Pesquisa Operacional

Teroria de Filas

Aula Vivo 09 - Exemplos

Exemplo 2

Um hospital recebe, em média, 2 pacientes por hora em seu pronto atendimento e tem capacidade de receber, em média, 3 pacientes por hora. A direção do hospital estima que a cada hora de espera de um paciente custe $ 400 em termos de deterioração da imagem do hospital. Por outro lado, cada atendimento custa em média $ 800 de mão de obra. Diante dessa situação, determine a taxa média de serviço por parte do hospital que resulte no menor custo total.

Solução

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda . CE_{unitário}}{CA_{unitário}}}$$

μ = Taxa de Serviço Ótima

λ = Taxa Média de Chegada

$CE_{unitário}$ = Custo Unitário de Permanência

$CA_{unitário}$ = Custo Unitário de Atendimento

```
In [ ]:
```

λ = 2

$CE_{unitário}$ = 400

$CA_{unitário}$ = 800

$$\mu^* = 2 + \sqrt{2 . \frac{400}{800}}$$

$$\mu^* = 2 + \sqrt{1}$$

$\mu^* = 3$

In [ ]:

Exemplo 3: A Teoria das Filas é uma grande área da pesquisa operacional que estuda sistemas envolvendo clientes disputando o atendimento de um ou mais servidores. Dentre as diversas medidas de efetividade de tais sistemas temos a taxa de ocupação dos atendentes, que é dada pela razão da taxa média de chegada de clientes pela taxa média de atendimento, dividida pelo número de atendentes.

Um trailer de fast food localizado em uma grande rodovia é capaz de atender 5 clientes por hora, um por vez. Sabendo-se que o fluxo de veículos na rodovia é de 150 carros por hora e que 2,0% destes utilizam o trailer, é correto afirmar que a taxa percentual de ocupação do sistema é de:

a) 25.

b) 30.

c) 60.

d) 75.

In [ ]:

Solução

$$Tx_{ocupação} = \frac{tx_{chegada}}{tx_{atendimento}}$$

$$Tx_{ocupação} = \frac{150 \times 0,02}{5} = 0,6 \quad ou \quad 60\%$$

In [ ]:

Atividades Livro Didático - Teoria de Filas

Um supermercado recebe fornecedores diariamente para repor o estoque de produtos vendidos. Ele possui apenas uma doca de descarregamento, e a gerência tem planos de ampliar a estrutura física do mercado, bem como a quantidade de produtos vendidos.

Estima-se que haverá necessidade de aumentar em 20% a quantidade de caminhões que chegam para descarregamento. Considerando que atualmente chegam em média 15 caminhões por dia, e que a capacidade atual de atendimento é de 20 caminhões por dia, **determine as medidas de desempenho do sistema, e verifique se haverá necessidade**

de construir mais uma doca de descarregamento, sendo que a gerência considera uma taxa de ocupação de até 95% suficiente.

Solução

As medidas de desempenho são NF, TF, NS, TS e ρ. Para encontrá-las, devemos determinar os valores da *taxa média de chegada de caminhões* (λ), e da *taxa média de atendimento* aos caminhões (μ). O enunciado nos fornece que $\lambda = 15$ caminhões/dia, e $\mu = 20$ caminhões/dia. Portanto, as medidas de desempenho são:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15^2}{20.(20 - 15)} = \frac{225}{100} = 2,25 \text{ caminhões na fila}$$

$$TF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15}{20.(20 - 15)} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ dia ou 3h e 36min de espera na fila}$$

$$NS = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15}{20.(20 - 15)} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ dia ou 3h e 36min de espera na fila}$$

In [ ]:

In [ ]:

Distribuições de Probalidade para Descrever o Comportamento de Chegada de Clientes

O número de clientes que chegam em determinado intervalo de tempo pode apresentar comportamento determinístico ou probabilístico

- *Comportamento Determinístico*: O número de clientes que chegam é sempre o mesmo. Nesse caso, a variância é zero, a qualquer momento que se observe, será visto o mesmo número de clientes chegando por unidade de tempo.

- *Comportamento Probabilistísco*: As chegadas as chegadas podem ser descritas por um modelo de probabilidade, o que significa que o comportamento de chegada é independente das chegadas anteriores e que a ocorrência depende da magnitude do intervalo de tempo.

$$P(X) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{X!} \qquad \text{(Distribuição de Poisson)}$$

λ = Taxa média de Chegada por unidade de tempo

X = Número de Clientes.

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson descreve resultados de experiências nos quais contamos acontecimentos que ocorrrem aleatoriamente, mas a uma taxa média definida.

A distribuição de Poisson ocorre quando o número de tentativas da distribuição binomial tende ao infinito.

$$\lim_{x \to x} Binomial = Poisson$$

Exemplos de aplicação da Distribuição de Poisson:

- Número de carros que passsam por um cruzamento por minuto durante certa hora do dia;
- Erros tipográficos por página em um materiakl impresso;
- Defeitos por unidade (m³, m², m, etc.);
- Colônias de bactérias numa dada cultura por 0,01mm², numa plaqueta de microscópio;
- Mortes por ataque cardíaco por ano em uma cidade;
- Problemas de filas de espera em geral.

Propriedades da Distribuição de Poisson

- A distribuição de Poisson ($P(X)$), mostra a probabilidade de obter o resultado (X) num experimento no qual contamos eventos que ocorrem aleatoriamente mas a uma taxa média definida.

Exemplo 5:

Um pronto atendimento hospitalar, nos horários de pico, recebe, em média dois pacientes a cada hora.

A chegada desses pacientes nesses horários obedece à distribuição de Poisson. Qual a probabilidade de que, em uma hora, esse pronto atendimento receba:

a) nenhum paciente?

b) dois pacientes?

c) três pacientes ou menos?

Solução

a) $P(X) = \dfrac{2^0 . e^{-2}}{0!} = 0$

b) $P(X) = \frac{2^2.2,71828^{-2}}{2!} = 0.27067093060805475$

c) $P(X) = \frac{2^3.e^{-2}}{3!} = 0.721789148288146$

Exemplo 6:

O caixa de um restaurante fast-food atende, em média, quatro clientes por minuto. Qual a probabilidade de que o tempo de atendimento ser menor ou igual a 20s?

$P(X \leq \frac{20}{60}) = \frac{4^{\frac{1}{3}}.e^{-4}}{4!} = 5,43656 \quad ou \quad 0,05\%$

Distribuição Exponencial Negativa

Utilizada para descrever as probabilidades envolvidas no tempo que decorre para que um determinado evento aconteça. Dessa forma, ela é usada para descrever o tempo entre as ocorrências de sucessivos eventos de uma distribuição de Poisson.

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0, \\ 0 & , \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

A probabilidade de a variável aleatória X assumir qualquer valor não negativo no intervalo infinitesimal $[X^*, X^* + dx]$ é $\lambda e^{-\lambda x} dx$. A probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor negativo é zero.

In [ ]:

```

```

Sugestão de Vídeos

Vídeo 1 - Distribuição de Probabilidade: https://www.youtube.com/watch?v=ZAIBVL4koGQ

Vídeo 2 -Aplicações de Distribuição de Probabilidade: https://www.youtube.com/watch?v=s28ss1X8W6Q

Vídeo 3 - Simulação de Monte Carlo (Excecl) com Distribuições de Probabilidades:https://www.youtube.com/watch?v=rFtyUpTz3v0

In [ ]:

```

```