1 Przestrzenie wektorowe

Niech V będzie zbiorem, K ciałem, $''+''$ działaniem wewnętrzym zbiorze V oraz niech $''\cdot''$ będzie będzie mnożeniem elementów zbioru V przez elementy K. Czwórkę $(V, K, +, \cdot)$ nazywamy przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem K jeśli spełnione są warunki:

1. $(V, +)$ jest grupą abelową
   (a) $\forall_{v,w \in V} \quad v + w = w + v$
   (b) $\forall_{u,v,w, \in V} \quad u + (v + w) = (u + w) + v$
   (c) $\exists_{e \in V} \quad \forall_{v \in V} \quad v + e = e + v = e$
   (d) $\forall_{v \in V} \quad \exists_{w \in V} \quad v + w = e$
2. $\forall_{a \in K} \quad \forall_{v,w \in V} \quad a(v + w) = av + aw$
3. $\forall_{a,b \in K} \quad \forall_{v \in V} \quad (a + b)v = av + bv$
4. $\forall_{a,b \in K} \quad \forall_{v \in V} \quad a(bv) = (ab)v$
5. $\forall_{v \in V} \quad 1v = v$

2 Iloczyn skalarny i przestrzenie unitarne

Definicja: Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K. Iloczynem skalarnym przestrzeni V nazywamy funkcję

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longmapsto K$$

spełniającą warunki:

1. $\forall_{v,w \in V} \quad \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
2. $\forall_{a,b \in K} \quad \forall_{v_1,v_2,w \in V} \quad \langle av_1 + bv_2, v \rangle = a\langle v_1, w \rangle + b\langle v_2, w \rangle$
3. $\forall_{v \in V \setminus \{\theta\}} \quad \langle v, v \rangle > 0$

Definicja: Przestrzenią unitarną nazywamy parę $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie V jest przestrzenią wektorową, a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym. Iloczyn skalarny ma nastepujące własności:

1. $\forall_{v \in V} \quad \langle v, \theta \rangle = \langle \theta, v \rangle$
2. $\forall_{v \in V} \quad \langle v, v \rangle \geq 0$
3. $\forall_{v,w_1,w_2 \in V} \quad \langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$
4. $\forall_{a \in K} \quad \forall_{v,w \in V} \quad \langle v, aw \rangle = \overline{a}\langle v, w \rangle$

3 Przestrzenie unormowane

Definicja: Niech V będzie przestrzenią wektorową K. Normą przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto ||v||$$

spełniające dla każdego $v, w \in V$, $z \in \mathbb{C}$ następujące warunki:

1. $||v|| \geq 0$, $(||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = \theta\ )$
2. $||zv|| = |z|||v||$
3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Definicja: Przestrzeń wektorową, w której określono normę nazywamy przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie Przestrzeń z iloczynem wewnetrzym jest przestrzenią unormowaną.

Dowód Niech V będzie przestrzenią z iloczynem wewnetrzym oraz niech $v \in V$. Okreslany normę wektora v jako

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Sprawdzamy, że tak określone odwzorowanie jest normą. . . .

Definicja: Niech V będzie przestrzenią unormowaną. Wektor $v \in V$ nazywamy unormowanym jeśli $\|v\| = 1$.

3.1 Bazy ortogonalne i ortonarmalne

Definicja Niech V będzie przestrzenią unitarną nad ciałem K. Wektory $v, w \in V$ nazywamy ortogonalnymi (prostopadłymi) jeśli

$$\langle v, w\rangle = 0.$$

Piszemy wtedy $v \perp w$.

Definicja Bazę przestrzeni unitarnej V nazywamy bazą ortogonalną jeśli wektory tej bazy są parami prostopadłe. Jeśli ponadto wektory bazy ortogonalnej są unormowane, to bazę tę nazywamy ortonormalną.

Fakt Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni V, to dla każdego wektora $v \in V$ zachodzi równość

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \ldots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n$$

Fakt Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni V, to dla każdego wektora $v \in V$ zachodzi równość

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 \ldots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

Fakt Jeśli niezerowe wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ przestrzeni unitarnej V są parami ortogonalne, to są linioweo niezależne.

Twierdzenie Każda skończenie wymiarowa przestrzeń unitarna ma ma bazę ortonormalną.

Definicja Jeśli $V \subset \mathbb{R}^n$ jest rzeczywistą przestrzenią unitarną, to kątem między niezerowymi wektorami $v, w \in V$ nazywamy liczbę $\alpha \in [0, \pi]$ spełnijacą warunek

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

Zatem

$$\alpha = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

Definicja Funkcja

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

okresloną wzorem

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

jest metryką.

Przykłady

1. Kanonicznym iloczynem skalarnym w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \;\; : \;\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$$

określoną wzorem

$$\langle [x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

2. Kanonicznym iloczynem skalarnym w przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^n$ nazywamy funkcję

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ : \ \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}$$

określoną wzorem

$$\langle [x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

4 Proste zadanie klasyfikacji

Ustalmy $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$u = [u_1, \ldots, u_n], \qquad v = [v_1, \ldots, v_n]$$

Definiujemy zbiory

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - u\| < \|x - v\|\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - v\| < \|x - u\|\}$$

Wyznaczymy hiperpłaszczyznę rozdzielającą klasy $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$. Niech

$$\|x - v\| = \|x - u\|$$

więc

$$\langle x - v | x - v \rangle = \langle x - u | x - u \rangle.$$

Mamy,

$$\begin{aligned} \langle x - v | x - v \rangle &= \langle x - v | x \rangle - \langle x - v | v \rangle = \langle x | x \rangle - \langle x | v \rangle - \langle x | v \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle x | v \rangle \end{aligned}$$

oraz

$$\langle x - u | x - u \rangle = \|x\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle x | u \rangle.$$

Stąd,

$$\frac{1}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2) = \langle x|v\rangle - \langle x|u\rangle = \langle x|v-u\rangle = \langle v-u|x\rangle.$$

Niech $y = v - u$ oraz $w_0 = \frac{1}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2)$. Wtedy

$$\langle y|x\rangle = w_0,$$

Zdefiniujmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad \langle y|x\rangle > w_0 \\ -1, & \text{jeśli} \quad \langle y|x\rangle < w_0 \end{cases}$$

Stąd,

$$\begin{cases} x \in \mathcal{C}_1, & \text{jeśli} \quad f(x) = 1 \\ x \in \mathcal{C}_2, & \text{jeśli} \quad f(x) = -1 \end{cases}$$

Niech

$$w = [-w_0, w_1, \ldots, w_n], \qquad x = [1, x_1, \ldots, x_n], \qquad y = [w_1, \ldots, w_n]$$

Wtedy,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad \langle w|x\rangle > 0 \\ -1, & \text{jeśli} \quad \langle w|x\rangle < 0 \end{cases},$$

gdzie

$$\langle w|x\rangle = wx^T = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i.$$

Definiujemy wektor

$$\begin{aligned} z =& [z_0, z_1, \ldots, z_n], \qquad z_i = \frac{2}{\|y\|^2} w, \\ \bar{u} =& [1, u_1, \ldots, u_n], \qquad \bar{v} = [1, v_1, \ldots, v_n] \end{aligned}$$

Wtedy,

$$\langle w|\bar{u}\rangle = \frac{1}{2}\|y\|^2, \qquad \langle w|\bar{v}\rangle = -\frac{1}{2}\|y\|^2$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle z|\bar{u}\rangle &= \frac{2}{\|y\|^2}\langle w|\bar{u}\rangle = 1, \\ \langle z|\bar{v}\rangle &= \frac{2}{\|y\|^2}\langle w|\bar{v}\rangle = -1 \end{aligned}$$