MAPA – Material de Avaliação Prática da Aprendizagem

Acadêmico: Robson Cruz Santos	**R.A 22117001-5**
Curso: Engenharia de Software	
Disciplina: Pesquisa Operacional	
Valor da atividade: 3,5	**Prazo: 21/04/2024**

QUESTÃO 1

Delícias do Nordeste é uma indústria de sucos que produz diferentes sucos. Visando atender demandas do mercado europeu decidiu investir na produção sucos de graviola e de caju e você foi contratado para ajudar o engenheiro de processamento, no processo de tomads de decisão sobre esse novo investimento.

No processo de produção desses dois novos sucos haverá a necessidade do uso de duas unidades de processamento: UPA e UPB. Na produção de dez litros de suco de graviola o processo exige oito minutos na UPA e seis minutos na UPB, para atender as legislações de exportação. Já na produção de dez litros do suco de caju faz-se necessário quatro minutos na UPA e dois minutos na UPB, também para atender as legislações de exportação.

A Delícias do Nordeste tem, em cada turno de trabalho, disponibilidade máxima de processamento de quatrocentos e oitenta minutos para a UPA e duzentos minutos para a UPB. Para a produção de dez litros dos novos sucos, os custos operacionais, são de US$ 70,00 para o suco de graviola e US$ 60,00 para o suco de caju. Por outro lado, a receita arrecadada, com a venda de dez litros dos novos sucos, são de US$ 77,50 para o suco de graviola e US$ 64,50 para o suco de caju.

Com base na situação descrita, resolva os itens abaixo:

a) Escreva o problema de programação linear em sua forma canônica, considerando a obtenção da maior margem de lucro com a produção dos sucos de graviola e caju. Apresente todo o raciocínio.

b) Use o método gráfico e determine a quantidade ótima do sucos de graviola e de caju a serem produzidos por turno de trabalho. Apresente todos os cálculos realizados.

c) Use o método simplex e determine a quantidade ótima do sucos de graviola e de caju a serem produzidos por turno de trabalho. Apresente todos o cálculo realizado e faça a interpretação do último tableau.

d) Use o Solver do Excel e determine a quantidade ótima do sucos de graviola e de caju a serem produzidos por turno de trabalho. Apresente um “print” da planilha utilizada.

e) Qual é a maior margem de contribuição, em dolares, obtida com a produção dos dois novos sucos em um turno de trabalho? Apresente seu raciocínio e os cálculos realizados.

f) Agora, assuma a situação em que a demanda do suco de graviola seja limitada em 400 litros por turno. A adição dessa nova restrição altera a resolução do problema obtida nos itens (b) e (e)? Caso afirmativo, apresente a nova solução apresentando os cálculos. Caso negativo, justifique sua resposta apresentado os cálculos realizados.

Solução

Na tabela 1, estão resumidos os dados do problema acrescido do lucro obtido com cada suco.

Tabela 1. Resumo dos dados do Problema.

	UPA	UPB	Custo	Receita	Lucro
Graviola	8 min/10L	6 min/10L	70,00	77,50	7,50
Caju	4 min/10L	2 min/10L	60,00	64,50	4,50
Disponibilidade	480 min	200 min	-	-	-

Sejam: x e y as quantidades, a cada 10 L, dos sucos de graviola e caju a serem produzidas, respectivamente.

Função Objetivo: $Max\ Z = \frac{15}{2}x + \frac{9}{2}y$

Restrições:

Disponibilidade UPA: $8x + 4y \leq 480$

Disponibilidade UPB: $6x + 2y \leq 200$

Não Negatividade: $x, y \geq 0$

Item a)

Respondendo ao **item a)**, a Programação Linear em sua Forma Canônica é dada por:

$$Max\ Z = \frac{15}{2}x + \frac{9}{2}y \qquad (1)$$

$$8x + 4y \leq 480 \qquad (2)$$

$$6x + 2y \leq 200 \qquad (3)$$

$$x \geq 0 \qquad (4)$$

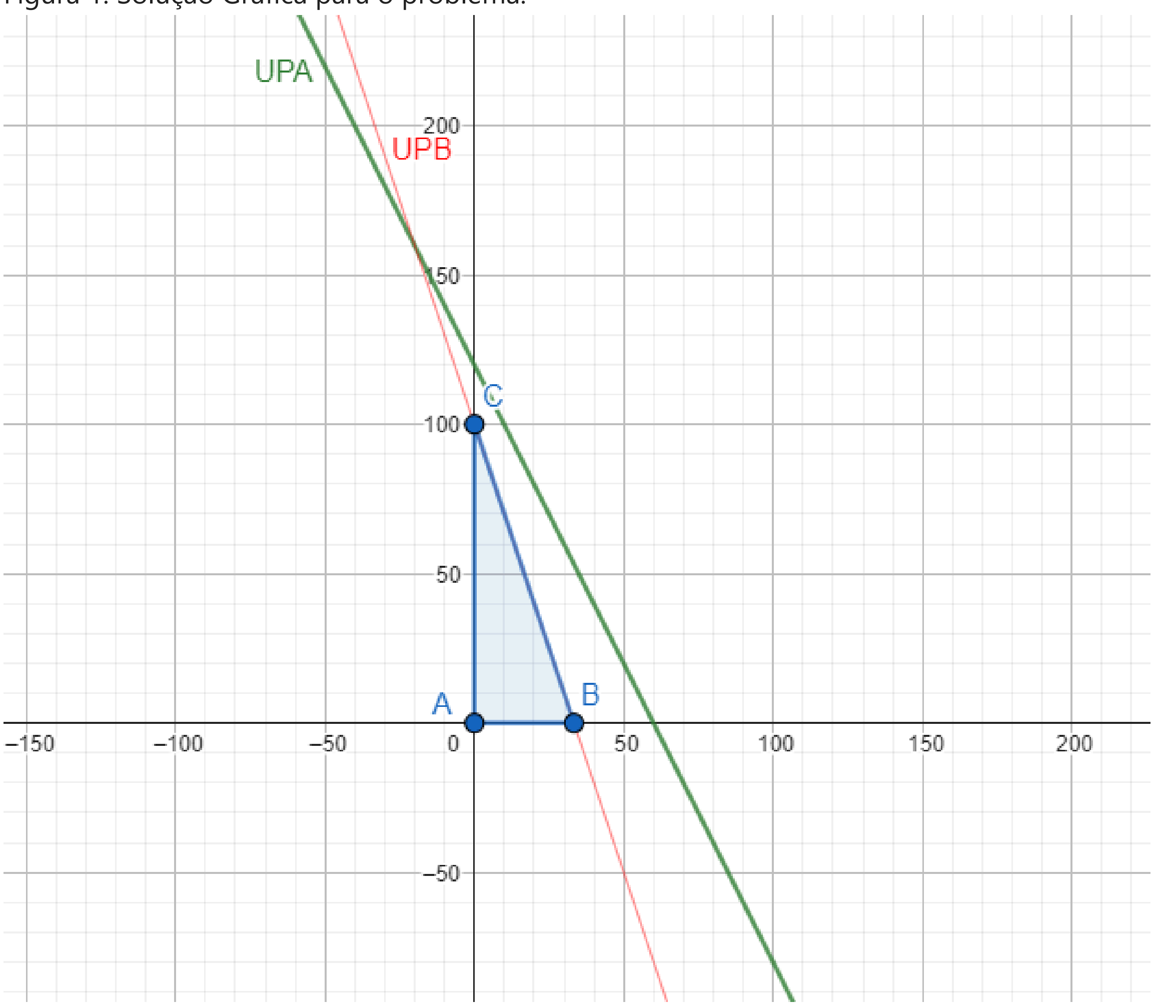
$$y \geq 0 \qquad (5)$$

Item b)

Solução pelo método gráfico

A figura 1, produzido no Geogebra, mostra que os pontos de interseção da restrição da unidade de produção A (UPA) vão de encontro à restrição imposta pela unidade de produção B (UPB), assim, devem ser desconsiderados os pontos de interseção de UPA.

Figura 1. Solução Gráfica para o problema.



Ponto $B(33.3333, 0)$: $Z = 33,3333x + 0.y = 249,99975$

Ponto $C(0, 100)$: $Z = 0x + 100y = 450,00$

As soluções do problema pelo método gráfico, considerando a proporção a cada 10 L, indica uma solução viável somente com a produção de 1000 L de suco de caju para obter lucro máximo.

Item c)

Solução manual pelo método simplex

- Adicionar variáveis de folga para transformar todas as desigualdades das inequações em igualdades:

Sejam:

f_1 a variável de folga para a restrição de disponibilidade da UPA;

f_2 a variável de folga para a restrição de disponibilidade da UPB;

$$-Z - \frac{15}{2}x - \frac{9}{2}y = 0$$

$$8x + 4y + f_1 = 480$$

$$6x + 2y + f_2 = 200$$

- Quadro Simplex:

	x	y	f_1	f_2	**Solução**
Z	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0
f_1	8	4	1	0	480
f_2	6	2	0	1	200

- Identificação da Coluna Pivô

A coluna pivô ou variável de entrada, é a coluna que possui o maior valor absoluto entre as variáveis não básicas, portanto é a coluna da variável x.

	x	y	f_1	f_2	**Solução**

Z	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0
f_1	8	4	1	0	480
f_2	6	2	0	1	200

- Calcular o Quociente e Identificar a Linha Pivô e o Elemento Pivô.

O quociente é calculado entre cada valor da coluna Solução e da Coluna Pivô. A *linha pivô* ou a variável que deve sair da base, é a que possui o menor valor de *quociente*. O *elemento pivô* encontra-se na interseção entre a *Linha Pivô* e a *coluna pivô*.

	x	y	f_1	f_2	**Solução**	**Quociente**
Z	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0	
f_1	8	4	1	0	480	60
f_2	6	2	0	1	200	$\frac{100}{3}$

Da tabela acima temos que: A *coluna pivô* é a coluna da variável não básica x, a *linha pivô* é a 3ª linha e o *elemento pivô* é o número 6 da *coluna pivô*, os quais estão destacados na cor vermelho.

- Calcular Nova Linha Pivô

Para calcular a nova linha pivô, devemos dividir cada elemento da linha pivô atual pelo inverso do *elemento pivô*, exceto o valor correspondente a coluna do quociente. A fórmula a seguir apresenta o cálculo para encontrar a nova linha pivô.

$$NLP = \frac{1}{piv\hat{o}} \times LP \qquad \text{(Fórmula: 1)}$$

Onde:

NLP = Nova linha pivô;

$piv\hat{o}$ = Elemento pivô;

LP = Linha pivô.

$$NLP = \frac{1}{6} \times (6, 2, 0, 1, 200)$$

$NLP = (1, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{100}{3})$

	x	y	f_1	f_2	**Solução**
Z	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0
f_1	8	4	1	0	480
x	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{3}$

- Primeira Iteração

Mantem-se a nova linha pivô na tabela e calcula-se a nova linha 1 através da fórmula 2.

$$NL_1 = L_1 - CL_1 \times NLP \qquad \text{(Fórmula: 2)}$$

Onde:

L_1 = Linha 1

NL_1 = Nova linha 1

CL_1 = Coeficiente da Linha 1

NLP = Nova linha pivô

$L_1 = (-\frac{15}{2}, -\frac{9}{2}, 0, 0, 0) - (-\frac{15}{2}) \times (1, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{100}{3})$

$L_1 = (0, -2, 0, 0, \frac{5}{4}, 250)$

	x	y	f_1	f_2	**Solução**
Z	0	-2	0	$\frac{5}{4}$	250
f_1	8	4	1	0	480
x	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{3}$

- Segunda Interação

Deve-se recalcular a linha 2 através da adaptação da fómrula 2, assim como um novo quociente.

$NL_2 = L_2 - CL_2 \times NLP$

	x	y	f_1	f_2	**Solução**	**Quociente**
Z	0	-2	0	$\frac{5}{4}$	250	
f_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{640}{3}$	160
x	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{3}$	100

A tabela acima indica que a nova coluna pivô é y, pois possui o maior valor absoluto entre as variáveis não básicas, e a nova linha pivô é a linha 3, as quais estão destacadas na cor vermelho.

	x	y	f_1	f_2	**Solução**	**Quociente**
Z	0	-2	0	$\frac{5}{4}$	250	
f_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{640}{3}$	160
x	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{3}$	100

A variável que sai da base é x porqe tem o menor quociente:

$NL_3 = L_3 - CL_3 \times NLP$

	x	y	f_1	f_2	**Solução**
Z	0	-2	0	$\frac{5}{4}$	250
f_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{640}{3}$
y	3	1	0	$\frac{1}{2}$	100

Cálcular a nova linha 1

$NL_1 = L_1 - CL_1 \times NLP$

	x	y	f_1	f_2	**Solução**
Z	6	0	0	$\frac{9}{4}$	450

f_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{640}{3}$
y	3	1	0	$\frac{1}{2}$	100

Calcular a nova lina 2

$$NL_2 = L_2 - CL_2 \times NLP$$

	x	y	f_1	f_2	**Solução**
Z	6	0	0	$\frac{9}{4}$	450
f_1	-4	0	1	-2	80
y	3	1	0	$\frac{1}{2}$	100

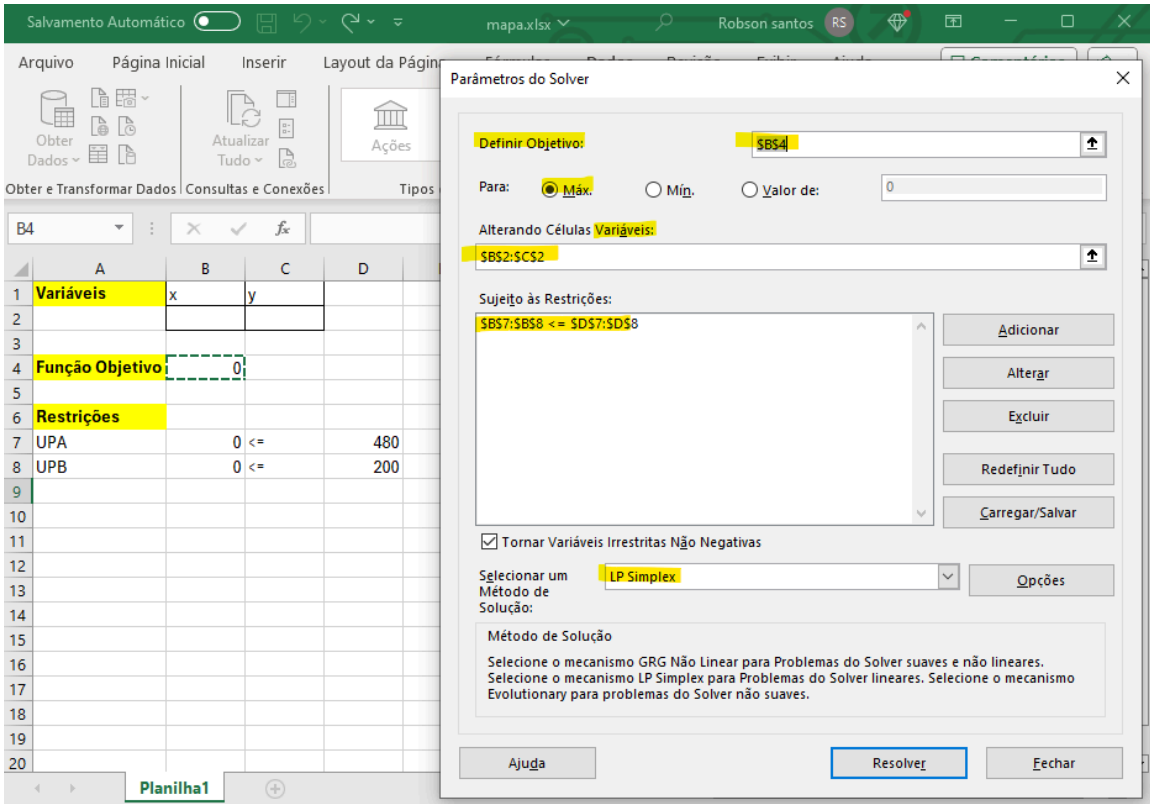
A tabela acima mostra que nenhum dos coeficientes da função objetico (Z) é negativo, ou seja, o ótimo foi alcançado. A solução obtida é: $(x, y,\ f_1, f_2) = (0, 100, 80, 0)$. Portanto, o lucro máximo é de US$ 4.500,00, pois os dados do problema apresentam a produção proporcional a 10 L, sendo para isso necessário apenas a produção de suco de caju (y).

Item d)

Em resposta ao **item d)**, foi utilizado o *Solver* do Microsoft Excel, uma ferramenta que permite resolver problemas de otimização, como maximizar lucros, minimizar custos ou atender a determinadas restrições.

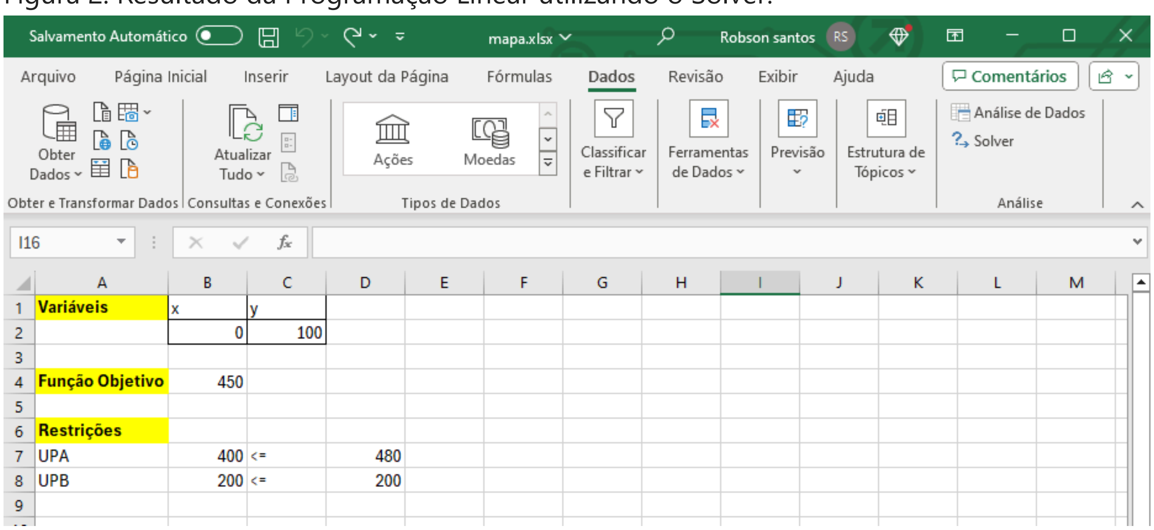
A figura 2, mostra o preenchimento da planilha com as variáveis não básicas, definidas nas celuas $B2$ e $C3$; a função objetivo, definida na célula $B4$; a restrição para UPA indicada no intervalo de células $B7 : D7$ e a restrição para UPB no intervalo de células $B8 : D8$

Figura 2. Planilha excel com dados para utilização do Solver.



A figura 3, mostra o resultado da programação linear usando o método simplex do *solver*, onde é possível observar que tal resultado é condizente com a solução pelo método gráfico. O *Solver* mostra ainda que serão utilizados 400 minutos da UPA e 200 minutos na UPB para produção de 100L de suco de caju.

Figura 2. Resultado da Programação Linear utilizando o Solver.



Item e)

item e) Maior margem de contribuição em dólares

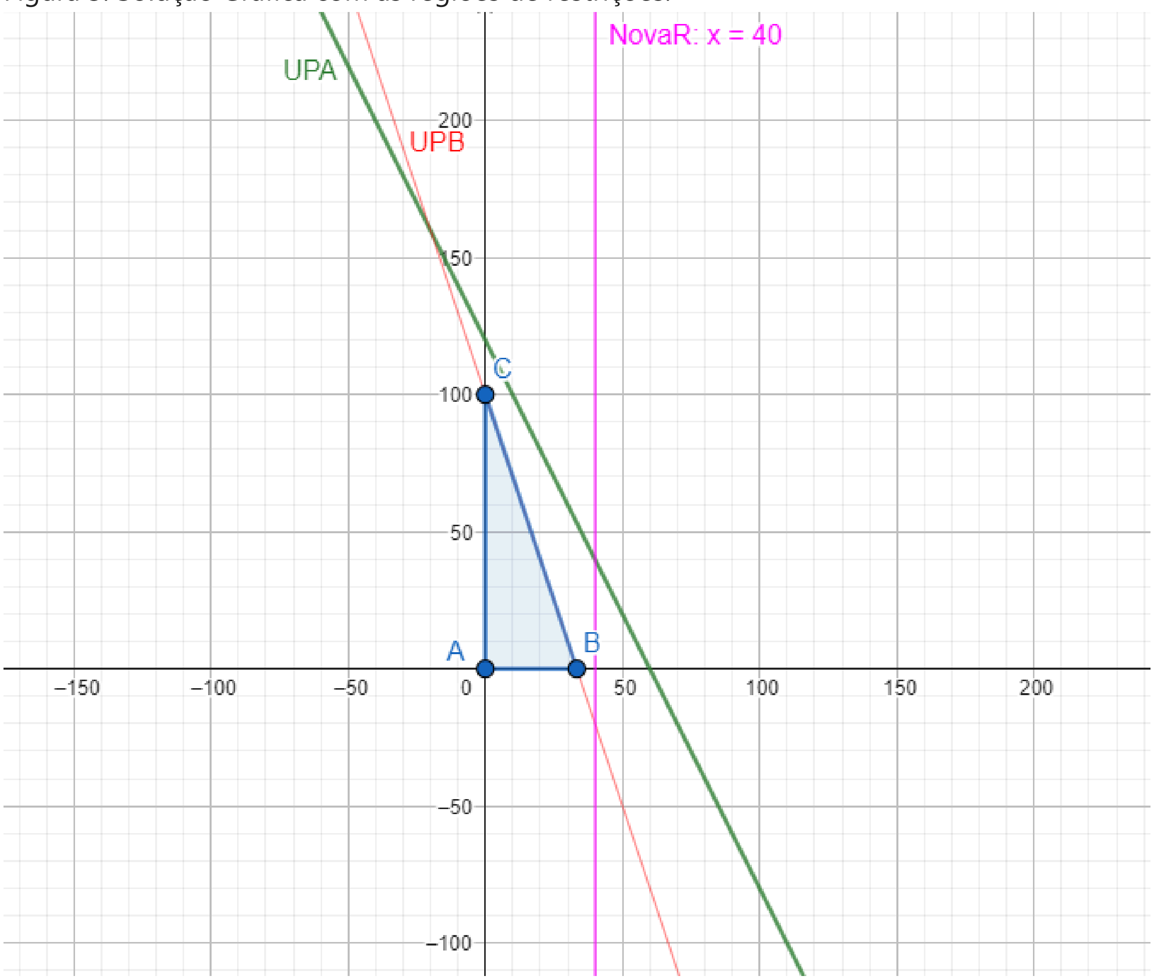
Utilizando o resultado do método gráfico e considerando a proporção de produção a cada 10L, temos que:

- No ponto $B(33.3333, 0)$: $Z = 33,3333x + 0.y = 249,99975$
- No ponto $C(0, 100)$: $Z = 0x + 100y = 450,00$

Assim, a maior contribuição se dá com a produção de apenas 1.000 L de suco de caju, o que resulta em um lucro máximo de US$ 4.500,00.

Quanto ao **item f)** que estabeleceu a produção de 400 L de suco de graviola por turno, o método gráfico indica que esta nova restrição não altera a região de restrição, conforme pode ser observado na figura 3, assim, não altera a resposta dos itens "b" e "e".

Figura 3. Solução Gráfica com as regiões de restrições.



Em razão da produção de suco ser proporcional a 10 L, a nova restrição de 400 L passa a ser de 40 L de suco de graviola.

Nota

Para facilitar a organização e melhorar a apresentação deste trabalho, foi utilizado a plataforma Jupyter Notebook com um kernel Python, porém, não se utilizou de células com linguagem Python, apenas células com código HTML e markdown, portanto, todos os cáclulos para responder ao item c foram feitos manualmente, sendo utilizado código HTML para produzir as tabelas e código Latex para representar fórmulas.