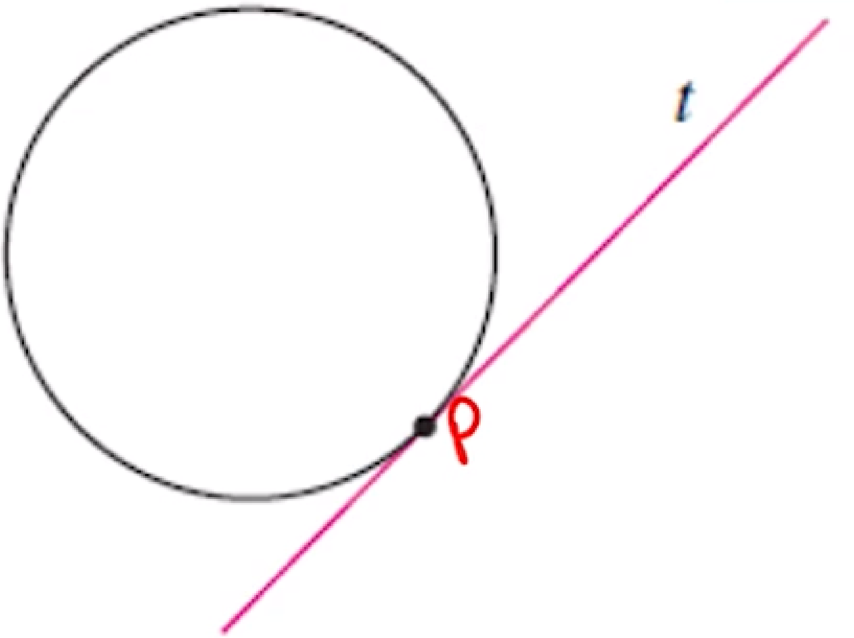
Derivada

O Problema da Tangente

Em uma circunferência, uma determinada reta no plano é tangente a essa circunferência se a reta toca a circunferência em apenas um ponto.



Fonte: STEWART (2014, p. 76)

In [ ]:

Definição: Seja f uma função definida numa vizinhança de a. Para definir a reta tangente de uma curva $y = f(x)$ num ponto $P(a, f(a))$, consideremos um ponto vizinho $Q(x, f(x))$, em que $x \neq a$ e calculamos a inclinação (ou coeficiente angular) da reta secante PQ, que é obtida por:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \rightarrow m = \frac{(y - y_1)}{x - x_1}$$

$m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Exemplo

Determinar a reta que passa pelos pontos $C(1, -2)$ e $B(2, 2)$

$$m = \frac{2 - (-2)}{2 - 1}$$

$$m = \frac{2+2}{1}$$

$$\boxed{m = 4}$$

Por B

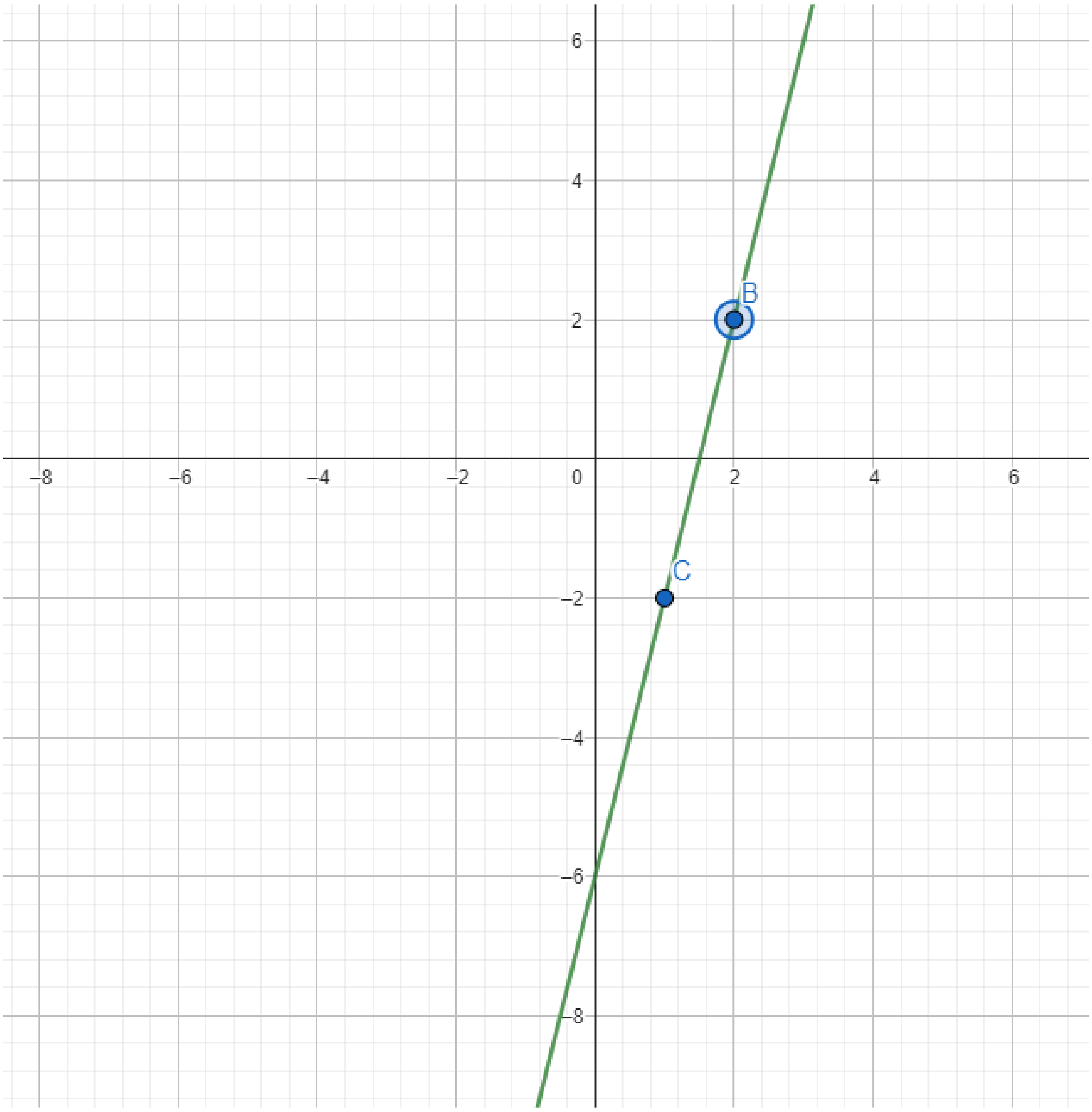
$$(y-2) = 4(x-2)$$

$$y - 2 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 8 + 2$$

$$y = 4x - 6$$

In [ ]:



Reta Tangente

Definição: A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Desde que esse limite exista.

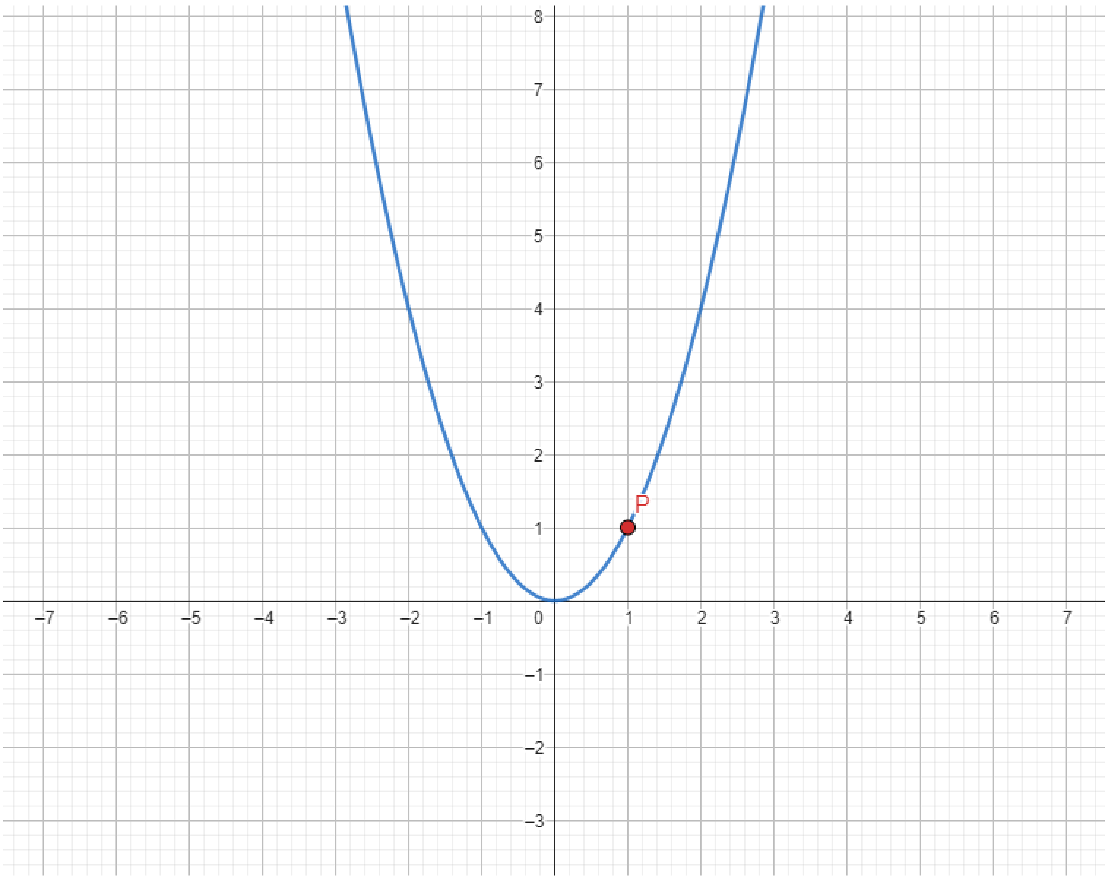
Logo: $y = mx + b$, equivalente a $y = ax + b$

Exemplo: Encontrar a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$

In [ ]:

Solução

Se $y = x^2$, tem-se uma função quadrática com concavidade para baixo e com coeficientes $b, c = 0$ e $a = 1$. Veja a representação gráfica da função.



Para encontrar a equação da reta tangente, temos que utilizar a definição do limite para calcular o coeficiente angular da reta.

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$
$$\tag{2}$$
$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - f(1)}{x - 1} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$
$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$
$$m = \lim_{x \to 1} \frac{\color{red}{\text{\cancel}}(x-1).(x+1)}{\color{red}{\text{\cancel}}x - 1} \tag{7}$$
$$\tag{8}$$
$$m = \lim_{x \to 1}(x+1) \tag{9}$$
$$\tag{10}$$
$$m = \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1 \tag{11}$$
$$\tag{12}$$
$$m = 1 + 1 \tag{13}$$
$$\tag{14}$$
$$m = 2 \tag{15}$$

Conhecendo o coeficiente angular (m), podemos calcular a equação da reta tangente através da equação $y - y_0 = m(x - x_0)$

```
\begin{align}
y-y_{0}=m(x-x_{0})\\
\\
y-1=2(x-1)\\
\\
y-1=2x-2\\
\\
y=2x-2+1\\
\\
\color{red}\boxed{y=2x-1}
\end{align}
```

Limites do tipo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

sempre surgem quando calcula-se um ataxa de variação, por exemplo: taxa de reação química, custo marginal em econômia, taxa de variação da umidade do solo em relação ao tempo, visando ajustar sistemas de irrigação...

```
In [ ]:
```

Exemplo

Seja $f(x) = x^2$, determine a inclinação da reta tangente ou $f'(x)$ da função no ponto $(2, 4)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\backslash\text{cancel}h(4+h)}{\backslash\text{cancel}h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} 4 + h$$

$$\boxed{f'(2) = 4}$$

In [ ]:

Definição de Derivada de uma Função

A derivada de uma função f em um número a, denotado por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Outras Notações de Derivada de uma Função

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ pr indicar que a variável indenpendente é x e a variável dependente é y, então algumas notações alternativas para as derivadas são:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Regras de Derivação

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Exemplo: A derivada da constante 5 em relação a derivada de x:

$\frac{d}{dx}(5) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Exemplo: $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3.x^{3-1} = 3x^2$

4. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = c\dfrac{d}{dx}f(x)$

Exemplo: $\dfrac{d}{dx}2x = 2\dfrac{d}{dx}x = 2.1 = 2$

5. Regra da adição: $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \dfrac{d}{dx}f(x) + \dfrac{d}{dx}g(x)$

6. Regra da subtração: $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \dfrac{d}{dx}f(x) - \dfrac{d}{dx}g(x)$

7. Regra do produto: $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)]$

8. Regra do quociente: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$

9. Regra do exponencial: $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. Regra do logarítmo natural: $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

11. Regra do logarítmo: $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x\, lna}$

12. Regra do seno: $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

13. Regra do cosseno: $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

14. Regra da tangente: $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

In [ ]:

```

```

Derivada de uma função

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

In [ ]:

$$\frac{d}{dx}f(x) \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 5) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(5) \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 5) = 3.x^{3-1} - 2.\frac{d}{dx}(x) + 0 \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

$$= 3x^2 - 2.1 \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

$$= 3x^2 - 2 \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2} \tag{34}$$

In [ ]:

$$f(x) = x^{-4} + 3x^2 - 2x^{-1} - 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-4}) + 3x^2 - 2x^{-1} - 1) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) + \frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(2x^{-1}) + \frac{d}{dx}(-1) \quad ($$

$$($$

$$f'(x) = -4x^{-4-1} + 3\frac{d}{dx}(x^2) - 2.\frac{d}{dx}(x^{-1}) + 0 \quad ($$

$$($$

$$f'(x) = -4x^{-5} + 3.2x^{2-1} - 2. - 1x^{-1-1} \quad ($$

$$($$

$$f'(x) = -4x^{-5} + 6x + 2x^{-2} \quad ($$

$$($$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-4}{x^5} + 6x + \frac{2}{x^2}} \quad ($$

In [ ]:

Aplicação da Regra do Produto de Uma Derivada:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Produto entre $f(x) = 3x - 1 \quad$ e $\quad g(x) = x^2 + 2x$

In [ ]:

$$\frac{d}{dx}[(3x-1)(x^2+2x)] = (3x-1).\frac{d}{dx}(x^2+2x) + (x^2+2x).\frac{d}{dx}(3x-1) \quad (44)$$
$$(45)$$
$$f'(x) = (3x-1).(2x+2) + (x^2+2x).3 \quad (46)$$
$$(47)$$
$$f'(x) = 6x^2+6x-2x-2+3x^2+6x \quad (48)$$
$$(49)$$
$$\boxed{f'(x) = 9x^2+10x-2} \quad (50)$$

In [ ]:

$f(x) = x^2 \quad$ e $\quad g(x) = x+5$

$$\frac{d}{dx}[x^2.(x+5)] = x^2.\frac{d}{dx}(x+5) + (x+5).\frac{d}{dx}(x^2) \quad (51)$$
$$(52)$$
$$f'(x) = x^2.(1) + (x+5).(2x) \quad (53)$$
$$(54)$$
$$f'(x) = x^2 + 2x^2 + 10x \quad (55)$$
$$(56)$$
$$\boxed{f'(x) = 3x^2+10x} \quad (57)$$

Aplicação da Regra do Quociente de Uma Derivada

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

In [ ]:

$f(x) = 3x-1 \quad$ e $\quad g(x) = x^2+2x$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+2x}\right] = \frac{(x^2+2x).\frac{d}{dx}(3x-1) - (3x-1)\frac{d}{dx}(x^2+2x)}{(x^2+2x)^2} \quad (58)$$
$$(59)$$
$$\frac{(x^2+2x).(3) - (3x-1).(2x+2)}{(x^2+2x)^2} \quad (60)$$
$$(61)$$
$$\frac{3x^2+6x-6x^2-6x+2x+2}{(x^2+2x)^2} \quad (62)$$
$$(63)$$
$$\boxed{\frac{-3x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}} \quad (64)$$

In [ ]:

$f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 5$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{x+5}\right] = \frac{(x+5).\,\frac{d}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2} \tag{65}$$

$$\tag{66}$$

$$\frac{(x+5).\,(2x) - (x^2).\,(1)}{(x+52)^2} \tag{67}$$

$$\tag{68}$$

$$\frac{(x+5).\,(2x).\,(1)}{(x+5)^2} \tag{69}$$

$$\tag{70}$$

$$\frac{2x^2 + 10x - x^2}{(x+5)^2} \tag{71}$$

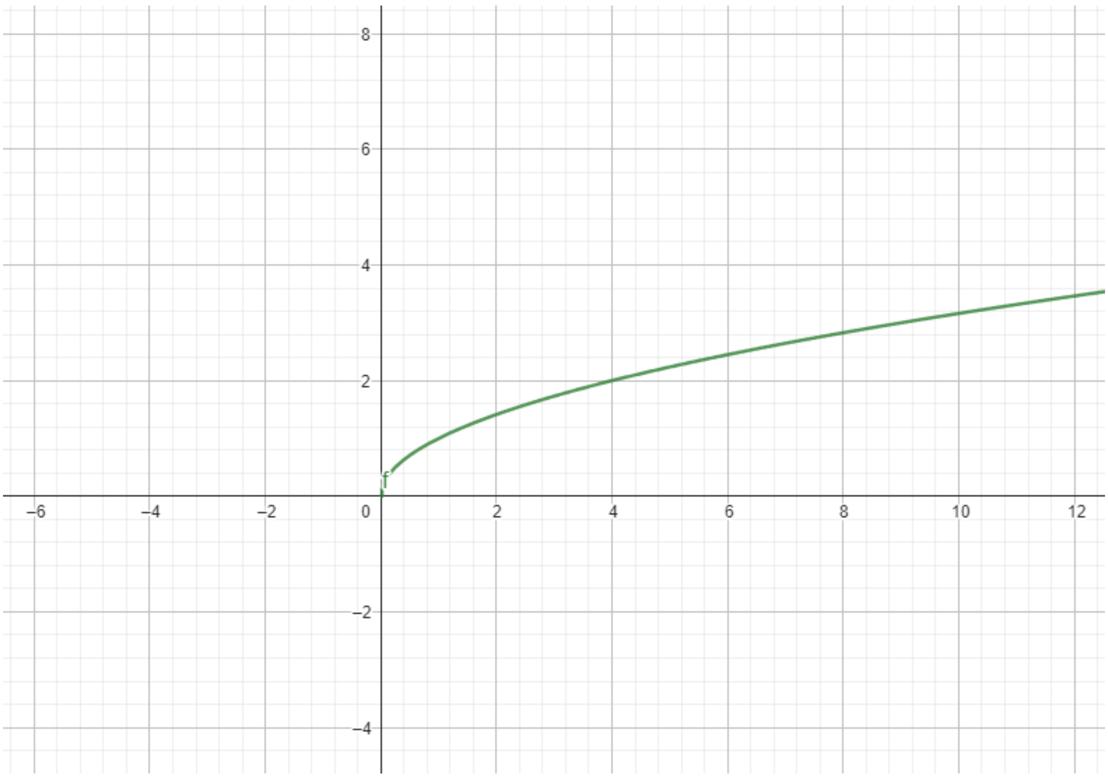
$$\tag{72}$$

$$\boxed{\frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2}} \tag{73}$$

```
In [ ]:
```

Exemplo

Seja $f(x) = \sqrt{x}$, qul é a derivada de f e qual é o domínio de f'?



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} . \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

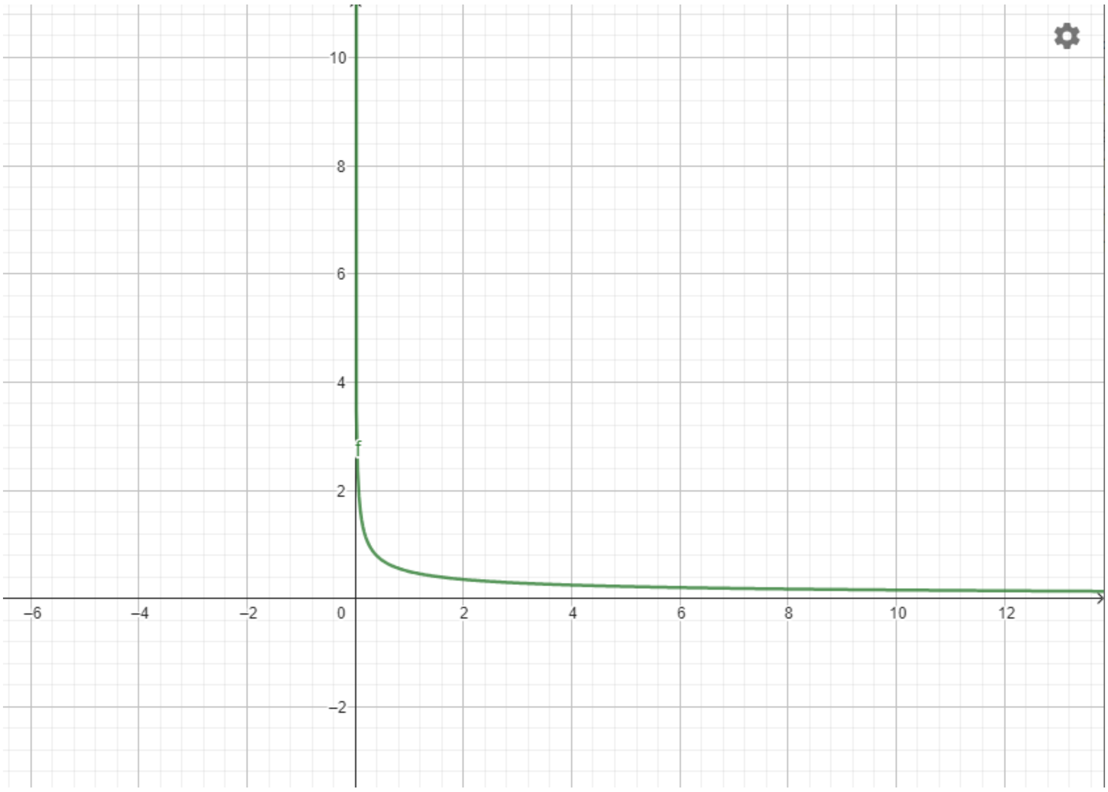
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}) + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$



$$D(f') = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$$

In [ ]:

Toda Função é Derivável?

Definição: Uma função f é derivável ou diferenciável em a, se $f'(a)$ existir.

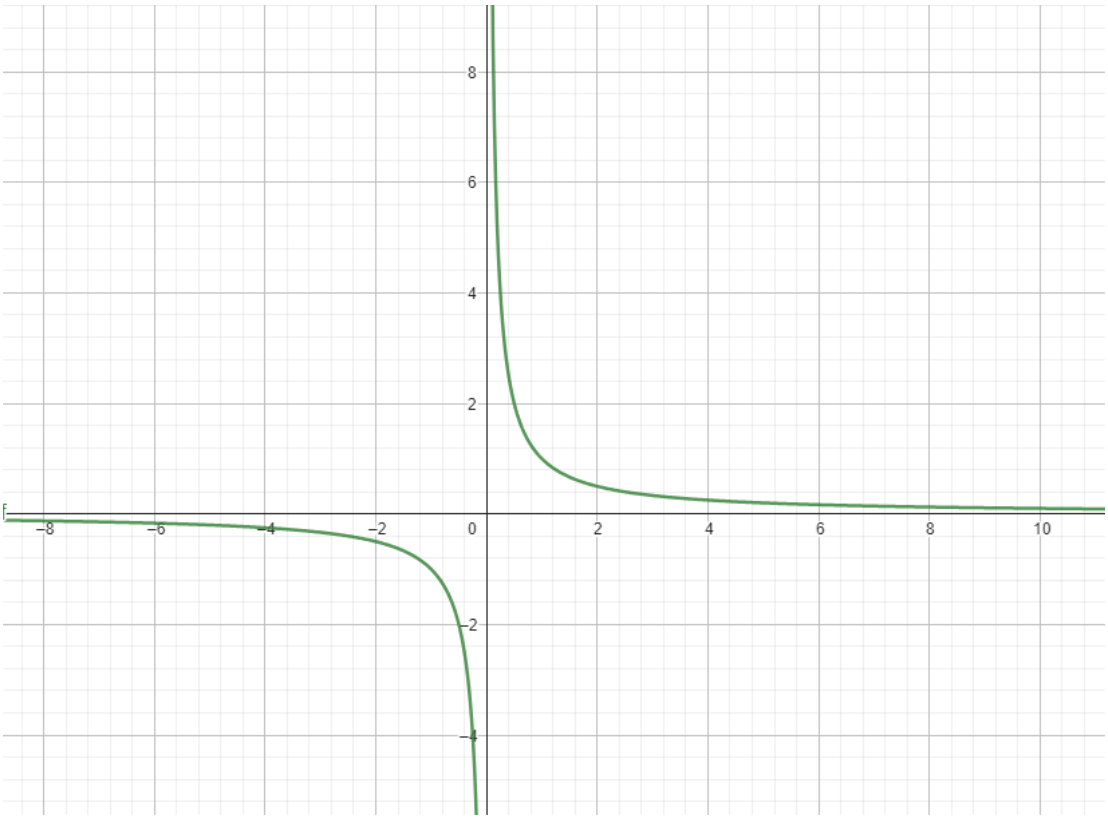
É derivável ou diferenciável em um intervalo aberto (a, b) ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$ se for diferenciável em cada número do intervalo.

a) Se o *lim* que define a derivada no ponto existe;

b) Verificar se existe o valor numérico da derivada no ponto a partir de sua expressão analítica.

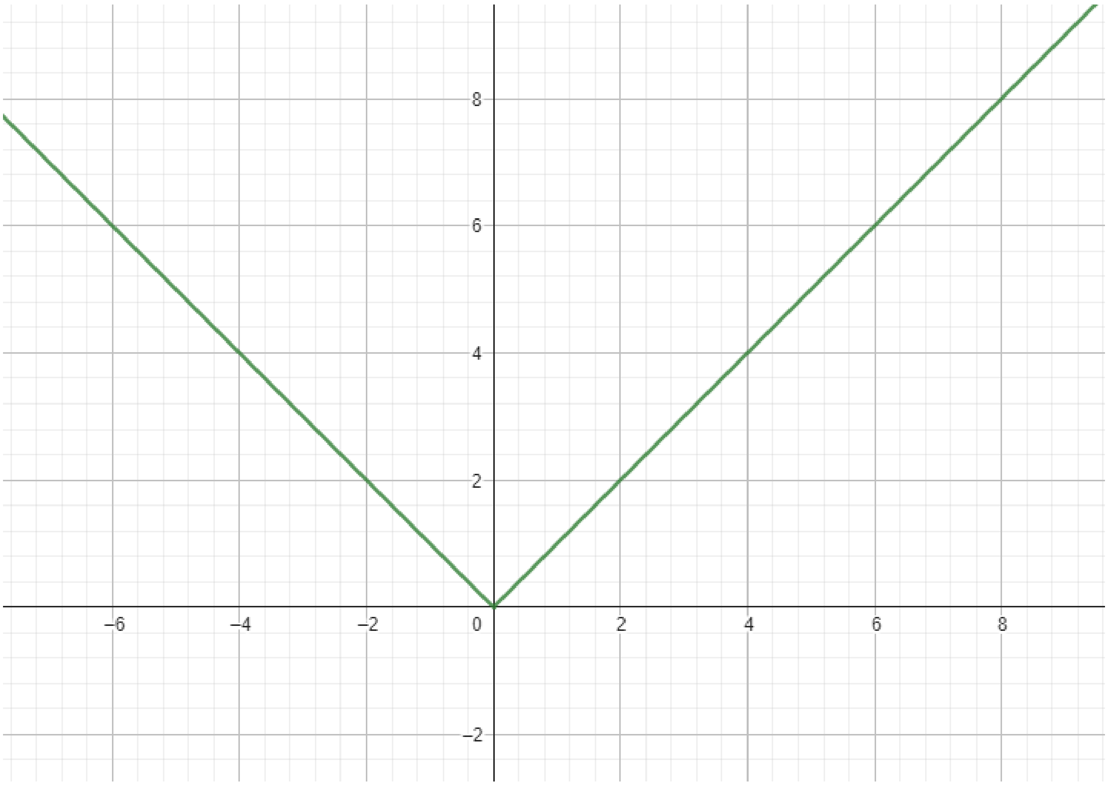
Exemplo

A função $f(x) = \frac{1}{x}$, não é derivável em $x = 0$, pois $\frac{1}{0}$ tende ao infinito.




```
In [ ]:
```

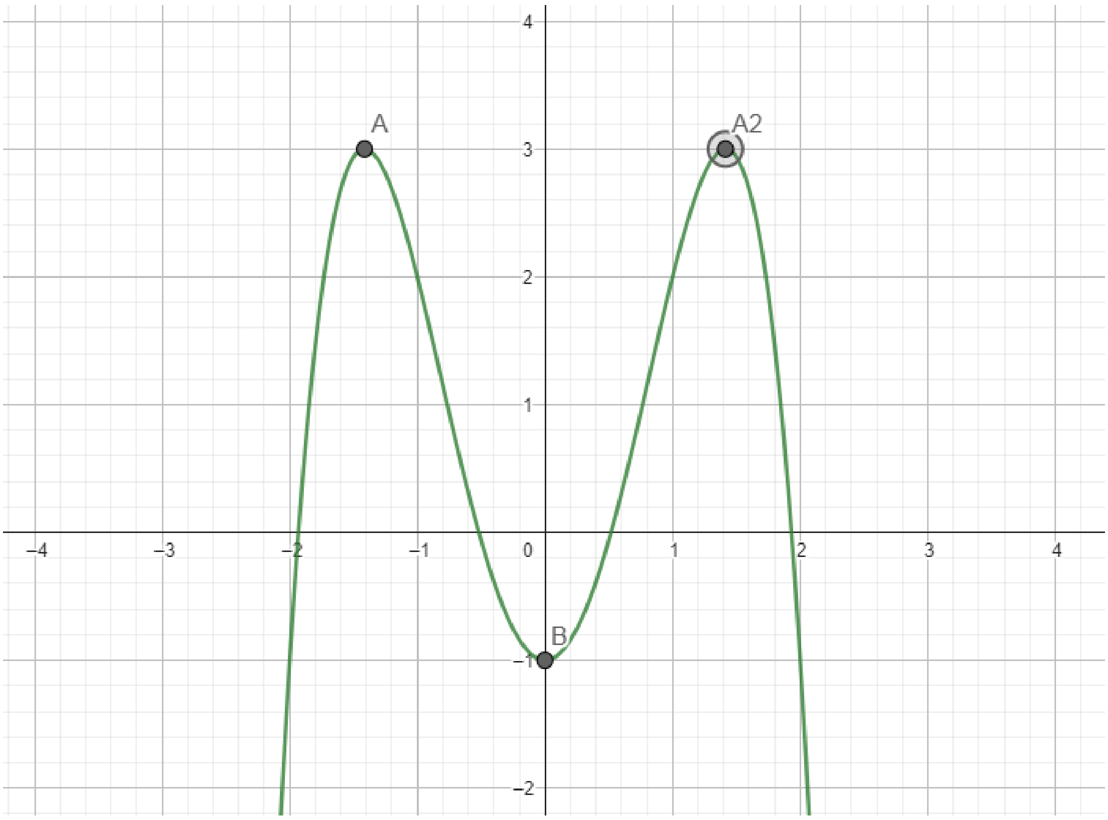
A função $f(x) = |x|$, não é derivável em $x = 0$, pois $\frac{1}{0}$ tende ao infinito.



In [ ]:

Máximos e Mínimos de um Função

$f(x) = -x^4 + ax^2 - 1$



Teorema de Fermat

Se f tiver um máximo ou um mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$

Pontos Críticos

Os pontos no qual $f'(c) = 0$ são chamados de pontos críticos da função f e são possíveis candidatos à extremos da função.

Teste da Primeira derivada

Dada uma função $f(x)$ com primeira derivada contínua; se a primeira derivada é positiva, $f'(x) > 0$, para todo x pertencente a um intervalo qualquer I, então a função é **crescente** neste intervalo. Além disso, se a derivada é negativa, $f'(x) < 0$, para todo $x \in J$, então, a função é **decrescente** em J.

Teste da Primeira Derivada - extremos

Seja c um ponto crítico da função $f(x), então:

- Se o sinal de f mudar de positivo para negativo em c, então f tem um **máximo local** em c.
- Se o sinal de f mudar de negativo para positivo em c, então f tem um **mínimo local** em c.
- Se f' não mudar de sinal em c, isto é, f' é positivo ou negativo em ambos os lados de c, então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Teste da Segunda Derivada - concavidade

Dada uma função $f(x)$ com segunda derivada contínua; se a segunda derivada é positiva, $f'(x) > 0$ pra todo x pertencente a um intervalo qualquer I, então a função é **concavidade voltada para cima** em I. Além disso, se a derivada é negativa, $f''(x) > 0$, para todo $x \in J$, então a função possuirá **concavidade voltada para baixo** em J

Teste da Segunda Derivada - extremos

Supondo que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$:

- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então c é um **ponto de máximo local**.
- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então c é um **ponto de mínimo local**.
- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então nada se pode concluir sobre o ponto c. Isto significa que a função f pode ter um máximo local, um mínimo local ou nenhum dos dois.

In [ ]:

```

```

Exemplo 1:

- Encontrar os pontos críticos da função $f(x) = x^4 - 4x^3$;

- No teste da primeira derivada, verificar quando a função cresce ou decresce;
- No teste da segunda derivada, encontrar os pontos de inflexão e as concavidades.

Para encontrar os pontos críticas da função, primeiro temos que derivá-la:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(4x^3)$$

$$f'(x) = 4.x^{4-1} - 3.4x^{3-1}$$

$$\boxed{f'(x) = 4x^3 - 12x^2}$$

$$4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$4x^2(x-3) = 0$$

$$\boxed{4x^2 = 0 \rightarrow x = 0}$$

$$\boxed{x - 3 = 0 \rightarrow x = 3}$$

Portanto os pontos críticos da função $f(x) = x^4 - 4x^3$ são $x = 0$ e $x = 3$.

Intervalo	$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$	**Extremos**
$(-\infty, 0)$	-16	

|$(0, 3)$ | -8 | Não houve mudança de sinal |$(3, \infty)$ | 64 | Mínimo local

A função é decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 3)$.

A função é crescente no intervalo $(3, \infty, 0)$.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Teste da segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3) - \frac{d}{dx}(12x^2)$$

$$f''(x) = 3.4x^{3-1} - 2.12x^{2-1}$$

$$\boxed{f''(x) = 12x^2 - 24x}$$

Substituindo os pontos críticos na segunda derivda da função:

$$f''(0) = 12.0^2 - 2.0 = 0 \rightarrow \text{inflexão}$$

$$f''(3) = 12.3^2 - 24.3 = 108 - 72 = 36 \rightarrow \text{ponto de mínimo}$$

In [ ]:

```

```

Anlisando a convidade

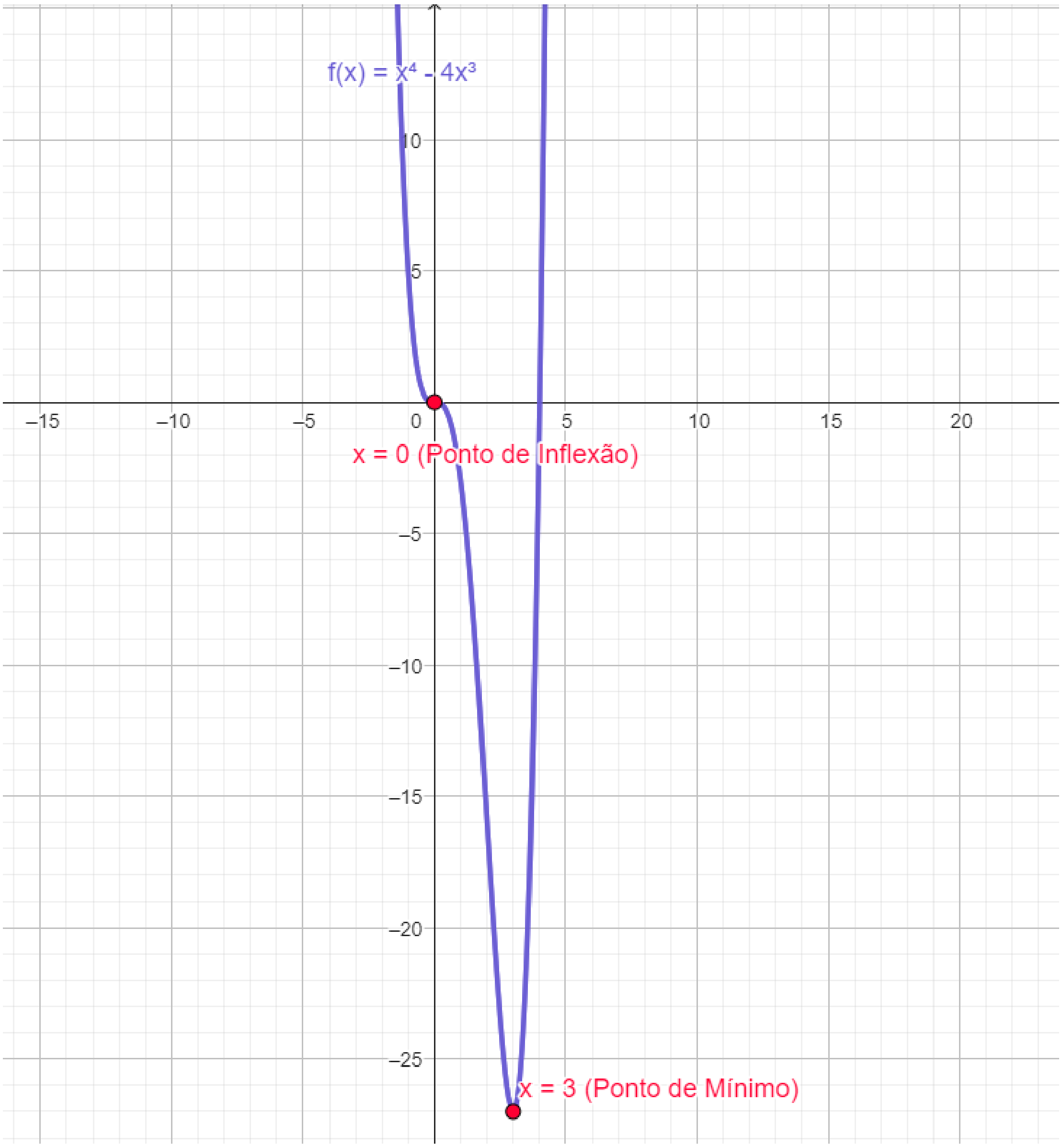
Intervalo	$f''(x) = 12x^2 - 24x$	**Concavidade**

|$(-\infty, 0)$| $f''(-1) = 12.(-1)^2 - 24.(-1) = 36$ | para cima |$(0, 3)$ |
$f''(1) = 12.(1)^2 - 24.(1) = -12$ | para baixo |$(3, \infty)$ |
$f''(4) = 12.(4)^2 - 24.(4) = 96$ | para cima

In [ ]:

```

```


f(x) = x⁴ - 4x³
x = 0 (Ponto de Inflexão)
x = 3 (Ponto de Mínimo)
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
10
5
−5
−10
−15
−20
−25

In [ ]: