Przekształcenia geometryczne w grafice komputerowej

Marek Badura

PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE W GRAFICE KOMPUTEROWEJ

Przedstawimy podstawowe przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (przestrzeń 2D) i w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ (przestrzeń 3D) wykorzystywane w grafice komputerowej. Przekształcenia przesunięcia, skalowania i obrotów są wykorzystywane w wielu pakietach graficznych. Wiele programów graficznych wykorzystuje przekształcenia geometryczne do zmieniania pozycji, orientacji i wielkości obiektów. Najpopularniejszym narzędziem matematycznym wykorzystywanym w grafice komputerowej jest algebra liniowa. Bardzo przydatna okazuje się koncepcja wektora. Wektory stosujemy np. do reprezentowania położenia punktu we współrzędnych świata, do oznaczania orientacji powierzchni, do opisu zachowania światła przy kontakcie z bryłami przezroczystymi i nieprzezroczystymi. Dla potrzeb grafiki komputerowej wystarczające jest definiowanie wektora jako n-tki liczb, przy czym n jest równe 2 dla przestrzeni 2D, 3 dla przestrzeni 3D itd. Również macierze odgrywają istotna rolę w grafice komputerowej. Wykorzystuje się je przy przekształceniach geometrycznych, w rzutowaniu 3D, w pakietach grafiki 3D i w opisie krzywych i powierzchni.
Większość zadań grafiki jest wykonywana w przestrzeni 2D, przestrzeni 3D albo w przestrzeni 4D.
Najczęściej obiekty graficzne są opisywane zbiorem wyróżnionych punktów, dlatego omawiane transformacje dotyczą pojedynczych punktów, a nie np. równań algebraicznych opisujących krzywe. Obiekt powinniśmy transformować stosując przekształcenie do każdego punktu obiektu. Ponieważ jednak każdy odcinek obiektu składa się z nieskończonej liczby punktów, taki proces trwałby nieskończenie długo. Możemy jednak przekształcić wszystkie punkty odcinka przekształcając tylko jego końce i rysując nowy odcinek między przekształconymi końcami.
Punkty na płaszczyźnie (w przestrzeni) określa się podając ich współrzędne w ustalonym układzie. Na ogół jest to układ kartezjański, ale czasami może być wygodniejszy np. układ współrzędnych biegunowych. W grafice komputerowej bardzo ważna jest umiejętność nie tylko przekształcania danego obiektu lecz także opisywania go w różnych układach współrzędnych. Z tego względu oprócz przekształceń punktów w danej przestrzeni rozważa się również transformacje samej przestrzeni (związki między jej różnymi układami współrzędnych).
Przyjmujemy założenie, że czytelnik zna podstawowe wiadomości z algebry liniowej i geometrii, (zagadnienia omawiane na wykładach na pierwszym roku studiów). Przekształcenia geometryczne często będziemy nazywać transformacjami.

1. Transformacje na płaszczyźnie (2D)

Płaszczyznę kartezjańską będziemy oznaczać przez $\mathbb{R}^2$, punkt P o współrzędnych (x, y) będzie oznaczany przez $P(x, y)$, początek układu współrzędnych przez $O(0, 0)$. Często w obliczeniach punkt będzie rwprezentowany jako wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (lub jako wektor wierszowy $[x, y]$).
Transformacją płaszczyzny nazywamy odwzorowanie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (płaszczyzny w siebie) postaci

$$L(x, y) = (a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2),$$

gdzie $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ są pewnymi stałymi liczbami rzeczywistymi.
Punkt $P' = L(P)$ nazywamy *obrazem* punktu P. Jeśli F jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$, to zbiór wszystkich punktów $L(x, y)$, dla $(x, y) \in F$, nazywamy obrazem F i oznaczamy $L(F)$.

1.1. **Przesunięcie (translacja).**

Punkty na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ możemy przesunąć na nową pozycję dodając do współrzędnych punktów wielkość przesunięcia.
Przesunięciem (translacją) nazywamy transformację odwzorowujacą punkt $P(x, y)$ na punkt $P'(x', y')$ przez dodanie pewnych stałych do każdej współrzędnej, tj.

$$x' = x + tx, \qquad y' = y + ty,$$

gdzie tx, ty są pewnymi stałymi liczbami rzeczywistymi. Mówimy również, że punkt P został przesunięty o wektor $[tx, ty]$.
Jeśli zdefiniujemy wektory kolumnowe

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix},$$

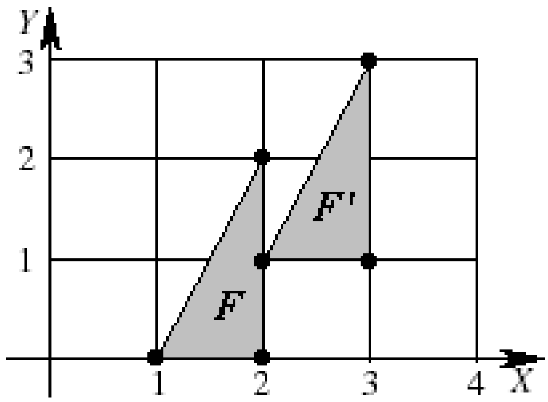
to przesunięcie możemy wyrazić w bardziej zwarty sposób

$$P' = P + T$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix} \quad .$$

Translację o wektor $[tx, ty]$ bedziemy oznaczać przez $T(tx, ty)$.

Aby przesunąć cały obiekt powinniśmy stosować równanie przesunięcia do każdego punktu obiektu. Ponieważ każdy odcinek obiektu składa się z nieskończonej liczby punktów, taki proces trwałby nieskończenie długo. Wystarczy jednak przesunąć tylko końce odcinka i narysować nowy odcinek z przesuniętymi końcami (analogicznie postępujemy w przypadku innych transformacji).



RYSUNEK 1. Przesunięcie o wektor [1, 1]. $F' = T(1,1)(F)$.

1.2. **Skalowanie względem początku układu współrzędnych.** Obiekty geometryczne mogą być skalowane ze współczynnikiem $s_x \neq 0$ w kierunku osi OX i ze współczynnikiem $s_y \neq 0$ w kierunku osi OY. *Skalowaniem* względem początku układu współrzędnych nazywamy transformację odwzorowującą punkt $P(x, y)$ na punkt $P'(x', y')$ przez pomnożenie współrzędnych x i y przez stałe, niezerowe *współczynniki skalowania (skale)*, odpowiednio s_x i s_y, tj.

$$x' = s_x x, \quad y' = s_y y.$$

Współczynnik skalowania s jest zwiększający, jeśli $|s| > 1$, a zmniejszający, jeśli $|s| < 1$. Jeśli $s_x = s_y$, to skalowanie nazywamy *jednorodnym*, a jeśli $s_x \neq s_y$ – *niejednorodnym*. Przy skalowaniu niejednorodnym proporcje skalowanego obiektu zmieniają się, natomiast przy skalowaniu jednorodnym proporcje nie ulegają zmianie.

Jeśli punkty P i P' przedstawimy jako wektory kolumnowe, to skalowanie może być wykonane jako mnożenie przez macierz. Współrzędne punktu P' dane są wzorami

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

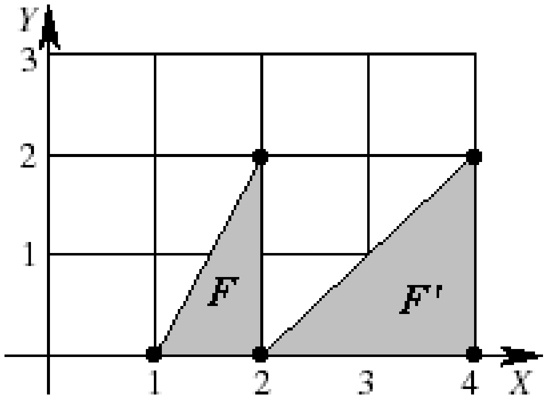
Macierz

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą skalowania*.
Możemy zatem napisać

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P .$$

Przekształcenie skalowania względem początku układu współrzędnych o skalach s_x, s_y jak i odpowiadającą mu macierz będziemy oznaczać przez $S(s_x, s_y)$.



Rysunek 2. Skalowanie względem początku układu współrzędnych o skalach 2 i 1. $F' = S(2,1)(F)$.

Przykład 1.1. Rozważmy punkty z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$: $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(2,2)$, $D(\frac{3}{2},3)$ oraz macierz skalowania $S(2,\frac{1}{2})$. Zapiszmy wspólrzędne podanych punktów jako kolumny macierzy

$$[A,B,C,D] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

Znajdziemy współrzędne obrazów A', B', C', D' podanych punktów po wykonaniu skalowania S.

$$[A',B',C',D'] = S \cdot [A,B,C,D]$$

$$[A',B',C',D'] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kolumny otrzymanej macierzy są współrzędnymi obrazów, zatem otrzymaliśmy punkty $A'(2,\frac{1}{2})$, $B'(3,\frac{1}{2})$, $C'(4,1)$, $D'(3,\frac{3}{2})$.

1.3. **Obrót wokół początku układu współrzędnych.** Punkty mogą być obracane wokół początku układu współrzędnych o ustalony kąt φ.

Obrotem wokół początku układu współrzędnych o kąt φ nazywamy transformację odworowującą punkt $P(x,y)$ na punkt $P'(x',y')$ taki, że odległości punktów P i P' od początku układu współrzędnych O są równe, tj. $|\overline{OP}| = |\overline{OP'}|$, oraz kąt między odcinkami $\overline{OP}$ i $\overline{OP'}$ jest równy φ. (Ponieważ są dwa możliwe obrazy punktu P spełniające takie warunki, więc przyjmuje się, że obrót o kąt dodatni wykonuje się w

kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).
Współrzędne punktu P' dane są wzorami

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \qquad (1.3)$$

Istotnie, przypuśćmy, że $r = |\overline{OP}| = |\overline{OP'}|$ oraz α jest kątem jaki tworzy odcinek $\overline{OP}$ z osią OX. Wtedy

$$(x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \qquad (\Delta)$$

Ponieważ odcinek $\overline{OP'}$ tworzy z osią OX kąt $\varphi + \alpha$, więc mamy

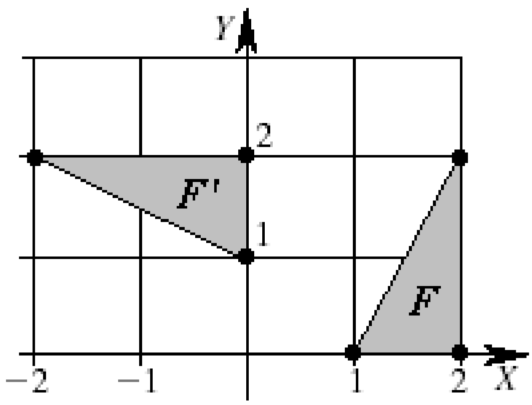
$$(x', y') = (r\cos(\varphi+\alpha), r\sin(\varphi+\alpha))$$

Z odpowiednich wzorów trygonometrycznych (sinus i cosinus sumy kątów) otrzymujemy

$$x' = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha = (r\cos\alpha)\cos\varphi - (r\sin\alpha)\sin\varphi$$

$$y' = r\sin\varphi\cos\alpha + r\cos\varphi\sin\alpha = (r\cos\alpha)\sin\varphi + (r\sin\alpha)\cos\varphi$$

Stąd po uwzględnieniu (Δ) otrzymujemy wzory (1.3).



Rysunek 3. Obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt 90°. $F' = R(\pi/2)(F)$.

Obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt φ można wyrazić w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Macierz

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą obrotu.*
Możemy zatem krótko zapisać

$$P' = R(\varphi) \cdot P \ .$$

Przekształcenie obrotu wokół początku układu współrzędnych o kąt φ i odpowiadajacą mu macierz będziemy oznaczać przez $R(\varphi)$.

1.4. **Składanie przekształceń.** W wielu zastosowaniach potrzebne jest wykonanie na obiekcie więcej niż jednej transformacji (opisanych w punktach 1 – 3) aby otrzymać pożądany efekt. Wykonując kilka transformacji opisanych w punktach 1 – 3 na jednym obiekcie, możemy uzyskać inne przekształcenia. Takie przekształcenia nazywamy *złożeniem* (lub *łączeniem*) transformacji. Złożenie transformacji L_1 i L_2 będziemy zapisywać jako $L_2 \circ L_1$ lub $L_2 \cdot L_1$, lub $L_2 L_1$.

1.4.1. *Składanie przesunięć.* Jeśli

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \ P'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}, \ T_1 = \begin{bmatrix} tx_1 \\ ty_1 \end{bmatrix}, \ T_2 = \begin{bmatrix} tx_2 \\ ty_2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$P' = P + T_1, \quad P'' = P' + T_2 \ .$$

Wówczas

$$P'' = P + T_1 + T_2 \ ,$$

$$P'' = (T(tx_2, ty_2) \circ T(tx_1, ty_1))(P) \ .$$

1.4.2. *Składanie skalowań.* Jeśli

$$S_1 = \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 \\ 0 & s_{1y} \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} s_{2x} & 0 \\ 0 & s_{2y} \end{bmatrix}$$

oraz

$$P' = S_1 \cdot P, \quad P'' = S_2 \cdot P'$$

wówczas

$$P'' = S_2 \cdot (S_1 \cdot P) = (S_2 \cdot S_1) \cdot P,$$

przy czym

$$S_2 \cdot S_1 = \begin{bmatrix} s_{2x} & 0 \\ 0 & s_{2y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 \\ 0 & s_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{2x}s_{1x} & 0 \\ 0 & s_{2y}s_{1y} \end{bmatrix} \ .$$

Jak widzimy składanie skalowań jest multiplikatywne.
Mamy zatem

$$P'' = S(s_{1x}s_{2x}, s_{1y}s_{2y})(P) \ .$$

1.4.3. *Składanie obrotów.* Jeśli

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \; R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

oraz

$$P' = R(\varphi) \cdot P, \quad P'' = R(\psi) \cdot P'$$

wówczas

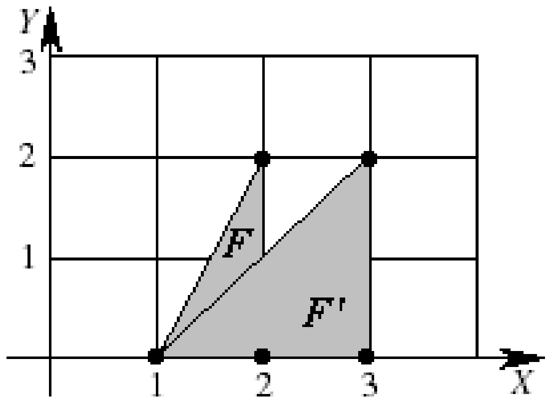
$$P'' = R(\psi) \cdot (R(\varphi) \cdot P) = (R(\psi) \cdot R(\varphi)) \cdot P = R(\varphi + \psi) \cdot P$$

gdzie

$$R(\varphi+\psi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{bmatrix}$$

Składanie obrotów jest addytywne, tzn. $R(\varphi) \cdot R(\psi) = R(\varphi + \psi) = R(\psi + \varphi) = R(\psi) \cdot R(\varphi)$.

1.4.4. *Skalowanie względem dowolnego punktu.* Rozważmy skalowanie obiektu względem pewnego punktu $P_0(x_0, y_0)$ o skalach s_x i s_y.



RYSUNEK 4. Skalowanie względem punktu $(1, 0)$ o skalach 2 i 1. $F' = S_{(1,0)}(2, 1)(F)$.

Wiemy już jak wykonać skalowanie względem początku układu współrzędnych. Żeby skalować punkt $P(x, y)$ względem punktu P_0, potrzebujemy sekwencji trzech przekształceń:

1. Takie przesunięcie płaszczyzny, aby punkt P_0 znalazł się w początku układu współrzędnych.
2. Skalowanie względem początku układu współrzędnych o skalach s_x i s_y.
3. Takie przesunięcie płaszczyzny, żeby punkt znajdujący się w początku układu współrzędnych wrócił do P_0.

Całe przekształcenie możemy zapisać wzorem

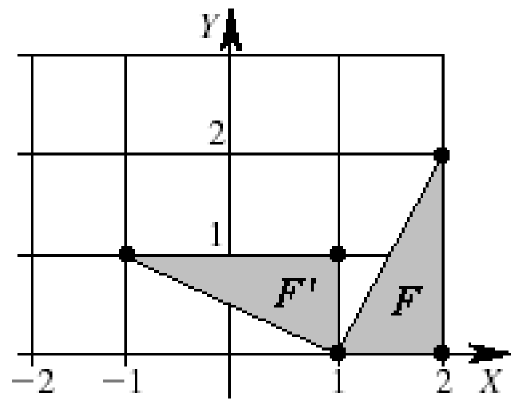
$$P' = (S(s_x, s_y) \cdot (P + (T(-x_0, -y_0)))) + T(x_0, y_0)$$

lub

$$x' = s_x(x - x_0) + x_0 \quad , \quad y' = s_y(y - y_0) + y_0 \ .$$

Skalowanie względem punktu (x_0, y_0) o skalach s_x i s_y będziemy oznaczać przez $S_{(x_0,y_0)}(s_x, s_y)$.

1.4.5. *Obrót wokół dowolnego punktu.* Rozważmy obrót obiektu wokół pewnego punktu $P_0(x_0, y_0)$ o kąt φ.



Rysunek 5. Obrót wokół punktu $(1, 0)$ o kąt 90°.
$F' = R_{(1,0)}(\pi/2)(F)$.

Wiemy jak wykonać obrót wokół początku układu współrzędnych. Żeby obrócić punkt $P(x, y)$ wokół punktu P_0 potrzebujemy, podobnie jak w przypadku skalowania, sekwencji trzech przekształceń:

1. Takie przesunięcie płaszczyzny, aby punkt P_0 znalazł się w początku układu współrzędnych.
2. Obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt φ.
3. Takie przesunięcie płaszczyzny, żeby punkt znajdujący się w początku układu współrzędnych wrócił do P_0.

Zatem, najpierw wykonujemy przesunięcie o wektor $[-x_0, -y_0]$, następnie obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt φ i na koniec przesunięcie o wektor $[x_0, y_0]$. Całe przekształcenie możemy zapisać

$$P' = (R(\varphi) \cdot (P + T(-x_0, -y_0))) + T(x_0, y_0)$$

lub

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi + x_0 \\ y' &= (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi + y_0 \ . \end{aligned}$$

Obrót wokół punktu (x_0, y_0) o kąt φ będziemy oznaczać przez $R_{(x_0,y_0)}(\varphi)$

Uwaga.
Jeśli chcielibyśmy dokonać różnych transformacji na obiekcie, wówczas musimy pamiętać o kolejności wykonywania przekształceń. Na ogół składanie różnych przekształceń nie jest przemienne.

2. Współrzędne jednorodne

Obiekty na płaszczyźnie mogą być przekształcane przez zastosowanie pewnej liczby transformacji (przesunięć, skalowań, obrotów; 1.1 – 1.3). Widzieliśmy, że składaniu transformacji odpowiada mnożenie i dodawanie odpowiednich macierzy. Złożenie obrotów i skalowań otrzymujemy przez mnożenie macierzy, natomiast przesunięciom odpowiada dodawanie wektora (macierzy jednokolumnowej). Pojawia się zatem pewna niedogodność, związana z tym, że nie możemy każdego przekształcenia przedstawić w postaci jednej macierzy (ponieważ przesunięcie jest traktowane inaczej niż skalowanie i obrót). Chcielibyśmy móc traktować wszystkie trzy przekształcenia w jednakowy sposób, tak żeby można je było w łatwy sposób łączyć ze sobą. Gdyby dowolne złożenie transformacji można było wykonać tylko jako mnożenie pewnej liczby macierzy, wówczas możliwe byłoby zapisanie dowolnego przekształcenia w postaci jednej macierzy.
Opisany problem można ominąć stosując alternatywny układ współrzędnych, w którym dowolne przekształcenie daje się opisać jako mnożenie przez macierz o wymiarach 3×3. Wtedy

$$L(x,y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zatem

$$x' = a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{i} \quad y' = a_2x + b_2y + c_2 \quad .$$

W nowym układzie współrzędnych punkt o współrzędnych kartezjańskich (x, y) jest reprezentowany przez współrzędne *jednorodne* (*rzutowe*) $(x, y, 1)$ (lub wielokrotność (tx, ty, t), gdzie $t \neq 0$). Jeśli $W \neq 0$, to współrzędne jednorodne (X, Y, W) reprezentują punkt $(x, y) = (X/W, Y/W)$ na płaszczyźnie kartezjańskiej. Współrzędne jednorodne $(X, Y, 0)$ nie odpowiadają żadnemu punktowi na płaszczyźnie kartezjańskiej; mówimy, że takie współrzędne reprezentują *punkt w nieskończoności* o kierunku $[X, Y]$.
Zbiór wszystkich współrzędnych jednorodnych (X, Y, W) jest nazywany *płaszczyzną rzutową* i oznaczany przez $\mathbb{P}^2$.

Obserwacja.
Trójki współrzędnych na ogół reprezentują punkty w przestrzeni trójwymiarowej, tutaj natomiast używamy ich do reprezentowania punktów w przestrzeni dwuwymiarowej. Jeżeli weźmiemy wszystkie trójki reprezentujące ten sam

punkt, tzn. trójki postaci (tX, tY, tW), dla $t \neq 0$, to otrzymamy linię w przestrzeni trójwymiarowej XYW. Tak więc każdy punkt jednorodny reprezentuje linię w przestrzeni trójwymiarowej. Jeśli współrzędne punktu (X, Y, W) podzielimy przez W (przy założeniu $W \neq 0$), to punkt ten będzie miał współrzędne $(X/W, Y/W, 1) = (x, y, 1)$. Czyli punkt ten odpowiada punktowi (x, y) z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Wobec tego możemy traktować punkty (x, y) z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jako elementy przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ (XYW) leżące w płaszczyźnie $W = 1$, a więc o trzech współrzędnych $(x, y, 1)$.

Przykład 2.1. Wszystkie trójki $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ i $(-1, -2, -3)$ są współrzędnymi jednorodnymi punktu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Istotnie,

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}(1, 2, 3) = \frac{1}{6}(2, 4, 6) = -\frac{1}{3}(-1, -2, -3) \ .$$

Przykład 2.2. Współrzędne kartezjańskie punktu o współrzędnych jednorodnych $(X, Y, W) = (6, 4, 2)$ otrzymujemy przez podzielenie tych współrzędnych jednorodnych przez $W = 2$. Wtedy otrzymamy $(3, 2, 1)$. Zatem współrzędnymi kartezjańskimi punktu są $(x, y) = (3, 2)$.

Ćwiczenie 2.3. Punkt ma współrzędne kartezjańskie $(5, -20)$ i współrzędne jednorodne $(-5, ?, -1)$, $(10, -40, ?)$. Uzupełnij współrzędne zastąpione znakiem "?".

3. Transformacje 2D we współrzędnych jednorodnych

Opiszemy teraz macierze transformacji na płaszczyźnie we współrzędnych jednorodnych. Tym samym symbolem będziemy oznaczać zarówno przekształcenie jak i macierz odpowiadającą temu przekształceniu.

3.1. **Przesunięcie (translacja).** Wprowadzenie współrzędnych jednorodnych umożliwia przedstawienie translacji jako mnożenia przez *macierz przesunięcia*. Macierzą przesunięcia $T(tx, ty)$ we współrzędnych jednorodnych jest

$$T(tx, ty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Wówczas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + tx \\ y + ty \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Zatem punkt (x, y) jest przesuwany do $(x + tx, y + ty)$.

Przykład 3.1. Podobnie jak w przykładzie 1.1, rozważmy punkty z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$: $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(2, 2)$, $D(\frac{3}{2}, 3)$. Przesuniemy te punkty o wektor $[2, 1]$. Zapiszmy wspólrzędne podanych punktów jako kolumny macierzy we współrzędnych jednorodnych (dla czterech punktów będzie to macierz o wymiarach 3×4)

$$[A, B, C, D] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Macierz przesunięcia jest postaci

$$T(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdziemy współrzędne obrazów A', B', C', D' podanych punktów po wykonaniu skalowania $T(2,1)$.

$$[A', B', C', D'] = T(2,1) \cdot [A, B, C, D]$$

$$[A', B', C', D'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & \frac{7}{2} \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kolumny otrzymanej macierzy są współrzędnymi jednorodnymi obrazów, zatem otrzymaliśmy punkty $A'(3,2)$, $B'(5,2)$, $C'(4,3)$, $D'(\frac{7}{2}, 4)$.

3.2. **Skalowanie względem początku układu współrzędnych.** Macierz skalowania we współrzędnych jednorodnych o skalach s_x, s_y jest postaci

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego, obrazem punktu (x, y) jest punkt $(s_x x, s_y y)$.
Skalowanie można również przedstawić jako mnożenie przez macierz

$$S(s_x, s_y; s_w) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_w \end{bmatrix},$$

dla $s_w \neq 0$. Przekształcenie $S(s_x, s_y; s_w)$ reprezentuje skalowanie względem początku układu współrzędnych o współczynnikach skalowania s_x/s_w w kierunku osi OX i s_y/s_w w kierunku osi OY.

3.3. **Obrót wokół początku układu współrzednych.** We współrzędnych jednorodnych macierz obrotu wokół początku układu współrzędnych o kąt φ jest postaci

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(obrót o kąt dodatni oznacza obrót przeciwny do ruchu wskazówek zegara). Mamy więc

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Czyli, $R(\varphi)(x, y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$.

3.4. **Składanie (łączenie) transformacji.** We współrzędnych jednorodnych składaniu transformacji odpowiada mnożenie odpowiednich macierzy. Na przykład, łącząc obrót wokół początku układu współrzędnych $R(\varphi)$ z przesunięciem $T(tx, ty)$ otrzymujemy

$$T(tx,ty)R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & tx \\ \sin\varphi & \cos\varphi & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 3.2. Macierzą transformacji, która reprezentuje obrót o kąt $\varphi = 3\pi/2$ wokół początku układu współrzędnych oraz skalowanie o współczynnikach $s_x = 3$ w kierunku osi OX i $s_y = 2$ w kierunku osi OY jest macierz

$$S(3,2)R\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.3. Wyznaczyć macierz, która opisuje transformację wykonującą przekształcenia takie jak w powyższym przykładzie, ale w odwrotnej kolejności. Co możemy powiedzieć o kolejności wykonywania przekształceń?

3.5. **Skalowanie względem dowolnego punktu.** Skalowanie względem punktu (x_0, y_0) o skalach s_x, s_y otrzymujemy przez wykonanie kolejno: przesunięcia $T(-x_0, -y_0)$, następnie skalowania względem początku układu współrzędnych $S(s_x, s_y)$ i przesunięcia $T(x_0, y_0)$. Zatem macierz skalowania względem punktu (x_0, y_0) jest postaci

$$\begin{aligned} S_{(x_0,y_0)}(s_x,s_y) &= T(x_0,y_0)S(s_x,s_y)T(-x_0,-y_0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_0(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_0(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.6. **Obrót wokół dowolnego punktu.** Obrót wokół punktu (x_0, y_0) o kąt φ otrzymujemy przez wykonanie kolejno: przesunięcia $T(-x_0, -y_0)$, następnie obrotu wokół początku układu współrzędnych $R(\varphi)$ i przesunięcia $T(x_0, y_0)$. Zatem macierz obrotu wokół punktu (x_0, y_0) jest postaci

$$\begin{aligned} R_{(x_0,y_0)}(\varphi) &= T(x_0,y_0)S(s_x,s_y)T(-x_0,-y_0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & (-x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi + x_0) \\ \sin\varphi & \cos\varphi & (-x_0\sin\varphi - y_0\cos\varphi + y_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Transformacje w przestrzeni trójwymiarowej (3D)

Podobnie jak przekształcenia 2D możemy opisywać przekształcenia 3D. Trójwymiarową przestrzeń kartezjańską będziemy oznaczać przez $\mathbb{R}^3$, punkt P o współrzędnych (x, y, z) będzie oznaczany przez $P(x, y, z)$, początek układu współrzędnych przez $O(0, 0, 0)$. Często w obliczeniach punkt będzie reprezentowany jako wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (lub wierszowy $[x, y, z]$).

Transformacją w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy odwzorowanie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci

$$L(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2, a_3x + b_3y + c_3z + d_3),$$

gdzie $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ są pewnymi stałymi liczbami rzeczywistymi.
Punkt $P' = L(P)$ nazywamy *obrazem* punktu P. Jeśli F jest podzbiorem $\mathbb{R}^3$, to zbiór wszystkich punktów $L(x, y, y)$, dla $(x, y, z) \in F$, nazywamy obrazem F i oznaczamy $L(F)$.
Podobnie jak w przypadku płaszczyzny, skorzystamy z opisu punktów i macierzy we współrzędnych jednorodnych. Punkt o współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) jest reprezentowany przez współrzędne jednorodne $(x, y, z, 1)$ (lub wielokrotność (tx, ty, tz, t), gdzie $t \neq 0$). Jeśli $W \neq 0$, to współrzędne jednorodne (X, Y, Z, W) reprezentują punkt $(x, y, z) = (X/W, Y/W, Z/W)$ w przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^3$. Współrzędne jednorodne $(X, Y, Z, 0)$ nie odpowiadają żadnemu punktowi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$; mówimy, że takie współrzędne reprezentują *punkt w nieskończoności* o kierunku $[X, Y, Z]$.
Zbiór wszystkich współrzędnych jednorodnych (X, Y, Z, W) jest nazywany *(trójwymiarową) przestrzenią rzutową* i oznaczany przez $\mathbb{P}^3$.

Obserwacja.
Czwórki współrzędnych na ogół reprezentują punkty w przestrzeni czterowymiarowej, tutaj natomiast używamy ich do reprezentowania punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Jeżeli weźmiemy wszystkie czwórki reprezentujące ten sam punkt, tzn. czwórki postaci (tX, tY, tZ, tW)*, dla* $t \neq 0$*, to otrzymamy linię w przestrzeni czterowymiarowej* $XYZW$*. Tak więc każdy punkt jednorodny reprezentuje linię w przestrzeni czterowymiarowej. Jeśli współrzędne punktu* (X, Y, Z, W) *podzielimy przez* W *(przy założeniu* $W \neq 0$*), to punkt ten będzie miał wspołrzędne* $(X/W, Y/W, Z/W, 1) = (x, y, z, 1)$*. Czyli punkt ten odpowiada punktowi* (x, y, z) *z przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*. Wobec tego możemy traktować punkty* (x, y, z) *z przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *jako elementy przestrzeni czterowymiarowej* $\mathbb{R}^4$ *(*$XYZW$*) leżące w podprzestrzeni* $W = 1$*, a więc o czterech współrzędnych* $(x, y, z, 1)$*.*

Przykład 4.1. Współrzędne jednorodne $(2, 3, -4, 5)$, $(-4, -6, 8, -10)$ i $(6, 9, -12, 15)$ reprezentują ten sam punkt o współrzędnych kartezjańskich $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Istotnie,

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right) = \frac{1}{5}(2, 3, -4, 5) = -\frac{1}{10}(-4, -6, 8, -10) = \frac{1}{15}(6, 9, -12, 15)\ .$$

Podobnie jak transformacje 2D mogą być reprezentowane za pomocą macierzy 3×3, transformacje 3D mogą być reprezentowane za pomocą macierzy 4×4. Stosując współrzędne jednorodne, dowolne przekształcenie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ daje się opisać jako mnożenie przez macierz o wymiarach 4×4. Wtedy

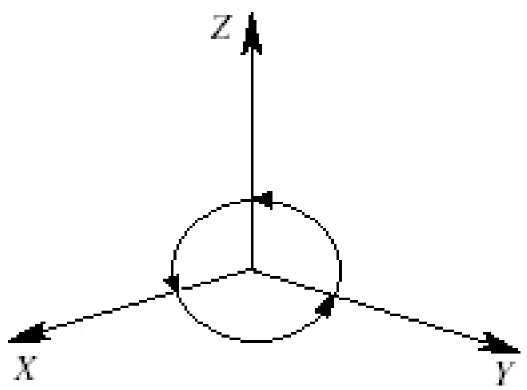
$$L(x,y,z) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zatem

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 , \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 , \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 . \end{aligned}$$

Będziemy korzystać z *prawoskrętnego układu współrzędnych*. Za dodatni obrót w układzie prawoskrętnym uważa się taki, dla którego patrząc z dodatniego kierunku osi w kierunku początku układu współrzędnych obrót o 90° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara przekształci jedną dodatnią półoś w drugą. Mamy więc

Oś obrotu	Kierunek dodatniego obrotu
OX	OY na OZ
OY	OZ na OX
OZ	OX na OY



RYSUNEK 6. Prawoskrętny układ wspołrzędnych.

W układzie *lewoskrętnym* dodatnie obroty są w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, patrząc od strony dodatniej osi w kierunku początku układu współrzędnych. Aby przejść od jednego układu wspołrzędnych do drugiego (zmienić układ współrzędnych), wykonuje się przekształcenie, które zmienia reprezentację punktu w jednym układzie współrzędnych na reprezentację w drugim układzie współrzędnych.

4.1. **Przesunięcie.** Podobnie jak na płaszczyźnie, punkty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ możemy przesunąć na nową pozycję dodając do współrzędnych punktów wielkość przesunięcia w kierunku każdej z trzech osi.
Przesunięcie odwzorowuje punkt $P(x, y, z)$ na punkt $P'(x', y', z')$ taki, że

$$x' = x + tx \ , \qquad y' = y + ty \ , \qquad z' = z + tz \ ,$$

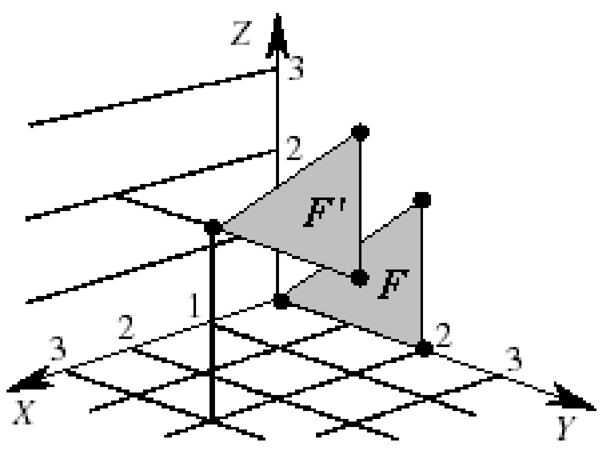
gdzie tx, ty, tz są pewnymi stałymi liczbami rzeczywistymi. Mówimy również, że punkt P został przesunięty o wektor $[tx, ty, tz]$.
Przechodząc do współrzędnych jednorodnych możemy zapisać macierz przesunięcia $T(tx, ty, tz)$

$$T(tx, ty, tz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Przesunięcie jak i odpowiadającą mu macierz będziemy oznaczać tym samym symbolem.
Punkt P o współrzędnych jednorodnych $(x, y, z, 1)$ jest przesuwany do punktu $P' = T(tx, ty, tz) \cdot P$, zatem

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + tx \\ y + ty \\ z + tz \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Czyli obrazem punktu $P(x, y, z)$ jest punkt $P'(x + tx, y + ty, z + tz)$.



RYSUNEK 7. Przesunięcie o wektor $[3, 2, 2]$. $F' = T(3, 2, 2)(F)$.

4.2. **Skalowanie.** Powiększanie lub zmniejszanie obiektu trójwymiarowego odbywa się przez skalowanie wzdłuż każdej osi układu współrzędnych. Oznaczmy współczynniki skalowania (skale) w kierunku osi OX, OY i OZ odpowiednio przez s_x, s_y, s_z (wszystkie $\neq 0$).

4.2.1. *Skalowanie względem początku układu współrzędnych.* Skalowanie względem początku układu współrzędnych $S(s_x, s_y, s_z)$ jest transformacją odwzorowującą punkt $P(x, y, z)$ na punkt $P'(x', y', z')$ przez pomnożenie współrzędnych x, y z przez współczynniki skalowania, odpowiednio s_x, s_y i s_z, tj.

$$x' = s_x x \ , \qquad y' = s_y y \ , \qquad z' = s_z z \ .$$

We współrzędnych jednorodnych macierz skalowania $S(s_x, s_y, s_z)$ jest postaci

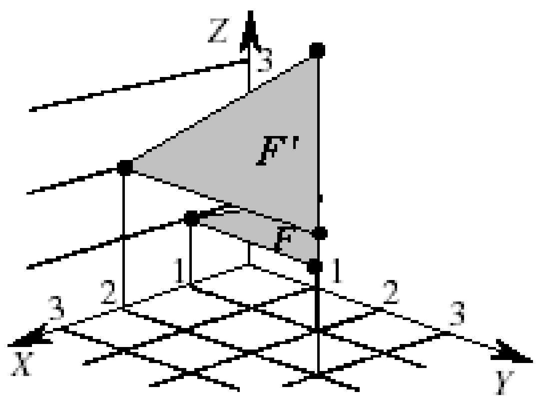
$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Istotnie, współrzędne obrazu P' punktu P możemy wyliczyć z zależności

$$P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P \ ,$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Zatem obrazem punktu (x, y, z) jest punkt $(s_x x, s_y y, s_z z)$.



Rysunek 8. Skalowanie względem początku układu współrzędnych o skalach 2, 3/2, 2. $F' = S(2, 3/2, 2)(F)$.

Skalowanie względem początku układu współrzędnych można również przedstawić jako mnożenie przez macierz

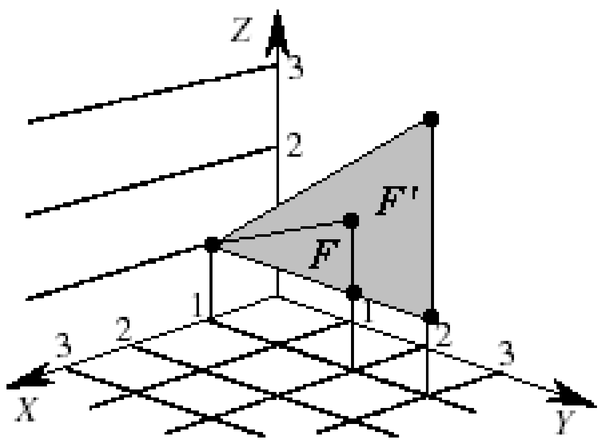
$$S(s_x, s_y, s_z; s_w) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_w \end{bmatrix} ,$$

dla $s_w \neq 0$. Przekształcenie $S(s_x, s_y, s_z; s_w)$ reprezentuje skalowanie względem początku układu współrzędnych o współczynnikach skalowania s_x/s_w w kierunku osi OX, s_y/s_w w kierunku osi OY i s_z/s_w wkierunku osi OZ.

4.2.2. *Skalowanie względem dowolnego punktu.* Skalowanie względem punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ o skalach s_x, s_y, s_z otrzymujemy przez wykonanie kolejno: przesunięcia $T(-x_0, -y_0, -z_0)$, następnie skalowania względem początku układu współrzędnych $S(s_x, s_y, s_z)$ i przesunięcia $T(x_0, y_0, z_0)$. Zatem współrzędne obrazu $P'(x', y', z')$ punktu $P(x, y, z)$ określone są następująco

$$x' = s_x(x - x_0) + x_0\ , \quad y' = s_y(y - y_0) + y_0\ , \quad z' = s_z(z - z_0) + z_0,$$

gdzie (x_0, y_0, z_0) oznaczają współrzędne punktu P_0 względem którego odbywa się skalowanie (tzw. punkt stały). (Często przy skalowaniu wielościanu za punkt stały przyjmujemy jeden z jego wierzchołków). Możemy zapisać



RYSUNEK 9. Skalowanie względem punktu $(1, 0, 1)$ o skalach 2, 3/2, 2. $F' = S_{(1,0,1)}(2, 3/2, 2)(F)$.

$$P' = S_{(x_0,y_0,z_0)}(s_x, s_y, s_z)\cdot P = (T(x_0, y_0, z_0) \circ S(s_x, s_y, s_z) \circ T(-x_0, -y_0, -z_0))\cdot P.$$

Przekształcenie $S_{(x_0,y_0,z_0)}(s_x, s_y, s_z)$ reprezentuje skalowanie względem punktu P_0. Wprowadzając współrzędne jednorodne, macierz skalowania względem punktu (x_0, y_0, z_0) jest postaci

$$\begin{aligned}
S_{(x_0,y_0,z_0)}(s_x, s_y, s_z) &= T(x_0, y_0, z_0)S(s_x, s_y, s_z)T(-x_0, -y_0, -y_0)\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & x_0(1 - s_x) \\ 0 & s_y & 0 & y_0(1 - s_y) \\ 0 & 0 & s_z & z_0(1 - s_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.3. **Obroty.** W przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ obroty wykonuje się wokół prostej nazywanej *osią obrotu.* Przedstawiając macierze obrotów będziemy posługiwać się współrzędnymi jednorodnymi.

4.3.1. *Obroty wokół osi układu współrzędnych.* Obroty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wokół osi układu współrzędnych opisuje się podobnie jak obroty na płaszczyźnie wokół początku układu współrzędnych.

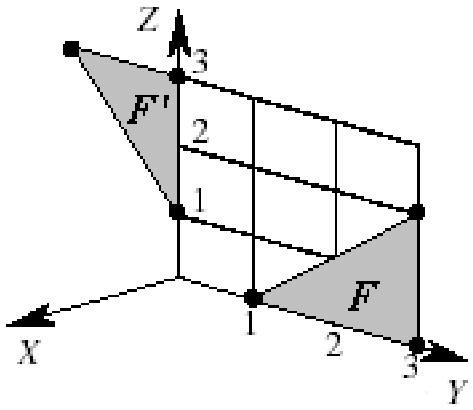
1. Obrót wokół osi OX. Obrót ten nie zmienia wartości współrzędnej x. Obrazem punktu $P(x, y, z)$ przy obrocie o kąt φ jest punkt $P'(x', y', z')$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\varphi - z\sin\varphi \\ z' = y\sin\varphi + z\cos\varphi \ . \end{cases}$$

Macierz obrotu ma postać

$$R_X(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i $P' = R_X(\varphi) \cdot P$.



RYSUNEK 10. Obrót wokół osi OX o kąt 90°. $F' = R_X(\pi/2)(F)$.

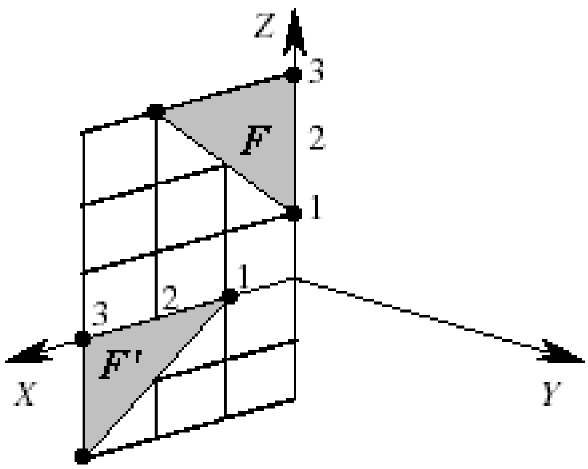
2. Obrót wokół osi OY. Obrót ten nie zmienia wartości współrzędnej y. Obrazem punktu $P(x, y, z)$ przy obrocie o kąt φ jest punkt $P'(x', y', z')$

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + z\sin\varphi \\ y' = y \\ z' = -x\sin\varphi + z\cos\varphi \ . \end{cases}$$

Macierz obrotu ma postać

$$R_Y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Wobec tego, $P' = R_Y(\varphi) \cdot P$.



Rysunek 11. Obrót wokół osi OY o kąt $90°$. $F' = R_Y(\pi/2)(F)$.

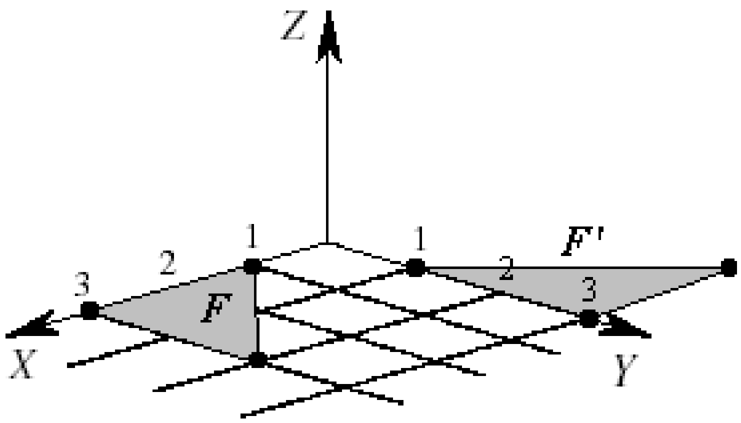
3. Obrót wokół osi OZ. Obrót ten nie zmienia wartości współrzędnej z. Obrazem punktu $P(x, y, z)$ przy obrocie o kąt φ jest punkt $P'(x', y', z')$

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \ . \end{cases}$$

Macierz obrotu ma postać

$$R_Z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Czyli $P' = R_Z(\varphi) \cdot P$.



Rysunek 12. Obrót wokół osi OZ o kąt $90°$. $F' = R_Z(\pi/2)(F)$.

4.3.2. *Obroty wokół osi równoleglych do osi układu współrzędnych.* Obroty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wokół osi równoległych do osi układu współrzędnych opisuje się podobnie jak obroty na płaszczyźnie wokół pewnego punktu. Jeśli oś obrotu l przechodzi przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i jest równoległa do jednej z osi układu współrzędnych, to aby wykonać obrót wokół prostej l o kąt φ należy wykonanać kolejno następujące transformacje:

- Takie przesunięcie, aby prosta l pokryła się z tą osią układu współrzędnych, do której jest równoległa, $T(-x_0, -y_0, -z_0)$.
- Obrót o kąt φ wokół tej osi układu współrzędnych, na którą została przesunięta prosta l.
- Takie przesunięcie, aby prosta l znalazła się w pozycji początkowej, $T(x_0, y_0, z_0)$.

1. Obrót wokół osi równoległej do osi OX. Obrót ten nie zmienia wartości współrzędnej x. Obrazem punktu $P(x, y, z)$ przy obrocie o kąt φ jest punkt $P(x', y', z')$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = (y - y_0)\cos\varphi - (z - z_0)\sin\varphi + y_0 \\ z' = (y - y_0)\sin\varphi + (z - z_0)\cos\varphi + z_0 \end{cases}$$

gdzie $(0, y_0, z_0)$ oznaczają współrzędne punktu przecięcia osi obrotu z płaszczyzną YZ.

Macierz tego przekształcenia jest postaci

$$
\begin{aligned}
R_{X(x_0,y_0,z_0)}(\varphi) &= T(x_0,y_0,z_0)R_X(\varphi)T(-x_0,-y_0,-y_0) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & (-y_0\cos\varphi + z_0\sin\varphi + y_0) \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & (-y_0\sin\varphi - z_0\cos\varphi + z_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Możemy zatem zapisać $P' = R_{X(x_0,y_0,z_0)}(\varphi) \cdot P$.

2. Obrót wokół osi równoległej do osi OY. Obrót ten nie zmienia wartości współrzędnej y. Obrazem punktu $P(x,y,z)$ przy obrocie o kąt φ jest punkt $P(x',y',z')$

$$
\begin{cases} x' = (x-x_0)\cos\varphi + (z-z_0)\sin\varphi + x_0 \\ y' = y \\ z' = -(x-x_0)\sin\varphi + (z-z_0)\cos\varphi + z_0 \end{cases}
$$

Punkt o współrzędnych $(x_0,0,z_0)$ jest punktem przecięcia osi obrotu z płaszczyzną XZ.
Macierz tego przekształcenia jest postaci

$$
\begin{aligned}
R_{Y(x_0,y_0,z_0)}(\varphi) &= T(x_0,y_0,z_0)R_Y(\varphi)T(-x_0,-y_0,-y_0) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & (-x_0\cos\varphi - z_0\sin\varphi + x_0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & (x_0\sin\varphi - z_0\cos\varphi + z_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Możemy zatem zapisać $P' = R_{Y(x_0,y_0,z_0)}(\varphi) \cdot P$.

3. Obrót wokół osi równoległej do osi OZ. Przy tym obrocie nie ulega zmianie wartość współrzędnej z. Obrazem punktu $P(x,y,z)$ przy obrocie o kąt φ jest punkt $P'(x',y',z')$

$$
\begin{cases} x' = (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi + x_0 \\ y' = (x-x_0)\sin\varphi + (y-y_0)\cos\varphi + y_0 \\ z' = z \end{cases}
$$

Punkt o współrzędnych $(x_0,y_0,0)$ jest miejscem przecięcia osi obrotu z płaszczyzną XY.

Macierz tego przekształcenia jest postaci

$$\begin{aligned}
R_{Z(x_0,y_0,z_0)}(\varphi) &= T(x_0,y_0,z_0)R_Z(\varphi)T(-x_0,-y_0,-y_0) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & (-x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi + x_0) \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & (-x_0\sin\varphi - y_0\cos\varphi + y_0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Mamy zatem $P' = R_{Z(x_0,y_0,z_0)}(\varphi) \cdot P$.

4.3.3. *Obrót wokół dowolnej osi.* Obrót wokół dowolnej osi można otrzymać jako złożenie odpowiednich translacji i obrotów wokół osi układu współrzędnych. Najpierw należy wykonać takie przekształcenia, aby oś obrotu pokryła się z jedną z osi układu współrzędnych, następnie wykonać obrót o dany kąt, po czym wykonać transformacje przeprowadzające oś obrotu do pozycji początkowej.

Ćwiczenie 4.2. Znaleźć macierz przekształcenia 4×4 (skorzystać, ze współrzędnych jednorodnych) dla obrotu o kąt φ wokół prostej l przechodzącej przez dwa różne punkty $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i $P_1(x_1,y_1,z_1)$.

Przypomnienie.
Przy łączeniu transformacji należy pamiętać o tym, że składanie przekształceń na ogół nie jest łączne. Kolejność wykonywania obrotów jest istotna. Na przykład, dokonanie najpierw obrotu wokół osi równoległej do osi OX, a potem wokół osi równoległej do osi OY prowadzi do otrzymania innego obrazu niż wykonanie tych obrotów w odwrotnej kolejności.

Bibliografia

[1] Foley J. D., Van Dam A. *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*,
[2] Jankowski M. *Elementy grafiki komputerowej*,
[3] Marsh D. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*,
[4] Vince J. *Geometry for Computer Graphics.*