Университет ИТМО

Вычислительная математика
Лабораторная работа №3
«Численное интегрирование»

Работу выполнил:
Бавыкин Роман
Группа: P3210
Вариант 2

Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы:
найти приближенное значение определённого интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнения работы:

Исходные данные:
1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:
1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя, исходя из варианта:
    - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
    - Метод трапеций
    - Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:
1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при .
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при .
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Рабочие формулы методов:

$$Метод\,прямоугольников:$$

$$левые - \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

$$правые - \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$средние - \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i - 1/2)$$

$$Метод\,трапеций:$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\cdot\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$Метод\,Симпсона:$$

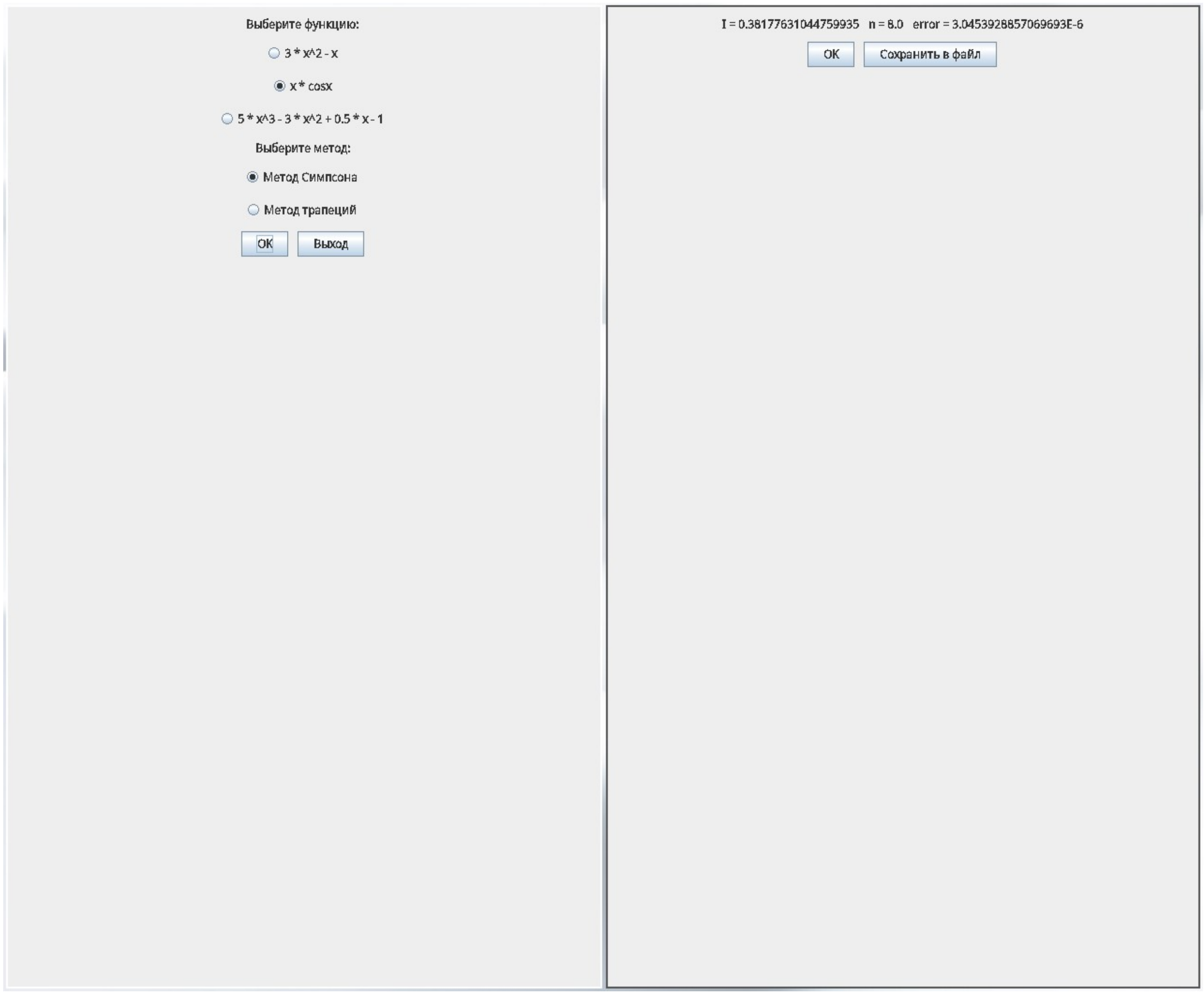
$$\int_a^f (x) = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + 4(y_1 = y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_n)\right)\right]$$

Листинг программы:

```
@Setter
public class TrapezoidMethod implements IntegrationMethod {
    private IntegrationInputData inputData;
    private Function function;

    @Override
    public IntegrationResults calculate() {
        int n = 4;
        double i0;
        double i1 = integrate(n);
        do {
            n *= 2;
            i0 = i1;
            i1 = integrate(n);
        } while (Math.abs((i1 - i0) / 3) > inputData.getEps());
        return IntegrationResults.builder().value(i1).n(n).error(Math.abs((i1 - i0) / 3)
    }

    private double integrate(int n) {
        double result = (function.getValue(inputData.getA()) + function.getValue(inputDa
        double h = (inputData.getB() - inputData.getA()) / n;
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            result += function.getValue(inputData.getA() + i * h);
        }
        result *= h;
        return result;
    }
}
```

```java
@Setter
public class SimpsonsMethod implements IntegrationMethod {
    private IntegrationInputData inputData;
    private Function function;

    @Override
    public IntegrationResults calculate() {
        int n = 4;
        double i0;
        double i1 = integrate(n);
        do {
            n *= 2;
            i0 = i1;
            i1 = integrate(n);
        } while (Math.abs((i1 - i0) / 15) > inputData.getEps());
        return IntegrationResults.builder().value(i1).n(n).error(Math.abs((i1 - i0) / 15
    }

    private double integrate(int n) {
        double result = (function.getValue(inputData.getA()) + function.getValue(inputDa
        double h = (inputData.getB() - inputData.getA()) / n;
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            if (i % 2 == 0) {
                result += 2 * function.getValue(inputData.getA() + i * h);
            } else {
                result += 4 * function.getValue(inputData.getA() + i * h);
            }
        }
        result *= h / 3;
        return result;
    }
}
```

Результаты выполнения программы:



Вычисление заданного интеграла:

$$\int_{-3}^{-1}\left(-3x^3-5x^2+4x-2\right)dx=-\frac{10}{3}$$

Формула Ньютона-Котеса:

i	c_n^i	$f(x_i)$	$\sum$
0	0.097619	22.000000	2.147618
1	0.514286	8.666667	6.604763
2	0.064286	-0.444444	6.576192
3	0.647619	-6	2.690478
4	0.064286	-8.666667	2.133332
5	0.514286	-9.111111	-2.552384
6	0.097619	-8	-3.333336

$$\delta=\frac{\left|-3.333333+3.333336\right|}{\left|-3.333333\right|}=9\cdot10^{-7}$$

Формула средних прямоугольников:

i	$x_{i-\frac{1}{2}}$	$f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$	$\sum$
1	-2.833333	14.763889	4.921296
2	-2.5	3.625	6.129629
3	-2.166666	-3.625	4.921296
4	-1.833333	-7.652778	2.370370
5	-1.5	-9.125	-0.671296
6	-1.166666	-8.708333	-3.574074

$$\delta=\frac{\left|-3.333333+3.574074\right|}{\left|-3.333333\right|}=0.072222$$

Формула трапеций:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-3	22
1	-2.666667	8.666667
2	-2.333333	-0.444444
3	-2	-6
4	-1.666667	-8.666667
5	-1.333333	-9.111111
6	-1	-8

I = -2.851852

$$\delta=\frac{|-3.333333+2.851852|}{|-3.333333|}=0.144444$$

Формула Симпсона:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-3	22
1	-2.666667	8.666667
2	-2.333333	-0.444444
3	-2	-6
4	-1.666667	-8.666667
5	-1.333333	-9.111111
6	-1	-8

I = -3.333333

$$\delta=\frac{|-3.333333+3.333333|}{|-3.333333|}=0$$

Выводы: во время выполнения лабораторной работы ознакомился с численными методами интегрирования. С помощью формул Ньютона-Котеса, средних прямоугольников, трапеций и Симпсона нашел данный интеграл. Реализовал программно метод трапеций и метод Симпсона.