri gelmediği kararına varır.



ŞEKİL 12.2. 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımında H_0 ret ve kabul bölgeleri

ÖRNEK 2:

Bir hastanede kurulan bir denemede bir hastalığın 4 farklı türünde sedimantasyon miktarları aşağıdaki gibi bulunmuştur. Sedimantasyon değerlerinin hastalığın türüne göre değişip değişmediğini kontrol ediniz. Eğer hastalık türleri arasında farklılık varsa hangi hastalık türleri arasında sedimantasyon bakımından farklılığın önemli olduğunu belirleyiniz.

	TÜR1	TÜR2	TÜR3	TÜR4	
	45	69	53	56	
	50	75	50	58	
	46	73	49	60	
	45			58	
				55	
Toplam	186	217	152	287	842
Ortalama	46.50	72.33	50.67	57.40	56.13
N	4	3	3	5	15

Bu denemede her hastalık türünde eşit sayıda hasta kullanılmamıştır. Hastalığın birinci türünde 4 hasta, 2. ve 3. türünde 3 hasta ve 4. hastalık türünde 5 hastadan ölçüm alınmıştır. Hastalığın her türü için elde edilen gözlemler, toplamları, ortalamaları ve her gruptaki gözlem sayıları yukarıdaki tabloda özetlenmiştir.

Hastalığın türleri arasında sedimantasyon miktarı bakımından farklılık olup olmadığını araştırmak isteyen araştırıcı ilk olarak aşağıdaki şekilde hipotezlerini kurar.

H_0: Hastalığın 4 türünün sedimantasyon miktarı arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Hastalığın türleri arasında sedimantasyon miktarı bakımından gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani;

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4\text{'tür.}$$

H_1: En az iki hastalık türü sedimantasyon miktarı bakımından birbirinden farklıdır. Sedimantasyon miktarı bakımından aralarındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Daha sonra, 12.8 ve 12.9 numaralı eşitlikler kullanılarak genel kareler ve gruplar arası kareler toplamı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$GKT = (45^2 + 50^2 + 46^2 + ... + 58^2 + 55^2) - \frac{(45 + 50 + ... + 58 + 55)^2}{15}$$

$$= 48580.0 - \frac{(842)^2}{15} = 1315.73$$

$$\mathrm{GAKT} = \frac{(186)^2}{4} + \frac{(217)^2}{3} + \frac{(152)^2}{3} + \frac{(287)^2}{5} - \frac{(842)^2}{15}$$
$$= 48520.5 - 47264.3 = 1256.20$$

Genel ve gruplar arası kareler toplamı hesaplandıktan sonra gruplar içi kareler toplamı 12.7 numaralı eşitlikten;

1315.73=1256.20+GIKT ve GIKT=59.53 olarak bulunur.

Bu örnekte genel serbestlik derecesi 15-1=14, gruplar arası serbestlik derecesi 4-1=3 ve gruplar içi serbestlik derecesi ise 14-3=11 (veya (4-1)+(3-1)+(3-1)+(5-1)=11)'dir. Bu örnek için düzenlenen varyans analizi tablosu Tablo 12.4'te verilmiştir.

TABLO 12.4. Varyans analizi tablosu

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler ortalaması
Hastalık türleri arası	3	1256.20	418.73
Hastalık türleri içi (hata)	11	59.53	5.41
Genel	14	1315.73	-

Hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek için F-değeri 12.11 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$F = \frac{418.73}{5.41} \cong 77.40$$ olarak bulunur.

Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmışsa, Tablo E'den 3 ve 11 serbestlik dereceli F-dağılımında %5'lik H_0 hipotezini ret bölgesinin 3.59 değerinden başladığını belirler. Bu durumda kabul edilmesi gereken H_1 karşıt hipotezidir. Yani en az iki hastalık türü arasında sedimantasyon miktarı bakımından fark tesadüften ileri gelmemektedir. Hangi hastalık türleri arasındaki farklılığın tesadüften ileri gelmediğinin araştırılması için "çoklu karşılaştırma yöntemleri" kullanılır. Bunlar aşağıda kısaca açıklanacaktır.

12.5. Çoklu Karşılaştırma Yöntemleri

Varyans analizi tekniği kullanılarak yapılan analiz sonunda eğer kontrol hipotezi reddedilerek en az iki muamele grubu arasındaki farklılığın önemli olduğuna karar verilmiş ise araştırıcı bu farkın hangi muamele gruplarından kaynaklandığını bilmek ister. Bu durumda çoklu karşılaştırma yöntemlerinden birinin kullanılması gerekir. En çok kullanılan çoklu karşılaştırma yöntemleri "**asgari önemli fark**", "**Duncan**" ve "**Tukey(a)**" metotlarıdır.

12.5.1. Asgari Önemli Fark (A.Ö.F)

İki örnek ortalaması arasındaki farkın kontrolü için t-değerinin 8.3 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$t = \frac{(\mu_{\overline{X}_A} - \mu_{\overline{X}_B}) - \mu_D}{S_D}$$

şeklinde hesaplandığı daha önceki bölümlerde gösterilmişti. Bu eşitlikten de görüldüğü gibi A ve B grubu ortalamaları arasındaki farkın önemli olabilmesi için en az $(\pm t)(S_D)$ kadar olması gerekir. Eşitlikte S_D, ortalamalar arası farka ait standart hata olup $S_D = \sqrt{\frac{2S^2}{n}}$ şeklinde hesaplandığı da daha önceki bölümlerde gösterilmişti. Bu eşitlikten de $S_D = \sqrt{2}(S_{\overline{X}})$ yazılabilir. Bu açıklamalar doğrultusunda 12.12 numaralı eşitlik yazılabilir;

$$D = (\pm t)\ \sqrt{2}(S_{\overline{X}}) \qquad ...(12.12)$$

12.12 numaralı eşitlikte, D, iki grup ortalaması arasındaki istatistik olarak önemli asgari (en az) farktır. $(S_{\overline{X}})$, ortalamaya ait standart hata olup $\sqrt{\frac{GIKO}{n}}$ şeklinde hesaplanır. GIKO, varyans analizi tablosunda gruplar içi kareler ortalaması, n ise ortalamanın hesaplandığı gözlem sayısıdır. 12.12 numaralı eşitlikte t ise gruplar içi serbestlik dereceli α seviyesindeki Tablo C'de verilen t-dağılımı değeridir.

Asgari önemli fark hesaplandıktan sonra söz konusu muamele grupları arasındaki farklılık bu değer ile karşılaştırılır. Eğer iki muamele grubu arasındaki fark asgari önemli farka eşit veya büyük ise söz konusu iki muamele grubu ortalaması arasındaki fark istatistik olarak önemlidir kararı verilir.

Asgari önemli fark metodunda tüm farklılıklar aynı değer ile karşılaştırılır. Bu sebeple bir denemedeki muamele sayısı artınca asgari önemli fark metodunun kullanılması tavsiye edilmez. Çünkü bu metot ortalamaların büyüklükleri bakımından sıralanışlarındaki yerlerini dikkate almaz. Bu sebeple iki grup ortalaması arasındaki fark önemlidir dendiği zaman bunda ortalamaların büyüklüklerine göre sıralanıştaki yerinin de etkisi olabilir.

ÖRNEK 1:

Vitamin karması draje üreten bir fabrikada 3 farklı draje kaplama yönteminin drajelerdeki B_1 vitamininin muhafazası üzerine etkisini araştırmak için 3 tekerrürlü olarak yürütülen bir denemeden elde edilen veriler için daha önce muamele ortalamaları ve gözlem sayıları aşağıdaki gibi verilmişti.

	Kaplama1	Kaplama2	Kaplama3
Ortalama	25.0	21.0	28.0
N	3	3	3

Bu örnek için düzenlenen Tablo 12.3'de gruplar içi kareler ortalaması 6.0 ve gruplar içi serbestlik derecesi 6 olarak bulunmuştu. Yapılan F-kontrolü sonunda en az iki kaplama yönteminin B_1 vitamini miktarı üzerine etki bakımından aralarındaki farkın önemli olduğu bulunmuştu. Hangi iki kaplama yöntemi arasındaki farklılığın önemli olduğu "**asgari önemli fark**" metodu ile kontrol edilecek olsun. Bu durumda 12.12 numaralı eşitlik kullanılarak "asgari önemli farkın" hesaplanabilmesi için önce t-değerinin belirlenmesi gerekir. Eğer araştırıcı kontrolünü %5 seviyesinde yapacaksa Tablo C'den %5 seviyesinde 6 serbestlik dereceli t-değeri 2.447 olarak bulunur.

Ortalamaya ait standart hata ise, $S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1.0$ olarak hesaplanır.

Standart hata hesaplanırken, gruplar içi kareler ortalaması 3'e bölünmüştür. Çünkü her kaplama yönteminde 3 gözlem vardır. Bu değerler bulunduktan sonra asgari önemli fark 12.12 numaralı eşitlikten;

$$D=(2.447)(\sqrt{2})(1)=3.4606 \text{ olarak bulunur.}$$

Yani, eğer iki kaplama yöntemi arasındaki fark 3.4606'ya eşit veya daha büyük ise söz konusu iki kaplama yöntemi arasında B_1 vitaminini muhafaza üzerine etki bakımından farkı önemlidir kararı verilir. Bunun için kaplama yöntemleri ortalamaları arasındaki farklar aşağıdaki şekilde bulunur..

Kaplama1-Kaplama2=25.0-21.0=4.0
Kaplama1-Kaplama3=25.0-28.0=-3.0
Kaplama2-Kaplama3=21.0-28.0=-7.0

Birinci kaplama yöntemi ile 3. kaplama yöntemi ortalamaları arasındaki fark (mutlak olarak) hesaplanan asgari önemli farktan (3.4606) daha küçüktür. Bu 1. kaplama yönteminin B_1 vitaminini muhafaza üzerine etki bakımından 3. kaplama yönteminden farklı olmadığını gösterir. Fakat 1. ve 2. kaplama yöntemleri ile 2. ve 3. kaplama yöntemlerinin ortalamaları arasındaki mutlak değer olarak fark asgari önemli farktan daha büyüktür. Bu, söz konusu kaplama yöntemleri arasında, B_1 vitamininin muhafazası bakımından istatistik olarak önemli bir farklılık olduğunu gösterir. Yani 1. kaplama yöntemi 2. kaplama yöntemine nazaran, ve 3. kaplama yöntemi 1. kaplama yöntemine nazaran drajelerdeki B_1 vitamininin daha iyi muhafazasına sebep olmuştur kararı verilir.

Yapılan bir araştırmada çoklu karşılaştırma sonuçları aşağıdaki şekilde aralarında istatistik olarak önemli fark olamayan grup ortalamaları bir çizgi ile birleştirilerek verilebilir.

Kaplama2	Kaplama1	Kaplama3
(21.0)	(25.0)	(28.8)

veya aralarında istatistik olarak önemli fark bulunan gruplar farklı harfler verilerek gösterilebilir. Yani;

Kaplama2 (21.0) a
Kaplama1 (25.0) b
Kaplama3 (28.0) b

Bu şekilde gösterişte aynı harfi taşıyan ortalamalar arasındaki farklılık istatistik olarak önemli değildir.

Araştırıcı aynı karşılaştırmayı %1 seviyesinde de yapabilir. Bu durumda Tablo C'den %1 seviyesinde 6 serbestlik dereceli t-değeri 3.707 olarak bulunur. Ve asgari önemli fark $D=(3.707)(\sqrt{2})(1)=5.2425$ olarak hesaplanır. Hangi kaplama yöntemleri arasındaki farklılığın önemli olduğu %1 seviyesinde kontrol edildiği zaman hesaplanan asgari önemli farka göre sadece 2. ve 3. kaplama yöntemlerinin ortalamaları arasındaki farklılığın önemli olduğu kararına varılır. Araştırmalarda %1 seviyesinde önemli olan farklılıklar fark üzerine iki yıldız (** şeklinde), %5 seviyesinde önemli olan farklılıklar ise tek yıldız (*) konarak sunulur.

ÖRNEK 2:

Bir hastanede kurulan bir denemeden bir hastalığın 4 farklı türünde sedimantasyon miktarları için ortalamalar ve her grupta gözlem sayıları aşağıdaki gibi bulunmuştu.

	TÜR1	TÜR2	TÜR3	TÜR4
Ortalama	46.50	72.33	50.67	57.40
N	4	3	3	5

Tablo 12.4'te ise bu örnek için gruplar içi kareler ortalaması 5.41 ve gruplar içi serbestlik derecesi 11 olarak verilmişti.

Muamele gruplarındaki gözlem sayıları farklı olduğu zaman $\sqrt{\frac{GIKO}{n}}$ eşitliğinde "n" değeri olarak birçok kaynakta önerilen ve bu kitapta örnek olarak kullanılan MINITAB paket programında kullanılan yol, karşılaştırılan gruplardaki gözlem sayıları kullanılarak standart hatanın aşağıda verildiği şekilde hesaplanmasıdır.

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{GIKO(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{nj})}$$

Buna karşın gruplardaki gözlem sayıları farklı olduğu zaman diğer bir yaklaşım da eşitlikteki "n" değeri yerine gruplardaki gözlemlerin harmonik ortalamasının kullanılmasıdır. Bu kitapta "çoklu karşılaştırma yöntemleri" için örnekler yapılırken gruplardaki gözlem sayılarının harmonik ortalamaları "n" değeri olarak kullanılacaktır.

Bu örnek için "n" değeri, gruplardaki gözlem sayılarına ait harmonik ortalama olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$n = \frac{4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{4}{1.1167} = 3.58$$

Örnek için standart hata, $S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{5.41}{3.58}} \cong 1.23$'tür. $t_{(\frac{0.05}{2},11)}$ ise Tablo C'den 2.201 olarak bulunur. Hangi grup ortalamaları arasındaki farklılığın önemli olduğunu araştırmak için asgari önemli fark 12.12 numaralı eşitlikten;

$D=(2.201)(\sqrt{2})(1.23)=3.829$ olarak bulunur.

Hastalık türleri ortalamaları arasındaki farklar (mutlak olarak) ise;

TÜR1-TÜR2=25.83	TÜR2-TÜR3=21.66
TÜR1-TÜR3=4.17	TÜR2-TÜR4=14.93
TÜR1-TÜR4=10.90	TÜR3-TÜR4=6.73

Yukarıda bulunan farklar hesaplanan asgari önemli farktan büyük olduğu için bütün hastalık türleri arasında, sedimantasyon miktarı bakımından istatistik olarak önemli fark olduğu kararına varılır. Eğer farklı gruplara değişik harfler verilerek sonuçlar sunulacak olursa her hastalık türü farklı bir harf alacaktır.

Eğer kontrol %1 seviyesinde yapılacak olursa asgari önemli fark D=(3.106)($\sqrt{2}$)(1.23)=5.4028 olarak bulunur. Bu değere göre kontrol yapıldığı zaman %1 seviyesinde hastalığın 1. ve 3. türleri arasında sedimantasyon miktarı bakımından farklılığın önemli olmadığı sonucuna varılır.

12.5.2. Duncan Metodu

Duncan metodu grup ortalamalarını karşılaştırırken ortalamaların büyüklerine göre sıralanıştaki yerlerini de dikkate alır. Duncan metodunda iki muamele grubu ortalaması arasında önemli asgari fark 12.13 numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$D=Q\,(S_{\bar{x}}) \qquad ...(12.13)$$

12.13 numaralı eşitlikte ($S_{\bar{x}}$), 12.12 numaralı eşitlikte olduğu gibi ortalamaya ait standart hata olup $\sqrt{\frac{GIKO}{n}}$ şeklinde hesaplanır. Q değeri ise hata serbestlik derecesinde %1 ve %5 seviyeleri için Tablo G ve H'da verilmiş olan standardize edilmiş varyasyon genişlikleridir. Bu değerler, grup ortalamalarının büyüklüklerine göre sıralandığı zaman birbirinden uzaklıklarını dikkate alarak hesaplanmıştır. Yani, grup ortalamaları büyüklüklerine göre sıralandığı zaman, onları karşılaştırmak için kullanılacak Q değerleri karşılaştırılacak ortalamaların sıralanıştaki yerine göre değişecektir. Büyüklerine göre birbirinden uzak olan ortalamaların karşılaştırılması için kullanılacak olan Q değeri yakın olanların karşılaştırılması için kullanılacak Q değerinden daha büyüktür.

ÖRNEK:

Vitamin karması draje üreten bir fabrikada 3 farklı draje kaplama yönteminin B_1 vitaminini muhafaza üzerine etkisini araştırmak için yürütülen denemeden elde edilen veriler için daha önce verilen örnekte muamele ortalamaları ve gözlem sayıları aşağıdaki gibi idi.

	Kaplama1	Kaplama2	Kaplama3
Ortalama	25.0	21.0	28.0
n	3	3	3

Hangi kaplama yöntemleri arasındaki farklılığın önemli olduğu “asgari önemli fark” metodu kullanılarak kontrol edilmişti. Asgari önemli fark metodu için standart hata, $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1.0$ olarak bulunmuştu. Bu, Duncan metodunda da, yani 12.13 numaralı eşitlikte, kullanılacak standart hatadır. Duncan metodunda ilk olarak ortalamalar büyüklüklerine göre aşağıdaki şekilde sıralanır.

Kaplama2	Kaplama1	Kaplama3
(21.0)	(25.0)	(28.0)

Burada yapılabilecek karşılaştırmalar, kendisi dahil ikinci sıradaki ortalamaların karşılaştırılmasıdır. Yani, Kaplama2 ile Kaplama1 ve Kaplama1 ile Kaplama3’ün karşılaştırılmasıdır. Bu karşılaştırmalar için 12.13 numaralı eşitlikte Q değeri Tablo G’de, “grup sayıları” sütunlarından 2 numaralı sütun 6 hata serbestlik derecesinin kesiştiği yerdeki “3.46” değeridir. Bu durumda D değeri;

D= (1).(3.46)=3.46 olarak bulunur. Dikkat edilecek olursa kendisi dahil ikinci gelen grupların karşılaştırılması için hesaplanan değer “asgari önemli fark” ile aynıdır. Bu durumda;

Kaplama2-Kaplama1=-4.0
Kaplama1-Kaplama3=-3.0

arasındaki farklar 3.46 değeri ile karşılaştırılacaktır. Kaplama2 ile Kaplama1 arasındaki fark hesaplanan değerden büyük olduğu için bu farkın önemli olduğuna karar verilir.

Burada mümkün olan diğer karşılaştırma Kaplama2 ile Kaplama3’ün karşılaştırılması, yani kendisi dahil 3. sıradaki (en büyük ile en küçük) ortalamanın karşılaştırılmasıdır. Bu karşılaştırma için 12.13 numaralı eşitlikte Q değeri Tablo G'de, "grup sayıları" sütunlarından 3 numaralı sütun 6 hata serbestlik derecesinin kesiştiği yerdeki "3.59" dur. Bu durumda D değeri;

D= (1).(3.59)=3.59 olarak bulunur.

Kaplama2 ile Kaplama3 arasındaki 7.0 mg'lık fark "3.59"'dan daha büyük olduğu için bu iki kaplama yöntemi arasındaki farkın önemli olduğunda karar verilir. Görüldüğü gibi burada Duncan metodunun sonuçları ile "asgari önemli fark" metodunda bulundan sonuçlar ile aynı çıkmıştır. Her zaman böyle olmayabilir.

Eğer araştırıcı isterse asgari önemli fark metodunda açıklandığı gibi %1 seviyesindeki tablo değerlerini kullanarak karşılaştırmasını %1 seviyesinde de yapabilir. Daha önce de belirtildiği gibi %1 seviyesinde önemli olan farklılıklar (**) ile gösterilir.

12.5.3. TUKEY (a) METODU

Tukey (a) metodunda da iki grup arasında istatistik olarak önemli olan fark Duncan metodu için verilen 12.13 numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Bu metotda da grup ortalamalarının büyüklüklerine göre sıralandığı zaman birbirinden olan uzaklıkları dikkate alınır. Bu metodun, Duncan metodundan farkı kullanılan tablo değeri bakımındandır. Bu metotda Q değeri olarak Tablo I'dan söz konusu serbestlik derecesi ve grup sayısındaki tablo değeri kullanılır.

ÖRNEK:

Vitamin karması draje üreten bir fabrikada 3 farklı draje kaplama yönteminin drajelerdeki B_1 vitaminini muhafaza üzerine etkisini araştırmak için yürütülen bir denemeden elde edilen veriler için daha önce verilen örnekte muamele ortalamaları ve gözlem sayıları aşağıdaki gibi idi.

	Kaplama1	Kaplama2	Kaplama3
Ortalama	25.0	21.0	28.0
n	3	3	3

Hangi kaplama yöntemleri arasındaki farklılığın önemli olduğu "asgari önemli fark" ve "Duncan" metotları kullanılarak kontrol edilmişti. Bu metodun Duncan metodundan farkı kullanılan tablo değeridir. Bu metotta, tablo değeri, en küçük ve en büyük ortalamanın sıralanıştaki yeri dikkate alınarak bulunur. Yani Tablo I kullanılırken grup sayısı 3 olarak alınır. Gruplar içi kareler ortalamasına ait serbestlik derecesi de 6 olduğu için bunların kesişim noktasındaki 4.34 (%5 için) 12.13 numaralı eşitlikte Q değeri olarak kullanılır. Böylece iki grup arasında istatistik olarak önemli fark;

D=(4.34)(1)=4.34 olarak bulunur.

Kaplama2	Kaplama1	Kaplama3
(21.0)	(25.0)	(28.0)

Kaplama2-Kaplama1=21.0-25.0=-4.0
Kaplama1-Kaplama3=25.0-28.0=-3.0
Kaplama2-Kaplama3=21.0-28.0=-7.0

Söz konusu farklar hesaplanan 4.34 değeri ile karşılaştırıldığı zaman 2. ve 3. kaplama yöntemleri arasındaki farklılığın önemli olduğu görülür. 1. kaplama yönteminin 2. ve 3. kaplama yöntemlerinden istatistik olarak önemli derecede fark olmadığı kararına varılır.

12.6. Varyans Analizinin Ön Şartları

Varyans analizi tekniği kullanılarak varılacak sonuçların güvenilir olabilmesi için gerekli ön şartlar aşağıdaki gibi verilebilir.

1. Muamele Gruplarındaki Gözlemlerin Birbirinden Bağımsız Olması:

Muamele gruplarındaki gözlemlerin bağımsızlığı koşulu deneme kurulurken yerine getirilmelidir. Aynı deney ünitesinden alınan ölçümler birbirinin paralelidir. Paralel, araştırıcının yaptığı ölçümlerden emin olması için yapılır. İstatistik analizlerde paralel kullanılmaz. Çünkü araştırıcı dikkatli ölçüm yapıyorsa paralellerin hep aynı değeri alması gerekir. İstatistik analizlerde tekerrür kullanılır. Tekerrür bağımsız deney ünitelerinden alınan ölçümlerdir.

Eğer deneme planlanırken gözlemlerin bağımsızlığı ön koşulu yerine getirilmemişse, verilerin istatistik açıdan değerlendirilmesi için burada açıklanan yöntemlerin kullanılması doğru değildir.

2. Verilerin Normal Dağılım Göstermesi:

Ölçme, tartma veya analizler yolu ile elde edilen veriler sürekli verilerdir ve tarif aralığında her değeri alabilirler. Verilerin elde edildiği deney üniteleri homojen ise aralarındaki farklılık tesadüften ileri gelir. Bu tip verilerin normal dağılım göstermesi beklenir. Normal dağılım ortalaması etrafında simetriktir ve çan eğrisi şeklindedir. Normal dağılımın parametreleri ortalama ve standart sapmadır (dolayısıyla varyans). Elde edilen verilerin dağılımı normalden sapıyorsa bunlar binom, Poisson veya eğik diğer dağılımları gösterebilir.

3. Grup Ortalamaları ve Varyanslarının Bağımsız Olması:

Deneme sonucunda elde edilen veriler normal dağılım gösteriyorsa, grupların ortalama ve varyansları arasında bir ilişki olmaması beklenir. Fakat bazen yukarıda da belirtildiği gibi grupların ortalamaları ve varyansları birbirinden bağımsız değildir. Bazen birbirine eşittir (Poisson dağılmışsa) ya da ortalama arttıkça varyans da artar (binom dağılmışsa). Genelde verilerin normal dağılmış olması koşulu sağlandığında, ortalama ve varyansların bağımsızlığı koşulu da yerine getirilmiş olur. Hataların da kendi aralarında bağımsız olması gerekir.

4. Grup Varyanslarının Homojen Olması:

Varyans analizi tekniğinde hesaplanan hata varyansı, toplanmış varyanstır (Pooled Variance) (yani grup varyanslarının tartılı ortalamasıdır). Bu populasyon varyansının tahminidir. Toplanmış varyansın hesaplanabilmesi için grup varyanslarının homojen olması yani grup varyansları arasındaki farklılığın, tesadüften ileri gelebilecek farklılıklar kadar olması gerekir.

5. Muamele Etkilerinin Eklenebilir Olması:

Analizler yapılırken söz konusu faktörlere ait esas etkilerin eklenebilir olması gerekir, yani bir gözlem faktör hallerinin etkisi ile hatanın birbirlerine eklenmesi ile oluşmalıdır.

12.7. Varyansların Homojenlik Kontrolü

Yukarıda açıklanan 5 ön şarttan en önemli olanı ve yerine getirilip getirilmediğinin kontrolü en kolay olanı grup varyanslarının homojenliğidir.

Eğer iki grup varsa, grup varyanslarının homojenliğini kontrol etmek için aşağıda verilen 3 yöntemden biri kullanılabileceği gibi daha kolay olarak F-istatistiği de hesaplanır.

ÖRNEK:

A ve B gibi iki muamelenin üzerinde durulan özellik üzerine etki bakımından aralarında bir fark olup olmadığını araştırmak üzere yürütülen bir deneme sonunda aşağıdaki veriler elde edilmiş olsun.

A	B
16	15
14	13
12	16
15	17
12	19
	19

Araştırıcı muamele ortalamaları arasındaki farkın tesadüften ileri gelip gelmediğini kontrol etmeden önce varyansların homojenlik kontrolünü yapmalıdır. İki grup söz konusu olduğu zaman daha sonra açıklanacak yöntemlerden biri kullanılarak homojenlik kontrolü yapılabileceği F-değerini hesaplayarak da varyansların homojen olup olmadığını kontrol edebilir. Homojenlik kontrolü yapılırken hipotezler;

H_0: Grup varyansları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Yani grup varyansları homojendir.

H_1: Grup varyansları arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Yani grup varyansları homojen değildir.

$$S_A^2 = \frac{(16^2 + 14^2 + ... + 12^2 - \frac{(69)^2}{5}}{4} = 3.2$$

$$S_B^2 = \frac{(15^2 + 13^2 + ... + 19^2 - \frac{(99)^2}{6}}{5} = 5.5$$

Bu örnek için F-değeri, F=(5.5)/(3.2)=1.7188 olarak bulunur. Burada F-dağılımı 4 ve 5 serbestlik dereceli F-dağılımıdır. Eğer kontrol %5 seviyesinde yapılıyorsa, Tablo E'den 5.19 olarak bulunur. Hesaplanan F-değeri, tablo değerinden küçük olduğu için iki grubun varyansları arasındaki farkın tesadüften ileri geldiği kabul edilir. Yani grup varyansları homojendir.

İkiden fazla grup söz konusu olduğu zaman, grup varyanslarının homojenliğini kontrol etmek için yaygın olarak kullanılan 3 yöntem vardır ve bunlar:

1. Cochran testi
2. Bartlett testi
3. Levene'nin testi

12.7.1. COCHRAN TESTİ

Gruplardaki gözlem sayısının eşit olması durumunda grup varyanslarının homojenlik kontrolünde kullanılır. Bu metodu geliştiren Cochran, aynı varyanslı populasyonlardan çekilen (n-1) serbestlik dereceli k tane grupta $\frac{S_{max}^2}{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + ... + S_k^2)}$ şeklinde bulunan C-değerlerinin dağılımını belirlemiştir. Yani test istatistiği;

$$C = \frac{S_{max}^2}{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + ... + S_k^2)} \qquad ...(12.14)$$

şeklinde belirlenir. 12.14 numaralı eşitlikte S^2_{max}, gruplardaki en büyük varyans, $(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + ... + S_k^2)$ ise gruplardaki varyansların toplamıdır. Eğer hesaplanan değer tablo değerinden (TABLO J) büyük ise varyansların homojen olduğu hipotezi reddedilir. Aksi takdirde varyansların homojen olduğu hipotezi kabul edilir. Eğer varyansların homojen olduğu hipotezi kabul edilmiş ise varyans analizi tekniği kullanılarak veriler analiz edilebilir.

ÖRNEK:

Salmonella türü bakterilerin üretilmesi için hazırlanan A,B,C ve D tipi besi yerlerinin bakterilerin üremesi üzerine etkisi olup olmadığını araştırmak üzere planlanmış bir deneme tertiplenmiştir. Söz konusu besi yerleri kullanılarak hazırlanmış 5'er plakada üreyen koloniler sayılmış ve aşağıdaki veriler elde edilmiştir.

	A	B	C	D
	10	18	9	15
	11	9	10	15
	14	17	10	21
	13	18	11	29
	15	18	8	15
Varyans	4.3	15.5	1.3	38.0

Araştırıcının besi tipleri arasında farklılığın olup olmadığını varyans analizini kullanarak kontrol etmeden önce grup varyansların homojenliğini kontrol etmesi gerekir.

H_0: Grup varyansları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Yani grup varyansları homojendir.

H_1: Grup varyansları arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Yani grup varyansları homojen değildir.

Bu denemede araştırılan 4 besi tipinde de eşit sayıda gözlem (n=5) olduğu için varyansların homojenliği Cochran testi ile kontrol edilebilir. 12.14 numaralı eşitlikten C-değeri;

$$C = \frac{38.0}{(4.3 + 15.5 + 1.3 + 38.0)} = 0.643 \text{ olarak bulunur.}$$

Tablo J'den, k=4 grup ve (n-1)=4 serbestlik derecesi için %5 seviyesi için C-değerinin 0.6287 olduğu görülür. Buna göre grup varyanslarının homojen olmadığı kararına varılır. Bu durumda, araştırıcı bu verileri varyans analizi tekniğini kullanarak analiz ederse varılacak sonuçlar güvenilir olmayacaktır. Çünkü varyans analizinin gerektirdiği varyansların homojenliği şartı yerine gelmemiştir.

12.7.2. BARTLETT TESTİ

Bartlett testi varyansların homojenlik kontrolünde yaygın olarak kullanılan bir testtir. Fakat bu test gruplarda sapan değerler varsa bu değerlerden çok etkilenir. Bunun için gruplardaki gözlem sayıları eşit olduğu zaman Cochran testi, gruplardaki gözlem sayıları eşit olmadığı durumlarda ise Levene'nin testi tavsiye edilir. Bartlett testinde test istatistiği serbestlik derecesi (k-1) (k; grup sayısı) olan yaklaşık bir χ^2-dağılımı gösterir. Test istatistiği;

$$\chi^2 = [\Sigma(v_i)]\ln\overline{S}^2 - \Sigma v_i \ln S_i^2 \qquad ...(12.15)$$

şeklinde hesaplanır. Burada, v_i, i. grubun serbestlik derecesi, S_i^2 i. grubun varyansı, $\overline{S}^2$ ise toplanmış varyans olup 4.6 numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\overline{S}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + (n_3-1)S_3^2 + ... + (n_k-1)S_k^2}{(n_1-1) + (n_2-1) + (n_3-1) + ... + (n_k-1)}$$

Hesaplanan χ^2-değeri Tablo D'den (k-1) serbestlik dereceli χ^2-değeri ile karşılaştırılır. Eğer hesaplanan test istatistiği tablo değerinden küçük ise grup varyanslarının homojenliğine karar verilir ve varyans analizi tekniği kullanılarak veriler analiz edilebilir.

Grup sayısının ve gruplardaki gözlem sayısının az olduğu durumlarda düzeltilmiş χ^2-değeri, $\chi^2_{düzeltilmiş} = \chi^2/c$ şeklinde hesaplanır. Burada, c, düzeltme faktörü olup şöyle hesaplanır.

$$c = 1 + \left[\frac{1}{3(k-1)}\right]\left[\sum \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\sum v_i}\right] \qquad ...(12.16)$$

ÖRNEK:

Yukarıdaki örnekte, Salmonella türü bakterilerin üretilmesi için hazırlanan A,B,C ve D tipi besi yerleri ile ilgili denemeden besi yerlerinin varyansları sırasıyla 4.3, 15.5, 1.3 ve 38.0 olarak bulunmuştu. Araştırıcı, varyansların homojenliğini Bartlett testini kullanarak da kontrol edebilir. 12.15 numaralı eşitlik kullanılarak test istatistiği şöyle hesaplanır:

$$\overline{S}^2 = \frac{(5-1)[4.3+15.5+1.3+38.0]}{4(5-1)} = \frac{236.4}{16} = 14.775$$

$$[\sum(v_i)]\ln\overline{S}^2 = (4+4+4+4)\ln(14.775) = 16(2.6929) = 43.087$$

S_i^2	$\ln S_i^2$	$v_i[\ln S_i^2]$
4.3	1.4586	5.8344
15.5	2.7408	10.9632
1.3	0.2624	1.0528
38.0	3.6376	14.5504

$$\sum v_i \ln S_i^2 = 32.4008$$

12.15 numaralı eşitlik kullanılarak;

$\chi^2 = 43.087 - 32.4008 = 10.6862$ olarak hesaplanır.

Hesaplanan χ^2 değeri (4-1)=3 serbestlik dereceli χ^2-dağılımı gösterir. Tablo D'den 3 serbestlik dereceli χ^2-dağılımında %5'lik alanın 7.815 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan χ^2-değeri tablo değerinden büyük olduğu için varyansları homojen olduğu kontrolü hipotezi reddedilir. Yani grup varyanslarının homojenlik ön şartı yerine gelmemiştir. Araştırıcı varyans analizi tekniğini kullanarak muamele ortalamaları arasındaki farlılığın önemli olup olmadığını kontrol edemez.

12.7.3. Levene'nin testi

Bu metotta varyansların homojenliği kontrol edilirken grupların ortalama sapmaları karşılaştırılır. Bunun için her gruptaki gözlemlerin kendi grup ortalamalarından olan sapmalarının mutlak değerleri bulunur. Bulunan sapmaların mutlak değerlerin ortalaması her grup için ortalama sapmadır. Her gruptaki gözlemlerin ortalamadan sapmalarının mutlak değerlerine varyans analizi uygulandığı zaman, grupların ortalama sapmaları arasındaki farklılığın tesadüften ileri gelip gelmediği anlaşılır.

ÖRNEK:

Salmonella türü bakterilerin üretilmesi için hazırlanan A,B,C ve D tipi besi yerlerinin bakterilerin üremesi üzerine etkisi olup olmadığını araştırmak üzere planlanmış bir denemeden aşağıdaki verilen verilerin elde edildiği daha önce verilmişti.

A	B	C	D
10	18	9	15
11	9	10	15
14	17	10	21
13	18	11	29
15	18	8	15

Grup varyanslarının homojen olup olmadığı Levene'nin metodu ile kontrol edilecek ise önce her muamele grubunda elde edilen verilerin grup ortalamasından olan sapmalarının mutlak değerleri bulunur.

$\lvert A-\bar{A}\rvert$	$\lvert B-\bar{B}\rvert$	$\lvert C-\bar{C}\rvert$	$\lvert D-\bar{D}\rvert$
2.6	2	0.6	4
1.6	7	0.4	4
1.4	1	0.4	2
0.4	2	1.4	10
2.4	2	1.6	4

Daha sonra ortalamadan sapmaların mutlak değerleri için varyans analizi tablosu aşağıdaki şekilde düzenlenir. Burada yapılan varyans analizi grupların ortalama sapmalarının karşılaştırılması içindir. F-değeri ise 14.45/4.00=3.61 olarak hesaplanır.

Varyasyon kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler ortalaması
Besi tipleri arası	3	43.35	14.45
Besi tipleri içi (hata)	16	64.02	4.00
Genel	19	107.37	

Tablo E'de 3 ve 16 serbestlik dereceli F-dağılımında %5'lik alanın 3.24 değerinde başladığı bulunur. Burada hesaplanan F-değeri 3.61 olduğuna göre kontrol hipotezi reddedilir. Yani, daha önceki metotlar kullanılarak yapılan kontrollerde olduğu gibi varyansların homojen olmadığı kararına varılmıştır.

12.8. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

12.4 numaralı bölümde Örnek 1'de verilen, 3 farklı draje kaplama yönteminin B_1 vitaminini muhafaza üzerine etkisini araştırmak için 3 tekerrürlü olarak düzenlemiş bir denemeden elde edilen verileri aşağıdaki gibi MINITAB paket programına girmiş olsun.

MINITAB paket programını kullanarak varyans analizi yapmak isteyen bir araştırıcı farklı komutlar kullanarak analizi yapabilir. Eğer kullanıcının amacı varyans analizini yaptıktan sonra hangi muameleler arasındaki farklılığın önemli olduğunu da kontrol etmek ise kullanması gereken komut "ONEWAY" komutudur. ONEWAY komutunu kullanarak varyans analizinin yapılabilmesi için denemeden elde edilen veriler bir sütuna alt alta işlenir. Diğer bir sütuna ise verilerin hangi muamele gruplarına dahil olduğunu belirtmek üzere muamele kodları girilir.

MTB > PRINT C1 C2

ROW	C1	KAPLAMA
1	24	1
2	25	1
3	26	1
4	19	2
5	21	2
6	23	2
7	26	3
8	28	3
9	30	3

3 kaplama yönteminin drajelerdeki B_1 vitamininin muhafazası üzerine etkisini araştırmak isteyen araştırıcı varyans analizini MINITAB'te yapabilmek için yanda verildiği şekilde bir sütuna tüm verilerini girmiştir. "KAPLAMA" adını verdiği diğer bir sütuna ise verilerin hangi kaplama yönteminden elde edildiğini belirtmek üzere "1,2,3" olmak üzere muamele numaralarını vermiştir.

Yukarıda açıklandığı gibi veriler işlendikten sonra kullanılması gereken komutlar aşağıda verilmiştir.

```
MTB > ONEWAY C1=C2;
SUBC> TUKEY;
SUBC> FISHER.
```

"ONEWAY C1=C2" komutu C2 sütunundaki muamele kodları dikkate alınarak verilerin analiz edileceğini belirtir. ";" konduktan sonra verilen "TUKEY" ve "FISHER" alt komutları ise Tukey (a) ve FISHER (12.5.1 numaralı bölümde verilen "asgari önemli fark" metodudur) çoklu karşılaştırma yöntemleri kullanılarak hangi muamele grupları arasındaki farklılığın önemli olduğunun kontrol edileceğini söyler.

Bu komutlar verildikten sonra MINITAB çıktısı aşağıdaki gibi olacaktır.

```
ANALYSIS OF VARIANCE ON C1
 SOURCE     DF     SS       MS       F       p
KAPLAMA      2   74.00    37.00   12.33   0.007
ERROR        6   18.00     3.00
TOTAL        8   92.00
                             INDIVIDUAL 95% CI'S FOR MEAN
                             BASED ON POOLED STDEV
LEVEL  N  MEAN   STDEV-------+---------+---------+---------
  1    3  25.000  1.000          (------*------)
  2    3  21.000  2.000 (------*------)
  3    3  28.000  2.000                (------*------)
                        -------+---------+---------+---------
POOLED STDEV =  1.732       21.0      24.5      28.0
```

Yukarıda görüldüğü gibi varyans analizi tablosundan sonra muamele grupları için tanıtıcı istatistikler verilmektedir. Ayrıca grup ortalamaları için %95 olasılıkla güven aralıkları da çıktıda bulunmaktadır. Yukarıdaki sonuçlar incelendiği zaman 12.4 numaralı bölümde örnek 1 için yapılan çözüm sonucunda da aynı sonuçlar bulunmuştur. MINITAB varyans analizi tablosunu verirken hesaplanan F-değerinin 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımına dahil olma ihtimalini de vermektedir. Bu ihtimal %5'ten (hatta %1'den) küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilir. Daha sonra ise çoklu karşılaştırma yöntemleri için sonuçlar çıktıda görülmektedir.

```
Tukey's pairwise comparisons

    Family error rate = 0.0500
Individual error rate = 0.0220

Critical value = 4.34

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

             1        2

    2   -0.340
         8.340

    3   -7.340  -11.340
         1.340   -2.660
```

12.5.3. numaralı bölümde Tukey (a) metodu açıklanırken tablo değerinin 4.34 olduğu belirtilmişti. Bu değer çıktıda kritik değer olarak verilmektedir. Çoklu karşılaştırma yöntemleri açıklanırken hesaplanan değer ile grup ortalamaları arasındaki farklılık karşılaştırılmıştı. MINITAB ise iki grup ortalaması arasındaki fark için güven aralığını verir. Örneğin 1. ile 2. kaplama yöntemleri arasındaki fark 4'tür. Eğer 12.5.3 numaralı bölümde hesaplanan 4.34 değeri bu farktan çıkarılırsa farka ait alt sınır (4-4.34=-0.34) bulunur. Bu sonuç yukarıda görülmektedir.). Eğer bu değer söz konusu farka eklenirse bu sefer de farka ait üst sınır yukarıda görüldüğü gibi 8.34 (4+4.43=8.34) olarak bulunur. Bu fark için hesaplanan güven sınırları arasında sıfır değeri olduğu için bu iki grup ortalaması arasındaki farkın tesadüfi olduğu sonucuna varılır. Diğer farklar için de aynı işlem yapılır. Örneğin yukarıdaki sonuçlarda 2 ve 3. kaplama yöntemleri ortalamaları arasındaki fark için güven aralığı (-11.34, -2.66) bulunmuştur. Bu güven aralığı sıfır değerini içermediği için bu iki kaplama yöntemi arasındaki farkın istatistik olarak önemli olduğu sonucuna varılır.

Daha sonra ise "FISHER" çoklu karşılaştırma yöntemi ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi olacaktır.

Fisher's pairwise comparisons

```
  Family error rate = 0.109
Individual error rate = 0.0500

Critical value = 2.448

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

          1        2

  2    0.538
       7.462

  3   -6.462  -10.462
       0.462   -3.538
```

Bu yöntemde de izlenecek yol yukarıda belirtildiği gibidir. Ortalamalar arası fark için hesaplanan güven aralıklarına bakıldığı zaman, FISHER yöntemine göre sadece 1 ve 3. kaplama yöntemleri arasındaki farkın önemli olmadığı görülmektedir.

Araştırıcı eğer komutlarını yukarı açıklandığı şekilde verirse çoklu karşılaştırma yöntemleri %5 seviyesinde yapılır. Karşılaştırmaları %1 seviyesinde yapmak için komutların aşağıdaki şekilde verilmesi gerekir. TUKEY ve FISHER yazıldıktan sonra yazılan 0.01 karşılaştırmaların %1 seviyesinde yapılacağını göstermektedir.

```
MTB > ONEWAY C1=C2;
SUBC> TUKEY 0.01;
SUBC> FISHER 0.01.
```

%1 seviyesinde yapılan çoklu karşılaştırma sonuçları ise aşağıda verilmiştir.

Tukey's pairwise comparisons

Family error rate = 0.0100

Individual error rate = 0.00421

Critical value = 6.33

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

	1	2
2	-2.330 10.330	
3	-9.330 3.330	-13.330 -0.670

Fisher's pairwise comparisons

Family error rate = 0.0233

Individual error rate = 0.0100

Critical value = 3.707

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

	1	2
2	-1.242 9.242	
3	-8.242 2.242	-12.242 -1.758

ÖRNEK 2:

MTB > PRINT C4 C5

ROW	C4	TUR
1	45	1
2	50	1
3	46	1
4	45	1
5	69	2
6	75	2
7	73	2
8	53	3
9	50	3
10	49	3
11	56	4
12	58	4
13	60	4
14	58	4
15	55	4

12.4. numaralı bölümde örnek 2'de verilen bir hastalığın 4 türünün sedimantasyon verileri yanda görüldüğü şekilde MINITAB paket programına işlendikten sonra araştırıcı aşağıdaki komutları vermelidir:

MTB > ONEWAY C4=C5;
SUBC> TUKEY;
SUBC> FISHER.

Bu komutlar verildikten sonra Örnek 2 için elde edilecek MINITAB çıktıları aşağıdaki gibidir:

Burada araştırıcının farkında olması gereken nokta şudur: 12.5.1 numaralı bölümde belirtildiği gibi MINITAB paket programı standart hatayı hesaplarken "n" değeri olarak karşılaştırılan gruplardaki gözlem sayısını dikkate alır. Fakat 12.5.1 numaralı bölümde çoklu karşılaştırma yöntemi bu örneğe uygulanırken gruplardaki gözlem sayılarının harmonik ortalaması kullanılmıştı. Orada verilen sonuçlar ile MINITAB çıktısındaki sonuçlar arasındaki fark bu sebepten kaynaklanmaktadır.

MTB > ONEWAY C4=C5;
SUBC> TUKEY;
SUBC> FISHER.

ANALYSIS OF VARIANCE ON C4

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
TUR	3	1256.20	418.73	77.37	0.000
ERROR	11	59.53	5.41		
TOTAL	14	1315.73			

```
                               INDIVIDUAL 95% CI'S FOR MEAN
                               BASED ON POOLED STDEV
LEVEL  N   MEAN   STDEV -----+---------+---------+---------
  1    4  46.500  2.380  (--*-)
  2    3  72.333  3.055                         (--*--)
  3    3  50.667  2.082     (--*--)
  4    5  57.400  1.949         (-*--)
                        -------+---------+---------+---------
POOLED STDEV =  2.326        50        60        70
```

Tukey's pairwise comparisons

Family error rate = 0.0500

Individual error rate = 0.0118

Critical value = 4.26

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

	1	2	3
2	-31.186		
	-20.481		
3	-9.519	15.945	
	1.186	27.388	
4	-15.601	9.816	-11.851
	-6.199	20.051	-1.616

```
Fisher's pairwise comparisons
   Family error rate = 0.183
Individual error rate = 0.0500
Critical value = 2.201
Intervals for (column level mean) - (row level mean)
            1         2         3

  2   -29.744
      -21.923

  3    -8.077    17.486
       -0.256    25.847

  4   -14.335    11.194   -10.473
       -7.465    18.673    -2.994
```

MTB > ONEWAY C4=C5;
SUBC> TUKEY 0.01.

Araştırıcı komutları yandaki şekilde vermişse çoklu karşılaştırma yukarıda da açıklandığı gibi %1 seviyesinde yapılacaktır.

%1 seviyesinde TUKEY yöntemi kullanılarak yapılan çoklu karşılaştırma sonuçları aşağıdaki gibidir.

```
Tukey's pairwise comparisons
   Family error rate = 0.0100
Individual error rate = 0.00219
Critical value = 5.62
Intervals for (column level mean) - (row level mean)
            1         2         3

  2   -32.894
      -18.772

  3   -11.228    14.118
        2.894    29.215

  4   -17.102     8.182   -13.485
       -4.698    21.685     0.018
```

BÖLÜM XIII
PARAMETRİK OLMAYAN TEST YÖNTEMLERİ

13.1. GİRİŞ

Daha önceki bölümlerde muamelelerin karşılaştırılması için parametrik test yöntemlerinin nasıl uygulanacağı açıklanmıştı. Fakat bir deneme sonunda elde edilen veriler her zaman parametrik test yöntemlerinin uygulanması için uygun olmayabilir. Çünkü parametrik test yöntemleri kullanılarak güvenilir sonuçların elde edilmesi bazı varsayımların yerine getirilmiş olmasına bağlıdır. Bu varsayımlar yerine getirilmemiş ise parametrik olmayan test yöntemlerinin kullanılması gerekir. Parametrik olmayan test yöntemlerinde örneklerin temsil ettiği populasyonların parametreleri ve dağılım fonksiyonları belirtilmez. Bu sebeple parametrik olmayan test yöntemleri birçok kitapta "Dağılımdan bağımsız (Distribution Free)" test yöntemleri olarak verilir.

Hangi durumlarda parametrik olmayan test yöntemlerinin uygulanması gerektiği aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. Normal dağılım gösteren bir populasyondan çekilen ortalamaların dağılımı normal dağılım gösterir. Fakat örneklerin çekildiği populasyon normal dağılım göstermiyorsa çekilen örneklerden hesaplanan ortalamaların dağılımları da normal değildir. Normal dağılıma yaklaşması için örnek genişliğinin en az 30 olması gerekir. Eğer üzerinde çalışılan örneklerin genişliği 30'dan küçük ise ve örneği oluşturan bireylerin dağılımı bilinmiyorsa parametrik olamayan test yöntemleri kullanılır.

2. Bir denemeden elde edilen verilerin şekli parametrik olmayan test yöntemlerinin kullanılmasını gerektirebilir. Bazı

denemelerde elde edilen veriler "evet-hayır", "iyi-orta-kötü" veya "1-2-3" şeklinde olabilir. Bu gibi durumlarda ki-kare testi, veya diğer parametrik olmayan testlerden biri kullanılır.

3. Bazı durumlarda bir örnekteki verileri tanımlamak için ortanca değerin kullanılması daha güvenilir olabilir. Ortanca değerin örneği tanımlamak için daha güvenilir olduğu durumlarda da parametrik olmayan test yöntemleri kullanılır.

4. Örneğin tesadüfen alındığı populasyon hakkında yeteri kadar bilgi olmadığı durumlarda da parametrik olmayan test yöntemleri kullanılır.

Birçok parametrik olmayan testte en önemli ön şart, ele alınan değişkenin sürekli olmasıdır. Bu şartın yerine getirilmemiş olması testin etkinliğini pek etkilemez. Sıra değerlerini (ranklarını) esas alan parametrik olmayan testlerin etkinliği %95.5'tir. Bunun anlamı şudur: parametrik testin ön şartları yerine getirildiği zaman parametrik test uygulanınca etkinlik 100 ise, bu halde parametrik olmayan test uygulanmış ise etkinlik 95.5'tir. Bir başka ifadeyle, $n=100$ gözlemle parametrik testle elde edilen etkinlik parametrik olmayan testle $n \cong 105$ gözlemle elde edilir. Parametrik testin ön şartları yerine getirilmemişse parametrik olmayan testlerin etkinliği daha fazladır. Buradan şu sonuca varılabilir:

"Parametrik testin ön şartları yerine getirilmemişse veya yerine getirildiği test edilemiyor ve yerine getirildiğinden kuşkulanılıyorsa parametrik olmayan test uygulanmalıdır."

Bu kitabın kapsamı içinde, eş-yapma t-testinin karşılığı olan parametrik olmayan testlerden İşaret testi, Sıralı-İşaret testi, Wilcoxon testi ve bağımsız iki grubun karşılaştırılması için kullanılan t-testinin parametrik olmayan karşılığı olan Mann-Whitney-Wilcoxon, U testi ve medyan testi açıklanacaktır

13.2. İşaret Testi

İşaret testi bir örnekten elde edilen verilerin daha önceden bilinen bir ortancaya karşı kontrolünde veya bağımlı iki grubun karşılaştırılmasında kullanılır.

13.2.1. Örneğin Bilinen Ortanca ile Testi

Örnekten hesaplanan ortancanın daha önceden bilinen bir ortancaya karşı kontrolü için önce örnekte gözlenen verilerin söz konusu ortancadan farkları bulunur. Bu sonuçlara negatif ve pozitif oluşlarına göre "+" ve "-" işaretleri verilir. Bulunan farkların büyüklükleri önemli değildir. Çünkü bu testte sadece farkların işareti dikkate alınır. Bu sebeple bu teste "İşaret testi" adı verilmiştir. "n" birey içeren bir örnekte pozitif farkların (X_i-M_0) sayısı "S_+" ve negatif farkların (X_i-M_0) sayısı "S_-" ile gösterilirse;

S_++ S_-=n'dir.

Örneği oluşturan değerlerin daha önceden bilinen ortancadan olan farkları bulunduğu zaman hesaplanan farklar arasında sıfır değeri varsa o gözlem dikkate alınmaz. Çünkü söz konusu gözlem ortancaya eşittir.

Bu testte kontrol edilecek olan hipotezler M medyanı göstermek üzere aşağıdaki şekilde oluşturulur:

1. Çift taraflı kontrol:

H_0: M = M_0

H_1: M ≠ M_0

2. Tek taraflı kontrol:

H_0: M = M_0	veya	H_0: M = M_0
H_1: M > M_0		H_1: M < M_0

Eğer örnekte gözlenen pozitif farkların sayısı, negatif farkların sayısına aşağı yukarı eşitse kontrol hipotezi reddedilemez. Hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek için Tablo K kullanılır. Tablo K, gözlenen işaret sayılarından daha ekstrem sayıların olma ihtimalini verir. Bu tek taraflı bir ihtimaldir. Çift taraflı kontrol yapılırken tablodan bulunan ihtimalin iki katının alınması gerekir. Tablodan bulunan değer daha önceden kararlaştırılmış α'dan daha küçük ise kontrol hipotezi reddedilir.

ÖRNEK:

Zihinsel özürlü 10 çocuğa uygulanan bir eğitim programında çocukların kendilerine bakım yapıp yapamadıkları 10 puan üzerinden değerlendirilmiş ve aşağıdaki puanlar elde edilmiştir. Çocukların bu eğitim programı sonunda aldıkları puan 7 ve daha yukarı ise çocukların kendilerine bakmaya yeterli olduğu kararına varılacaktır. Çocukların bu eğitim programında aldıkları puanların ortancasının 7'den daha büyük olduğu söylenebilir mi?

Puanlar	Puan-Ortanaca(7)	İşaret
8	1	+
7	0	0
6	-1	-
5	-2	-
8	1	+
4	-3	-
3	-4	-
8	1	+
8	1	+
10	3	+

Burada araştırıcı örneğin alındığı populasyondaki ortancanın 7 olduğu kontrol hipotezini ortancanın 7'den büyük olduğu hipotezine karşı test edecektir, yani kurulması gereken hipotezler;

H_0: M = 7
H_1: M > 7'dir.

Yukarıda verildiği gibi çocuklardan birinin aldığı puan ortancaya eşit olduğu için fark sıfır bulunmuştur. Bu gözlem kontrol yapılırken dikkate alınmayacaktır. Geriye kalan 9 gözlem için $S_+=5$ ve $S_-=4$ olarak bulunmuştur. Tablo K'dan birey sayısı 9 olduğu zaman 5 ve daha fazla pozitif fark gözlenmesi olasılığı %50'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını $\alpha=0.05$ olarak belirlemiş ise kontrol hipotezi kabul edilir. Yani 10 öğrencinin puanları, ortanca değeri 7'den büyük bir populasyondan gelmemektedir.

13.2.2. Bağımlı İki Grubun Karşılaştırılması

Bir denemede dikkate alınan gruplar bağımlı, yani birinci ve ikinci gruptaki bireyler aynı ise bu durumda $D_i=X_{1i}-X_{2i}$ şeklinde hesaplanacak farkların ortanca değerinin istenen ortanca değerden (genellikle, $M_0=0$) farklı olup olmadığı işaret testi ile kontrol edilebilir. Burada S_+, pozitif farkların, S_- ise negatif farkların sayısıdır. Bu ikisinin toplamı örnekteki gözlem sayısına eşittir. Bir önceki bölümde belirtildiği gibi fark sıfır ise dikkate alınmaz. Bu testte araştırıcının kontrol edeceği hipotezler aşağıdaki şekildedir:

1. Çift taraflı kontrol:

H_0: $M_D = M_0$
H_1: $M_D \neq M_0$

2. Tek taraflı kontrol:

H_0: $M_D = M_0$ veya H_0: $M_D = M_0$
H_1: $M_D > M_0$ $\quad$ H_1: $M_D < M_0$

13.2.1 numaralı bölümde belirtildiği gibi, hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek için Tablo K kullanılır.

ÖRNEK:

Bir hastanede rastgele 8 hastanın ilaç verilmeden önceki ve sonraki nabız sayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur. Hastaların aldıkları ilacın nabız düşürücü etkisinin olduğu söylenebilir mi?

İlaçtan önce (X_1)	İlaçtan sonra (X_2)	$D_i=X_{2i}-X_{i1}$	İşaret
83	75	-8	-
82	78	-4	-
79	77	-2	-
78	74	-4	-
85	80	-5	-
83	88	5	+
82	78	-4	-
79	72	-7	-

Burada araştırıcı, kontrol ve karşıt hipotezlerini aşağıdaki şekilde kurar.

H_0: $M_D = 0$

H_1: $M_D < 0$

Yukarıda verildiği gibi farklar hesaplandığı zaman $S_+=1$ ve $S_-=7$ olarak bulunmuştur. Tablo K'dan gözlem sayısı 8 olduğu zaman 7 ve daha fazla negatif fark gözleme olasılığı 0.0352'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını $\alpha=0.05$ olarak belirlemiş ise tablodan bulunan olasılık I. tip hata olasılığından küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilir. Yani hastaların kullandığı ilacın nabzı düşürücü etkisi olduğu kararına varılır.

İşaret testi uygulanırken eğer örnek genişliği yeteri kadar büyük ise (yani, örnek genişliği 20'den büyük ise) normal dağılım yaklaşımı kullanılabilir. Kontrol hipotezi geçerli ise gözlemlerin yarısı medyandan büyük yarısı da medyandan küçük olacaktır. Yani "+" ve "-" işaretlerin sayısı teorik olarak eşit olacaktır. Bunların olasılıkları eşit yani $\pi=0.5$'tir. İki hal söz konusu olduğu için bu parametreleri $\pi=0.5$ ve n olan bir binom dağılımı gösterir. Bu dağılımın ortalaması 0.5n ve standart sapması $\sigma = 0.5\sqrt{n}$'dir. Simetrik dağılım olduğu için n=20 veya daha büyük olduğunda yaklaşık normal dağıldığı kabul edilir. Bu durumda ele alınan S_+ (veya S_-) toplamının ortalaması 0.5n ve standart sapması $\sigma = 0.5\sqrt{n}$ olan normal dağılımdan gelip gelmediği kontrol edilir. Örnekte bulunmuş olan S_+ standardize edilecek olursa Z-dağılımı gösterir. Ve Z-değeri (sağ taraftan kontrol için) aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$Z_+ = \frac{S_+ - 0.5 - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıdaki eşitlikte 0.5n normal dağılımın ortalaması olup $\mu=np$ eşitliğinden gelmektedir. Eşitlikteki 0.5 sabiti süreklilik varsayımının sağlanması için kullanılır.

Eğer sol taraftan kontrol yapılacak ise bu durumda negatif farkların sayısı standardize edilir.

$$Z_- = \frac{S_- - 0.5 - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}$$

13.3. Wilcoxon Sıralı İşaret Testi

İşaret testi açıklanırken, sadece farkların pozitif veya negatif oluşları dikkate alındığı için bilgi kaybına sebep olduğu belirtilmişti. Wilcoxon-Sıralı-İşaret testi farkların büyüklüklerini de dikkate aldığı için, bu test uygulanarak varılacak kararlar işaret testinde varılan kararlara nazaran daha güvenilirdir.

Wilcoxon-sıralı-işaret testinde de araştırıcının kontrol edeceği hipotezler daha önce de belirtildiği gibi eğer örnek ortancası hakkında ise;

1. Çift taraflı kontrol:

H_0: $M = M_0$
H_1: $M \neq M_0$

2. Tek taraflı kontrol:

H_0: $M = M_0$ veya H_0: $M = M_0$
H_1: $M > M_0$ H_1: $M < M_0$

şeklinde, eğer bağımlı iki grubun karşılaştırılması hakkında ise;

1. Çift taraflı kontrol:

H_0: $M_D = M_0$
H_1: $M_D = M_0$

2. Tek taraflı kontrol:

H_0: $M_D = M_0$ veya H_0: $M_D = M_0$
H_1: $M_D > M_0$ H_1: $M_D < M_0$

şeklinde oluşturulur.

Wilcoxon-sıralı-işaret testi uygulanırken önce farklar bulunur. İşaret testinde de belirtildiği gibi eğer farklar arasında sıfır değeri varsa bu gözlem dikkate alınmaz. Daha sonra mutlak olarak küçükten büyüğe doğru sıralanır ve sıra değeri (rank) verilir. Daha sonra ranklar ilk bulunan farkların pozitif veya negatif oluşuna göre gruplandırılarak pozitif ve negatif rankların toplamı bulunur. Pozitif rankların toplamı T_+, negatif rankların toplamı da T_- ile gösterilirse 13.1 numaralı eşitlik yazılabilir.

$$T_+ + T_- = \frac{n(n+1)}{2} \qquad ...(13.1)$$

Yani pozitif ve negatif rankların toplamı 1'den n'e (n gözlem sayısı olmak üzere) tamsayıların toplamına eşittir. Pozitif ve negatif rankların toplamı bulunduktan sonra Tablo L'den, pozitif rankların toplamının hesaplanan kadar veya daha fazla (veya, hesaplanan negatif rankların toplamının hesaplanan kadar veya daha az) olma olasılığı bulunur. Tablodan bulunan olasılık araştırıcının kararlaştırdığı I. tip hata olasılığından daha küçük ise kontrol hipotezi reddedilir. Eğer yapılan kontrol çift taraflı bir kontrol ise Tablo L'den bulunan olasılığın iki katı alınır.

ÖRNEK 1:

13.2.1 numaralı bölümde, zihinsel özürlü 10 çocuğa uygulanan bir eğitim programında çocuklara verilen puanların ortancasının 7'den daha büyük olup olmadığı işaret testi ile kontrol edilmişti. Bu kontrol Wilcoxon-işaret testi kullanılarak da aşağıda açıklandığı şekilde yapılır.

Puanlar	Puan-(7)	Rank |puan-7|
8	1	3.0
7	0	-
6	-1	3.0
5	-2	6.0
8	1	3.0
4	-3	7.5
3	-4	9.0
8	1	3.0
8	1	3.0
10	3	7.5

Burada araştırıcı örneğin temsil ettiği populasyona ait ortancanın 7 olduğu kontrol hipotezini ortancanın 7'den büyük olduğu hipotezine karşı test edecektir, yani kurulması gereken hipotezler;

H_0: M = 7

H_1: M > 7'dir.

Farkların mutlak değerleri küçükten büyüğe doğru sıralanıp ranklar bulunur. Ranklar bulunurken, yukarıdaki örnekte olduğu gibi eğer eşit değere sahip farklar varsa önce bunlara farklı olsalardı alacakları ranklar verilir. Daha sonra bu rankların ortalaması alınarak söz konusu farkın rankı bulunmuş olur. Yani, yukarıdaki örneğimizde mutlak değer olarak 5 tane "1" vardır. Bu farklara 1'den 5'e kadar rank verilir. Daha sonra bu ranklar toplanır, yani 1+2+3+4+5=15 olur. Bulunan bu toplam 5'e bölünerek "1" değerine ait rank yukarıda da verildiği gibi "3.0" olarak hesaplanır. Örnekte birbirine eşit olan farklar için rank bu şekilde bulunmuştur. Yani 2 olarak bulunan farkın rankı 6, iki tane 3 gözlemi için önce "7" ve "8" değerleri rank olarak verilmiş ve daha sonra (7+8)/2=7.5, "3" değerinin rankı olarak kullanılmıştır.

Ranklar bulunduktan sonra puan-ortanca farkı pozitif ve negatif olan rankların toplamı aşağıdaki şekilde bulunur.

$T_{+}=3.0+3.0+3.0+3.0+7.5=19.5$
$T_{-}=3.0+6.0+7.5+9.0=25.5$

13.1 numaralı eşitlikte verildiği gibi (sıfır fark dikkate alınmadığı için) 9 birey için hesaplanan T_{+} ve T_{-} değerlerinin toplamı 1'den 9'a kadar sayıların toplamına (yani, 9(9+1)/2=45.0) eşittir. Tablo L'den, n=9 gözlem içeren bir örnekte pozitif rankların toplamının 19.5 veya daha büyük olması olasılığı (0.367+0.410)/2=0.3885 olarak bulunur. Eğer araştırıcı kontrolünü %5 seviyesinde yapıyorsa, bulunan olasılık %5'ten büyük olduğu için kontrol hipotezi reddedilemez. Yani çocukların puanlarına ait ortanca 7'den büyük değildir.

ÖRNEK:

Bir hastanede rastgele 8 hastanın ilaç verilmeden önceki ve sonraki nabız sayıları arasındaki fark işaret testi ile kontrol edilmişti. Wilcoxon-sıralı-işaret testi kullanılarak ise aşağıdaki şekilde kontrol edilir.

İlaçtan önce (X_1)	İlaçtan sonra (X_2)	$D_i=X_{2i}-X_{i1}$	Rank$\|X_{2i}-X_{i1}\|$
83	75	-8	8.0
82	78	-4	3.0
79	77	-2	1.0
78	74	-4	3.0
85	80	-5	5.5
83	88	5	5.5
82	78	-4	3.0
79	72	-7	7.0

Burada araştırıcının kontrol ve karşıt hipotezleri aşağıdaki gibidir:

$$H_0: M_D = 0$$
$$H_1: M_D < 0$$

Ranklar bulunduktan sonra pozitif ve negatif D_i'lerin ranklarına ait toplam aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T_+=5.5$$
$$T_- =8.0+3.0+1.0+3.0+5.5+3.0+7.0=30.5$$

Tablo L'den, n=8 gözlem içeren bir örnekte negatif D_i'lerin rankları toplamının 30.5 veya daha küçük olması olasılığı (0.039+0.055)/2=0.047 olarak bulunur. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını $\alpha=0.05$ olarak belirlemiş ise, tablodan bulunan olasılık küçük olduğu için işaret testinde de olduğu gibi kontrol hipotezi reddedilir. Yani hastaların kullandığı ilacın nabzı düşürücü etkisi olduğu kararına varılır.

13.4. Mann-Whitney-Wilcoxon Testi

Mann-Whitney-Wilcoxon testi X ve Y gibi bağımsız iki grup arasındaki farklılığın önemli olup olmadığını kontrolde kullanılan t-testinin parametrik olmayan karşılığıdır. Bu test kullanılarak iki bağımsız grup karşılaştırılırken araştırıcı hipotezlerini aşağıdaki şekilde kurabilir:

1. Çift taraflı kontrol:

H_0: $M_x = M_y$
H_1: $M_x \neq M_y$

2. Tek taraflı kontrol:

H_0: $M_x = M_y$ veya H_0: $M_x = M_y$
H_1: $M_x > M_y$ H_1: $M_x < M_y$

Mann-Whitney-Wilcoxon testinde ilk olarak grup farkını dikkate almaksızın gözlemler büyüklüklerine göre sıralanır. Yani, X grubundaki m tane gözlem ile Y grubundaki n tane gözlem birleştirilir. Bu durumda toplam gözlem sayısı N=m+n'dir. Daha sonra gözlemlere rank verilir. Ranklar bulunduktan sonra her gruba ait rank toplamı bulunur. X grubundaki rankların toplamı T_x ve Y grubundaki rankların toplamı T_y ile gösterilecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$T_x + T_y = \frac{N(N+1)}{2} \qquad ...(13.2)$$

Bu eşitlik

$$T_x = \frac{N(N+1)}{2} - T_y$$ şeklinde de yazılabilir.

m ≤ n olmak üzere T_x ve T_y (m birey içeren grup T_x olarak alınır.)'nin olasılıkları Tablo M'de bulunabilir. Tablo M 4<m ≤n ve m ≤n≤10 için düzenlenmiştir. Daha büyük m ve n değerleri için olasılıklar başka kaynaklardan bulunabilir. Eğer "m" hacimli gruba X denirse Tablo M'nin kullanılması daha kolaydır. Eğer m=4 ve n=5 ise ve bu değerlerin sıralanışı;

X X X X Y Y Y Y

şeklinde ise T_x=10 ve T_y=35'tir. Tablo T_x'e göre düzenlenmiştir. Kontrol ve karşıt hipotezler aşağıdaki gibi olsun:

H_0: $M_x = M_y$
H_1: $M_x < M_y$

Bu durumda T_x soldan tek taraflı test edilecektir. Ele alınan örnekte 9 gözlem vardır. Kontrol hipotezi geçerli olduğunda yukarıdaki gibi sıralanışın elde edilmesi 9'un 4'le olan kombinasyonlarında tek bir haldir. Bu kombinasyonların sayısı $C(9,4)=\frac{9!}{(9-4)!4!}=126$'dır. Yukarıdaki gibi bir sıralanışın olasılığı $\frac{1}{126}=0.008$'dir. Tablo M'den de $T_x=10$ için bu olasılık bulunur.

Eğer sıralanış aşağıdaki şekilde ise;

Y Y Y Y Y X X X X

$T_x=30$'dur. Bu durumda T_x sağdan test edilir. Tablodan bunun olasılığı da 0.008 olarak bulunur.

Eğer sıralanış Y Y Y X Y X Y X X şeklinde ise $T_x=27$'dir. Karşıt hipotez H_1: $M_x > M_y$ şeklinde ise sağdan teste 27'ye karşılık gelen olasılık 0.056'dır. Bunun anlamı yukarıdaki gibi ve sağdan olan daha aykırı sıralanışların olasılığı 0.056'dır. Eğer karşıt hipotez H_1: $M_x \neq M_y$ şeklinde ise yani iki taraflı ise tablo değeri tablo değerinin iki katı (0.056*2=0.112) alınır.

ÖRNEK:

Çocuklarda herhangi bir hastalıkta kandaki bir iz elementin (bakır, çinko vs.) miktarının ppm olarak yükselip yükselmediğini inceleyen bir araştırıcı polikliniğe gelen 7 hasta ve 10 normal çocuğun kanında iz element miktarını aşağıdaki gibi bulmuş olsun.

Kontrol	Hasta
130	600
150	160
90	200
125	145
120	665
80	415
110	310
175	
155	
135	

Hasta ve normal gruptaki varyanslar hesaplanıp gerekli test yapıldığında varyansların homojen olmadığı sonucuna varılır. Çünkü hasta grubunda varyans büyüktür. Hasta olarak teşhis konanların hastalıkları farklı aşamalarda olduğundan bu beklenen bir durumdur. Buna göre bu iki grup t-testi ile karşılaştırılmamalıdır. Mann-Whitney-Wilcoxon testini uygulamak yerinde olur. Bunun için gruplar dikkate alınmadan veriler aşağıdaki gibi sıraya konarak sıra değerleri (rankları) verilir (Koyu yazılan değerler X grubuna, yani m=7 olan gruba aittir.).

80	90	110	120	125	130	135	**145**	150	155
1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10

160	175	**200**	**310**	**415**	**600**	**665**
11	12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**

Örnekte m=7, n=10'dur. Buna göre T_x olarak örnek hacmi küçük olan hasta grubunun ranklarının (sıra değerlerinin) toplamı alınacaktır. Bu durumda T_x ve T_y'nin sonuçları T_x=94 ve T_y=59 olarak bulunur ve 13.2 numaralı eşitlik doğrultusunda (17*18/2=153), T_x+T_y=153'tür.

Burada kurulan kontrol ve karşıt hipotezin aşağıdaki gibi olması uygundur:

H_0: $M_x = M_y$
H_1: $M_x > M_y$

Buna göre T_x sağdan test edilmelidir. Tablo M'den sağdan T_x'in 94 ve daha aykırı olanların olasılığı 0.001'dir. Buna göre α=0.01 için kontrol hipotezi reddedilir. Hasta grupta iz element miktarı normal gruptan yüksektir.

Sıra değerlinin toplamından test birimi olarak U_m ve U_n değerleri de hesaplanabilir. Bu sebepten dolayı Mann-Whitney-Wilcoxon testine U testi de denir.

U_m ve U_n değerleri 13.3 ve 13.4 numaralı eşitlikler kullanılarak hesaplanır.

$$U_m = T_x - m(m+1)/2 \qquad ...(13.3)$$
$$U_n = T_y - n(n+1)/2 \qquad ... (13.4)$$

Buna göre; U_m=94-7(7+1)/2=66 ve U_n =59 -10(10+1)/2=4 olarak bulunur. Araştırıcı 13.3 ve 13.4 numaralı eşitlikleri kullanarak U_m ve U_n değerlerini doğru olarak hesaplamışsa $U_m+U_n=(m)(n)$ olmalıdır. Böylece araştırıcı yaptığı hesaplamaların kontrolünü de yapmış olur.

U_m ve U_n'nin diğer bir anlamı ise, grup farklılığı dikkate alınmaksızın sıraya konmuş verilerde, bir grubun her değerinden önce diğer gruptan bulunanların sayısı toplamıdır. Buna göre hasta grubu verisi olan 145 değerinden önce 7 tane kontrol grubundan veri vardır, 160'tan önce 9; 200, 310, 415, 600 ve 665 rakamlarından her birinden önce 10'ar tane olmak üzere toplam 66 sayı vardır. Bu da U_m'dir. Diğer taraftan 150 kontrol grubu değerinden önce 1, 155 değerinden önce 1, 175 değerinden önce de 2 olmak üzere toplam 4 veri vardır. Bu U_n'dir. Hesaplanan U_m ve U_n değerlerinden küçük olanı test birimi olarak seçilir. Tablo N'de verilen m ve n gözlem sayılarındaki kritik U değerinden küçük ise kontrol hipotezi reddedilir.

Burada kontrol yapılırken Tablo N kullanılacaksa araştırıcı test değeri olarak U_n=4 değerini seçer. Tablo N'den tek taraflı %1 seviyesindeki U değeri 11 olup hesaplanan değerden büyüktür. Bu durumda araştırıcı kontrol hipotezini reddeder.

Mann-Whitney-Wilcoxon testinde de eğer her bir gruptaki birey sayısı m,n>20 ise normal dağılım yaklaşımı kullanılır. Eğer T_x kullanılarak kontrol yapılıyorsa bunların ortalaması m(N+1)/2 ve standart sapması $\sqrt{mn(N+1)/12}$'dir. Z-transformasyonu aşağıda verildiği şekilde yapılarak standart normal dağılıma dönüştürülmüş olur (eşitliklerde; N=m+n).

$$Z_{x,sol} = \frac{T_X + 0.5 - m(N+1)/2}{\sqrt{mn(N+1)/12}} \qquad Z_{x,sağ} = \frac{T_X - 0.5 - m(N+1)/2}{\sqrt{mn(N+1)/12}}$$

Eğer U değerleri hesaplanmış ise bu durumda Z-transformasyonu aşağıda verildiği şekilde yapılır.

$$Z = \frac{U_m + 0.5 - 0.5mn}{\sqrt{mn(N+1)/12}}$$

Z-değerleri bulunduktan sonra Z-dağılımı tablosu kullanılarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar verilir.

13.5. Medyan Test

İki bağımsız grup "medyan testi" kullanılarak da karşılaştırılabilir. Eğer iki bağımsız grup ortanca değerleri ayını populasyonlardan rastgele alınmış örnekler ise her gruba ait ortanca değer populasyona ait ortancanın bir tahminidir. Durumun ele alınan örnekler için kabul edilip edilemeyeceği kontrol hipotezi şu şekilde kurularak kontrol edilebilir. Yani kurulacak kontrol hipotezi;

H_0: İki örneğin rastgele alındığı populasyonların ortancaları eşittir

şeklinde olacaktır. Kontrol hipotezi geçerli ise populasyona ait ortancadan büyük ve küçük olan bireylerin sayısı birleştirilmiş örnekte her iki grupta da aynı olmalıdır. Eğer birleştirilmiş verilerden hesaplanan ortanca değer "M" ile belirtilirse birinci ve ikinci grupta M'den daha büyük olan verilerin sayısı p=1/2 olan bir binom dağılımı gösterecektir. Diğer taraftan eğer gruplar ortancaları farklı populasyonları temsil ediyorlarsa, gruplardan birinde verilerin çoğunluğunun değerinin M'nin üzerinde veya altında olması beklenir. n_i birey içeren grupta M'nin değerini geçen gözlemelerin sayısı a_i (i=1,2) ile gösterilirse aşağıdaki şekilde iki yanlı bir tablo oluşturulabilir. Verilerin sürekli olması halinde, büyüklüklerine göre sıralandığında aynı sırayı alanların olmaması beklenir. Ölçümlerde yapılan yuvarlaklaştırmadan dolayı birbirine eşit olan değerlerin bulunması testi fazla etkilemez. Ortak medyan verilerden biri ise birçok kitapta tavsiye edildiği şekilde değerlendirme dışı bırakılır.

	Grup1	Grup2
Ortancadan büyükler	a_1 (a)	a_2 (b)
Ortancadan küçükler	n_1- a_1 (c)	n_2- a_2 (d)

Birleştirilmiş örnekteki gözlem sayısı 20'den az ise χ^2-testi yerine Fisher-exact uygulanır. Gözlem sayıları toplamı 20'den fazla

60'dan az ise süreklilik için YATES düzeltmesi yapılır. Yani, 11.4 numaralı eşitlikte verildiği gibi gözlenen ve beklenen frekanslar arası farkın mutlak değerinden 0.5 çıkarılarak χ^2-değeri hesaplanır. Veya aşağıdaki eşitlik kullanılarak düzeltilmiş χ^2-değeri bulunur.

$$\chi^2 = \frac{N(|a.d - b.c| - \frac{N}{2})^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \qquad ...(13.5)$$

Eşitlikte N, birleştirilmiş örnekteki gözlem sayısıdır (Ortancaya eşit olan veriler değerlendirme dışı bırakıldıktan sonra kalan gözlem sayısıdır.). Bu tablo gruplardaki birey sayısına ve verilerin M'den büyük veya küçük oluşlarına göre hazırlanmıştır.

Hesaplanan χ^2-değeri, H_0 doğru olduğu zaman 1 serbestlik dereceli χ^2-dağılımı gösterir. Hesaplanan χ^2-değerinin 3.84'ü (3.84, Tablo D'den görülebileceği gibi 1 serbestlik dereceli χ^2-dağılımında %5'lik alanın başladığı χ^2-değeridir.) geçen değerleri %5 seviyesinde kontrol hipotezinin reddedilmesini gerektirir, yani grupların çekildiği populasyonların ortanca değerleri aynı değildir sonucuna varılır. Bu testin uygulanması kolaydır, fakat işaret testinde olduğu gibi bilgi kaybına sebep olur. Çünkü sadece birleştirilmiş verilerden hesaplanan ortancadan büyük veya küçük oluşları dikkate alınmaktadır. Bu farkın miktarı dikkate alınmamaktadır.

ÖRNEK:

Çocuklarda herhangi bir hastalıkta kandaki bir iz elementin (bakır, çinko vs.) miktarının ppm olarak yükselip yükselmediğini araştırmak isteyen bir araştırıcının polikliniğe gelen 15 hasta ve 20 normal çocuğun kanında ölçtüğü iz element miktarları aşağıdaki gibidir.

Kontrol		Hasta
130	145	600
135	140	160
140	135	200
145	160	140
155	150	665
150	90	415
125	120	310
80	110	400
175	155	600
135	135	300
145	130	650
125	140	670
	155	140

Bu iki grup "medyan" testi kullanılarak karşılaştırılacak olursa ilk olarak iki grubun birleştirilip ortak bir ortanca değerin bulunması gerekir. Bunun için ilk olarak iki grup birleştirilir ve büyüklüklerine göre aşağıdaki şekilde sıralanır (koyu olarak yazılan veriler hasta gruba ait verilerdir.).

80 90 110 120 125 125 130 130 135 135 130
135 140 140 140 **140** **140** 145 145 145 150 150
155 155 155 160 **160** 175 **200** **300** **310** **400**
415 **600** **600** **650** **665** **670**

Büyüklüklerine göre sıralanmış verilerde ortanca değer 145 olarak bulunur. Buna göre iki tane 145 gözlemi değerlendirme dışı bırakılarak N=35 alınır. Birleştirilmiş veriler için ortanca değer hesaplandıktan sonra "normal" ve "hasta" grupta bu ortanca değerden büyük ve küçük olanların sayısı belirlenerek aşağıdaki gibi iki yanlı tablo oluşturulur.

	Normal	Hasta
Ortancadan büyükler	7	11
Ortancadan küçükler	15	2

Yukarıda oluşturulan iki yanlı tablo için ki-kare değeri 13.5 numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanacak olursa 7.128 olarak bulunur. Bu da Tablo D'de 1 serbestlik dereceli %5'deki ki-kare değerinden (3.84'ten) büyük olduğu için kontrol hipotezinin reddedilmesini gerektirir.

13.6. Fisher'in Exact Testi

Bazı durumlarda veriler küçük örneklerden toplanabilir. Bu veriler kullanılarak iki yanlı tablolar oluşturulduğu zaman χ^2-testi uygulamak güvenilir olmayabilir. Çünkü χ^2-testinin uygulanabilmesi için beklenen frekanslar hesaplandığı zaman bunların büyük kısmının 5'den az olduğu görülür. Bu da χ^2-kontrolünün güvenilirliğini azaltır. Bu gibi durumlarda Fisher'in exact testi kullanılır. İki yanlı tablo aşağıdaki şekilde oluşturulmuş ise bu tablodaki gözlemlerin ele alınan faktörlerin bağımsız olduğu bir populasyondan çekilme olasılığı 13.6 numaralı eşitlikten hesaplanır.

	A_1	A_2	Toplam
B_1	a	b	a+b
B_2	c	d	c+d
Toplam	a+c	b+d	N

$$P = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{a!b!c!d!N!} \qquad ...(13.6)$$

Daha sonra gözlenen frekanslardan daha ekstrem hallerin olasılıkları hesaplanır. Bunun için satır ve sütün toplamlarını değiştirmeyecek şekilde daha ekstrem olan tablolar düzenlenerek olasılıkları bulunur. Bu olasılıklar toplanarak gözlenen ve daha ekstrem hallerin meydana gelme olasılığı hesaplanır. İki yanlı hipotez kontrolü yapılırken hesaplanan olasılığın iki katı alınır. Eğer hesaplanan olasılık önceden kabul edilen I. tip hata olasılığından küçük ise kontrol hipotezi reddedilir.

ÖRNEK:

Yapılan bir araştırmada herhangi bir hastalığın tedavisinde A ve B ilaçlarını kullanarak iyileşen ve iyileşemeyen hastalara ait aşağıdaki iki yanlı tabloyu elde etmiştir.

	İyileşen hastalar	İyileşemeyen hastalar	Toplam
A ilacı	1	11	12
B ilacı	5	2	7
Toplam	6	13	19

Bu tablonun gözlenme, yani hastaların iyileşip iyileşmeme durumlarının kullanılan ilaçlardan bağımsız olma olasılığı 13.6 numaralı eşitlik kullanılarak;

$$P = \frac{(12)!(7)!(6)!(13)!}{(1)!(119!(5)!(2)!(19)!} = 0.0098 \text{ olarak bulunur.}$$

Gözlenenden daha ekstrem olan tablo düzenlenirken dikkat edilmesi gereken satır ve sütun toplamlarının değişmemesidir. Elde edilen verilerden düzenlenen tabloda A ilacı ile tedavi edilerek iyileşen hasta sayısı "1" dir. Gözlenenden daha ekstrem hal ise A ilacı ile tedavi edilip iyileşen hasta sayısının "0" olmasıdır. Bu durumda A ilacı ile tedavi edilip iyileşmeyen hasta sayısı "12" olacaktır. Böylece A ilacı tedavi edilmiş hasta sayısı değişmemiştir. İyileşen hasta sayısının değişmemesi için de B ilacı ile tedavi edilmiş iyileşen hasta sayısı 6 olarak alınır. B ilacı ile tedavi edilen hasta sayısının değişmemesi için de bu ilaç ile tedavi edilip iyileşmeyen hasta sayısı 1'e indirilir. Yani, yukarıda verilen tablo için gözlenenden daha ekstrem olan hal ise aşağıdaki tabloda verildiği gibidir.

	İyileşen hastalar	İyileşemeyen hastalar	Toplam
A ilacı	0	12	12
B ilacı	6	1	7
Toplam	6	13	19

Bu tablonun oluş olasılığı ise;

$$P = \frac{(12)!(7)!(6)!(13)!}{(0)!(12)!(6)!(1)!(19)!} = 0.0003\text{'tür.}$$

P=(0.0098+0.0003)=0.0101'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmışsa, hesaplanan bu olasılığa göre kontrol hipotezi reddedilir. Fakat I. tip hata olasılığı %1 olarak kararlaştırılmış ise kontrol hipotezi reddedilemez ve hastaların iyileşip iyileşmemesi kullanılan ilaçlardan bağımsızdır kararına varılır.

13.7. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

13.2.1. numaralı bölümde 10 çocuğa uygulanan bir eğitim programında çocukların kendilerine bakım yapıp yapamadıkları ile ilgili puanlar analiz edilmişti. Eğer araştırıcı bu verilerini MINITAB paket programında analiz etmek isterse öncelikle bu verileri, örneğin C1 sütununa, programa girmesi gerekir. PRINT C1 komutu verildiği zaman C1 sütununa işlenmiş veriler aşağıdaki gibi görülecektir.

```
MTB > PRINT C1
C1
  8   7   6   5   8   4   3   8   8   10
```

Araştırıcı verilerini işledikten sonra işaret testinin yapılabilmesi için "STest 7 C1;" komutunun ardından "Alternative 1" alt komutu ile yapılacak hipotez kontrolünün $M_D > M_0$ tek taraflı kontrol olduğunu belirtmiştir. "STest 7 C1;" komut satırındaki 7 ise örnekten hesaplanan ortancanın 7'ye karşı test edileceğini belirtmektedir. Araştırıcı belirtilen komutları verdiği zaman MINITAB çıktısı aşağıdaki gibi olacaktır.

```
MTB > STest 7  C1;
SUBC>  Alternative 1.

SIGN TEST OF MEDIAN = 7.000 VERSUS  G.T.  7.000

        N  BELOW  EQUAL  ABOVE  P-VALUE   MEDIAN
C1     10    4      1      5     0.5000    7.500
```

"Örneğin temsil ettiği populasyon ortancasının 7 olduğu" kontrol hipotezinin "ortancanın 7'den büyük olduğu" hipotezine karşı test edildiği belirtildikten sonra 10 gözlemden 4'üne ait değerin 7'den küçük, 1'ine ait değerin 7'ye eşit ve 5'ine ait değerin 7'den büyük olduğu belirtildikten sonra bu ve daha aykırı hallerin oluş ihtimalinin 0.500 olduğu araştırıcıya sunulmuştur. Bu olasılığa göre araştırıcı kontrol hipotezini kabul edecektir. Yukarıda verilen sonuçlar 13.2.1 numaralı bölümde bulunan sonuçlar ile aynıdır.

ÖRNEK 2:

13.2.2 numaralı bölümde bağımlı iki grubun karşılaştırılması için verilen örneğin MINITAB paket programı kullanılarak analizi.

MTB >PRINT C3 C4 C5

ROW	C3	C4	C5
1	83	75	-8
2	82	78	-4
3	79	77	-2
4	78	74	-4
5	85	80	-5
6	83	88	5
7	82	78	-4
8	79	72	-7

C3 sütununa, ilaç verilmeden önce ölçülen değerler, C4, sütununa da ilaç verildikten sonra ölçülen değerler işlenmiş olsun. 8.4. numaralı bölümde açıklandığı gibi araştırcı "LET C5=C4-C3" komutunu kullanarak C5 sütununa da farkları hesaplatmalıdır. Daha sonra işaret testinin yapılabilmesi için "Stest 0 C5" komutu ile C5 sütunundaki verilerin ortancasının sıfıra karşı test edileceğini belirtir. "Alternative -1" alt komutu ile de karşıt hipotezin " örnekten hesaplanan ortanca sıfırdan küçüktür" şeklinde olduğu belirtilir. Araştırıcı bu komutları verdikten sonra aşağıdaki sonuçlar alınır.

MTB > STest 0 C5;
SUBC> Alternative -1.

SIGN TEST OF MEDIAN = 0.00000 VERSUS L.T. 0.00000

	N	BELOW	EQUAL	ABOVE	P-VALUE	MEDIAN
C5	8	7	0	1	0.0352	-4.000

Yukarıdaki sonuçlar ilgili bölümde bulunan sonuçlar ile aynıdır. Örnekte gözlenen durum ile daha aykırı hallerin gözlenme olasılığının 0.0352 olduğu sonuçlarda verilmiştir. Kullanıcı bu olasılığa göre kontrol hipotezini reddeder.

Araştırıcı aynı örneğe Wilcoxon-sıralı-işaret testini uygulamak isterse bu durumda vermesi gereken komut "WTest 0 C5" şeklindedir. Bu komutlar verildiği zaman MINITAB çıktısı aşağıdaki gibi olacaktır.

```
MTB > WTest 0 C5;
SUBC> Alternative -1.

TEST OF MEDIAN = 0.000000 VERSUS MEDIAN L.T. 0.000000

        N FOR   WILCOXON              ESTIMATED
     N  TEST    STATISTIC   P-VALUE    MEDIAN
C5   8    8        5.5       0.046     -4.000
```

MINITAB paket programından alınan sonuçlar 13.2.2 numaralı bölümde örnek çözülürken bulunan sonuçlar ile aynıdır.

ÖRNEK 3:

13.4 numaralı bölümde incelenen hasta ve normal çocukların kanlarındaki iz element miktarı ile ilgili örneğin MINITAB paket programı kullanılarak analizi.

Araştırıcı, hasta ve normal çocukların kanlarında saptanan iz element miktarı bakımından farklılığın önemli olup olmadığını araştırmak için Wilcoxon-Mann-Whitney testini kullanacağından "hasta" ve "normal" çocuklarda saptanan iz element miktarlarını C1 ve C2 sütunlarına aşağıda görüldüğü gibi işler.

MTB > PRINT C1 C2

ROW	C1	C2
1	600	130
2	160	150
3	200	90
4	145	125
5	665	120
6	415	80
7	310	110
8		175
9		155
10		135

Yanda görüldüğü şekilde verilerini işledikten sonra aşağıdaki komutları verilmelidir;
MTB > Mann-Whitney 95.0 C1 C2;
SUBC> Alternative 1.
Araştırıcı bu komutlar ile Mann-Whitney testini kullanarak %5 seviyesinde "hasta grubundaki çocukların kanlarındaki iz element miktarının normal gruptan daha yüksek" olduğunun kontrol edileceğini belirtmiştir.

Gerekli komutlar verildikten sonra MINITAB çıktısı aşağıdaki gibi olacaktır.

```
MTB > Mann-Whitney 95.0 C1 C2;
SUBC>   Alternative 1.

Mann-Whitney Confidence Interval and Test

C1      N =  7    Median =     310.0
C2      N =  10   Median =     127.5

Point estimate for ETA1-ETA2 is  182.5
95.5 Percent C.I. for ETA1-ETA2 is (34.9,475.1)
W = 94.0
Test of ETA1=ETA2 vs. ETA1 > ETA2 is significant at 0.0015
```

Yukarıdaki çıktıda görüldüğü gibi ilk olarak her gruptaki gözlem sayıları ve grupların medyanları verilmiştir. Grupların medyanları arasındaki farka ait tahminin 182.5 olduğu belirtildikten sonra bu fark için güven aralığı verilmiştir. (Daha önce de açıklandığı gibi %95 olasılıkla hesaplanan güven aralığı 0 değerini kapsamadığı için kontrol hipotezi reddedilir.) Daha sonra ilgili bölümde de hesaplandığı gibi test istatistiğinin "W=94" olduğu ve 0.0015 seviyesinde karşıt hipotezin kabul edileceği belirtilmiştir.

ÖRNEK 4:

MTB > PRINT C5 C6

ROW	C5	C6
1	80	1
2	90	1
3	110	1
4	120	1
5	125	1
6	125	1
7	130	1
8	130	1
9	135	1
10	135	1
11	135	1
12	135	1
13	140	1

13.5 numaralı bölümde verilen örnek için araştırıcı medyan testini kullanmak amacıyla yanda görüldüğü şekilde verilerini, C5 ve C6 sütunlarına işlemiş olsun. C5 sütununda denemeden elde edilen gözlemler, C6 sütununda ise her gözlemin hangi gruba ait olduğunu belirten muamele numaraları vardır. Araştırıcı verilerini bu şekilde işledikten sonra;

MTB > Mood C5 C6.

komutunu girmelidir.

Bu komutlar girildikten sonra aşağıda verilen MINITAB çıktısı alınacaktır.

14	140	1
15	140	1
16	145	1
17	145	2
18	145	1
19	145	1
20	145	2
21	150	1
22	150	1
23	155	1
24	155	1
25	155	1
26	160	2
27	160	1
28	175	1
29	200	2
30	300	2
31	310	2
32	400	2
33	415	2
34	600	2
35	600	2
36	650	2
37	665	2
38	670	2

```
MTB > Mood C1 C2.
Mood median test of C1

Chisquare = 11.00   df = 1   p = 0.001

                                    Individual 95.0% CI's
C2 N<=  N> Median  Q3-Q1   --+---------+---------+---------+----
1   18   7   140     22     +)
2    2  11   400    445      (-------------+-------------)
                          --+---------+---------+---------+----
                           150       300       450       600
Overall median = 145
A 95.0% C.I. for median(1) - median(2): (-465,-55)
```

Yukarıdaki sonuçlarda görüldüğü gibi önce ki-kare değeri hesaplanarak, bu ki-kare değerinin 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığının 0.001 olduğu verilmiştir. Bu olasılık kontrol hipotezinin reddedilmesini gerektirir. Daha sonra %95 olasılık ile iki grup medyanı arasındaki fark için güven aralığı verilmiştir. Bu güven aralığında sıfır değeri olmadığı için iki grup medyanı arasındaki farkın tesadüften ileri geldiğini belirten kontrol hipotezi reddedilir.

NOT: MINITAB paket programında iki yanlı tablo oluşturulurken ortancadan büyük olanlar ve ortancaya eşit veya küçük olanlar olmak üzere gruplandırma yapılır. 13.5 numaralı bölümde hesaplanan ki-kare değeri ile buradaki değer arasındaki farklılık bu sebepten kaynaklanmaktadır.

Yararlanılan Kaynaklar

APAYDIN, A., KUTSAL, A. ve ATAKAN, C. 1994. Uygulamalı İstatistik. Ankara.

DANIEL, W. W. 1995. Biostatistics. A Foundation for Analysis in the Health Sciences. Sixth Edition. John Willey & Sons, Inc. New York.

BARNETT, V. and LEWİS, T. 1978. Outliers in Statistical Data. John Wiley & Sons Ltd., Great Britain.

DÜZGÜNEŞ, O., KESİCİ, T., KAVUNCU, O. ve GÜRBÜZ, F. 1987. Araştırma ve Deneme Metodları. (İstatistik Metodları II). Ankara Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Yayınları: 1021, Ders Kitabı: 295. Ankara.

DÜZGÜNEŞ, O., KESİCİ, T. ve GÜRBÜZ, F. 1993. İstatistik Metodları. İkinci Baskı. Ankara Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Yayınları: 1291, Ders Kitabı: 369. Ankara.

FREUND, J. E. 1971. Mathematical Statistics. Second Edition. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

GIBBONS, J. D. 1976. Nonparametric Methods for Quantitative Analysis. Holt, Rinehart and Winston, New York.

LIENERT, G. A. (1973). Verteilungsfreie Metoden in der BIOSTATISTIK. Bound I. Verlag Anton Hain KG. Germany.

LOTHAR, S. 1974. Angewandte Statistik. Springer-Verlag, New York, Heildelberg, Berlin.

MENDENHALL, W. and SCHEAFFER, R. L. 1973. Mathematical Statistics and Applications. Wadsworth publishing Company, Inc. Belmont, California, USA.

PETERSON, G. R. 1985. Design and Analysis of Experiments. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.

SNEDECOR, W. and COCHRAN W. G. 1980. Statistical Methods. Seventh Edition. The Iowa state University Press, Ames, Iowa, USA.

SPRENT, P. 1990. Applied Nonparametric Statistical Methods. J.W. Arrowsmith Ltd., Bristol, Great Britain.

MARSHALL, W. and SCHEAFFER, R. L. (1973). Mathematical Statistics with Applications. Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont, California.

İstatistik Tablolar

TABLO A.	Standart normal dağılımda 0'la (ortalama) değişik Z değerleri arasında kalan alan (0.)
TABLO B.	0'dan ±0.99'a kadar olan r değerlerine karşılık gelen Z_r değerleri
TABLO C.	Student'in t- dağılımı
TABLO D.	Ki-kare değerleri dağılımında değişik SD'ler ve değişik olasılıklar için kritik değerler
TABLO E.	F değerleri dağılımında %5 alanını ayıran kritik değerler
TABLO F.	F değerleri dağılımında %1 alanını ayıran kritik değerler
TABLO G.	P=0.05 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)
TABLO H.	P=0.01 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)
TABLO I.	Tukey (a) çoklu karşılaştırma yöntemi için Q değerleri
TABLO J.	Cochran metodu ile varyansların homojenlik kontrolünde kullanılacak C değerleri
TABLO K.	Birikimli Binom Dağılımı (p=0.5 için)
TABLO L.	Wilcoxon-sıralı-işaret testi için birikimli olasılıklar
TABLO M.	Mann-Whitney-Wilcoxon Dağılımı
TABLO N.	Mann-Whitney-Wilcoxon-U Testi için U-Değerleri

TABLO A. Standart normal dağılımda 0'la (ortalama) ile belirli Z değerleri arasında kalan alan (0.) 2,645

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2124
.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
.7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3435	3508	3531	3554	3577	3595	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4110	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4809	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4911	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959,5	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3.1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3.3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3.4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3.5	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3.9	5000									

TABLO B. 0'dan ±0.99'a kadar olan r değerlerine karşılık gelen Z_r değerleri

r	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.0000	0.0100	0.0100	0.0300	0.0400	0.0500	0.0601	0.0701	0.0802	0.0902
.1	0.1003	0.1104	0.1206	0.1307	0.1409	0.1511	0.1614	0.1717	0.1820	0.1923
.2	0.2027	0.2132	0.2337	0.2342	0.2448	0.2554	0.2661	0.2769	0.2871	0.2986
.3	0.3095	0.3206	0.3316	0.3428	0.3441	0.3654	0.3769	0.3884	0.4001	0.4118
.4	0.4236	0.4356	0.4477	0.4599	0.4722	0.4847	0.4973	0.5101	0.5230	0.5361
.5	0.5493	0.5627	0.5763	0.5901	0.6042	0.6184	0.6328	0.6475	0.6625	0.6777
.6	0.6931	0.7089	0.7250	0.7444	0.7582	0.7753	0.7928	0.8107	0.8291	0.8480
.7	0.8673	0.8871	0.9076	0.9276	0.9505	0.9729	0.9962	1.0203	1.0454	1.0714
.8	1.0986	1.1270	1.1568	1.1881	1.2212	1.2561	1.2933	1.3331	1.3758	1.4219
.9	1.4722	1.5275	1.5890	1.6584	1.7381	1.8318	1.9459	2.0923	2.2976	2.6467

TABLO C. Student'in t- dağılımı (S.D.; serbestlik derecesi)

P(..den büyük "t" değerlerinin oluş ihtimali) çift taraflı test için olasılıklar					
S.D.	%20	%10	%5	%2	%1
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.834	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.581	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.008	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.638
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
	%10	%5	%2.5	%1	%0.5
	tek taraflı test için olasılıklar				

TABLO D. Ki-kare değerleri dağılımında değişik SD'ler ve değişik olasılıklar için kritik değerler (Tabloda S.D.; serbestlik derecesi)

	P(...den daha büyük "ki-kare" değerlerinin oluş ihtimali)					
S.D.	%90	%50	%30	%10	%5	%1
1	0.016	0.455	1.074	2.706	3.841	6.635
2	0.221	1.386	2.408	4.605	5.991	9.210
3	0.584	2.366	3.665	6.251	7.815	11.341
4	1.064	3.357	4.878	7.779	9.488	13.277
5	1.610	4.351	6.064	9.236	11.070	15.086
6	2.204	5.348	7.231	10.645	12.592	16.812
7	2.833	6.346	8.383	12.017	14.067	18.875
8	3.490	7.344	9.524	13.362	15.507	20.090
9	4.168	8.343	10.656	14.684	16.919	21.666
10	4.865	9.342	11.781	15.987	18.307	22.209
11	5.578	10.341	12.899	17.275	19.675	24.725
12	6.304	11.340	14.011	18.549	21.026	26.217
13	7.042	12.340	15.119	19.812	22.362	27.688
14	7.790	13.339	16.222	21.064	23.685	29.141
15	8.547	14.339	17.322	22.307	24.996	30.578
16	9.312	15.338	18.418	23.542	26.296	32.000
20	12.443	19.337	25.038	28.412	31.410	37.566
24	15.659	23.337	27.096	33.196	36.415	42.980
30	20.599	29.336	33.530	40.256	43.773	50.892

TABLO E. F değerleri dağılımında P-0.05 alanını ayıran kritik değerler

Gruplar içi kareler ortalaması serbestlik derecesi	Gruplar arası kareler ortalaması serbestlik derecesi										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.32	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95
120	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79

TABLO F. F değerleri dağılımında P-0.01alanını ayıran kritik değerler

Gruplar içi kareler ortalaması serbestlik derecesi	Gruplar arası kareler ortalaması serbestlik derecesi										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.90	14.80	14.66	14.54	14.45
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.40	10.28	10.15	10.05	9.96
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56
120	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.65	2.56	2.47	2.40
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24

TABLO G. p=0.05 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)

Hata serbestlik derecesi	Grup sayıları										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	3.93	4.01	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03
5	3.64	3.75	3.80	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81
6	3.46	3.59	3.65	3.68	3.69	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70
7	3.34	3.48	3.55	3.59	3.61	3.62	3.63	3.63	3.63	3.63	3.63
8	3.26	3.40	3.47	3.52	3.55	3.57	3.57	3.58	3.58	3.58	3.58
9	3.20	3.34	3.42	3.47	3.50	3.52	3.54	3.54	3.55	3.55	3.55
10	3.15	3.29	3.38	3.43	3.47	3.49	3.51	3.52	3.52	3.53	3.53
11	3.11	3.26	3.34	3.40	3.43	3.46	3.48	3.49	3.50	3.51	3.51
12	3.08	3.22	3.31	3.37	3.41	3.44	3.46	3.47	3.48	3.49	3.50
13	3.05	3.20	3.29	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47	3.48	3.48
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47
16	3.00	3.14	3.24	3.30	3.34	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.36	3.38	3.41	3.42	3.43	3.45
19	2.96	3.11	3.20	3.26	3.31	3.35	3.38	3.40	3.41	3.43	3.44
20	2.95	3.10	3.19	3.26	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44
24	2.92	3.07	3.16	3.23	3.28	3.32	3.34	3.37	3.39	3.41	3.42
30	2.89	3.03	3.13	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.37	3.39
60	2.83	2.98	3.07	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.36	3.37
120	2.80	2.95	3.05	3.12	3.17	3.22	3.25	3.29	3.31	3.34	3.36
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.32	3.34

TABLO H. P=0.01 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)

Hata serbestlik derecesi	Grup sayıları										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	6.512	6.677	6.740	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	5.702	5.893	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142	5.160	5.174	5.185
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058	5.074	5.088
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994	5.009
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.276	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261

TABLO I. Tukey (a) çoklu karşılaştırma yöntemi için Q değerleri (Üst sıra %5 noktasında, alt sıra %1 noktasındaki Q değerleridir. HSd; hata serbestlik derecesi)

HSd	Sıralanmış ortalamalar arasındaki adım sayısı								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1
	90.0	135.0	164.0	186.0	202.0	216.0	227.0	237.0	246.0
2	6.09	8.3	9.8	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0
	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46
	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83
	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99
	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49
	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10
7	3.34	4.16	4.69	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16
	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92
	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74
	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60
	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49
	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40
	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32
	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25
	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15
	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.72	6.35
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07
	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01
	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92
	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92
30	2.89	3.49	3.84	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83
	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.56	5.76

TABLO J. Cochran metodu ile varyansların homojenlik kontrolünde kullanılacak C değerleri (Alt sıra C değerinin %1 olasılık ile alacağı, üst sıra C değerinin %5 olasılık ile alacağı değer)

Grup	Serbestlik Derecesi										
sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16
2	0.9985 0.9999	0.9750 0.9950	0.9392 0.9794	0.9057 0.9586	0.8772 0.9373	0.8534 0.9172	0.8332 0.8988	0.8159 0.8823	0.8010 0.8674	0.7880 0.8539	0.7341 0.7949
3	0.9669 0.9933	0.8709 0.9423	0.7977 0.8831	0.7457 0.8335	0.7071 0.7933	0.6771 0.7606	0.6530 0.7335	0.6333 0.7107	0.6167 0.6912	0.6025 0.6743	0.5466 0.6059
4	0.9065 0.9676	0.7679 0.8643	0.6841 0.7814	0.6287 0.7212	0.5895 0.6761	0.5598 0.6410	0.5365 0.6129	0.5175 0.5897	0.5017 0.5702	0.4884 0.5536	0.4366 0.4884
5	0.8412 0.9279	0.6838 0.7885	0.5981 0.6957	0.5441 0.6329	0.5065 0.5875	0.4783 0.5531	0.4564 0.5259	0.4387 0.5037	0.4241 0.4854	0.4118 0.4697	0.3645 0.4094
6	0.7808 0.8828	0.6161 0.7218	0.5321 0.6258	0.4803 0.5635	0.4447 0.5195	0.4184 0.4866	0.3980 0.4608	0.3817 0.4401	0.3682 0.4229	0.3568 0.4084	0.3135 0.3529
7	0.7271 0.8376	0.5612 0.6644	0.4800 0.5685	0.4307 0.5080	0.3974 0.4659	0.3726 0.4347	0.3535 0.4105	0.3384 0.3911	0.3259 0.3751	0.3154 0.3616	0.2756 0.3105
8	0.6798 0.7945	0.5157 0.6152	0.4377 0.5209	0.3910 0.4627	0.3595 0.4226	0.3362 0.3932	0.3185 0.3704	0.3043 0.3522	0.2926 0.3373	0.2829 0.3248	0.2462 0.2779
9	0.6385 0.7544	0.4775 0.5727	0.4027 0.4810	0.3584 0.4251	0.3286 0.3870	0.3067 0.3592	0.2901 0.3378	0.2768 0.3207	0.2659 0.3067	0.2568 0.2950	0.2226 0.2514
10	0.6020 0.7175	0.4450 0.5358	0.3733 0.4469	0.3311 0.3934	0.3029 0.3572	0.2823 0.3308	0.2666 0.3106	0.2541 0.2945	0.2439 0.2813	0.2353 0.2704	0.2032 0.2297
12	0.5410 0.6628	0.3924 0.4751	0.3264 0.3919	0.2880 0.3428	0.2624 0.3099	0.2439 0.2861	0.2299 0.2680	0.2187 0.2535	0.2098 0.2419	0.2020 0.2320	0.1737 0.1961
15	0.4709 0.5747	0.3346 0.4069	0.2758 0.3317	0.2419 0.2882	0.2195 0.2593	0.2034 0.2386	0.1911 0.2228	0.1815 0.2104	0.1736 0.2002	0.1671 0.1918	0.1429 0.1612

TABLO K. Birikimli Binom Dağılımı (p=0.5 için) (Sol taraf olasılıkları S<0.5n, sağ taraf olasılıkları S>0.5n içindir. S, S_+ veya S_- olabilir.)

	Sol S	P	Sağ S	n	Sol S	P	Sağ S	n	Sol S	P	Sağ S
1	0	0.5000	1	12	0	0.0002	12	17	0	0.0000	17
2	0	0.2500	2		1	0.0032	11		1	0.0001	16
	1	0.7500	1		2	0.0193	10		2	0.0012	15
3	0	0.1250	3		3	0.0730	9		3	0.0064	14
	1	0.5000	2		4	0.1938	8		4	0.0245	13
4	0	0.0625	4		5	0.3872	7		5	0.0717	12
	1	0.3125	3		6	0.6128	6		6	0.1662	11
	2	0.6875	2	13	0	0.0001	13		7	0.3145	10
5	0	0.0312	5		1	0.0017	12		8	0.5000	9
	1	0.1875	4		2	0.0112	11	18	0	0.0000	18
	2	0.500	3		3	0.0461	10		1	0.0001	17
6	0	0.0156	6		4	0.1334	9		2	0.0007	16
	1	0.1094	5		5	0.2905	8		3	0.0038	15
	2	0.3438	4		6	0.5000	7		4	0.0154	14
	3	0.6562	3		0	0.0000	14		5	0.0481	13
7	0	0.0078	7	14	1	0.0009	13		6	0.1189	12
	1	0.0625	6		2	0.0065	12		7	0.2403	11
	2	0.2266	5		3	0.0287	11		8	0.4073	10
	3	0.5000	4		4	0.0898	10		9	0.5927	9
8	0	0.0039	8		5	0.2120	9	19	0	0.0000	19
	1	0.0352	7		6	0.3953	8		1	0.0000	18
	2	0.1445	6		7	0.6047	7		2	0.0004	17
	3	0.3633	5		0	0.0000	15		3	0.0022	16
	4	0.6367	4	15	1	0.0005	14		4	0.0096	15
9	0	0.0020	9		2	0.0037	13		5	0.0318	14
	1	0.0195	8		3	0.0176	12		6	0.0835	13
	2	0.0898	7		4	0.0592	11		7	0.1796	12
	3	0.2539	6		5	0.1509	10		8	0.3238	11
	4	0.5000	5		6	0.3036	9		9	0.5000	10
10	0	0.0010	10		7	0.5000	8	20	0	0.0000	20
	1	0.0107	9		0	0.0000	16		1	0.0000	19
	2	0.0547	8	16	1	0.0003	15		2	0.0002	18
	3	0.1719	7		2	0.0021	14		3	0.0013	17
	4	0.3770	6		3	0.0106	13		4	0.0059	16
	5	0.6230	5		4	0.0384	12		5	0.0207	15
11	0	0.0005	11		5	0.1051	11		6	0.0577	14
	1	0.0059	10		6	0.2272	10		7	0.1316	13
	2	0.0327	9		7	0.4018	9		8	0.2517	12
	3	0.1133	8		8	0.5982	8		9	0.4119	11
	4	0.2744	7						10	0.5881	10
	5	0.5000	6								

TABLO L. Wilcoxon-sıralı-işaret testi için birikimli olasılıklar

(P olarak verilen birikimli olasılıklar, en ekstremden n için verilen sıralı-işaret test değerine kadar olan olasılıklardır. Sol taraftan olasılıklar T≤n(n+1)/4, sağ taraftan olasılıklar T≥n(n+1)/4 içindir. T, T_+ veya T_- olabilir.)

	Sol T	P	Sağ T	n	Sol T	P	Sağ T	N	Sol T	P	Sağ T
2	0	0.250	3	7	7	0.148	21	9	11	0.102	34
	1	0.500	2		8	0.188	20		12	0.125	33
3	0	0.125	6		9	0.234	19		13	0.150	32
	1	0.250	5		10	0.289	18		14	0.180	31
	2	0.375	4		11	0.344	17		15	0.213	30
	3	0.625	3		12	0.406	16		16	0.248	29
4	0	0.062	10		13	0.469	15		17	0.285	28
	1	0.125	9		14	0.531	14		18	0.326	27
	2	0.188	8	8	0	0.004	36		19	0.367	26
	3	0.312	7		1	0.008	35		20	0.410	25
	4	0.438	6		2	0.012	34		21	0.455	24
	5	0.562	5		3	0.020	33		22	0.500	23
5	0	0.031	15		4	0.027	32	10	0	0.001	55
	1	0.062	14		5	0.039	31		1	0.002	54
	2	0.094	13		6	0.055	30		2	0.003	53
	3	0.156	12		7	0.074	29		3	0.005	52
	4	0.219	11		8	0.098	28		4	0.007	51
	5	0.312	10		9	0.125	27		5	0.010	50
	6	0.406	9		10	0.156	26		6	0.014	49
	7	0.500	8		11	0.191	25		7	0.019	48
6	0	0.016	21		12	0.230	24		8	0.024	47
	1	0.031	20		13	0.273	23		9	0.032	46
	2	0.047	19		14	0.320	22		10	0.042	45
	3	0.078	18		15	0.371	21		11	0.053	44
	4	0.109	17		16	0.422	20		12	0.065	43
	5	0.156	16		17	0.473	19		13	0.080	42
	6	0.219	15		18	0.527	18		14	0.097	41
	7	0.281	14	9	0	0.002	45		15	0.116	40
	8	0.344	13		1	0.004	44		16	0.138	39
	9	0.422	12		2	0.006	43		17	0.161	38
	10	0.500	11		3	0.010	42		18	0.188	37
7	0	0.008	28		4	0.014	41		19	0.216	36
	1	0.016	27		5	0.020	40		20	0.246	35
	2	0.023	26		6	0.027	39		21	0.278	34
	3	0.039	25		7	0.037	38		22	0.312	33
	4	0.055	24		8	0.049	37		23	0.348	32
	5	0.078	23		9	0.064	36		24	0.385	31
	6	0.109	22		10	0.082	35		25	0.423	30
									26	0.461	29
									27	0.500	28

TABLO M. Mann-Whitney-Wilcoxon Dağılımı

(P olarak verilen birikimli olasılıklar, en ekstremden m≤n T_x değerine kadar olan olasılıklardır. Sol taraftan olasılıklar $T_x \leq m(N+1)/2$, sağ taraftan olasılıklar $T_x \geq m(N+1)/2$ içindir. Eşitliklerde N=m+n'dir.)

	Sol T_x	P	Sağ T_x		Sol T_x	P	Sağ T_x	n	Sol T_x	P	Sağ T_x
n	m=4			n	m=4			n	m=4		
4	10	0.014	26	7	13	0.021	35	9	18	0.074	38
	11	0.029	25		14	0.036	34		19	0.099	37
	12	0.057	24		15	0.055	33		20	0.130	36
	13	0.100	23		16	0.082	32		21	0.165	35
	14	0.171	22		17	0.115	31		22	0.207	34
	15	0.243	21		18	0.158	30		23	0.252	33
	16	0.343	20		19	0.206	29		24	0.302	32
	17	0.443	19		20	0.264	28		25	0.355	31
	18	0.557	18		21	0.324	27		26	0.413	30
5	10	0.008	30		22	0.394	26		27	0.470	29
	11	0.016	29		23	0.464	25		28	0.530	28
	12	0.032	28		24	0.536	24	10	10	0.001	50
	13	0.056	27	8	10	0.002	42		11	0.002	49
	14	0.095	26		11	0.004	41		12	0.004	48
	15	0.143	25		12	0.008	40		13	0.007	47
	16	0.206	24		13	0.014	39		14	0.012	46
	17	0.278	23		14	0.024	38		15	0.018	45
	18	0.365	22		15	0.036	37		16	0.027	44
	19	0.452	21		16	0.055	36		17	0.038	43
	20	0.548	20		17	0.077	35		18	0.053	42
6	10	0.005	34		18	0.107	34		19	0.071	41
	11	0.010	33		19	0.141	33		20	0.094	40
	12	0.019	32		20	0.184	32		21	0.120	39
	13	0.033	31		21	0.230	31		22	0.152	38
	14	0.057	30		22	0.285	30		23	0.187	37
	15	0.086	29		23	0.341	29		24	0.227	36
	16	0.129	28		24	0.404	28		25	0.270	35
	17	0.176	27		25	0.467	27		26	0.318	34
	18	0.238	26		26	0.533	26		27	0.367	33
	19	0.305	25	9	10	0.001	46		28	0.420	32
	20	0.381	24		11	0.003	45		29	0.473	31
	21	0.457	23		12	0.006	44		30	0.527	30
	22	0.543	22		13	0.010	43				
7	10	0.003	38		14	0.017	42				
	11	0.006	37		15	0.025	41				
	12	0.012	36		16	0.038	40				
					17	0.053	39				

TABLO M. Mann-Whitney-Wilcoxon Dağılımı (devam)

	Sol T_x	P	Sağ T_x		Sol T_x	P	Sağ T_x	n	Sol T_x	P	Sağ T_x
n	m=5			n	m=5			n	m=5		
5	15	0.004	40	7	28	0.265	37	9	31	0.219	44
	16	0.008	39		29	0.319	36		32	0.259	43
	17	0.016	38		30	0.378	35		33	0.303	42
	18	0.028	37		31	0.438	34		34	0.350	41
	19	0.048	36		32	0.500	33		35	0.399	40
	20	0.075	35	8	15	0.001	55		36	0.449	39
	21	0.111	34		16	0.002	54		37	0.500	38
	22	0.155	33		17	0.003	53	10	15	0.000	65
	23	0.210	32		18	0.005	52		16	0.001	64
	24	0.274	31		19	0.009	51		17	0.001	63
	25	0.345	30		20	0.015	50		18	0.002	62
	26	0.421	29		21	0.023	49		19	0.004	61
	27	0.500	28		22	0.033	48		20	0.006	60
6	15	0.002	45		23	0.047	47		21	0.010	59
	16	0.004	44		24	0.064	46		22	0.014	58
	17	0.009	43		25	0.085	45		23	0.020	57
	18	0.015	42		26	0.111	44		24	0.028	56
	19	0.026	41		27	0.142	43		25	0.038	55
	20	0.041	40		28	0.177	42		26	0.050	54
	21	0.063	39		29	0.218	41		27	0.065	53
	22	0.089	38		30	0.262	40		28	0.082	52
	23	0.123	37		31	0.311	39		29	0.103	51
	24	0.165	36		32	0.362	38		30	0.127	50
	25	0.214	35		33	0.416	37		31	0.155	49
	26	0.268	34		34	0.472	36		32	0.185	48
	27	0.331	33		35	0.528	35		33	0.220	47
	28	0.396	32	9	15	0.000	60		34	0.257	46
	29	0.465	31		16	0.001	59		35	0.297	45
	30	0.535	30		17	0.002	58		36	0.339	44
7	15	0.001	50		18	0.003	57		37	0.384	43
	16	0.003	49		19	0.006	56		38	0.430	42
	17	0.005	48		20	0.009	55		39	0.477	41
	18	0.009	47		21	0.014	54		40	0.523	40
	19	0.015	46		22	0.021	53				
	20	0.024	45		23	0.030	52				
	21	0.037	44		24	0.041	51				
	22	0.053	43		25	0.056	50				
	23	0.074	42		26	0.073	49				
	24	0.101	41		27	0.095	48				
	25	0.134	40		28	0.120	47				
	26	0.172	39		29	0.149	46				
	27	0.216	38		30	0.182	45				

TABLO M. Mann-Whitney-Wilcoxon Dağılımı (devam)

	Sol T_x	P	Sağ T_x		Sol T_x	P	Sağ T_x	n	Sol T_x	P	Sağ T_x
n	m=6			n	m=6			n	m=6		
6	21	0.001	57	8	21	0.000	69	9	37	0.112	59
	22	0.002	56		22	0.001	68		38	0.136	58
	23	0.004	55		23	0.001	67		39	0.164	57
	24	0.008	54		24	0.002	66		40	0.194	56
	25	0.013	53		25	0.004	65		41	0.228	55
	26	0.021	52		26	0.006	64		42	0.264	54
	27	0.032	51		27	0.010	63		43	0.303	53
	28	0.047	50		28	0.015	62		44	0.344	52
	29	0.066	49		29	0.021	61		45	0.388	51
	30	0.090	48		30	0.030	60		46	0.432	50
	31	0.120	47		31	0.041	59		47	0.477	49
	32	0.155	46		32	0.054	58		48	0.523	48
	33	0.197	45		33	0.071	57	10	21	0.000	81
	34	0.242	44		34	0.091	56		22	0.000	80
	35	0.294	43		35	0.114	55		23	0.000	79
	36	0.350	42		36	0.141	54		24	0.001	78
	37	0.409	41		37	0.172	53		25	0.001	77
	38	0.469	40		38	0.207	52		26	0.002	76
	39	0.531	39		39	0.245	51		27	0.004	75
7	21	0.001	63		40	0.286	50		28	0.005	74
	22	0.001	62		41	0.331	49		29	0.008	73
	23	0.002	61		42	0.377	48		30	0.011	72
	24	0.004	60		43	0.426	47		31	0.016	71
	25	0.007	59		44	0.475	46		32	0.021	70
	26	0.011	58		45	0.525	45		33	0.028	69
	27	0.017	57	9	21	0.000	75		34	0.036	68
	28	0.026	56		22	0.000	74		35	0.047	67
	29	0.037	55		23	0.001	73		36	0.059	66
	30	0.051	54		24	0.001	72		37	0.074	65
	31	0.069	53		25	0.002	71		38	0.090	64
	32	0.090	52		26	0.004	70		39	0.110	63
	33	0.117	51		27	0.006	69		40	0.132	62
	34	0.147	50		28	0.009	68		41	0.157	61
	35	0.183	49		29	0.013	67		42	0.184	60
	36	0.223	48		30	0.018	66		43	0.214	59
	37	0.267	47		31	0.025	65		44	0.246	58
	38	0.314	46		32	0.033	64		45	0.281	57
	39	0.365	45		33	0.044	63		46	0.318	56
	40	0.418	44		34	0.057	62		47	0.356	55
	41	0.473	43		35	0.072	61		48	0.396	54
	42	0.527	42		36	0.091	60		49	0.437	53
									50	0.479	52
									51	0.521	51

TABLO M. Mann-Whitney-Wilcoxon Dağılımı (devam)

	Sol T_x	P	Sağ T_x		Sol T_x	P	Sağ T_x	n	Sol T_x	P	Sağ T_x
n	m=7			n	m=7			n	m=7		
7	28	0.000	77	8	45	0.116	67	9	58	0.459	61
	29	0.001	76		46	0.140	66		59	0.500	60
	30	0.001	75		47	0.168	65	10	28	0.000	98
	31	0.002	74		48	0.198	64		29	0.000	97
	32	0.003	73		49	0.232	63		30	0.000	96
	33	0.006	72		50	0.268	62		31	0.000	95
	34	0.009	71		51	0.306	61		32	0.001	94
	35	0.013	70		52	0.347	60		33	0.001	93
	36	0.019	69		53	0.389	59		34	0.002	92
	37	0.027	68		54	0.433	58		35	0.002	91
	38	0.036	67		55	0.478	57		36	0.003	90
	39	0.049	66		56	0.522	56		37	0.005	89
	40	0.064	65	9	28	0.000	91		38	0.007	88
	41	0.082	64		29	0.000	90		39	0.009	87
	42	0.104	63		30	0.000	89		40	0.012	86
	43	0.130	62		31	0.001	88		41	0.017	85
	44	0.159	61		32	0.001	87		42	0.022	84
	45	0.191	60		33	0.002	86		43	0.028	83
	46	0.228	59		34	0.003	85		44	0.035	82
	47	0.267	58		35	0.004	84		45	0.044	81
	48	0.310	57		36	0.006	83		46	0.054	80
	49	0.355	56		37	0.008	82		47	0.067	79
	50	0.402	55		38	0.011	81		48	0.081	78
	51	0.451	54		39	0.016	80		49	0.097	77
	52	0.500	53		40	0.021	79		50	0.115	76
8	28	0.000	84		41	0.027	78		51	0.135	75
	29	0.000	83		42	0.036	77		52	0.157	74
	30	0.001	82		43	0.045	76		53	0.182	73
	31	0.001	81		44	0.057	75		54	0.209	72
	32	0.002	80		45	0.071	74		55	0.237	71
	33	0.003	79		46	0.087	73		56	0.268	70
	34	0.005	78		47	0.105	72		57	0.300	69
	35	0.007	77		48	0.126	71		58	0.335	68
	36	0.010	76		49	0.150	70		59	0.370	67
	37	0.014	75		50	0.176	69		60	0.406	66
	38	0.020	74		51	0.204	68		61	0.443	65
	39	0.027	73		52	0.235	67		62	0.481	64
	40	0.036	72		53	0.268	66		63	0.519	63
	41	0.047	71		54	0.303	65				
	42	0.060	70		55	0.340	64				
	43	0.076	69		56	0.379	63				
	44	0.095	68		57	0.419	62				

TABLO M. Mann-Whitney-Wilcoxon Dağılımı (devam)

	Sol T_x	P	Sağ T_x		Sol T_x	P	Sağ T_x	n	Sol T_x	P	Sağ T_x
n	m=8			n	m=8			n	m=8		
8	36	0.000	100	9	45	0.004	99	10	50	0.010	102
	37	0.000	99		46	0.006	98		51	0.013	101
	38	0.000	98		47	0.008	97		52	0.017	100
	39	0.001	97		48	0.010	96		53	0.022	99
	40	0.001	96		49	0.014	95		54	0.027	98
	41	0.001	95		50	0.018	94		55	0.034	97
	42	0.002	94		51	0.023	93		56	0.042	96
	43	0.003	93		52	0.030	92		57	0.051	95
	44	0.005	92		53	0.037	91		58	0.061	94
	45	0.007	91		54	0.046	90		59	0.073	93
	46	0.010	90		55	0.057	89		60	0.086	92
	47	0.014	89		56	0.069	88		61	0.102	91
	48	0.019	88		57	0.084	87		62	0.118	90
	49	0.025	87		58	0.100	86		63	0.137	89
	50	0.032	86		59	0.118	85		64	0.158	88
	51	0.041	85		60	0.138	84		65	0.180	87
	52	0.052	84		61	0.161	83		66	0.204	86
	53	0.065	83		62	0.185	82		67	0.230	85
	54	0.080	82		63	0.212	81		68	0.257	84
	55	0.097	81		64	0.240	80		69	0.286	83
	56	0.117	80		65	0.271	79		70	0.317	82
	57	0.139	79		66	0.303	78		71	0.348	81
	58	0.164	78		67	0.336	77		72	0.381	80
	59	0.191	77		68	0.371	76		73	0.414	79
	60	0.221	76		69	0.407	75		74	0.448	78
	61	0.253	75		70	0.444	74		75	0.483	77
	62	0.287	74		71	0.481	73		76	0.517	76
	63	0.323	73		72	0.519	72				
	64	0.360	72	10	36	0.000	116				
	65	0.399	71		37	0.000	115				
	66	0.439	70		38	0.000	114				
	67	0.480	69		39	0.000	113				
	68	0.520	68		40	0.000	112				
9	36	0.000	108		41	0.000	111				
	37	0.000	107		42	0.001	110				
	38	0.000	106		43	0.001	109				
	39	0.000	105		44	0.002	108				
	40	0.000	104		45	0.002	107				
	41	0.001	103		46	0.003	106				
	42	0.001	102		47	0.004	105				
	43	0.002	101		48	0.006	104				
	44	0.003	100		49	0.008	103				

TABLO N. Mann-Whitney-Wilcoxon-U Testi için U-Değerleri
A.) %1 SEVİYESİNDE TEK TARAFLI KONTROL İÇİN

n	m															
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	-	0	1													
6	-	1	2	3												
7	0	1	3	4	6											
8	0	2	4	6	7	9										
9	1	3	5	7	9	11	14									
10	1	3	6	8	11	13	16	19								
11	1	4	7	9	12	15	18	22	25							
12	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31						
13	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39					
14	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47				
15	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56			
16	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66		
17	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77	
18	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88
19	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94
20	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100
21	5	11	17	23	30	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106
22	6	11	18	24	31	38	45	53	60	67	75	82	90	97	105	112
23	6	12	19	26	33	40	48	55	63	71	79	87	94	102	110	118
24	6	13	20	27	35	42	50	58	66	75	83	91	99	108	116	124
25	7	13	21	29	36	45	53	61	70	78	87	95	104	113	122	130
26	7	14	22	30	38	47	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136
27	7	15	23	31	40	49	58	67	76	85	95	104	114	123	133	142
28	8	16	24	33	42	51	60	70	79	89	99	109	119	129	139	149
29	8	16	25	34	43	53	63	73	83	93	103	113	123	134	144	155
30	9	17	26	35	45	55	65	76	86	96	107	118	128	139	150	161

TABLO N. Mann-Whitney-Wilcoxon-U Testi için U-Değerleri
B.) %1 SEVİYESİNDE ÇİFT TARAFLI KONTROL İÇİN

N	m															
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	-	-	0													
6	-	0	1	2												
7	-	0	1	3	4											
8	-	1	2	4	6	7										
9	0	1	3	5	7	9	11									
10	0	2	4	6	9	11	13	16								
11	0	2	5	7	10	13	16	18	21							
12	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27						
13	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34					
14	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42				
15	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51			
16	2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60		
17	2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70	
18	2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81
19	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	57	63	69	74	81	87
20	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92
21	3	8	14	19	25	32	38	44	51	58	64	71	78	84	91	98
22	4	9	14	21	27	34	40	47	54	61	68	75	82	89	96	104
23	4	9	15	22	29	35	43	50	57	64	72	79	87	94	102	109
24	4	10	16	23	30	39	45	52	60	68	75	83	91	99	107	115
25	5	10	17	24	32	41	47	55	63	71	79	87	96	104	112	121
26	5	11	18	25	33	43	49	58	66	74	83	92	100	109	118	127
27	5	12	19	27	35	45	52	60	69	78	87	96	105	114	123	132
28	5	12	20	28	36	47	54	63	72	81	91	100	109	119	128	138
29	6	13	21	29	38	49	56	66	75	85	94	104	114	124	134	144
30	6	13	22	30	40	55	58	68	78	88	98	108	119	129	139	150

TABLO N. Mann-Whitney-Wilcoxon-U Testi için U-Değerleri
C.) %5 SEVİYESİNDE TEK TARAFLI KONTROL İÇİN

n	m															
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	1	2	4													
6	2	3	5	7												
7	2	4	6	8	11											
8	3	5	8	10	13	15										
9	4	6	9	12	15	18	21									
10	4	7	11	14	17	20	24	27								
11	5	8	12	16	19	23	27	31	34							
12	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42						
13	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51					
14	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61				
15	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72			
16	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83		
17	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	
18	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109
19	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116
20	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123
21	11	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130
22	12	20	28	36	44	52	60	68	77	85	94	102	111	119	128	136
23	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	98	107	116	125	134	143
24	13	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150
25	14	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157
26	15	24	33	43	53	62	72	82	92	103	113	123	133	143	154	164
27	15	25	35	45	55	65	75	86	96	107	117	128	139	149	160	171
28	16	26	36	46	57	68	78	89	100	111	122	133	144	156	167	178
29	17	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	138	150	162	173	185
30	17	28	39	50	61	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192

TABLO N. Mann-Whitney-Wilcoxon-U Testi için U-Değerleri
D.) %5 SEVİYESİNDE ÇİFT TARAFLI KONTROL İÇİN

n	m															
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	0	1	2													
6	1	2	3	5												
7	1	3	5	6	8											
8	2	4	6	8	10	13										
9	2	4	7	10	12	15	17									
10	3	5	8	11	14	17	20	23								
11	3	6	9	13	16	19	23	26	30							
12	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37						
13	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45					
14	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55				
15	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64			
16	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75		
17	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87	
18	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99
19	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106
20	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112
21	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119
22	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125
23	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132
24	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138
25	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145
26	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151
27	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158
28	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164
29	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171
30	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177

DİZİN

ISBN 975-482-432-0

Ankara Üniversitesi Basımevi • 1998