

4.5 Eşler Arası Farkın Önem Kontrolü

Aynı birey üzerinde iki kez ölçüm yapılıyor.

$$X_1: X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2: X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$(X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), \dots, (X_{1n}, X_{2n})$$

$$D_j = X_{1j} - X_{2j}$$

1) Hipotez kurulur

$$H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D < 0, \mu_D > 0, \mu_D \neq 0$$

2) Test istatistiği hesaplanır.

$$t_h = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

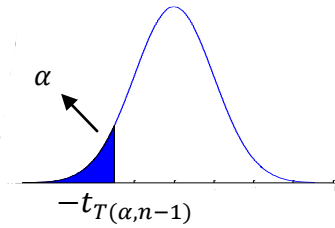
$$D = (X_{11} - X_{21}), (X_{12} - X_{22}), \dots, (X_{1n} - X_{2n})$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}, S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n D_i)^2}{n}}{n-1}}$$

3) Kritik bölgeye göre hipotez red edilir yada red edilemez.

$$H_0: \mu_D = 0$$

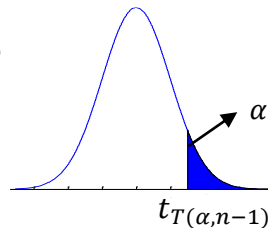
$$H_1: \mu_D < 0$$



$t_H < -t_{T(\alpha, n-1)}$ ise H_0 red

$$H_0: \mu_D = 0$$

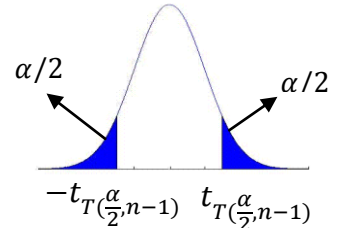
$$H_1: \mu_D > 0$$



$t_H > t_{T(\alpha, n-1)}$ ise H_0 red

$$H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D \neq 0$$



$t_H < -t_{T(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ ya da $t_H > t_{T(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ ise H_0 red

Güven aralığı;

$$P\left(\bar{D} - t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Örnek 4.6. Sigara içenler arasından rasgele olarak seçilen 10 kişinin günde ne kadar sigara içtikleri saptanmıştır. (X_{1i} : işlem öncesi) Sonra aynı kişilere bir sağlık uzmanı sağlık üzerine etkilerini konu edinen bir seminer vermiştir. Seminerden sonra aynı kişilerin günde ne kadar sigara içtikleri saptanmıştır. (X_{2i} : işlem sonrası)

X_{1i} (adet): 30, 25, 25, 20, 20, 18, 17, 17, 15, 13

X_{2i} (adet): 28, 25, 25, 18, 17, 18, 16, 16, 15, 12

$\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde seminerin etkili olduğu söylenebilir mi? %95 güven düzeyinde güven aralığını oluşturunuz.

X_{1i}	X_{2i}	D_j
30	28	2
25	25	0
25	25	0
20	18	2
20	17	3
18	18	0
17	16	1
17	16	1
15	15	0
13	12	1

$$1) H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D > 0$$

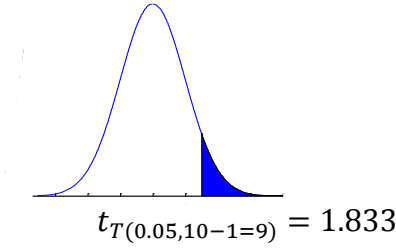
$$2) t_h = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

$$\sum_{i=1}^n D_i = 10, \quad \sum_{i=1}^n D_i^2 = 20, \quad \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{10} D_i}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n D_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{20 - \frac{10^2}{10}}{10-1}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$t_H = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3} / \sqrt{10}} = 3$$

3)



$t_H > t_{T(0.05,9)} = 1.833$ olduğundan H_0 red edilir.

Yani, eşler arasında fark vardır. İçilen sigara miktarının seminerden sonra azaldığı %95 güvenle söylenebilir.

Güven aralığı;

$$P\left(\bar{D} - t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\bar{D} \pm t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 \pm 2.262 \frac{1}{3} \rightarrow 0.246$$

$$\rightarrow 1.754$$

Yorum: Bu aralığın μ_D ' yi içeren aralıklardan biri olması olasılığı % 95 tir.

Örnek 4.7. 22 hastada ameliyattan önce ve sonraki sistolik kan basıncı aşağıdaki gibi verilmiştir. Ameliyattan önceki kan basıncının daha büyük olduğu iddia ediliyor. İddiayı $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test ediniz.

Önce	Sonra	D_j
110	80	30
100	80	20
130	95	35
110	85	25
110	86	24
110	89	21
100	80	20
120	98	32
90	91	-1
100	78	22
110	80	30
110	77	33
100	79	21
110	93	17
130	92	38
100	86	14
120	74	46
115	80	35
120	86	34
100	82	18
130	97	33
100	101	-1

1) $H_0: \mu_D = 0$ (Ameliyatın sistolik kan basıncına etkisi yoktur.)

$H_1: \mu_D > 0$ (Ameliyattan önceki sistolik kan basıncının ortalaması ameliyattan sonraki sistolik kan basıncının ortalamasından büyüktür.)

$$2) t_h = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n D_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$$\sum_{i=1}^n D_i = 546, \sum_{i=1}^n D_i^2 = 16346$$

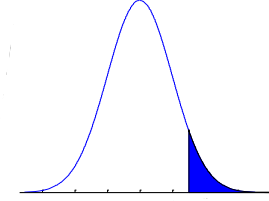
$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{22} D_i}{22} = \frac{546}{22} = 24.82$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n D_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{16346 - \frac{546^2}{22}}{22-1}} = 11.53$$

$$t_h = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} = \frac{24.82}{11.53 / \sqrt{22}} = 10.09$$

$$t_{0.05, 22-1} = 1.721$$

3)



$t_h > t_{\alpha, n-1}$ olduğundan H_0 red edilir

Yani, eşler arasında fark vardır. Buna göre, ameliyat sistolik kan basıncını ortalama 24.82 birim düşürmektedir.

Güven aralığı;

$$P\left(\bar{D} - t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\bar{D} \pm t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow 24.82 - 2.080 \frac{11.53}{\sqrt{22}} \rightarrow 19.710$$
$$24.82 + 2.080 \frac{11.53}{\sqrt{22}} \rightarrow 29.933$$

Yorum: Bu aralığın μ_D ' yi içeren aralıklardan biri olması olasılığı % 95 tir.