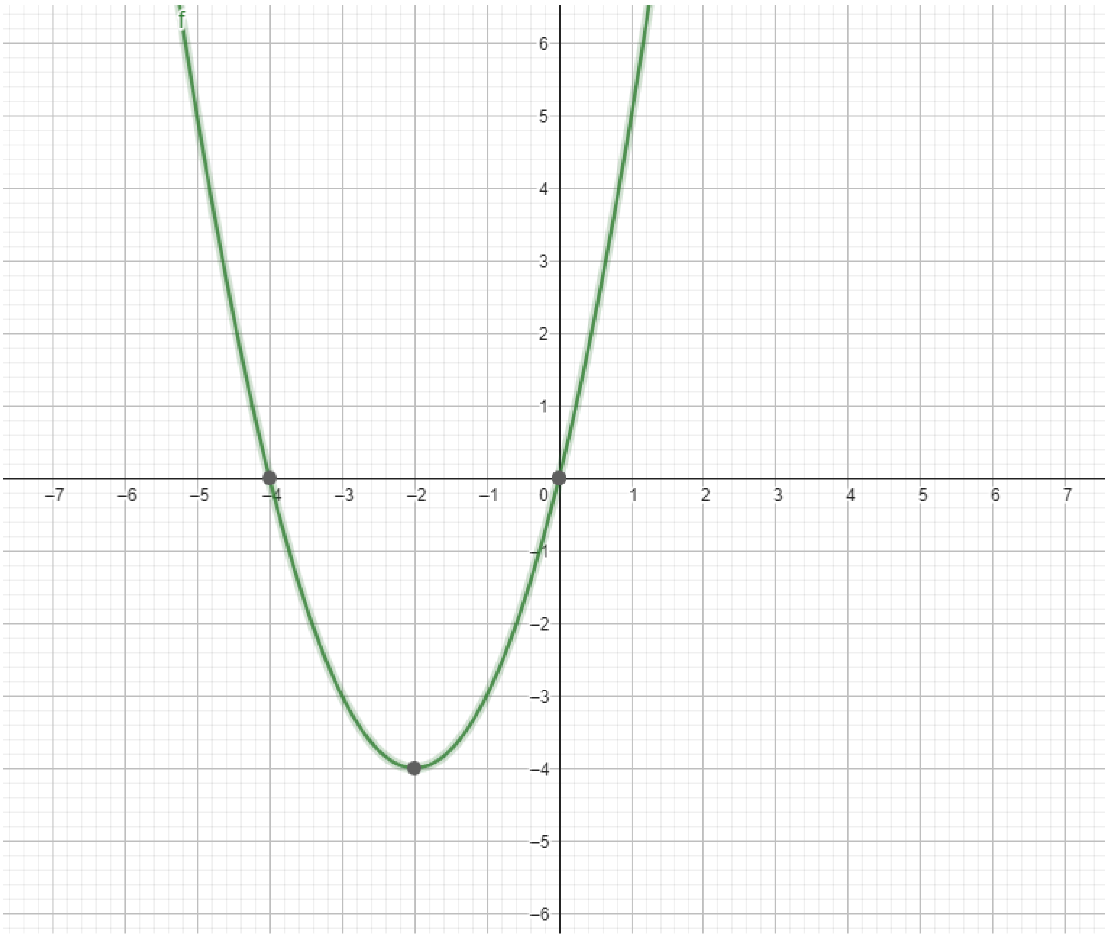
Limite de uma Função

Noção intuitiva de limite de uma função

$$f(x) = x^2 + 4x \qquad x \to 1$$



x	$f(x) = x^2 + 4x$
0	0
0.5	2.25
0.6	2.75
0.8	0.6400000000000001
0.99	4.9401
$\vdots$	$\vdots$
1,01	5.0601
1.5	8.25

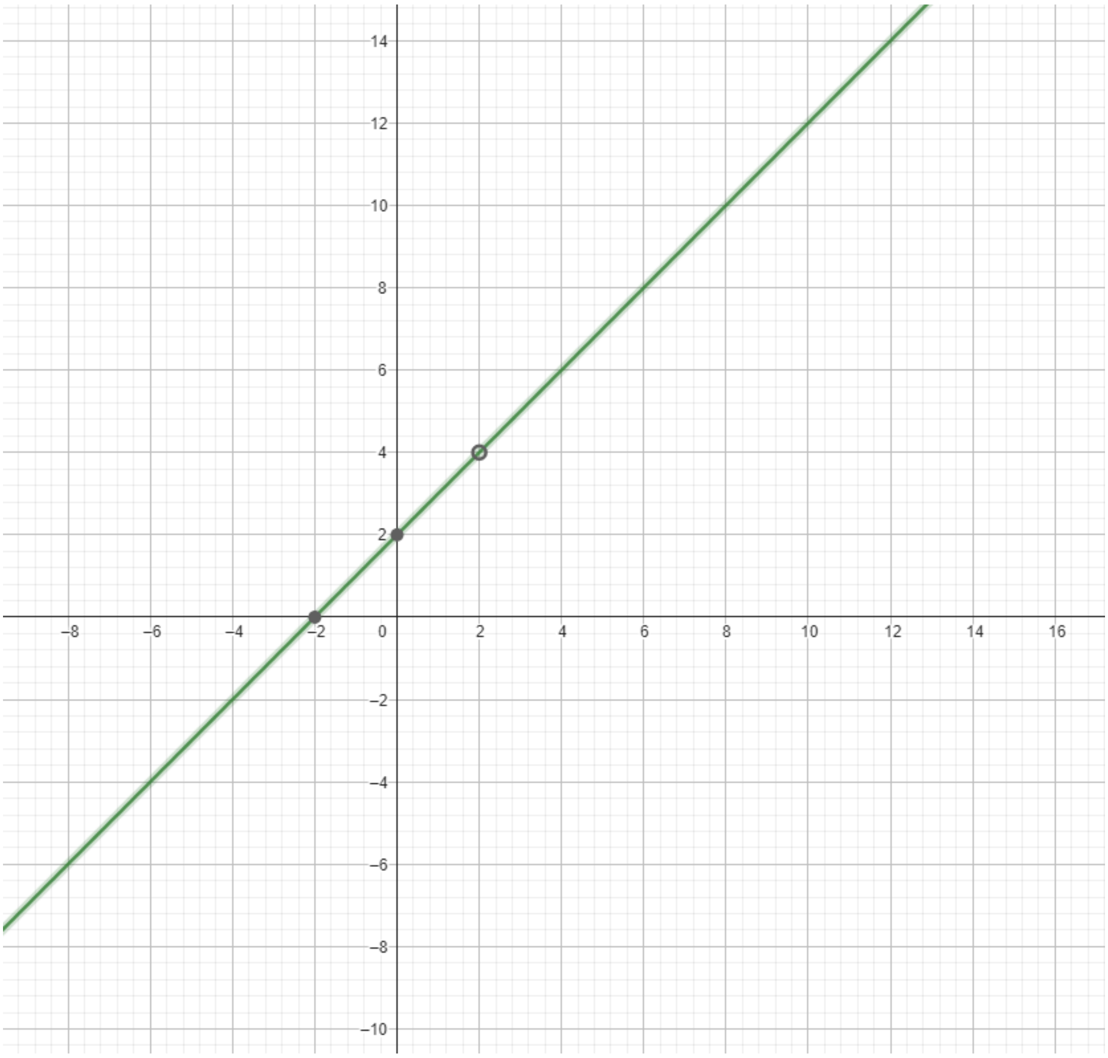
x	$f(x) = x^2 + 4x$
2	12

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 4x = 5$$

In [ ]:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad x \to 2$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\} \tag{1}$$



x	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
0	2
1.5	3.5

x	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
1.99	3.99
$\vdots$	$\vdots$
2,01	4.01
2.5	4.5
3	5

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Limite de uma função

Seja uma função $f(x)$ qualquer, queremos saber para qual valor ela se aproxima quando o número x se aproxima, e está sificientemente perto, de algum determinado número a. Representamos essa ideia de aproximação por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se lê $f(x)$ está suficientemente próximo de L quando x está suficientemente próximo do ponto a

In [ ]:

Definição formal do limite de uma função

Seja uma função $f(x)$ definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e seja L um número real, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Utilizando a definição de limite para provar que $\lim\limits_{x \to 2} 2x - 3 = 1$

Para tal é preciso mostrar que para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: se $o < |x-2| < \delta$, então $|(2x-3) - 1| < \epsilon$

$$|(2x-3) - 1| < \epsilon$$

$$|2x-4| < \epsilon \tag{2}$$
$$|2(x-2)| < \epsilon \tag{3}$$
$$2|x-2| < \epsilon \tag{4}$$
$$|x-2| < \frac{\epsilon}{2} \tag{5}$$

Fazendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e observando que se a última desigualdade é verdadeira, a primeira também é, e temos que: Se $0 < |x-2| > \delta$, então $|(2x-3)-1| < \epsilon$, logo o $\lim\limits_{x \to 2} 2x-3 = 1$

Propriedades do limite de uma função

Supondo que a e c são números reais quaisquer e os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existam, então:

1. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a}[cf(x)] = c\lim\limits_{x \to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a}[f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x).\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} se \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Se a e c são números reais quaisquer, então:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

Supondo que a e c são números reais quaisquer e os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existam, então:

1. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$
2. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$
3. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, em que n é um número inteiro.

Exemplos

Ex.: 1 $\qquad \lim\limits_{x \to 2} x^2 + 2x + 5$

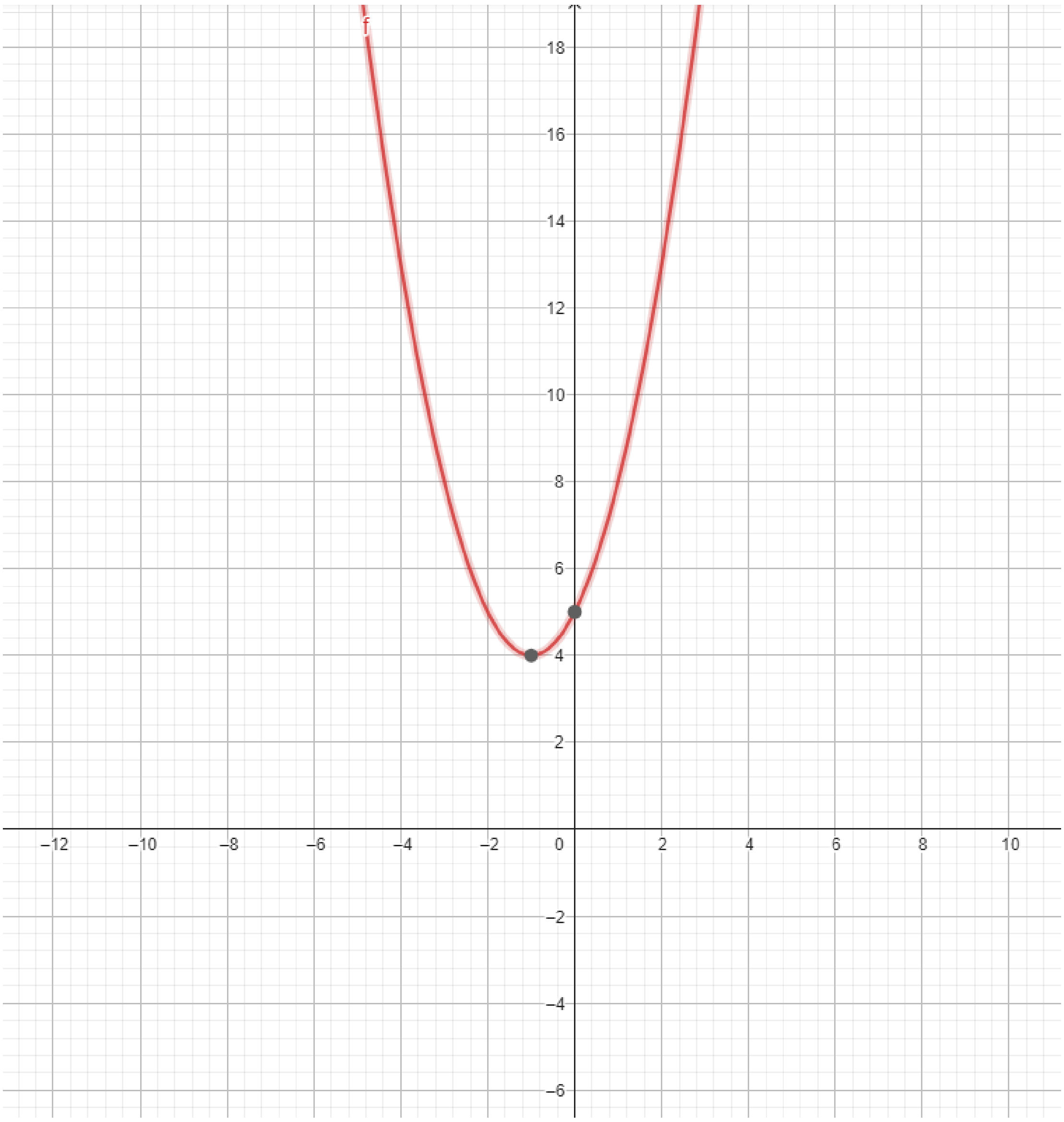
$$\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 5$$

$$2^2 + 2\lim_{x\to 2} + 5 \tag{6}$$

$$4 + 2.2 + 5 \tag{7}$$

$$4 + 4 + 5 \tag{8}$$

$$\boxed{13} \tag{9}$$



Ex.: 2 $\quad \lim_{x\to 1} \dfrac{4x^2 - x}{x+1}$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$$

$$\frac{\lim_{x\to 1} 4x^2 - \lim_{x\to 1} x}{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1}$$

$$\frac{4.1^2 - 1}{1+1} \tag{10}$$

$$\frac{4-1}{2} \tag{11}$$

$$\boxed{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

```
In [ ]:
```

$\text{Ex.: } 3 \qquad \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

O domínio da função é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$$

Do contrário teríamos:

$$\frac{\lim_{x \to 1} x^2 - \lim_{x \to 1} 1}{\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 1}$$

$$\frac{1^2 - 1}{1 - 1} \tag{13}$$

$$\frac{0}{0} \tag{14}$$

Reescrevendo o denominador da função, considerando a restrição imposta pelo seu domínio, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\backslash\text{cancel}(x-1)(x+1)}{\backslash\text{cancel}(x-1)} \tag{15}$$

$$\lim_{x \to 1} x + 1 \tag{16}$$

$$\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1 \tag{17}$$

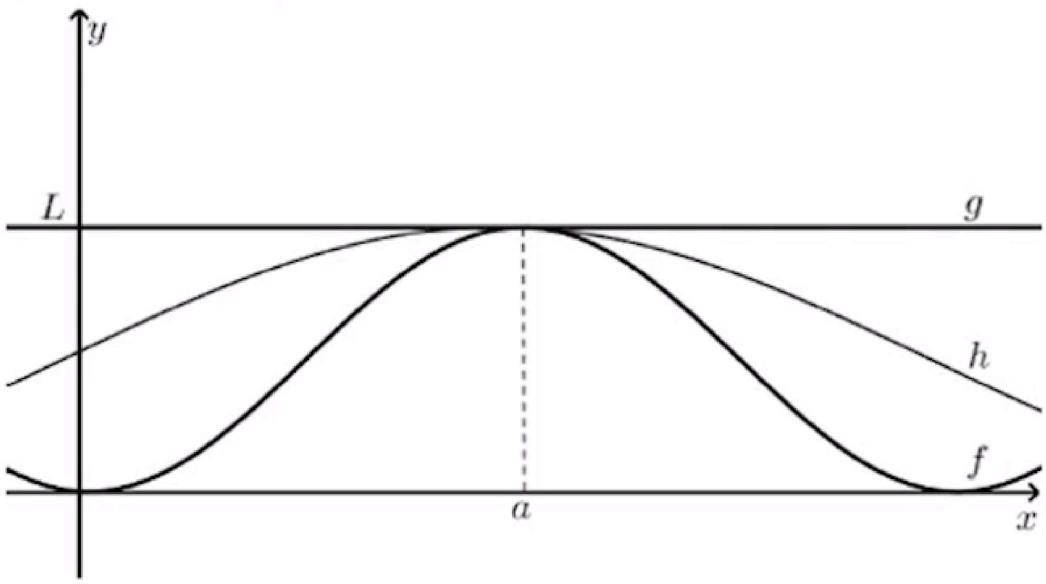
$$1 + 1 \tag{18}$$

$$2 \tag{19}$$

$\text{Ex.: } 3. \quad \text{Mostre que} \quad \lim_{x \to 0} x^2 sen \dfrac{1}{x^3} = 0$

Teorema do Sanduíche

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo a a, exceto possivelmente em a, e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.



Como a função trigonométrica seno é limitada com imagem apresentado $-1 \leq y \leq 1$, logo:

$$-1 \leq senx \leq 1$$

$$-1 \leq sen\frac{1}{x^3} \leq 1 \tag{20}$$

$$-1 \leq sen\frac{1}{x^3} \leq 1 \quad .(x^2) \tag{21}$$

$$-x^2 \leq x^2 sen\frac{1}{x^3} \leq x^2 \tag{22}$$

Utilizando o Teorema do Sanduíche:

$$\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 \tag{23}$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \tag{24}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x^3} = 0 \tag{25}$$

In [ ]: