



POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ MATEMATYKI  
I NAUK INFORMACYJNYCH



PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

**ANALIZA MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA  
W ALGORYTMIE CMA-ES WIEDZY  
O OGRANICZENIACH KOSZTOWYCH**

AUTOR:

INŻ. ROBERT JAKUBOWSKI

PROMOTOR:

DR HAB. INŻ. JAROSŁAW ARABAS  
PROF. NZW. PW

WARSZAWA MAJ 2016

.....

podpis promotora

.....

podpis autora

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Streszczenie</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
2.1	Cel pracy . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Techniki uwzględniania ograniczeń</b>	<b>6</b>
3.1	Transformacje rozwiązań . . . . .	6
3.1.1	Powrót? . . . . .	6
3.1.2	Rzutowanie . . . . .	7
3.1.3	Reinicjalizacja . . . . .	7
3.1.4	Odbicie . . . . .	7
3.1.5	Próbkowanie . . . . .	7
3.1.6	Zawijanie . . . . .	8
3.2	Błądzenie przypadkowe . . . . .	8
3.3	Metoda przeprowadzania testów . . . . .	8
3.4	Wyniki testów . . . . .	9
3.5	Wnioski . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Benchmarki</b>	<b>20</b>
4.1	Metoda przeprowadzania testów . . . . .	20
4.2	Wnioski . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Wpływ technik na efektywność CMA-ES</b>	<b>21</b>
5.1	Algorytm CMA-ES . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>22</b>
6.1	Wyniki . . . . .	22
6.2	Możliwości rozwoju . . . . .	22

## 1. Streszczenie

## **2. Wstęp**

### **2.1. Cel pracy**

### 3. Techniki uwzględniania ograniczeń

Niektóre problemy optymalizacyjne posiadają ograniczenia. Szukając rozwiązania należy zapewnić, że rozwiązanie będzie dopuszczalne. Zgodnie z ————łączy——— techniki, które w tym pomagają można podzielić w następujący sposób:

- definicja przestrzeni przeszukiwań - zapewnienie, że podczas krzyżowań, mutacji i innych zmian punktów, żaden z punktów nie wypadnie poza przestrzeń przeszukiwań,
- modyfikacja funkcji celu - zmienienie funkcji celu tak, aby funkcja celu dla punktów spoza ograniczeń zwracała gorsze wyniki,
- transformacja rozwiązań - punkty, które są poza ograniczeniami zostają zamieniane na punkty, które znajdują się w ograniczeniach.

W tej pracy skupiono się na transformacji rozwiązań

#### 3.1. Transformacje rozwiązań

Nie istnieje jedna technika transformacji rozwiązań spoza ograniczeń, na dopuszczalne. W kolejnych podrozdziałach opisane są metody transformacji rozwiązań, które były badane. Każda z technik jest opisana słownie oraz pseudokodem. Opis słowny zawiera wyjaśnienie, co się dzieje z punktem, który znalazł się poza ograniczeniem. W pseudokodzie zastosowane następujące oznaczenia:

- $x$  - punkt, który poddajemy naprawie
- $x'$  - ojciec punktu  $x$ , czyli z punktu  $x'$  z zadaniem rozkładem został wylosowany punkt  $x$
- $x(i)$  - wartość  $i$ -tej współrzędnej punktu  $x$
- $lb$  - ograniczenie dolne
- $ub$  - ograniczenie górne

##### 3.1.1. Powrót?

Nowy punkt zostaje odrzucony i wraca do poprzedniej pozycji.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}'$$

### 3.1.2. Rzutowanie

Punkt jest transformowany do najbliższego punktu, który spełnia ograniczenie. Oznacza to, że dla każdej współrzędnej sprawdzany jest warunek zawierania się w ograniczeniach. Dla współrzędnych, dla których nie jest on spełniony, wartość jest zamieniana na wartość ograniczenia (dolnego lub górnego), które jest najbliższe.

```
dla każdej współrzędnej i
    jeżeli lb(i) > x(i)
        x(i) = lb(i)
    jeżeli ub(i) < x(i)
        x(i) = ub(i)
```

### 3.1.3. Reinicjalizacja

Punkt jest przenoszony do pozycji początkowej. W tej pracy był to jednocześnie środek układu współrzędnych oraz środek symetrii ograniczeń.

```
x = x0
```

### 3.1.4. Odbicie

Dla każdej współrzędnej sprawdzane są warunki na ograniczenie. W przypadku współrzędnych, na których punkt jest poza ograniczeniem, wartość punktu tej współrzędnej jest symetrycznie odbita względem ograniczenia, którego warunek został złamany.

```
dla każdej współrzędnej i
    jeżeli lb(i) > x(i)
        x(i) = x(i) + 2 * (lb(i) - x(i))
    jeżeli ub(i) < x(i)
        x(i) = x(i) - 2 * (x(i) - ub(i))
```

### 3.1.5. Próbkowanie

Punkt jest powtórnie losowany dopóty, dopóki spełnia ograniczenia kostkowe.

```
dopóki !w_ograniczeniach(x)
    x = losuj(x')
```

### 3.1.6. Zawijanie

Dla każdej współrzędnej sprawdzane są warunki na ograniczenie. W przypadku współrzędnych, na których punkt jest poza ograniczeniem, różnica, pomiędzy ograniczeniem a wartością współrzędnej punktu, jest zapamiętywana. Tę różnicę odkładamy na przeciwległym ograniczeniu po stronie, która jest wewnątrz ograniczenia. W tym miejscu znajduje się nowa wartość współrzędnej punktu. W intuicyjny sposób można to wyjaśnić tak, że dla punktów nie ma ograniczeń, a przestrzeń przeszukiwań po każdym wymiarze jest jakby "zawinięta".

```
dla każdej współrzędnej i
    jeżeli lb(i) > x(i)
        x(i) = ub(i) - (lb(i) - x(i))
    jeżeli ub(i) < x(i)
        x(i) = lb(i) + (x(i) - ub(i))
```

## 3.2. Błądzenie przypadkowe

Można się spodziewać, że algorytm CMA-ES dla funkcji stałej będzie zachowywał się analogicznie do błądzenia przypadkowego. Takie założenie skłoniło autorów, żeby przyjąć się błądzeniu przypadkowemu z ograniczeniami. Błądzenie przypadkowe jest algorytmem dużo prostrzym, niż CMA-ES, więc umożliwia szybsze testowanie i wyciąganie wniosków.

Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą niezależnymi  $n$ -wymiarowymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej równej  $\{0\}^n$ . Błądzeniem przypadkowym nazywamy sekwencję zmiennych losowych:

$$S_0 = 0, S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i \quad (1)$$

## 3.3. Metoda przeprowadzania testów

W celu przeprowadzenia testów napisano szereg skryptów w języku MATLAB. Testy te obserwowały wpływ metod uwzględniania ograniczeń na ruch punktu. W rezultacie miały one pokazać rozkład prawdopodobieństwa punktu dla danej metody. Metody wybrane do testowania są takie jak w podrozdziale 3.1. Ponadto badano 2 różne metody losowania punktów: rozkład normalny oraz jednostajny. W przypadku rozkładu jed-



nostajnego losowano liczby z przedziału  $[-0.5; 0.5]$  (przedział zazwyczaj kilkukrotnie krótszy od ograniczeń kostkowych).

## Skrypty

Skrypty zostały zbudowane zgodnie z poniższym pseudokodem.

```
x - błądzący punkt
punkty - tablica wszystkich położzeń punktu x
iteracje - liczba iteracji podana jako parametr
i = 0
dopóki i < iteracje
    wylosuj nowe położenie punktu x
    jeżeli x jest poza ograniczeniem
        popraw x
    dodaj x do tablicy punkty
    i = i + 1
```

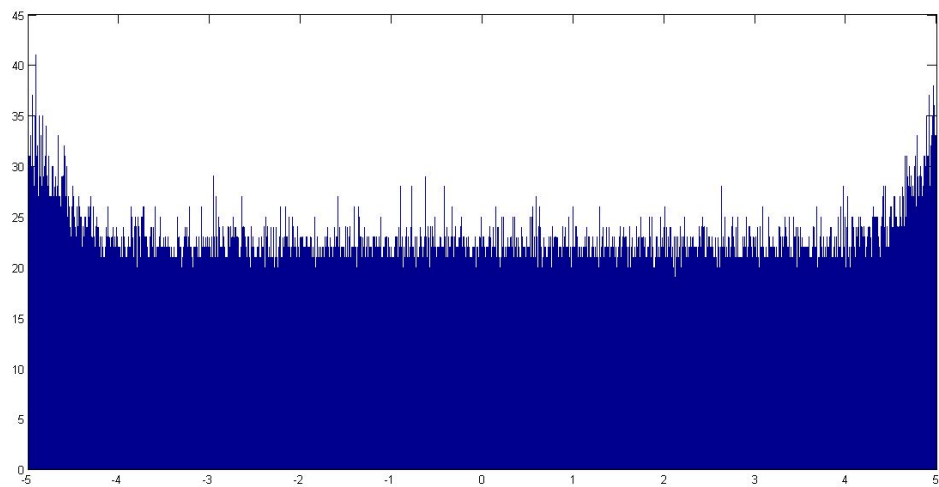
### 3.4. Wyniki testów

Wykresy zamieszczone w tym rozdziale są histogramami wystąpień punktu. Symulacje skryptów były uruchamiane z liczbą iteracji wynoszącą 2-100 milionów. Szerokość przedziałów jest różna i była dobierana tak, aby jak najlepiej przedstawić interesujące fakty.

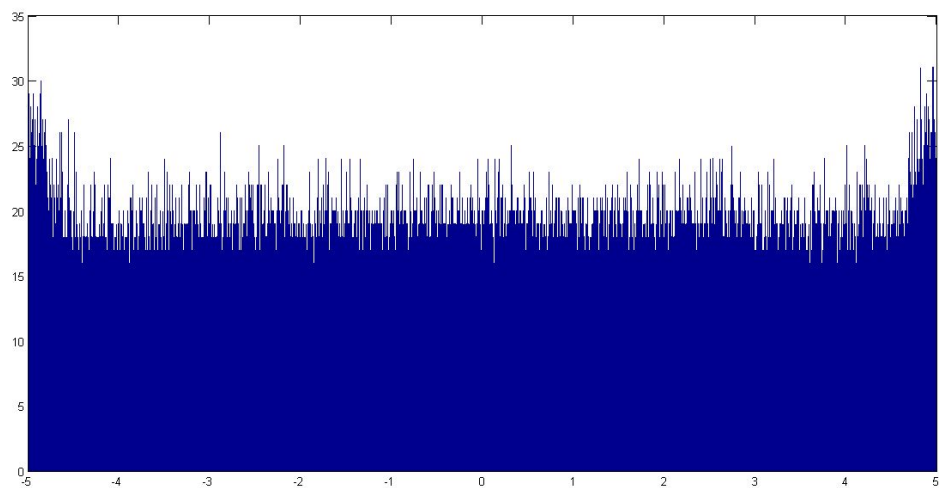
Wszystkie wykresy, które pokazują wyniki błędzenia przypadkowego w dwóch wymiarach zostały przetworzone w następujący sposób: otrzymane wyniki symulacji powielono poprzez symetryczne odbicie ich względem osi X, osi Y oraz początku układu współrzędnych. Wykonano ten zabieg, aby zwiększyć dokładność wyników. Nie wpływają one na badania, ponieważ punkty 0 są środkami ograniczeń obu osi, a z perspektywy algorytmu nie ma znaczenia, w której ćwiartce znajduje się aktualnie punkt.

## Powrót?

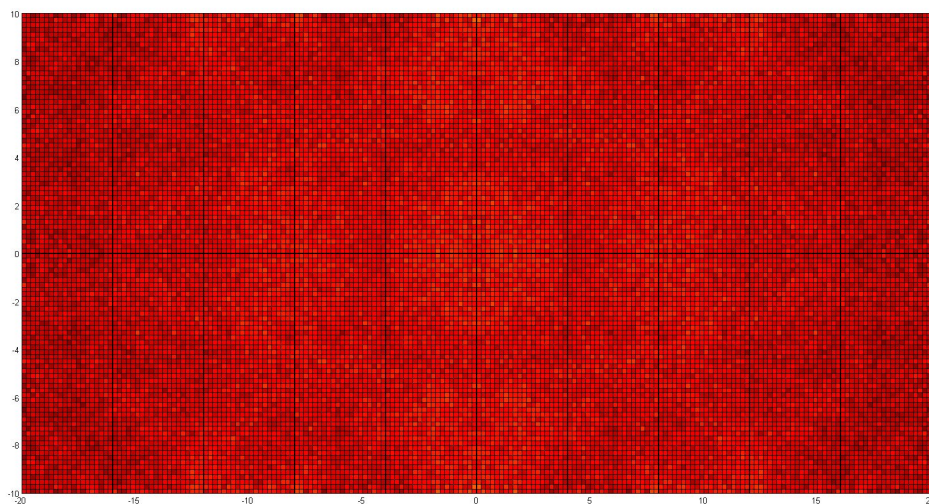
Histogramy pokazują, że punkt z większym prawdopodobieństwem występuje przy ograniczeniach. Takie zachowanie można uznać za intuicyjne, ponieważ potomkowie punktów blisko granicy mogą "wypaść" poza ograniczenie. Po naprawie dziecko będzie tym samym punktem.



Rysunek 1: Rozkład normalny



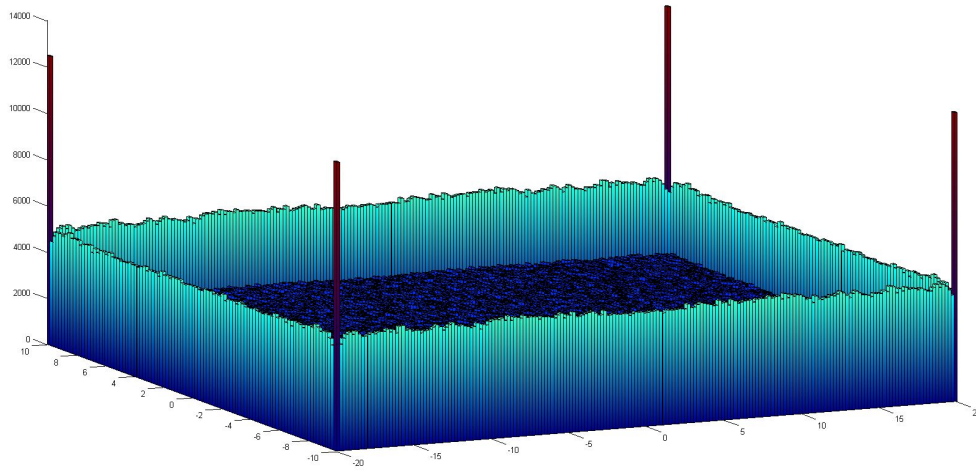
Rysunek 2: Rozkład jednostajny



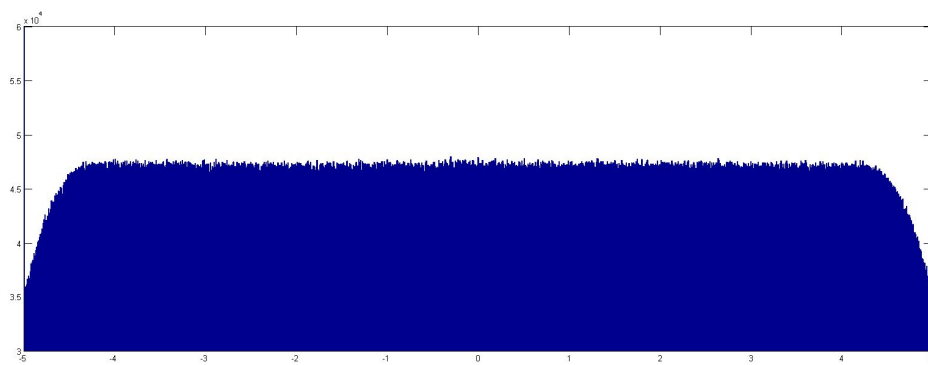
Rysunek 3: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym

## Rzutowanie

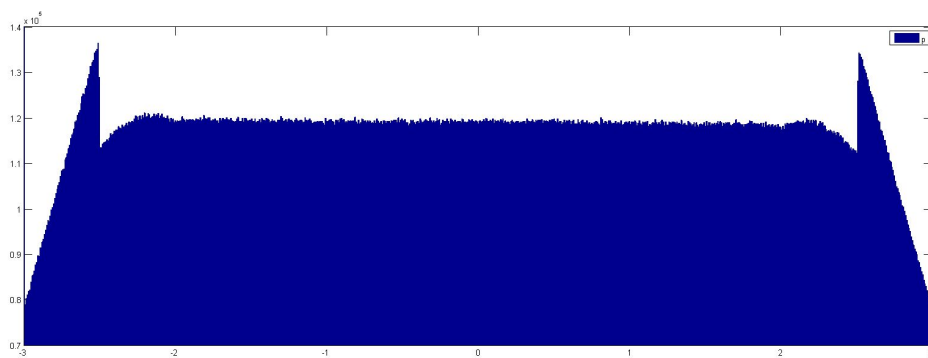
Zgodnie z przewidywaniami największe prawdopodobieństwo wystąpienia punktu jest na ograniczeniu, co bardzo dobrze obrazuje rysunek 4. Na rysunkach 5 i 6 zakres osi Y został zmniejszony do odpowiednio  $[30000; 60000]$  i  $[70000; 140000]$ , aby uwypuklić interesujące efekty. W związku z tym zostały "ucięte" wartości na przedziałach brzegowych. Warto zwrócić uwagę na bardzo niespodziewane zjawisko - wartości histogramów blisko ograniczeń są zdecydowanie mniejsze, niż pozostałe. Oznacza to, że punkty w tych przedziałach występują z mniejszym prawdopodobieństwem, niż pozostałe. Wydawać by się mogło, że powinno być inaczej, ponieważ podczas symulacji punkty często są rzutowane na ograniczenie. Dodatkowo w rozkładzie jednostajnym widać, że istnieją przedziały, w których punkty występują z większym prawdopodobieństwem. Autorom nie udało się formalnie uzasadnić tego zjawiska. Intuicja prowadzi do hipotezy, że punkty, które teoretycznie wypadły bez naprawy zapełniłyby utworzony "dołek", natomiast naprawa sprawia, że cała dalsza symulacja niejako zostaje przesunięta. W ten sposób powstaje "górką" w rozkładzie jednostajnym. Z charakterystyki rozkładu normalnego może brać się fakt, iż owa górką nie występuje w tymże.



Rysunek 4: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym



Rysunek 5: Rozkład normalny

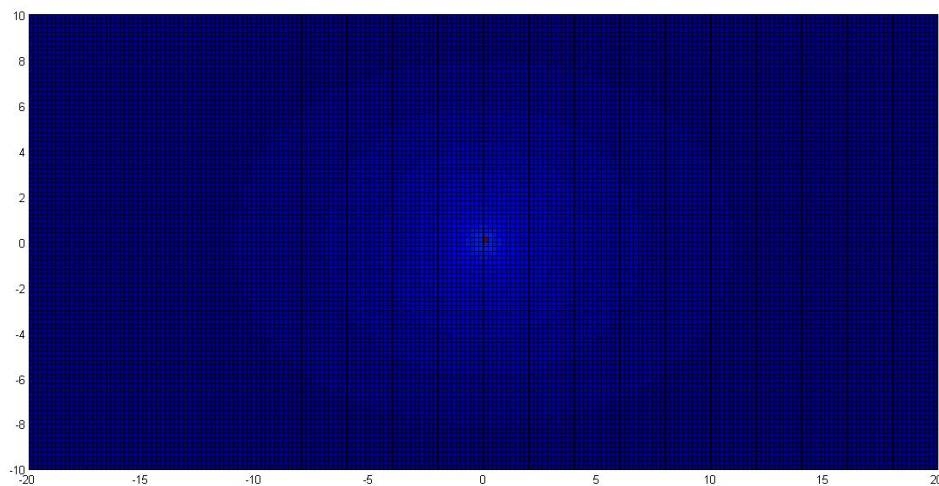


Rysunek 6: Rozkład jednostajny

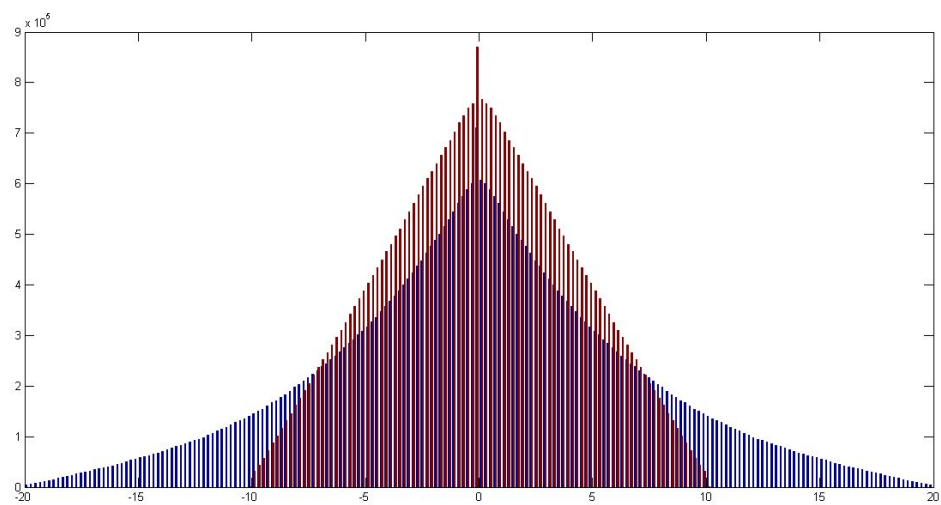
## Reinicjalizacja

Na pierwszy rzut oka wykresy nie ukazują nic nadzwyczajnego, ponieważ łatwo zauważyć pik związany z reinicjalizacją oraz wartości histogramu malejące wraz ze zbliżaniem się do ograniczeń. Autorzy pragną zwrócić uwagę na 2 fakty. Pierwszy, to kształt histogramu. Zarówno dla rozkładu jednostajnego i normalnego w jednym wymiarze jest on stożkowy. Łuk widać tylko blisko punktu środkowego, w pozostałej części spadek jest liniowy. Brakuje charakterystycznego, gaussowskiego przegięcia. Sytuacja jest ciekawsza, gdy występuje więcej wymiarów. Widać wówczas przegięcie. Dokładniejsze badania pokazały, że przegięcie nie występuje tylko na jednym wymiarze. Tym, który jest relatywnie najkrótszy. Celowo jest użyte słowo relatywnie, ponieważ z perspektywy błędzenia przypadkowego i rozkładu normalnego trzeba brać pod uwagę parametr  $\sigma$ . Wymiary o małym  $\sigma$  będą relatywnie dłuższe od tych z dużym  $\sigma$ , ponieważ błędzenie będzie wykonywało mniejsze kroki.

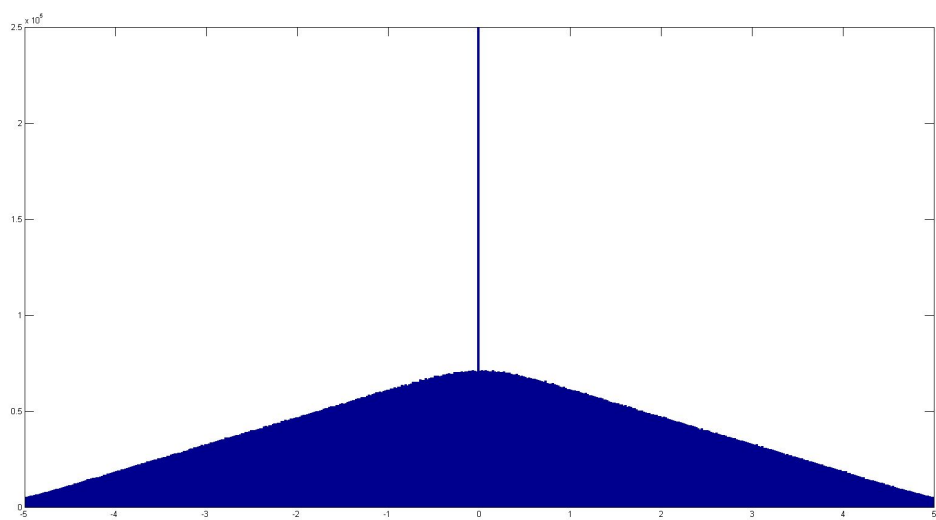
Na rysunku 13 można dostrzec też dwa uskoki, które związane są z pikiem w punkcie 0 oraz charakterystyką rozkładu.



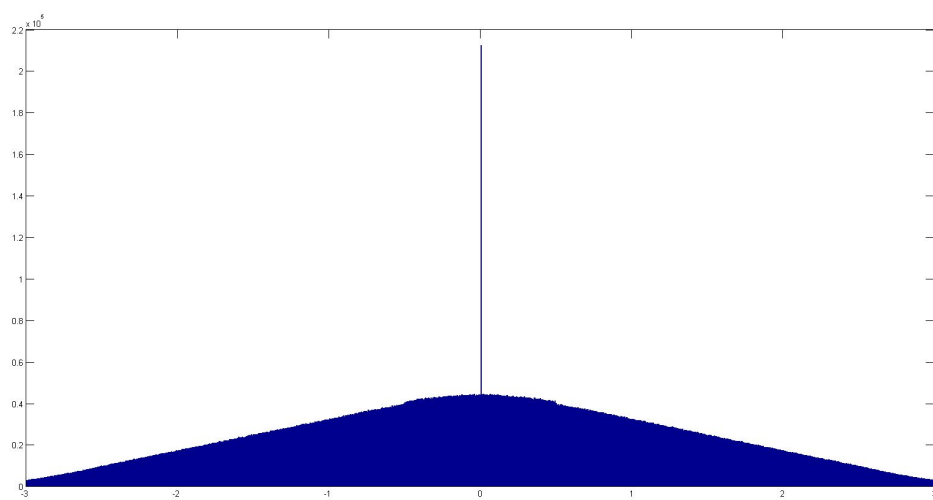
Rysunek 7: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym



Rysunek 8: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym; oddzielne histogramy dla obu wymiarów



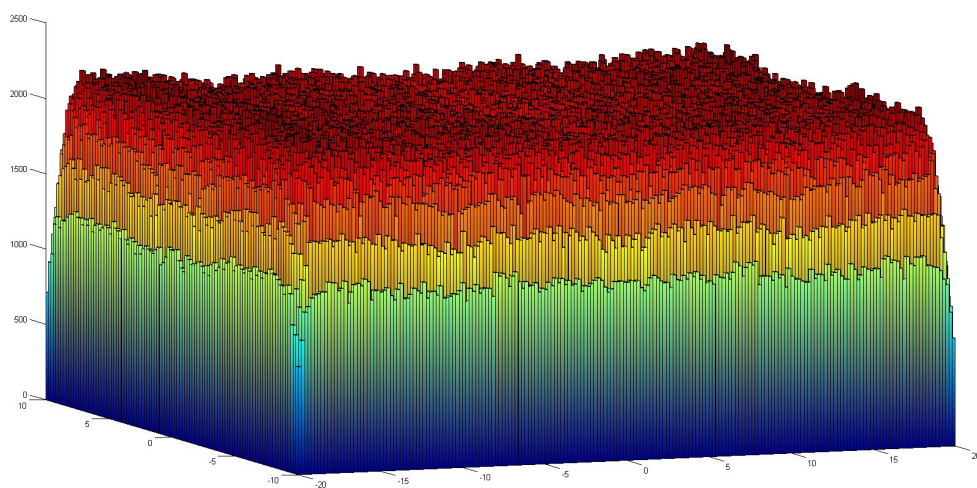
Rysunek 9: Rozkład normalny



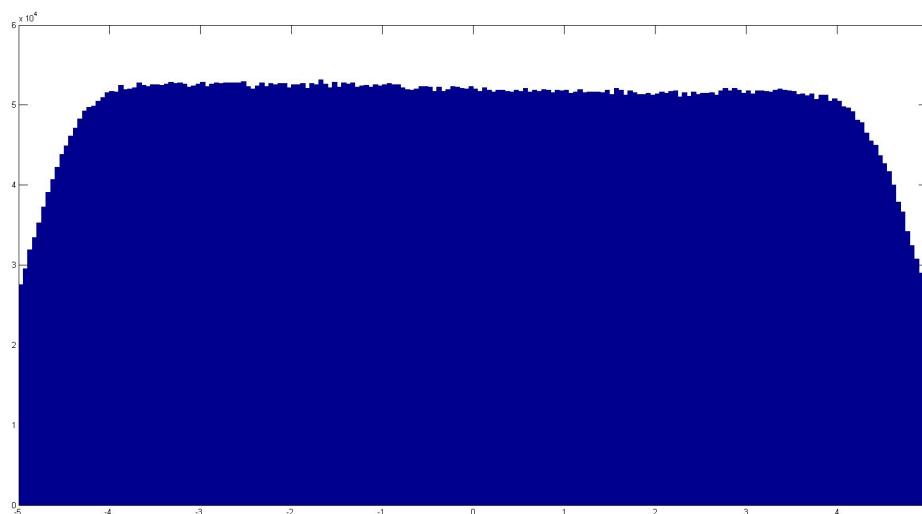
Rysunek 10: Rozkład jednostajny

## Próbkowanie

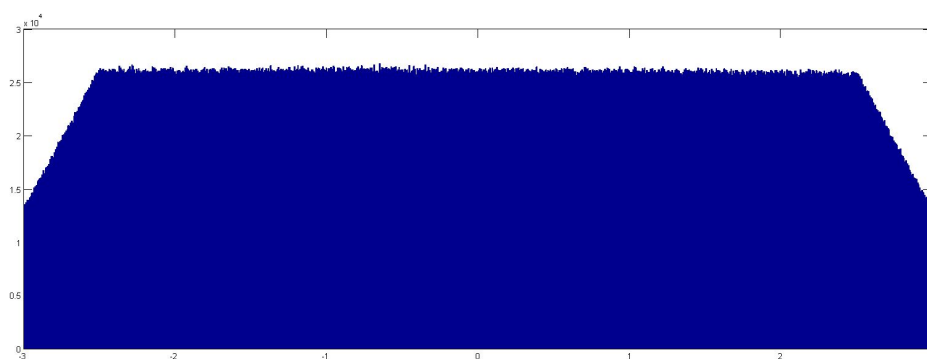
Ten rozkład charakteryzuje się spadkiem wartości prawdopodobieństwa wraz z zbliżaniem się do ograniczenia. Punkty, które wypadłyby poza ograniczenia oraz ich potomkowie są przesuwane w kierunku środka przedziału.



Rysunek 11: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym



Rysunek 12: Rozkład normalny

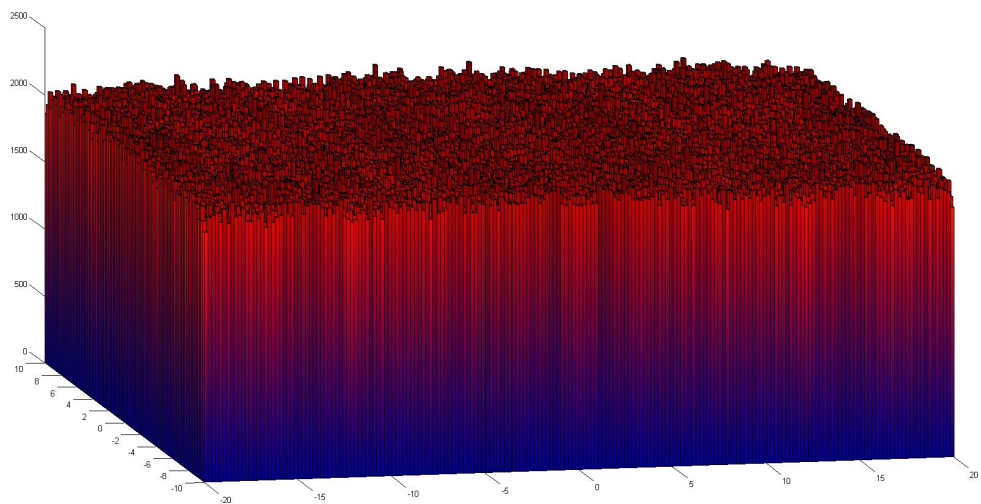


Rysunek 13: Rozkład jednostajny

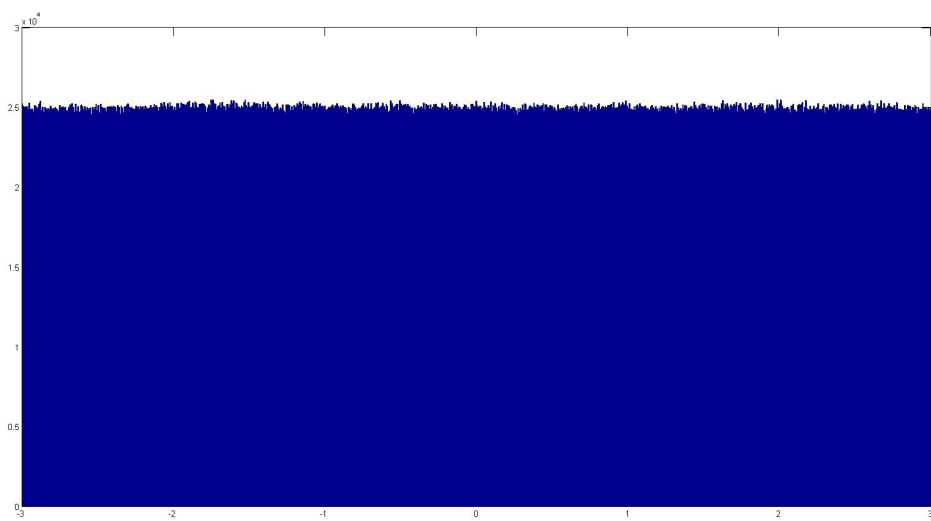
## Zawijanie

Wyobraźmy sobie, że naszą symulację przeprowadzamy bez ograniczeń, następnie naszą tniemy w równych odstępach wzdłuż każdej osi. Na koniec tak pocięte wyniki łączymy w jednym wykresie. Takie zachowanie tak naprawdę symuluje zawijanie. W związku z tym nie dziwi fakt, że poniższe histogramy przedstawiają rozkład jednostajny z szumem.





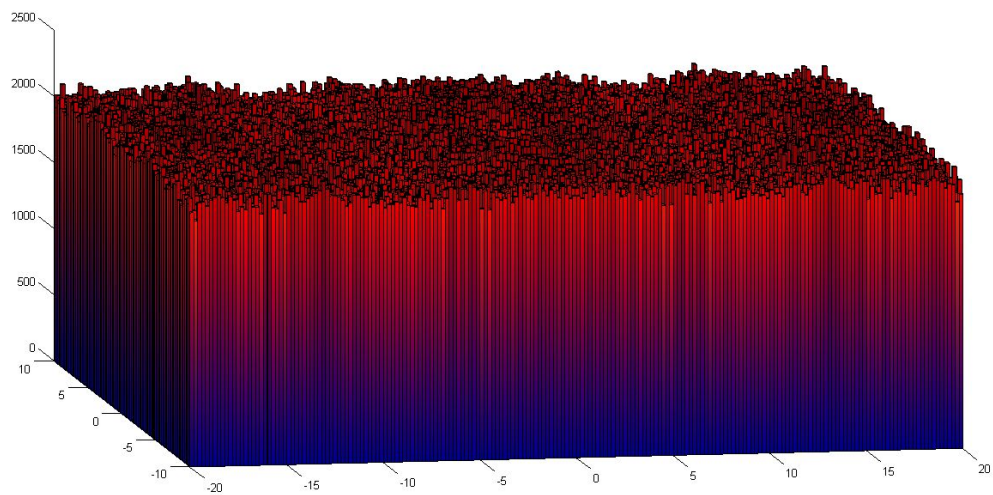
Rysunek 14: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym



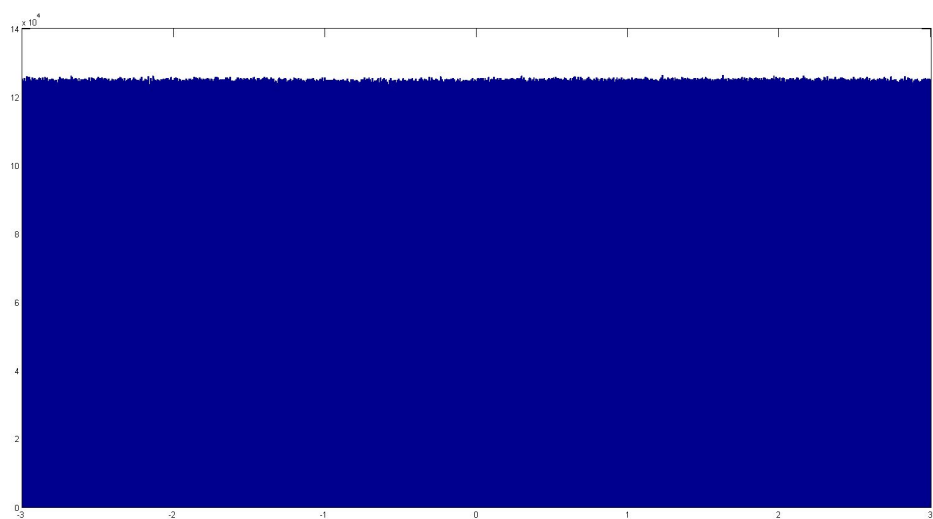
Rysunek 15: Rozkład jednostajny

## Odbicie

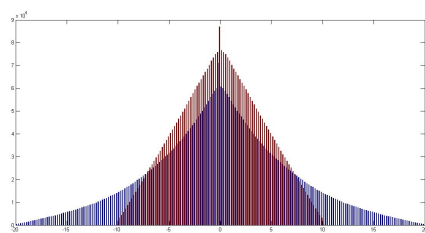
Podobnie jak zawijanie, odbicie zwraca histogram rozkładu normalnego z szumem. W tej sytuacji nieco trudniej o analogię, lecz po chwili zastanowienia nie dziwi kształt poniższych wykresów.



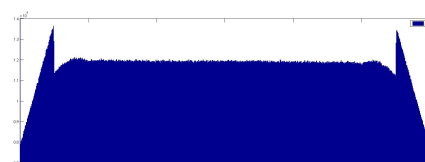
Rysunek 16: Rozkład normalny na dwóch wymiarach z kopiowaniem symetrycznym



Rysunek 17: Rozkład jednostajny



(a) test 1



(b) test 2

Rysunek 18: TEST Obrazy obok siebie

### **3.5. Wnioski**

## **4. Benchmarki**

Zgodnie z założeniami poczynionymi w rozdziale 3.2 testy algorytmu CMA-ES powinny przynieść rezultaty zbliżone do testów błędzenia przypadkowego.

### **4.1. Metoda przeprowadzania testów**

Do przeprowadzania testów została użyta biblioteka przygotowana przez Nikolausa Hansena, współautora algorytmu CMA-ES. Podobnie, jak w przypadku błędzenia przypadkowego, wykorzystano implementację w języku MATLAB —przypis—.

### **4.2. Wnioski**

## 5. Wpływ technik na efektywność CMA-ES

### 5.1. Algorytm CMA-ES

Klasyczne algorytmy ewolucyjne nie dostosowują się do charakterystyki optymalizowanej funkcji. W większości z nich rozkład prawdopodobieństwa losowanych punktów jest stały. Z tego faktu wynika problem doboru parametrów przeszukiwania. Na przeciw tym problemom wychodzi algorytm CMA-ES, który w swej idei ma dopasowywać się do badanej funkcji.

Rozwinięcie akronimu CME-ES podpowiada, w jaki sposób jest to realizowane: Covariance Matrix Adaptation - Evolution Strategy (adaptacja macierzy kowariancji - strategia ewolucyjna). Punkty losowane są na podstawie macierzy kowariancji, która jest w każdej iteracji dostosowywana do aktualnej sytuacji przeszukiwań.

#### Szczegóły

## **6. Podsumowanie**

### **6.1. Wyniki**

### **6.2. Możliwości rozwoju**

## Literatura





Warszawa, dnia 19 maja 2016

## Oświadczenie

Oświadczam, że pracę magisterską pod tytułem „Analiza możliwości wykorzystania w algorytmie CMA-ES wiedzy o ograniczeniach kosztowych”, której promotorem jest dr hab. inż. Jarosław Arabas prof. nzw. PW, wykonałem samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

.....