

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/290434612>

Solution of dolichobrachistochrone game of Rufus Isaacs

Research · January 1969

DOI: 10.13140/RG.2.1.1065.4803

CITATIONS

0

READS

180

1 author:



[Boris I. Model](#)

22 PUBLICATIONS 14 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



THE THEORY OF INFINITE STEP PROCESSES OF SEQUENTIAL DECISION MAKING [View project](#)

К задаче о доминировании

Б.И. Модель (Москва).

В задаче о "доминировании" [1] ~~зонами~~ кривыми на которых реализуются минимакс времени ветвления во всех точках, где он существует. В точках фазового пространства область где минимакс времени не существует, а существует минимакс верхней границы времени ветвления, и минимакс тот последний. Показано, что в остальных точках фазового пространства убывающий минимакс можно строго доказать от ветвления

В задаче о "доминировании" [1] ~~зонами~~ область доминирования значительный фазового ветвления разбивается на три под-области. В первой существует минимакс времени ветвления. Во второй только минимакс верхней границы времени ветвления, а в третьей убывающий минимакс оставшихся строгое доказательство дано и ветвления не реализуются. Во всех областях ^а указаны оптимальные управления, а в третьей в первых двух минимакс и минимакс $\min_{\text{max}} T$ и $\min_{\text{sup}} T$.

Р. Айзексом в книге (1) сформулирована игра под названием „Дилемма бражника-мохочона“, которая представляет собой игровую модификацию классической задачи о бражнике-мохочоне.

Игра ^[1] рассматривается в первой четверти плоскости (x, y) ($x \geq 0, y \geq 0$) и описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y} \cos \varphi + \frac{w}{2} (\Psi + 1) \\ \dot{y} = \sqrt{y} \sin \varphi + \frac{w}{2} (\Psi - 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\varphi: 0 \leq \varphi < 2\pi$ является уравнением минимизирующей игрока Р, а $\Psi: -1 \leq \Psi \leq 1$ — максимизирующей игрока Е.

Терминальной кривой в является ось y . Цель Р состоит в скорейшем попадании на B , в заданную же Е входим избежание попадания на ось y или, во всяком случае, оттягивание его как можно дальше.

Для нахождения оптимальных управлений и времени Айзекс предлагает решить задачу Коши „для уравнения Беллмана („основного уравнения“ в его терминологии):

$$\min_{\varphi} \max_{\Psi} \frac{dT}{dt} = -1 \quad (1.2)$$

где $\frac{dT}{dt}$ есть производная от функции $T = T(x, y)$ в силу системы (1.1), или после выполнения операций минимума (которые в данном случае перестановочны)

$$-\sqrt{y} \rho + \frac{w}{2} [A + (T_x - T_y)] + 1 = 0 \quad (1.3)$$

где $\rho = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$, $A = T_x + T_y$.

Управления φ^* и Ψ^* , доставляющие минимакс максимума

$$\cos \varphi^* = -\frac{T_x}{\rho}, \quad \sin \varphi^* = -\frac{T_y}{\rho} \quad (1.4)$$

$$\Psi^* = \text{sign } A \quad (A \neq 0) \quad (1.5)$$

Граничные условия являются следующими:

$$x=0, y=s, T(0, s)=0, T_x(0, s)=\frac{1}{s-w}, T_y(0, s)=0 \quad \text{где } s \geq w^2 \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что на оси y и, во всяком случае, в некоторой окрестности её $A > 0$. Уравнение (1.3) при этом принимает вид

$$-\sqrt{y}^3 + w T_x + 1 = 0.$$

Соответствующие уравнения характеристик

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y} \frac{T_x}{T} - w & ; \quad \dot{T}_x = 0 \\ \dot{y} = \sqrt{y} \frac{T_y}{T} & ; \quad \dot{T}_y = -\frac{p}{2\sqrt{y}} \end{cases} \quad (1.7)$$

(знак "о" обозначает дифференцирование по параметру τ)

Интегрируя систему (1.7) и используя граничные условия (1.5 в качестве начальных, получим

$$\begin{cases} y = \frac{s}{2} \left(1 + \cos \frac{\tau}{\sqrt{s}} \right) \\ x = \frac{\tau \sqrt{s}}{2} + \frac{s}{2} \sin \frac{\tau}{\sqrt{s}} - w \tau \end{cases} \quad (1.8)$$

где $s > w^2$, $0 \leq \tau \leq \min \left\{ \frac{\pi \sqrt{s}}{2}, \tau^* \right\}$, а $x(\tau^*) = 0$.

Также

$$\begin{cases} T_x = \frac{1}{\sqrt{s} - w} \\ T_y = -\frac{\sqrt{s/4 - 1}}{\sqrt{s} - w} \end{cases} \quad (1.9)$$

При $\tau: 0 \leq \tau \leq \frac{\pi \sqrt{s}}{2}$ $A = T_x + T_y \geq 0$, равенство достигается, когда $\tau = \tau_0 = \frac{\pi \sqrt{s}}{2}$. Концы характеристик (1.8) при $\tau = \tau_0$ образуют некоторую кривую \mathcal{C}' ("поверхность переключения").

$$\mathcal{C}': \begin{cases} x = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) s - w \frac{\pi}{2} \sqrt{s} \\ y = \frac{s}{2} \end{cases} \quad (1.10)$$

где $s > s^* = \frac{4w^2 \pi^2}{(\pi+2)^2}$, $x(s^*) = 0$

§ 2.

Для продолжения решения исходной задачи Коши для уравнения Беллмана (1.2) (или, что то же самое, (1.3)) продолжим в (1.3) $A < 0$, получим

$$-\sqrt{y}^3 - w T_y + 1 = 0 \quad (2.1)$$

Зададим на \mathcal{C}' следующие граничные условия

$$T_x = -T_y = \frac{1}{\sqrt{s} - w} \quad (s > s^*) \quad (2.2)$$

Уравнения характеристик

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y} \frac{T_x}{S} & ; \quad \dot{T}_x = 0 \\ \dot{y} = \sqrt{y} \frac{T_y}{S} + w & ; \quad \dot{T}_y = -\frac{p}{2\sqrt{y}} \end{cases} \quad (2.3)$$

(здесь значок "о" также обозначает дифференцирование по параметру T характеристики ξ).

Из (2.2) и (2.3) следует, что $T_x = \frac{1}{\sqrt{S-w}}$ вдоль характеристики. Тогда из (2.1) можно найти T_y .

$$-w T_y + 1 = \sqrt{y} S \quad (2.4)$$

Правая и левая части положительны (в силу (2.2) и (2.3) $T_y < 0$) можно возвести в квадрат, получим

$$\begin{aligned} (-w T_y + 1)^2 &= y (T_y^2 + T_x^2) \\ T_y^2 (w^2 - y) - 2w T_y + (1 - y T_x^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$T_{y,1,2} = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - (1 - y T_x^2)(w^2 - y)}}{w^2 - y} = \frac{w \pm \sqrt{y (T_x^2 (w^2 - y) + 1)}}{w^2 - y} \quad (2.4)$$

Первая формула (2.4) имеет место при $y \neq w^2$, если же $y = w^2$,

$$\text{то} \quad T_y = \frac{1 - w^2 T_x^2}{2w} \quad (2.5)$$

При знаке "+" корни в (2.4) справедливы (2.4) \rightarrow (2.5), т.е., по существу, в этом случае (2.5) выводится в (2.4) (в смысле предельного перехода) и можно не делать оговорок $y \neq w^2$.

Выберем теперь нужный знак корня в (2.4). По теореме Вейера $T_{y_1} \cdot T_{y_2} = \frac{1 - y T_x^2}{w^2 - y}$. На \mathcal{B}' $y = \frac{S}{2}$, здесь известен только один из корней, пусть, например, $T_{y_1} = T_{y_2} = -\frac{1}{\sqrt{S-w}}$. Тогда на \mathcal{B}'

$$\begin{aligned} T_{y_2} &= \frac{1 - \frac{S}{2} T_x^2}{(w^2 - \frac{S}{2})(-\frac{1}{\sqrt{S-w}})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{S-w}} - \frac{1 - \frac{S}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{S-w})^2}}{(w^2 - \frac{S}{2})(-\frac{1}{\sqrt{S-w}})} = -\frac{1}{\sqrt{S-w}} \left(1 - \frac{(\sqrt{S-w})^2 - \frac{S}{2}}{w^2 - \frac{S}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{S-w}} \frac{w^2 - \frac{S}{2} + \frac{S}{2} - S + \sqrt{S-w}^2}{\frac{S}{2} - w^2} \\ &= \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S-w}} \frac{2w - \sqrt{S}}{\frac{S}{2} - w^2} \end{aligned}$$

$$a) \quad S^{\frac{1}{2}} < S < 2w^2$$

$$(T_{y_1} - T_{y_2})|_{\mathcal{B}'} < 0$$

Следовательно на \mathcal{C}' $T_y = T_{y_1} = -\frac{1}{\sqrt{S} \cdot w} = \frac{w - \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}}$

и больший корень $T_{y_2} = \frac{w + \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}}$ является посторонним.
По непрерывности на \mathcal{C}' и в некоторой ее окрестности

$$T_y = \frac{w - \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}}$$

Аналогично

$$5) \quad 2w^2 < S < 4w^2$$

$$(T_{y_1} - T_{y_2})|_{\mathcal{C}'} > 0$$

$$T_y = \frac{w - \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}}$$

$$6) \quad S > 4w^2$$

$$(T_{y_1} - T_{y_2})|_{\mathcal{C}'} < 0$$

$$T_y = \frac{w + \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}}$$

Итак, учитывая соотношение между формулами (2.4) и (2.5) в некоторой области вблизи \mathcal{C}' , заданной характеристиками, имеем

$$T_y = \frac{w - \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}} \quad \text{при } S^* < S < 4w^2 \quad (2.6)$$

$$T_y = \frac{w + \sqrt{\frac{S}{2} [T_x^2 (w^2 - \frac{S}{2}) + 1]}}{w^2 - \frac{S}{2}} \quad \text{при } S > 4w^2 \quad (2.7)$$

На характеристике, начинающейся с \mathcal{C}' из точки с параметром $S = 4w^2$, T_y пока не определено

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют характеристики.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\text{Имеем } \dot{y} = w + \frac{T_y}{\beta} \sqrt{y}; \quad \dot{x} = \frac{T_x}{\beta} \sqrt{y} \quad (2.3)$$

$$\beta = \frac{1 - w T_y}{\sqrt{y}} \quad (2.1)$$

$$\text{Тогда } \dot{y} = w + \frac{y T_y}{1 - w T_y}; \quad \dot{x} = \frac{y T_x}{1 - w T_y} \quad (2.8)$$

$$T_y = \frac{w \pm d}{w^2 - y}, \text{ где обозначено } d = \sqrt{\frac{y}{T_x^2} (w^2 - y) + 1}$$

5

$$1 - w T_y = \frac{w^2 - y \mp w d}{w^2 - y} = \frac{-y \mp w d}{w^2 - y}$$

$$\text{Отсюда } \dot{y} = w + \frac{y T_y}{1 - w T_y} = w + y \frac{w \pm d}{w^2 - y} \cdot \frac{w^2 - y}{-y \mp w d} = \frac{-y w \mp w^2 d + y w \pm y d}{-y \mp w d} = \frac{(\mp w \pm y) d}{-y \mp w d}$$

$$\dot{x} = \frac{y T_x}{1 - w T_y} = y T_x \frac{w^2 - y}{-y \mp w d}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\mp d}{y T_x} = \mp \sqrt{\frac{y [T_x^2 (w^2 - y) + 1]}{y^2 T_x^2}} = \mp \sqrt{\frac{1}{y} (w^2 + \frac{1}{T_x^2}) - 1} \quad (2.9)$$

где знак "-" соответствует (2.7), а знак "+" — (2.6).

Формулы (2.6) — (2.9) имеют смысл при $T_x^2 (w^2 - y) + 1 \geq 0$,

$$\text{т.е. при } y \leq w^2 + \frac{1}{T_x^2} \quad (2.10)$$

Затем исследуем поведение характеристик справа от \mathcal{E} при различных S .

а) $S > 4w^2$

При таком S , начиная от \mathcal{E}' , характеристики будут "опускаться вниз". Покажем, что при этом, \dot{x} будет иметь смысл, т.е. подкоренное выражение отрицательным не будет. Поскольку $y' < 0$, то достаточно проверить, что $\frac{S}{2} = y(x_{\text{нач}}) \leq w^2 + \frac{1}{T_x^2}$.

$$\text{Действительно, } w^2 - \frac{S}{2} + (\sqrt{S} - w)^2 \geq 0$$

$$w^2 - \frac{S}{2} + S - 2w\sqrt{S} + w^2 \geq 0$$

$$4w^2 - 4w\sqrt{S} + S \geq 0$$

$$(2w - \sqrt{S})^2 \geq 0, \text{ равенство при } S = 4w^2$$

б) $S^* < S \leq 4w^2$

Начиная от \mathcal{E}' характеристики будут "подниматься вверх" до $y = w^2 + \frac{1}{T_x^2}$. Каждая характеристика, соответствующая этому значению y , образует некоторую кривую h . На самой h $\dot{x} = 0$, поэтому справа от h $T_y = \frac{w + \sqrt{\frac{y}{T_x^2} (w^2 - y) + 1}}{w^2 - y}$. При этом, характеристики, начиная с h , будут "опускаться вниз".

В точке с параметром $S = 4w^2$, лежащая на \mathcal{E}' , $\dot{x} = 0$. Поэтому там же $T_y = \frac{w + \sqrt{\frac{y}{T_x^2} (w^2 - y) + 1}}{w^2 - y}$ на характеристике, исходящей из этой точки.

Соответствующая характеристика будет "отскакивать вниз".

На участке характеристики, которому соответствует $T_y = \frac{w+d}{w^2 y}$ возьмем две точки $B(x(\tau_1), y(\tau_1))$ и $C(x(\tau_2), y(\tau_2))$.

Пусть $w^2 + y(\tau_2) < y(\tau_1)$, т.е. C лежит ниже B , здесь $\tau_2 > \tau_1$.

Подсчитаем разность $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1$, которую можно трактовать как время движения точки (1.1) между B и C при $\varphi = \bar{\varphi}$, $\psi = \bar{\psi}$ и $A < \tau$.

$$\text{Имеем } \dot{y} = \frac{(w^2 - y)d}{y + wd}$$

$$d\tau = \frac{dy}{\dot{y}} = \frac{y + wd}{(w^2 - y)d} dy = \left[\frac{w}{w^2 - y} - \frac{1}{d} + \frac{w^2}{(w^2 - y)d} \right] dy$$

$$\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = -w \ln(y - w^2) \Big|_{y(\tau_1)}^{y(\tau_2)} + K_1 \arcsin f(y) \Big|_{y(\tau_1)}^{y(\tau_2)} + J \Big|_{y(\tau_1)}^{y(\tau_2)}$$

где $K_1 = \text{const}$, $f(y)$ — некоторая функция, вид ее не определен

$$\text{а } J = \int \frac{w^2 dy}{(w^2 - y) \sqrt{y(\tau_x^2(w^2 - y) + 1)}}$$

$$J = \int \frac{w^2 dy}{(w^2 - y) \sqrt{y(\tau_x^2(w^2 - y) + 1)}} = - \int \frac{w^2 dy}{(y - w^2)^2 \sqrt{\frac{c}{y} w^2 + \frac{1}{y w^2} + a}}$$

$$\text{где } F(y) = a(y - w^2)^2 + b(y - w^2) + c = -\tau_x^2 y^2 + (\tau_x^2 w^2 + 1)y$$

$$c = F(w^2) = w^2$$

$$b = F'(w^2) = 1 - w^2 \tau_x^2$$

$$a = \frac{1}{2} F'' = -\tau_x^2$$

$$\text{Произведем замену } u = \frac{1}{y - w^2}$$

$$\text{Тогда } J = w^2 \int \frac{du}{\sqrt{cu^2 + bu + a}} \quad - \text{табличный интеграл}$$

$$J = w^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{f'}{2} + \sqrt{cf} \right| = w \cdot \ln |w^2 u + \frac{1 - w^2 \tau_x^2}{2} + w \sqrt{cu^2 + bu + a}| =$$

$$= w \ln u + w \cdot \ln \left| w^2 + \frac{1 - w^2 \tau_x^2}{2u} + w \sqrt{c + \frac{b}{u} + \frac{a}{u^2}} \right|$$

$$\text{где } f(u) = cu^2 + bu + a; \quad f'(u) = 2cu + b$$

$$\text{гдет } u = \frac{1}{y - w^2}, \text{ получаем}$$

$$J = -w \ln(y - w^2) + w \ln |w^2 + \frac{1 - w^2 \tau_x^2}{2(y - w^2)} + w \sqrt{y(\tau_x^2(w^2 - y) + 1)}|$$

$$\text{Тогда } \Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = -2w \ln(y(\tau_2) - w^2) + C,$$

$$\text{где } C = 2w \cdot \ln(y(\tau_1) - w^2) + K_1 \cdot \operatorname{arctg} \inf(y) \Big|_{y(\tau_1)}^{y(\tau_2)} + \\ + w \cdot \ln \left| w^2 + \frac{1-w^2\tau_2^2}{2} (y-w^2) + w \sqrt{y(\tau_2^2 (w^2-y) + 1)} \right| \Big|_{y(\tau_1)}^{y(\tau_2)}.$$

следовательно при $y(\tau_2) \rightarrow w^2$, $\tau_2 \rightarrow +\infty$

На этом кончается непосредственное решение поставленной задачи Коши для уравнения Беллмана (1.2).

§3.

Изменим несколько исходную постановку задачи. Так, будем считать, что игра кончается лишь на части периметрической поверхности E , где $y > w^2$, а на отрезке $[0, w^2]$ ось y фиксируем нулем первого игрока, т.е. предположим, что здесь второму игроку известно уравнение \tilde{F} , которое применяет P , и пусть E должен будет выбирать на этом отрезке свое уравнение \tilde{F} так, чтобы $\dot{x} = \sqrt{y} \cos \tilde{F} + \frac{w}{2} (\tilde{F} + 1) \geq 0$ (3.1)

Все остальные условия остаются без изменения.

Для решения игры в изменённой постановке опять поставим задачу Коши для уравнения Беллмана (1.3) с граничными условиями (1.6). Проведённое выше в §§1, 2 интегрирование повторяется без изменения, при этом будет построена некоторая функция $T = T(x, y)$ (явно она не написана).

Покажем, что $T \in C^1$. Действительно, $T_x(s) \in C$ и $T_y(y, s) \in C$. Поскольку характеристики $x(s, \tau)$, $y(s, \tau)$ расположены вогнуто относительно друг друга и нигде не пересекаются, то отображение $F^s(s, \tau) \rightarrow (x(s, \tau), y(s, \tau))$ является отображением "HO" и взаимнооднозначным (имеется в виду отображение соответствующей части плоскости (s, τ) на множество E в плоскости (x, y) , которое вогнуто заполнено характеристиками $x(s, \tau), y(s, \tau)$). Притом F является непрерывным отображением, т.к. $x(s, \tau), y(s, \tau) \in C$.

следовательно, $\exists F^{-1}: (x, y) \rightarrow (s(x, y), \xi(x, y))$, которое также непрерывно, тогда $T_x(s(x, y)), T_y(y, s(x, y)) \in C$.

Постараемся продолжить функцию $T(x, y)$ так, чтобы она по-прежнему оставалась в классе C^1 и, кроме того, удовлетворяла уравнению Беллмана (1.3). Для этого поставим на полуинтервале $QM \quad x=0, y=\frac{s}{2}; w^2 \leq s \leq s^*$ задачу Коши для (2.1) с граничными условиями $T_x = -T_y = \frac{1}{\sqrt{s}-w}$, (3.2) где $w^2 \leq s \leq s^*$. На $QM \quad A = T_x + T_y = 0$, положим здесь $\bar{\Psi}(\varphi)$ таким, что $\bar{\alpha} = 0$. Заметим, что QM является непрерывным продолжением линии переключения \bar{v}' , а граничные условия (3.2) — значениями T_x и T_y на \bar{v}' .

Аналогично §2 получим, что T_x остается постоянным вдоль характеристик и равняется $\frac{1}{\sqrt{s}-w}$, а $T_{y,2} = \frac{w \pm \sqrt{y [C^2(w^2-y)+1]}}{w^2-y}$. В окрестности QM выбирается значение $T_y = \frac{w - \sqrt{y [C^2(w^2-y)+1]}}{w^2-y}$. Характеристики, начинаясь с QM бегут "поднимаясь вверх" от $y = w^2 + \frac{1}{C^2}$; концы их, соответствующие этому значению y , образуют некоторую кривую L' , которая является продолжением L . На $L' \quad \sqrt{y [C^2(w^2-y)+1]} = 0$. Справа от этой кривой имеем $T_y = \frac{w + \sqrt{y [C^2(w^2-y)+1]}}{w^2-y}$, поведение характеристик изменяется, они "опускаются вниз".

При $s \rightarrow w^2$ характеристики стремятся к некоторой кривой QF удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$y' = \sqrt{\frac{w^2}{y} - 1} \quad (3.3)$$

Правая часть (3.3) является пределом для (2.9), когда берется знак "+".

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left(w^2 + \frac{s}{C^2} \right) - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(w^2 + (\sqrt{s}-w)^2 \right) - 1} \xrightarrow{s \rightarrow w^2 + 0} \sqrt{\frac{w^2}{y} - 1}.$$

Т.о., нам удалось продолжить функцию $T(x, y)$ желанным образом. Действительно, в части первого квадранта плоскости (x, y)

ограниченной снизу QR и $y = w^2$, характеристики проходят ввиду много и без самопересечений, поэтому $T_x(s(x,y)) \in C$ и $T_y(y, s(x,y)) \in C$, сами же функции $T(x,y) \in C^1$. При этом по построению $T(x,y)$ является решением задачи Коши для уравнения Беллмана (1.3) при граничных условиях (1.6).

Это значит, что характеристики $x(s,t), y(s,t)$ являются частными оптимальными траекториями точки (1.1) при оптимальных управлениях \bar{Q} и \bar{P} : $\cos \bar{\varphi} = -\frac{T_x}{P}$, $\sin \bar{\varphi} = -\frac{T_y}{P}$; $\bar{P} = \text{sign } A, A \neq 0$, на QM , где $A = 0$, \bar{P} также определено (см. выше), а на B' его можно выбирать любым. Простей T является временем движения по оптимальной траектории до B , где $y = w^2$.

Следует заметить, что на QM \bar{P} таково, что движение происходит по отрезку до точки M . Поэтому из всех возможных положений, лежащих между MN и QR , включая MN (без точки N), оптимальные траектории ведут себя следующим образом.

Точка (1.1) под действием управлений \bar{Q} и \bar{P} движется по характеристике до QM , далее по этой отрезку до M , а от M по характеристике MK ; игра кончается в точке K терминальной кривой B (см. черт. 1).

§4.

Вернемся к задаче в исходной постановке. Введем функции

$$T^0(x,y) = \begin{cases} T(x,y), & (x,y) \in R_1 \\ 0 & ; x=0, y \geq 0 \\ +\infty & ; (x,y) \in R_2 \end{cases}$$

где R_1 — внутренние точки множества, ограниченного сверху и снизу линиями QR и $y = w^2$, включая также QR без крайних точек Q и R .

R_2 — внутренние точки множества, ограниченного сверху x и y , а также сверху линиями QR и $y = w^2$, включая точки

(x, w^*) , $x \geq x_p$, и $(x, 0)$, $x > 0$.

Заметим, что в точках $(x^*, y^*) \in QR$ T доопределяется по непрерывности: $T(x^*, y^*) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*) \\ (x, y) \in R \setminus QR}} T(x, y)$.

Будем в дальнейшем под Φ и Ψ понимать управления, заданные во всех внутренних точках первого квадранта плоскости (x, y) , а также на отрезке $[0, w^*]$ оси y и Ψ пусть удовлетворяет здесь условию (3.1).

Доопределим управления $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}$: $\bar{\Psi} = -1$ на QR , $\bar{\Psi} = \hat{\Psi}$ в R_2 (см. ниже утверждение Б), на $[0, Q]$ — $\bar{\Psi}$ -модуль, удовлетворяющее условию (3.1); на QR $\bar{\Phi}$ получается ^{непрерывным} продолжением значений $\bar{\Phi}$ из внутренних точек R_1 , а на $R_2 \cup [0, Q]$ $\bar{\Phi}$ — модуль.

Обозначим через $\Pi_{\Phi, \Psi}(x, y)$ время окончания игры в исходной постановке, начинающейся из точки (x, y) , при выбранных управлениях Φ и Ψ , а через $\tilde{\Pi}_{\Phi, \Psi}(x, y)$ — время окончания игры в измененной постановке, соответствующее начальной точке (x, y) и управлениям Φ и Ψ (вообще говоря, $\Pi_{\Phi, \Psi}$ и $\tilde{\Pi}_{\Phi, \Psi}$ не обязательно конечны, они могут принимать бесконечные значения, если соответствующая игра не кончается).

Замечания.

1) Поскольку в уравнении Беллмана (1.2) операции \min и \max перестановочны, то найденная функция $T(x, y)$ и уравнения $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}$ таковы, что справедливо следующее равенство: $\min_{\Phi} \max_{\Psi} \tilde{\Pi}_{\Phi, \Psi}(x, y) = \max_{\Psi} \min_{\Phi} \tilde{\Pi}_{\Phi, \Psi}(x, y) = T(x, y) = \tilde{\Pi}_{\bar{\Phi}, \bar{\Psi}}(x, y)$ (4.1)

или, что то же самое

$$\tilde{\Pi}_{\bar{\Phi}, \Psi}(x, y) \leq \tilde{\Pi}_{\bar{\Phi}, \bar{\Psi}}(x, y) \leq \tilde{\Pi}_{\Phi, \bar{\Psi}}(x, y) \quad (4.2)$$

где Φ, Ψ — произвольные управления, а (x, y) — внутренняя точка R_1 .

2) Пусть φ, ψ — произвольная пара уравнений и пусть (x, y) — любая точка первого квадранта такая, что $xs > 0$. Возможны три варианта:

а) точка $(1, 1)$ под действием φ и ψ впервые попадает на \mathcal{E} в положении, где $y \leq w^2$, при этом заканчивается в исходной постановке, но не в измененной, следовательно

$$\Pi_{\varphi, \psi}(x, y) < \tilde{\Pi}_{\varphi, \psi}(x, y)$$

б) точка $(1, 1)$, впервые попав на \mathcal{E} , оказывается в положении, где $y > w^2$, при этом кончается при ком. в исходной, так и в измененной постановке, следовательно

$$\Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \tilde{\Pi}_{\varphi, \psi}(x, y)$$

в) точка $(1, 1)$ при выбранном уравнении φ и ψ никогда не попадает на ось y , и $\Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \tilde{\Pi}_{\varphi, \psi}(x, y) = +\infty$. Объединив все случаи вместе, получаем

$$\Pi_{\varphi, \psi}(x, y) \leq \tilde{\Pi}_{\varphi, \psi}(x, y), \quad xs > 0 \quad (4.3)$$

(легко проверить, что при $xs = 0$ (4.3) также справедливо)

Выскажем следующие универсальные

$$A. \inf_{\varphi} \sup_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\psi} \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y), \quad (4.4)$$

если (x, y) — внутренняя точка R_1 .

Б: Если начальная точка $(x, y) \in R_2$, то независимо от выбора уравнения φ и точки P , E всегда может выбрать свое уравнение $\hat{\psi}$ так, что точка $(1, 1)$ ни за какое конечное время на \mathcal{E} не попадет.

Доказательство

Пусть (x, y) — внутренняя точка R_1 , тогда при $\forall \psi$ имеем

$$\inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \Pi_{\bar{\varphi}, \psi}(x, y) \leq \tilde{\Pi}_{\bar{\varphi}, \psi}(x, y) \leq T^*(x, y) \quad (\text{из (4.2), (4.3)})$$

$$\text{следовательно} \quad \sup_{\psi} \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) \leq T^*(x, y) \quad (4.5)$$

Утверждение В: $\sup_{\varphi} \inf_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = T^0(x, y)$ (4.6)

Предположим, что утверждение В справедливо. Известно,

$$\inf_{\varphi} \sup_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) \geq \sup_{\psi} \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = T^0(x, y)$$

Тогда $\sup_{\varphi} \Pi_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) \geq \inf_{\varphi} \sup_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) \geq T^0(x, y)$. Если хотя бы одно из этих неравенств строгое, то приходим к противоречию действительно, при $\sup_{\varphi} \Pi_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) > T^0(x, y) \quad \exists \tilde{\psi}$ такое, что $\tilde{\Pi}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) > T^0(x, y)$ и $\tilde{\Pi}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) \geq \Pi_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) > T^0(x, y) = T^1(x, y)$, т.е. $\tilde{\Pi}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) > T(x, y)$, что противоречит (4.2). Следовательно,

$$\inf_{\varphi} \sup_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\psi} \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = T^0(x, y) \quad (4.4)$$

и, более того, $\inf_{\varphi} \sup_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \min_{\varphi} \sup_{\psi} \Pi_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\psi} \Pi_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y)$.

Докажем теперь (4.6). Для этого рассмотрим следующее уравнение $\varphi_{\varepsilon} : \varphi_{\varepsilon} = \begin{cases} \tilde{\varphi}, & \text{в } R_1 \cap R_3 \\ -\frac{2}{\varepsilon}x + 1, & \text{в } R_3 \\ \tilde{\varphi}, & \text{в } R_2 \\ \text{любая } \varphi, & \text{удовлетворяющая (3.1), на } \partial \Omega \end{cases}$, где R_3 - внутренняя точка множества, ограниченного кривыми $x=0, x=\varepsilon$ и линиями $QР$ и $В$. включая часть $QР$, где $0 \leq x \leq \varepsilon$ и отрезок $QМ$ оси y . Будем здесь также исходить из того, что утверждение В уже доказано, т.е. считая $\hat{\varphi}$ как раз тем уравнением, о котором в нем говорится. Покажем, что $T^0(x, y) - \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) \leq O(\varepsilon)$, а это в силу (4.5) и будет означать справедливость утверждения В.

Пусть φ_{ε} - уравнение, удовлетворяющее условию

$$\Pi_{\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) - \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) \leq O(\varepsilon) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } T^0(x, y) - \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) &\leq T^0(x, y) + \Pi_{\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) + O(\varepsilon) = \\ &\leq \tilde{\Pi}_{\varphi_{\varepsilon}, \tilde{\varphi}}(x, y) - \tilde{\Pi}_{\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

т.к. $T^0(x, y) \leq \tilde{\Pi}_{\varphi_{\varepsilon}, \tilde{\varphi}}(x, y)$, а при выбранном $\varphi_{\varepsilon} : \Pi_{\varphi, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) = \tilde{\Pi}_{\varphi, \varphi_{\varepsilon}}(x, y)$ при $\forall \varphi$.

Для доказательства утверждения В достаточно показать, что будет выполняться $\tilde{\Pi}_{\varphi_{\varepsilon}, \tilde{\varphi}}(x, y) - \tilde{\Pi}_{\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\varepsilon}}(x, y) \leq O(\varepsilon)$ (4.8) хотя бы для одного уравнения φ_{ε} , удовлетворяющего условию (4.7); при этом можно рассмотреть лишь тот случай, когда в начальный момент $(x, y) \in R_3$, т.к. если $(x, y) \in R_1 \setminus R_3$, то

Траектории точки (1.1) при управлении $(\varphi_\varepsilon, \bar{\varphi})$ и $(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ совпадают до тех пор, пока (1.1) находится вне R_3 .

Рассмотрим следующее уравнение $\tilde{\varphi}$, заданное в области R_4 состоящей из R_3 , где $\tilde{\varphi} = \frac{3}{4}\pi$, и множества точек, лежащих между характеристиками MK и M_1K , (см. карт. 2), включая последние, здесь $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}$. Пусть в начальный момент $(x, y) \in R_4$, тогда по выбору $\tilde{\varphi}$ и φ_ε ясно, что в процессе всего движения, которое состоит не более, чем из двух этапов, а именно: похода по R_3 до \mathcal{B}' и движения по соответствующей характеристике до точки (1.1) не выйдет из R_4 .

$P_{\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon}(x, y) = t_1 + t_2$; $t_2 = t_{MK} + O(\varepsilon)$, ~~$O(\varepsilon) \rightarrow 0$, т.к. $T_x \rightarrow 0$ и $t_2 \rightarrow t_{MK}, \bar{K} \rightarrow K$~~
 где t_1 - время похода до \mathcal{B}' , t_2 - время движения из ~~точки~~ (x^*, y^*) по соответствующей характеристике до \mathcal{B} , t_{MK} - время движения по ~~характеристике~~ MK из положения (x_*, y_*) , а $y_* = \max\{y_m, y^*\}$ (см. карт. 2).

$t_1 = t^0 + O(\varepsilon)$, ~~$O(\varepsilon) \rightarrow 0$~~ ,

где t^0 - время движения по оси y от $(0, y)$ до $(0, y_m)$ при оптимальном управлении $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi})$ точки (1.1), если, конечно, $y \leq y_m$, иначе $t^0 = 0$.

Ясно, что $t_1 > t^0$, поскольку ~~$\dot{y}|_{\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{y} + \frac{\omega}{2} (\varphi_\varepsilon - 1) > \dot{y}|_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}}$~~ ,
 т.к. ~~$\dot{y}|_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{y} + \frac{\omega}{2} (\bar{\varphi} - 1)$~~ , а в процессе движения по R_3 с управлением $(\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon)$ ~~$\varphi_\varepsilon \leq \bar{\varphi}$~~ .

Действительно, введем систему координат (ξ, η) , поворачивая из (x, y) поворотом на $\frac{\pi}{4}$. Тогда
 $\text{пр}_{\eta} \vec{V}_{\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon}(\eta, \eta) = \sqrt{2}\eta - \frac{\omega}{\sqrt{2}}$, а $\text{пр}_{\eta} \vec{V}_{\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon}(\xi, \eta) = \sqrt{2}\eta - \frac{\omega}{\sqrt{2}} + O(\varepsilon)$,
 т.к. $y = \sqrt{2}\eta + O(\varepsilon)$ в области R_3 . Здесь под $\vec{V}_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}}(\xi, \eta)$ и $\vec{V}_{\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon}(\xi, \eta)$ понимается скорость точки (1.1) при управлениях $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi})$ и $(\tilde{\varphi}, \varphi_\varepsilon)$ соответственно. Кроме того $\eta_m - \eta_{m_1} = O(\varepsilon)$.

Следовательно, $t_1 + t_2 = t^0 + t_{MK} + O(\varepsilon)$.

Заметим, что, если начальная точка $(x, y) \in K_4 \setminus K_3$, то $t_1 = t^0 = 0$ и $(x^*, y^*) = (x, y)$.

Т.о., построены ~~с помощью уравнений $\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{\psi}_\varepsilon$~~ некоторые функции $t^0 = t^0(x, y)$, $t_{mk} = t_{mk}(x, y)$, $(x, y) \in K_4$. Очевидно, что при любых φ и $(x, y) \in K_4$, если только $\Pi_{\varphi, \psi_\varepsilon}(x, y) < \infty$, траектория точки (1.1), соответствующая $\varphi, \psi_\varepsilon$ будет входить в один или оба из следующих этапов:

- а) подъём по K_3 до δ' и
- б) движение в области выше δ' до δ .

Тогда $\Pi_{\varphi, \psi_\varepsilon}(x, y) \geq t_\alpha + t_\beta$, где t_α, t_β - времена, соответствующие этапам а) и б), причем, если этап а) отсутствует, то $t_\alpha = 0$.

Из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следует, что $t_\alpha - t^0(x, y) \geq O_1(\varepsilon)$, $t_\beta \geq t_{mk}(x, y)$. Тогда

$$O_1(\varepsilon) + t^0(x, y) + t_{mk}(x, y) \leq \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi_\varepsilon}(x, y) \leq \Pi_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_\varepsilon}(x, y) = t^0(x, y) + t_{mk}(x, y) + O(\varepsilon)$$

откуда получаем $0 \leq \Pi_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_\varepsilon}(x, y) - \inf_{\varphi} \Pi_{\varphi, \psi_\varepsilon}(x, y) \leq O(\varepsilon)$, $(x, y) \in K_4$

(здесь разности $O(\varepsilon) - O_1(\varepsilon)$ снова обозначены $O(\varepsilon)$)

Возьмем в качестве ψ_ε , удовлетворяющего условию (4.7), такое управление $\tilde{\psi}_\varepsilon$, заданное в первом квадранте плоскости (x, y) и удовлетворяющее (4.7), которое в K_4 совпадает с $\tilde{\psi}$. Теперь можно доказать (4.8). Действительно, поскольку начальные положения $(x, y) \in K_3$ (а к этому случаю сводятся все остальные, то траектории точки (1.1) при управлении $\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{\psi}_\varepsilon$ и $\tilde{\varphi}_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ состоят из двух частей:

- 1) подъём до δ' , 2) движение по характеристике до δ , время $t_{\tilde{\varphi}}^1, t_{\tilde{\varphi}}^2$ и $t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^1, t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^2$ - соответствующие времена движения для этапов 1), 2) при управлениях $\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{\psi}$ и $\tilde{\varphi}_\varepsilon, \psi_\varepsilon$. Причем, как было показано выше при построении $\tilde{\varphi}$ $|(t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^1 + t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^2) - (t_{\tilde{\varphi}}^1 + t_{\tilde{\varphi}}^2)| = O(\varepsilon)$, поскольку $t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^1 = t_1, t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^2 = t_2$, так $\tilde{\varphi}_\varepsilon = \tilde{\varphi}$ в K_4 , а $|t_{\tilde{\varphi}}^2 - t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^2| = O(\varepsilon)$, $|t_{\tilde{\varphi}_\varepsilon}^2 - t_{mk}| = O(\varepsilon)$. Т.к. первый этап движения точки (1.1) при управлениях $(\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{\psi})$

за исключением участка дуги OE) проходит по оси y до M , а второй совпадает с движением по $МК$. Следовательно, выполняется (4.8), т.е. $t_{\psi_8}^1 + t_{\psi_8}^2 = \tilde{T}_{\psi_8, \psi_8}(x, y)$, $t_{\psi}^1 + t_{\psi}^2 = \tilde{T}_{\psi, \psi}(x, y)$.

На этом кончается доказательство утверждения В. Для полного завершения доказательства остается построить управление $\hat{\psi}$, о котором говорится в утверждении В. Заметим, что $\hat{\psi}$ можно выбрать не однозначно, укажем один из возможных способов его построения.

1) Пусть $(x, y) \in R_2$ и $x > 0$, $y \leq \frac{\omega^2}{2}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y} \cos \varphi + \frac{\omega}{2}(\psi + 1) \\ \dot{y} = \sqrt{y} \sin \varphi + \frac{\omega}{2}(\psi - 1) \end{cases} \quad (4.1)$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$, $|\psi| \leq 1$.

Обозначим через $\vec{U} = (U_x, U_y)$ — скорость P , а через $\vec{V} = (V_x, V_y)$ — скорость E . Имеем $\vec{U} = (\sqrt{y} \cos \varphi, \sqrt{y} \sin \varphi)$; $\vec{V} = (\frac{\omega}{2}(\psi + 1), \frac{\omega}{2}(\psi - 1))$

Тогда $|\vec{U}| = U = \sqrt{y}$, $|\vec{V}| = V = \frac{\omega}{2}(1 + \psi^2)$ и $V \geq U$ или $V < U$, если $y \leq \frac{\omega^2}{2}$

Рассмотрим совокупность контуров $\{\Gamma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$; $\Gamma_n = \gamma^1 \cup \gamma_n^2 \cup \gamma_n^3$, где γ^1 — дуга $y = \frac{\omega^2}{2}$, выходящая из точки $(\frac{2}{n}, \frac{\omega^2}{2})$,

γ_n^2 — отрезок $(\frac{1}{n}, y)$, $0 \leq y \leq \frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{n}$,

γ_n^3 — дуга окружности радиуса $\frac{1}{n}$ с центром в точке $(\frac{2}{n}, \frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{n})$, соединяющая γ^1 и γ_n^2 (см. черт. 3). Т.о. Γ_n является гладким контуром. Пусть $\hat{\psi}$ таково, что на Γ_n $\vec{V} = (\frac{\omega}{2}(\hat{\psi} + 1), \frac{\omega}{2}(\hat{\psi} - 1))$ направлено нормально к Γ_n (такое $\hat{\psi}$ выбрать можно), а в остальных точках (x, y) , $x > 0$, $y \leq \frac{\omega^2}{2}$ $\hat{\psi}$ произвольна.

Итак, рассматривается случай, когда игра начинается из положения (x, y) , $x > 0$, $y \leq \frac{\omega^2}{2}$. Если такое, что $x > \frac{2}{n}$. Рассмотрим Γ_n . Поскольку это гладкий контур и на нем $V \geq U$, то по выбору $\hat{\psi}$ ясно, что при любой φ точка (x, y) не в состоянии войти в область, где $x < \frac{1}{n}$, т.е. им. за какое конечное

время P не в состоянии кончить игру.

2) Пусть $(x, y) \in R_2$ и $w^2 > y > \frac{w^2}{2}$.

Положим $\hat{\Psi}(x, y) = -1$ для таких (x, y) . При этом $\vec{V} = (0, -w)$. Пусть $\hat{\Phi}(x, y)$ таково, что скорость точки (1.1) $(\dot{x}, \dot{y}) = \vec{U} + \vec{V}$ направлена по касательной к окружности радиуса \hat{y} с центром в $(x, y - w)$, проведённой из положения (x, y) (см. черт. 3). Легко проверить, что при таких $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Psi}$ траектория точки (1.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \sqrt{\frac{w^2}{y} - 1} \quad (4.9)$$

По построению, кривые, являющиеся решением (4.9) обладают следующими свойствами: при любом Φ и $\Psi = \hat{\Psi}$ траектория точки (1.1), выходящая из (x_0, y_0) , $x_0 > 0$, $\frac{w^2}{2} < y_0 < w^2$, будет лежать правее кривой (4.9), проходящей через (x_0, y_0) .

а) Игра начинается из положения $(x, y) \in R_2$, $\frac{w^2}{2} < y < w^2$. Тогда при любом управлении $\Phi \in E$, применяя $\Psi = \hat{\Psi}$, опускает точку (1.1) в рассматриваемую выше область $x > 0$, $y \leq \frac{w^2}{2}$. Действительно, беря $\hat{y} = \hat{y} \sin \varphi - w < 0$ и траектория (1.1) расходится правее QP , которая удовлетворяет (4.9) (по построению R_2 любые решения (4.9), проходящие через $(x, y) \in R_2$, $\frac{w^2}{2} < y < w^2$, лежат правее QP).

б) Игра начинается из точки (x, w^2) , $x \geq x_p$. При $\Psi = \hat{\Psi} = -1$, а $\Phi = \hat{\Phi} = \frac{\pi}{2}$ на $y = w^2$ $(\dot{x}, \dot{y}) = \vec{U} + \vec{V} = 0$ и, следовательно, (1.1) покоится в начальном положении $(x, w^2) \in R_2$.

Если же управление Φ таково, что точка опускается в положение, где $y < w^2$, то рассуждения, аналогичные приведённым выше, показывают, что при $\Psi = \hat{\Psi} = -1$ траектория (1.1) попадает в область $x > 0$, $y \leq \frac{w^2}{2}$. То заключаем, что построенное в R_2 управление $\Psi = \hat{\Psi}$ обеспечивает попадание точки (1.1) за конечное время на C при любом Φ , если только игра начинается из положения $(x, y) \in R_2$.

Высказание утверждение доказано.

Замечания.

1) Было показано, что

$\inf_{\varphi} \sup_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\varphi} \inf_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = T^0(x, y)$, если (x, y) является внутренней точкой R_1 . Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ такие, что

$$\varepsilon > \sup_{\psi} P_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y) - T^0(x, y) > 0$$

$$\text{и } \varepsilon > T^0(x, y) - \inf_{\varphi} P_{\varphi, \tilde{\psi}}(x, y) > 0$$

Тогда

$$P_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y) \leq T^0(x, y) + \varepsilon \quad \text{при } \forall \psi$$

$$P_{\varphi, \tilde{\psi}}(x, y) \geq T^0(x, y) - \varepsilon \quad \text{при } \forall \varphi$$

$$\text{и } |P_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) - T^0(x, y)| \leq \varepsilon$$

В качестве $\tilde{\psi}$ можно взять построенное выше уравнение $\tilde{\psi}$, а поскольку на самом деле $\inf_{\varphi} \sup_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = \min_{\varphi} \sup_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\psi} P_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y) = T^0(x, y)$, то в качестве $\tilde{\varphi}$ можно взять $\tilde{\varphi}$. При этом $P_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) = T^0(x, y)$.

Кроме того, поскольку во внутренней точке (x, y) области, ограниченной снизу характеристикой MM и линией $y = w^*$

$$P_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) = \tilde{P}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) = T^0(x, y) \quad \text{и}$$

$$\min_{\varphi} \sup_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\psi} P_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y) = T^0(x, y), \text{ то здесь справедливо}$$

$$\sup_{\psi} P_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y) = \max_{\psi} P_{\tilde{\varphi}, \psi}(x, y) = P_{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}}(x, y) = T^0(x, y).$$

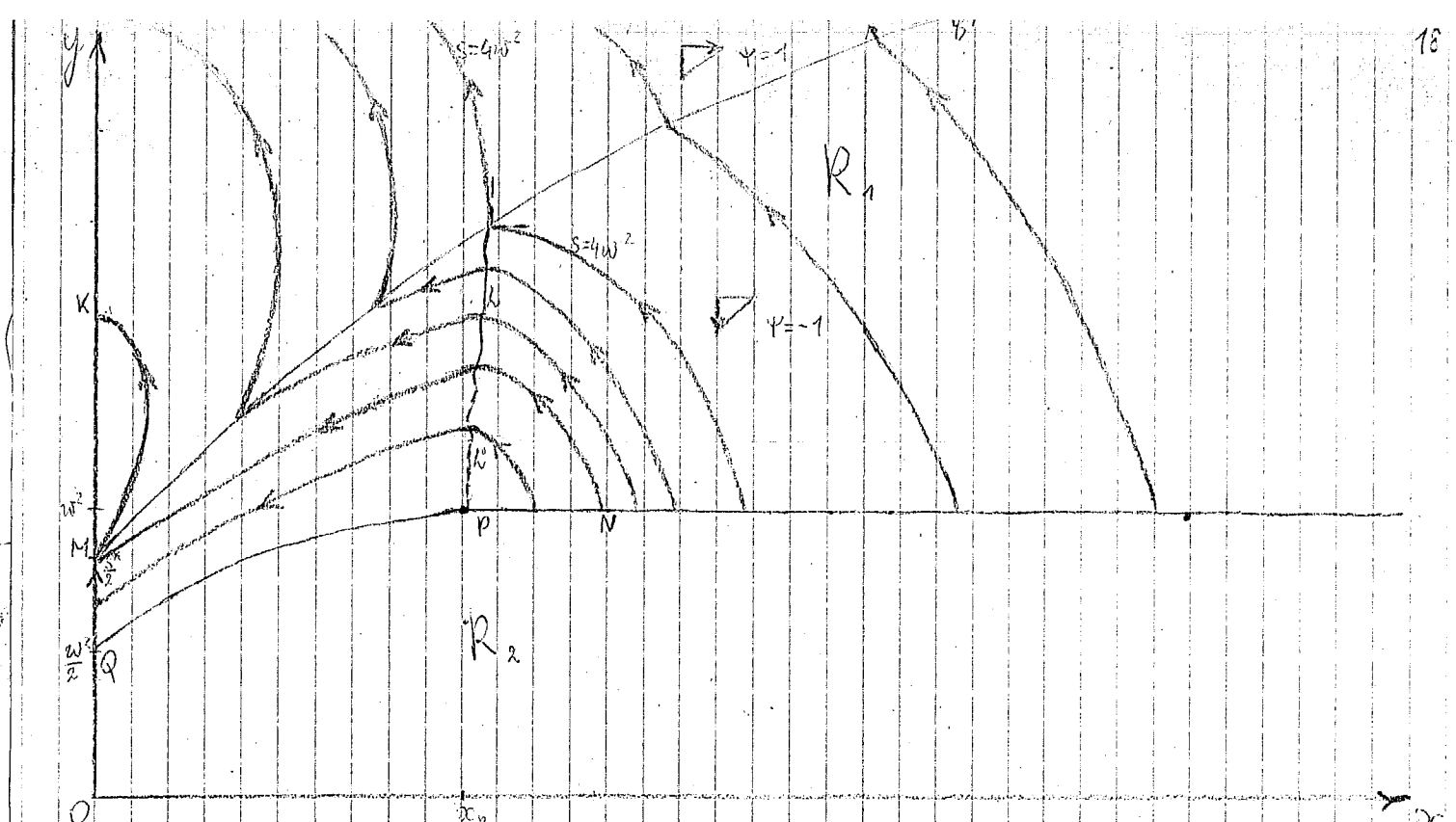
2) Утверждение А, доказанное для внутренних точек R_1 , распространяется и на точки $(x, y) \in QR$ (исключая Q и R). Здесь $\tilde{\varphi}$, являющееся непрерывным продолжением значений $\tilde{\varphi}$ из внутренних точек R_1 , ~~это~~ совпадает с уравнением $\tilde{\varphi}$, о котором говорилось выше.

В результате всего сказанного ясно, что функции $T^0(x, y)$, определенные в начале §4, обладают свойствами:

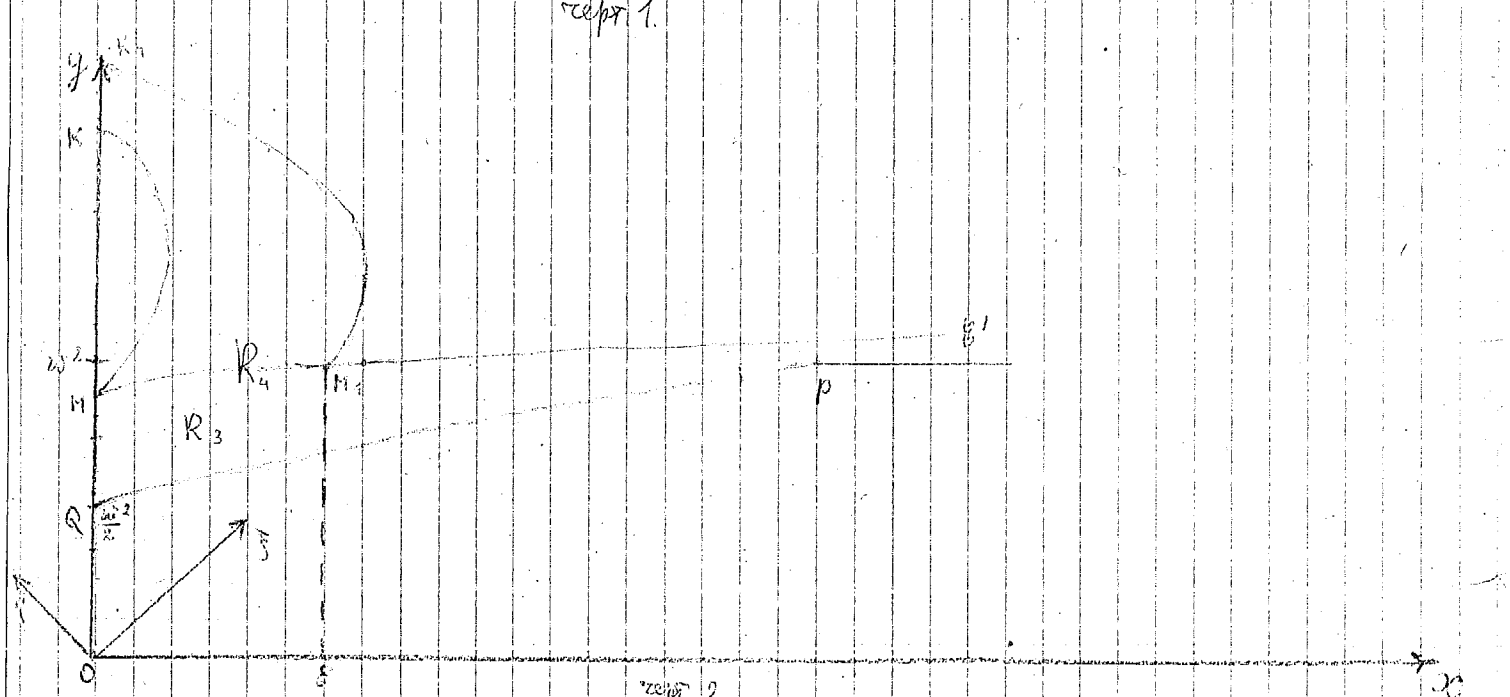
$\inf_{\varphi} \sup_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = \sup_{\varphi} \inf_{\psi} P_{\varphi, \psi}(x, y) = T^0(x, y)$ для каждой точки (x, y) из первого квадранта плоскости (x, y) .

Литература:

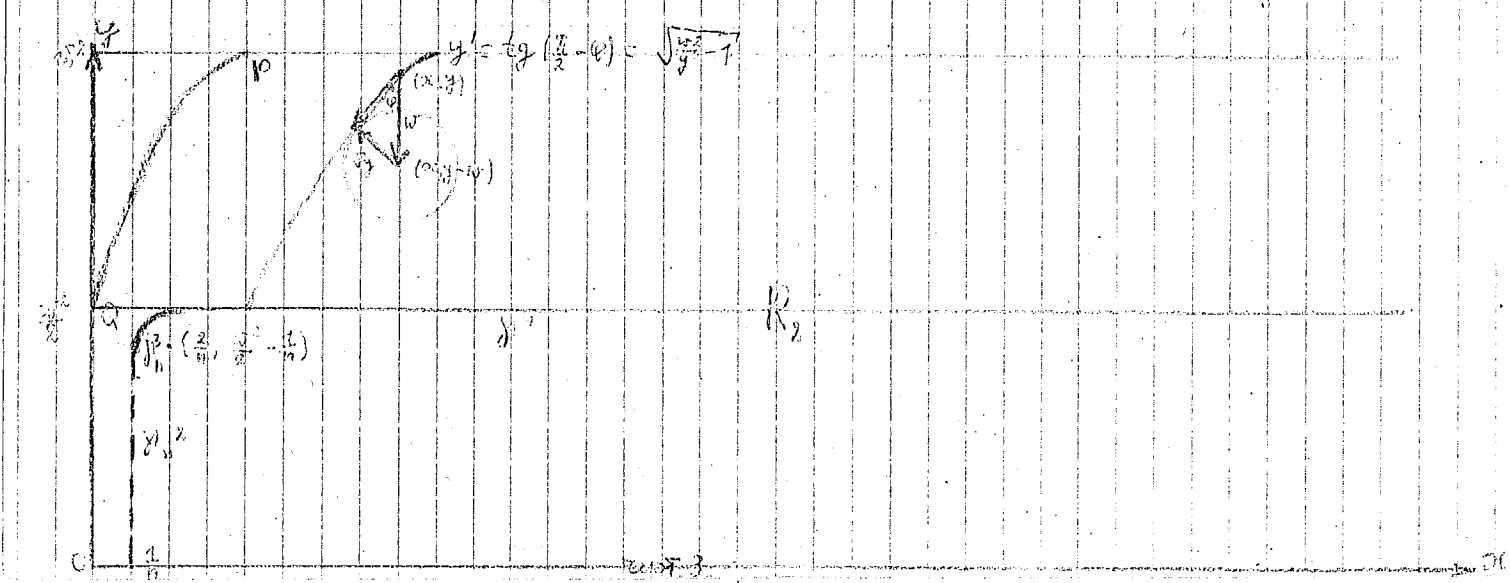
- 1) Р. Айзен, "Дифференциальная геометрия"
- 2) Р. Куропат, "Проблемы с частными производными"



recept 1.



recept 2



recept 3