Przekształcenia geometryczne

Mirosław Głowacki

Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

Akademia Górniczo Hutnicza w Krakowie

Przekształcenia elementarne w przestrzeni 2D

Punkty p w E^2 na płaszczyźnie w postaci *2-krotek* (x_1, x_2) podlegają szeregowy przekształceń elementarnych. Są to:

- translacja (przesunięcie),
- zmiana skali osi,
- rotacja (obrót).

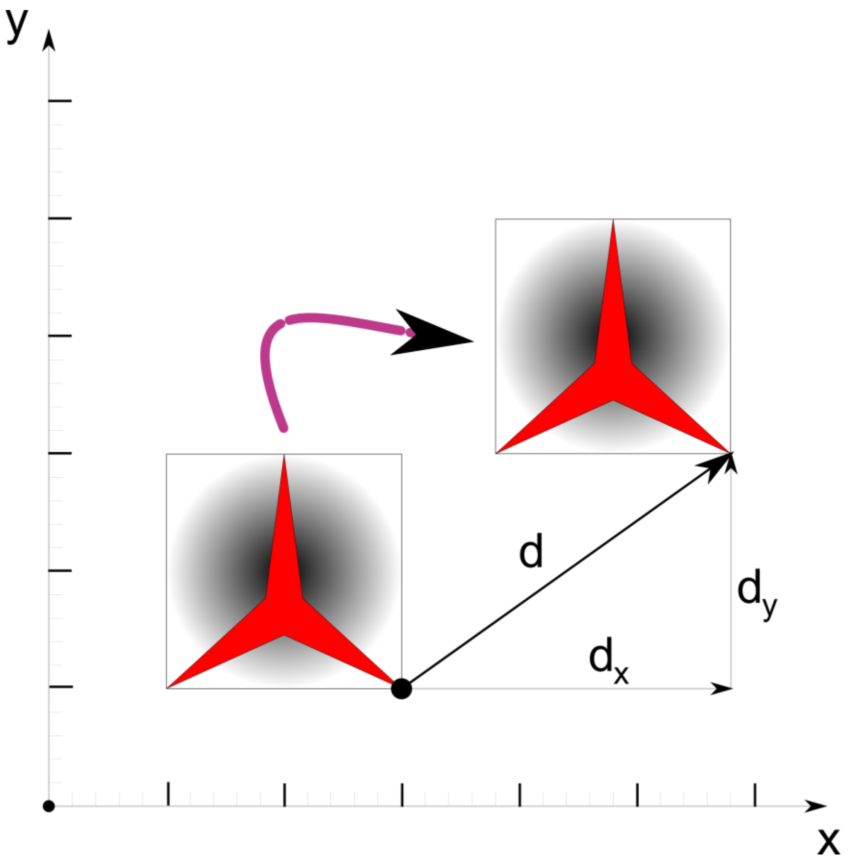
Nie będziemy podawać formalnych definicji opisywanych pojęć – chodzi jedynie o przypomnienie najważniejszych faktów i przedstawienie stosowanego dalej zapisu.

Translacja

Punkty na płaszczyźnie (x, y) można przesunąć na nową pozycję *dodając do współrzędnych* punktów wielkość przesunięcia.

Dla każdego punktu $P(x, y)$, który ma być przesunięty do nowego punktu $P'(x', y')$ o d_x jednostek wzdłuż osi x i o d_y jednostek wzdłuż osi y, można napisać:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + d_x \\
y' &= y + d_y
\end{aligned}
\tag{1}
$$



Translacja

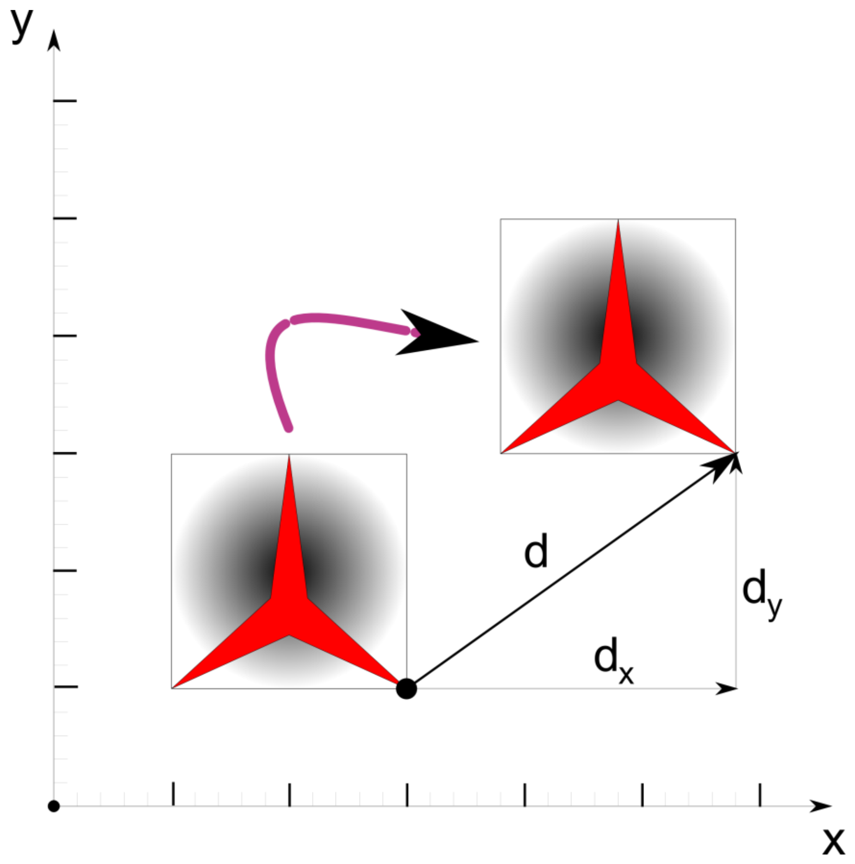
Jeżeli zdefiniujemy wektory kolumnowe

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

to równanie (1) może być wyrażone w bardziej zwarty sposób jako

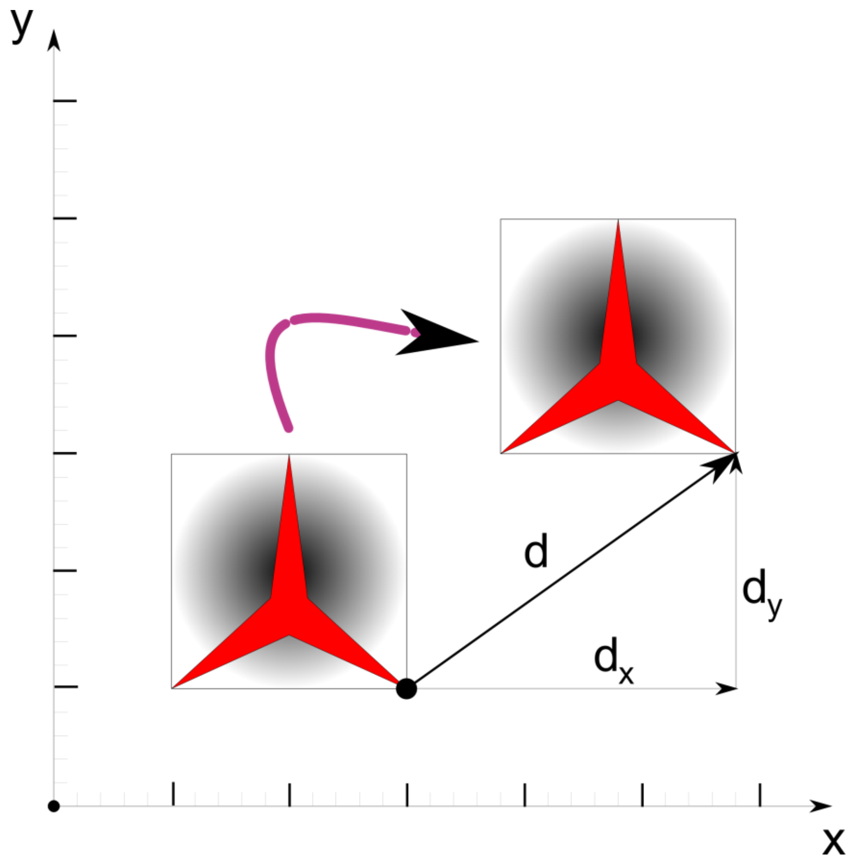
$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d} \tag{3}$$

Obiekt powinniśmy przesuwać stosując równanie (3) do *każdego punktu obiektu*. Ponieważ jednak każdy odcinek obiektu składa się z nieskończonej liczby punktów, taki proces trwałby nieskończenie długo.



Translacja

Na szczęście możemy przesunąć wszystkie punkty odcinka przesuwając tylko jego końce i rysując nowy odcinek między przesuniętymi końcami – odnosi się to także do skalowania (rozciągania) i obrotów.



Zmiana skali

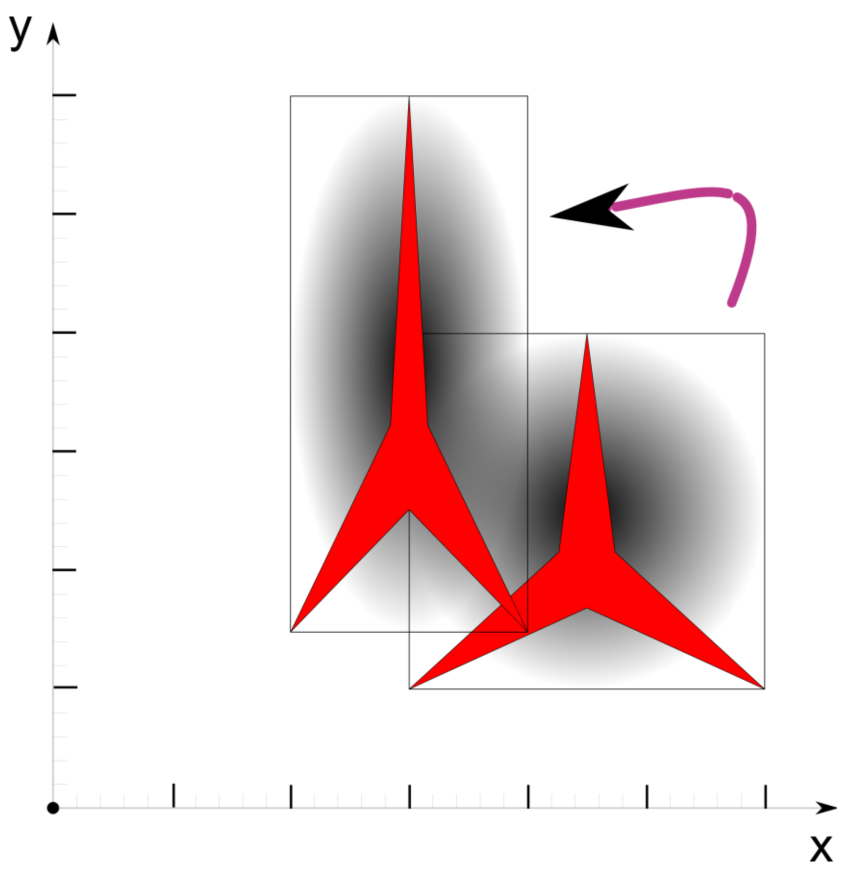
Punkty mogą być skalowane ze współczynnikiem s_x wzdłuż osi x i s_y wzdłuż osi y przez mnożenie

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot s_x \\ y' &= y \cdot s_y \end{aligned} \tag{4}$$

W postaci macierzowej można to zapisać następująco:

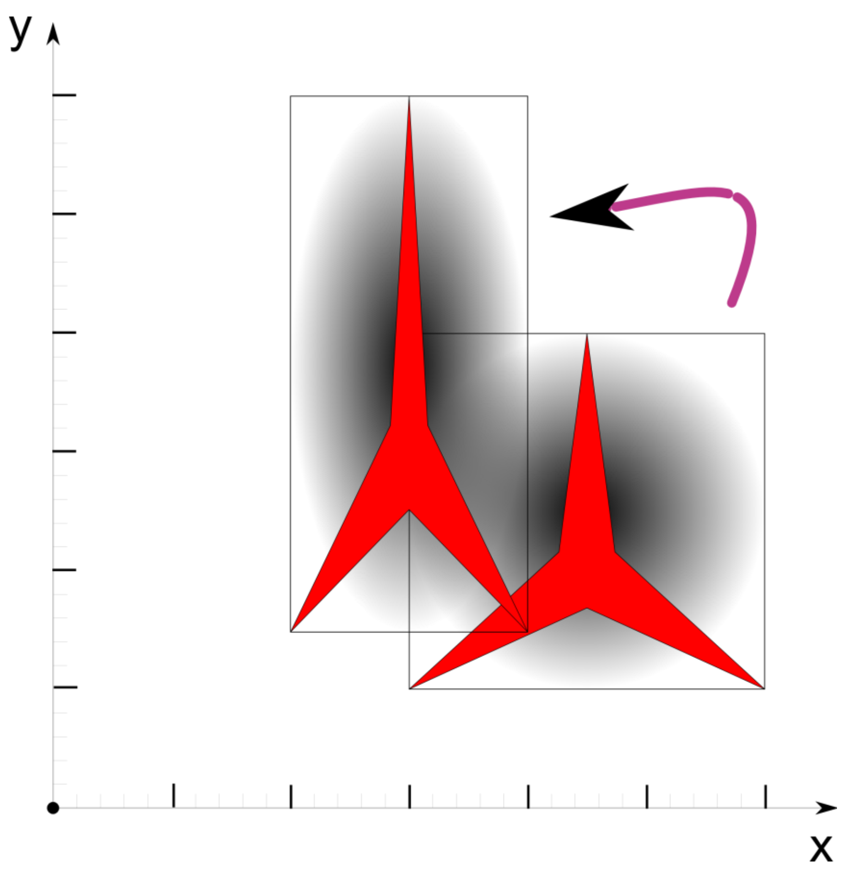
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{p} \tag{5}$$

przy czym $\boldsymbol{S}$ w równaniu (5) jest macierzą skalowania. Na rysunku obiekt jest skalowany ze współczynnikiem $2/3$ w kierunku osi x i ze współczynnikiem $5/3$ w kierunku osi y.



Zmiana skali

- Zauważmy, że *skalowanie odbywa się względem początku układu współrzędnych* – obiekt zmniejsza (zwiększa) się i jest bliżej (dalej) początku układu współrzędnych w zależności od skali.
- Gdy współczynnik skalowania jest większy niż 1, wówczas następuje powiększenie i obiekt oddala się od początku układu współrzędnych.
- Gdy współczynnik skalowania jest mniejszy niż 1, wówczas następuje pomniejszenie i obiekt zbliża się do początku układu współrzędnych.
- Proporcje obiektu również zmieniły się, ponieważ dokonaliśmy skalowania *niejednorodnego*, dla którego $s_x \neq s_y$. Przy skalowaniu *jednorodnym*, dla którego $s_x = s_y$, proporcje nie ulegają zmianie.



Rotacja

Punkty mogą być obracane o kąt θ wokół początku układu współrzędnych. Matematycznie obrót jest zdefiniowany następująco:

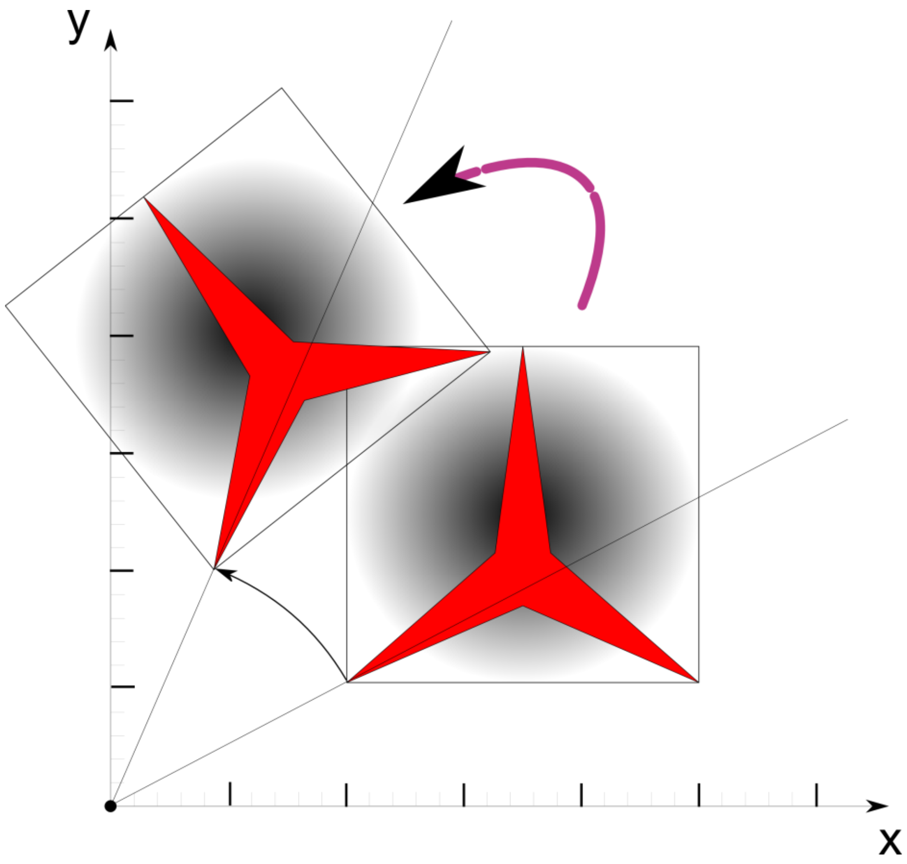
$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

W postaci macierzowej można to zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{p} \quad (7)$$

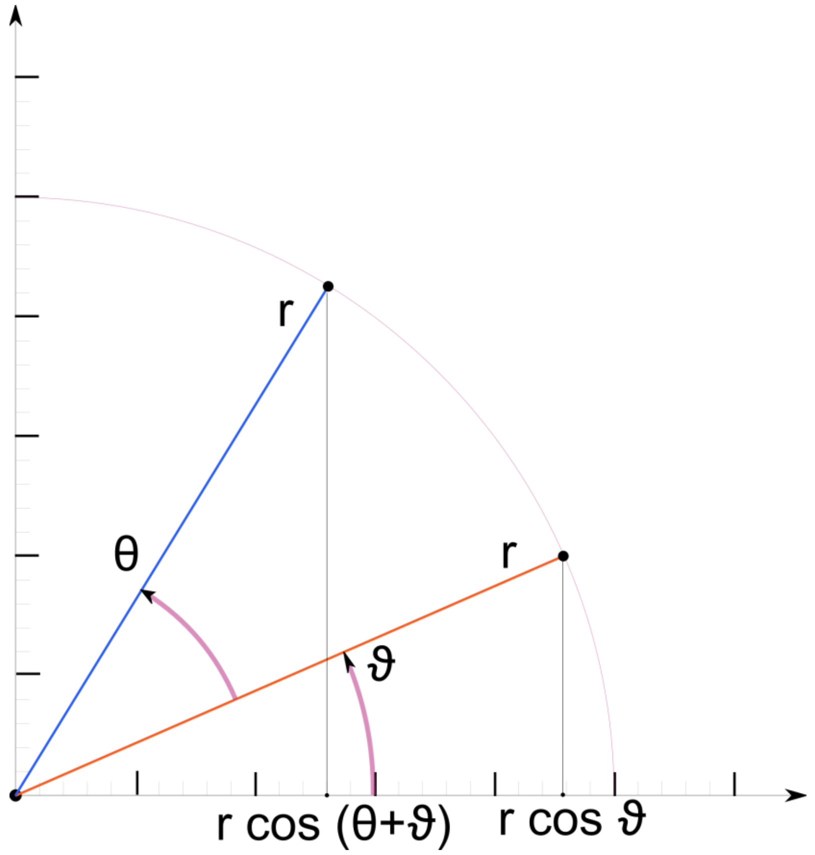
przy czym $\boldsymbol{R}$ w równaniu (7) jest macierzą obrotu. Podobnie jak dla skalowania obrót następuje *względem początku układu współrzędnych*.



Rotacja

Kąty dodatnie są mierzone w kierunku przeciwnym względem kierunku ruchu wskazówek zegara od x do y. Dla kątów ujemnych (zgodnych z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) można skorzystać z tożsamości $\cos(-\theta) = \cos\theta$ oraz $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Równania (6) można łatwo wyprowadzić, korzystając z rysunku, na którym obrót o x przekształca punkt $\boldsymbol{p}(x, y)$ w punkt $\boldsymbol{p}'(x', y')$.



Rotacja

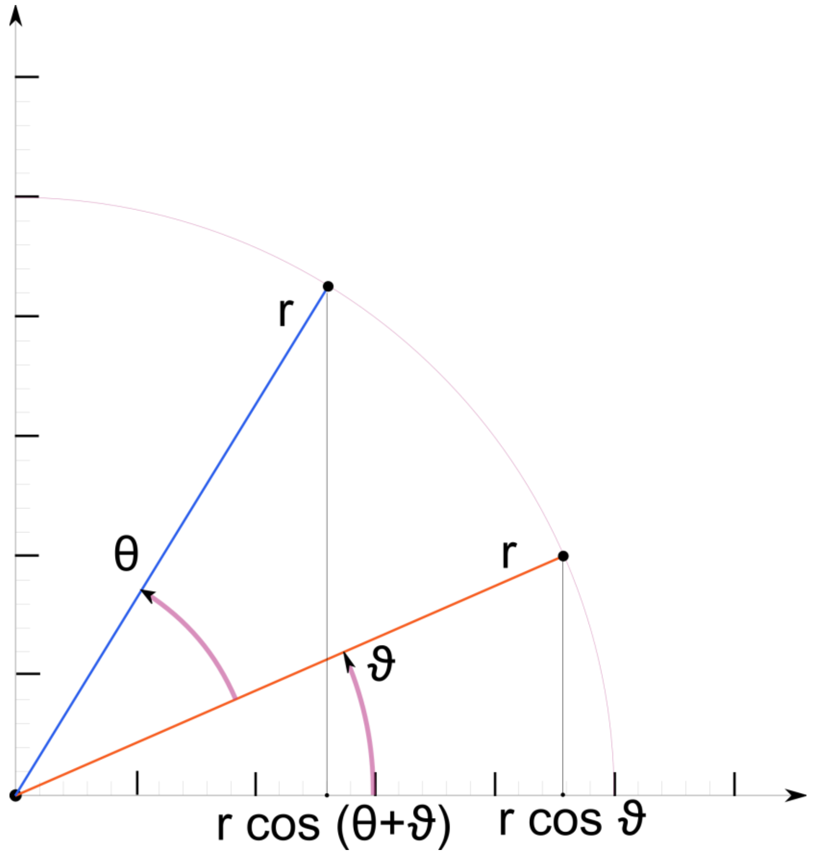
Ponieważ obrót następuje wokół początku układu współrzędnych, *odległości od początku układu* współrzędnych do $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{p}'$ *są sobie równe* i są oznaczone na rysunku przez r. Korzystając z prostych przekształceń trygonometrycznych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta \end{aligned} \tag{8}$$

oraz

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta+\vartheta) = r\cos\theta\cos\vartheta - r\sin\theta\sin\vartheta \\ y &= r\sin(\theta+\vartheta) = r\sin\theta\cos\vartheta + r\cos\theta\sin\vartheta \end{aligned} \tag{9}$$

Po podstawieniu równań (8) do zależności (9) otrzymamy równania (6).



Macierzowa reprezentacja przekształceń – współrzędne jednorodne

Reprezentacje macierzowe przekształceń przesunięcia, skalowania i obrotu mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{10}$$

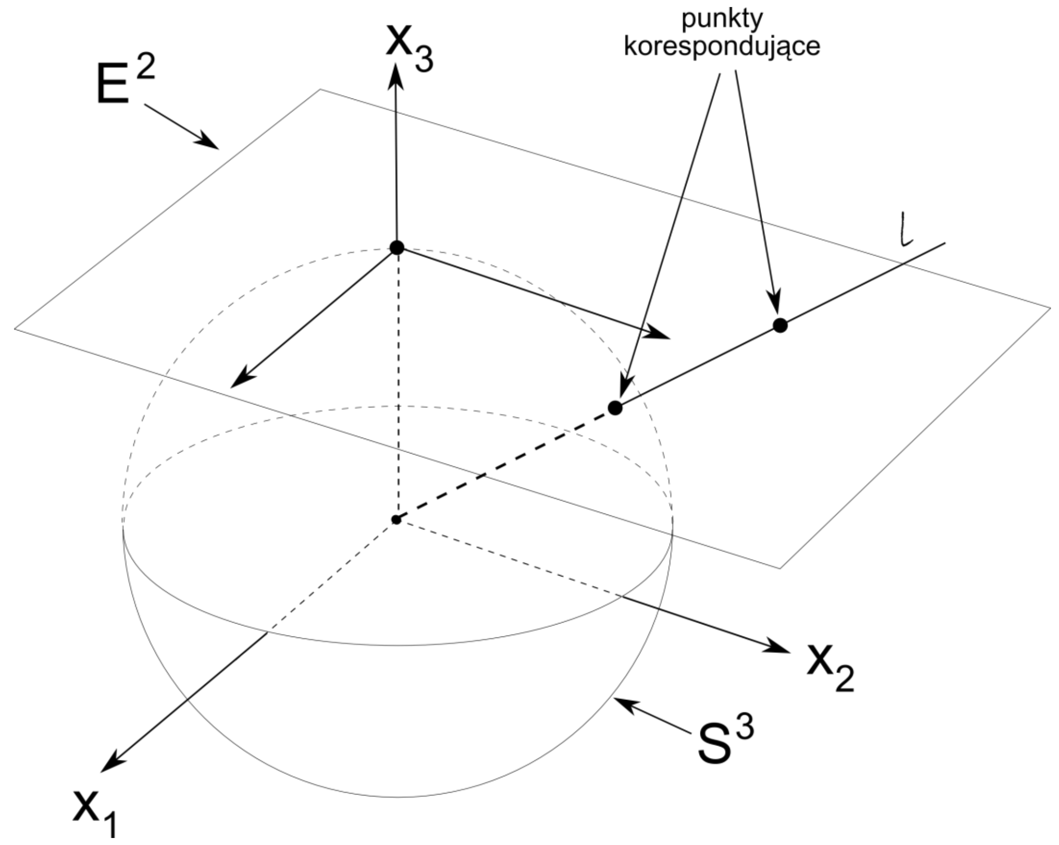
Niestety *przesunięcie jest traktowane inaczej* niż skalowanie i obrót. Chcielibyśmy móc traktować wszystkie trzy przekształcenia w jednolity sposób, tak żeby można je było łatwo łączyć ze sobą.

Jeżeli punkty są wyrażone we współrzędnych jednorodnych, to wszystkie trzy przekształcenia można traktować jako mnożenia.

Rzutowaniem ośrodkowe – współrzędne jednorodne

Wybierzmy punkt, w którym prosta $l = c\xi$ (ξ - wektor w przestrzeni d+1-wymiarowej) przebija sferę jednostkową S^{d+1} w przestrzeni euklidesowej E^{d+1} (zauważmy, że S^{d+1} jest rozmaitością d-wymiarową, czyli jej punkty można zidentyfikować za pomocą d parametrów – w interesujących nas przypadku $d = 2$).

Ograniczmy naszą uwagę do *kierunku wektora*, pomijając jego długość – dwa współliniowe wektory ξ i $c\xi (c \neq 0)$ są *uważane za równoważne*.

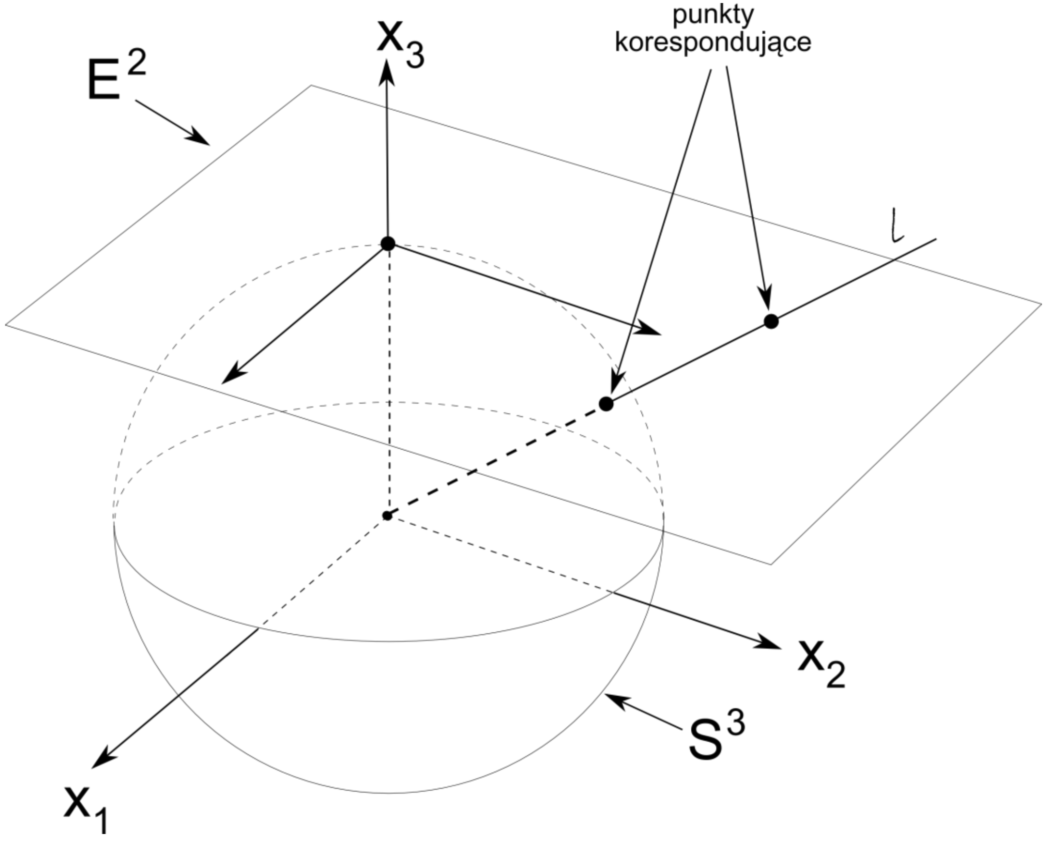


Rzutowaniem ośrodkowe – współrzędne jednorodne

Jeśli dobierzemy *taką wartość* c, dla której *ostatni składnik* $c\xi$ jest równy 1, to otrzymamy punkt, w którym prosta l przebija hiperpłaszczyznę $x_{d+1} = 1$ (rysunek pokazuje tę sytuację dla d = 2).

Taką wzajemną odpowiedniość nazywamy rzutowaniem ośrodkowym (*o środku w początku układu współrzędnych* E^{d+1}). Zauważmy, że hiperpłaszczyzna $x_{d+1} = 1$ sama jest przestrzenią E^d o współrzędnych $x_1, \dots, x_d$.

Tak więc zinterpretowaliśmy przyłożony do początku układu współrzędnych E^{d+1}wektor $(\xi_1, \dots, \xi_d, \xi_{d+1})$ przy czym $(\xi_{d+1} \neq 0)$ jako punkt $(x_1, \dots, x_d)$ przestrzeni E^d taki, że $x_j = \xi_j / \xi_{d+1}$.

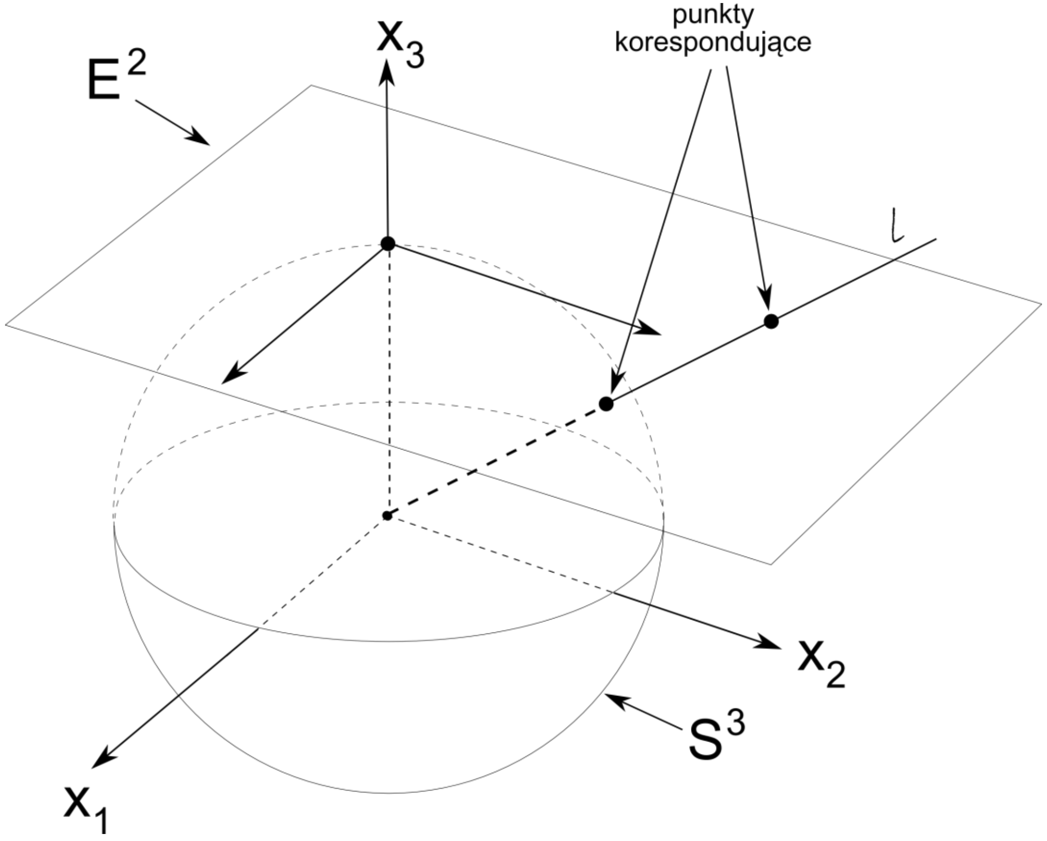


Rzutowaniem ośrodkowe – współrzędne jednorodne

Jeśli zapiszemy punkt za pomocą $(d+1)$ składowych wektora, otrzymamy klasyczny zapis punktu we współrzędnych jednorodnych, które *umożliwiają zapisanie punktów w nieskończoności* przy zgodzie na $\xi_{d+1} = 0$.

Liczne pakiety graficzne i procesory wyświetlania korzystają ze współrzędnych i przekształceń jednorodnych.

We współrzędnych jednorodnych rozważamy więc trzecią współrzędną. Dowolny punkt określony parą liczb (x, y) we współrzędnych jednorodnych jest dany przez trójkę (x, y, w).



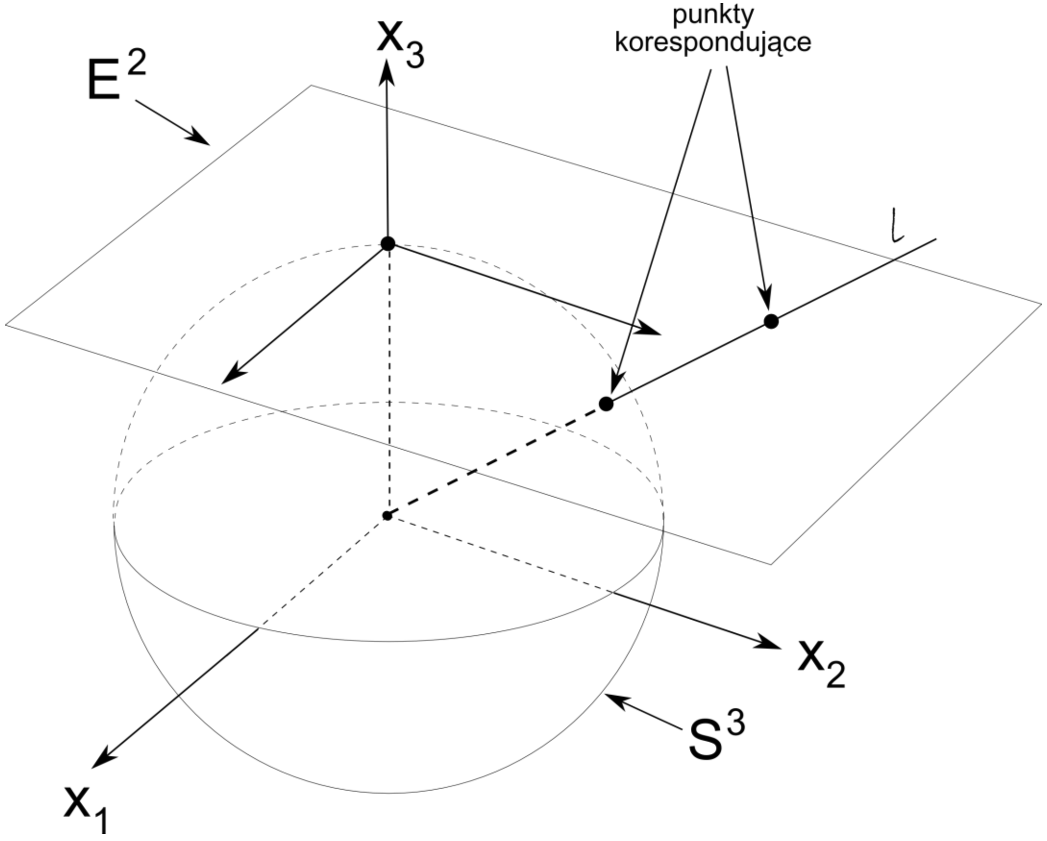
Rzutowaniem ośrodkowe – współrzędne jednorodne

Jeżeli współrzędna w jest różna od zera, to (x, y, w) reprezentuje we *współrzędnych jednorodnych* ten sam punkt co $(x/w, y/w, 1)$ położony na płaszczyźnie $x_3 = 1$. Wtedy liczby x/w i y/w są nazywane współrzędnymi kartezjańskimi punktu jednorodnego.

Tak więc jeżeli $w = 1$, to pierwsze dwie współrzędne są współrzędnymi kartezjańskimi

Trójki współrzędnych na ogół reprezentują punkty w przestrzeni trójwymiarowej, tutaj natomiast używamy ich do reprezentowania punktów w przestrzeni dwuwymiarowej.

Punkty jednorodne tworzą płaszczyznę zdefiniowaną równaniem $w = 1$ w przestrzeni (x, y, w).



Macierzowa reprezentacja przekształceń we współrzędnych jednorodnych

Ponieważ punkty są teraz *trzyelementowymi wektorami kolumnowymi*, macierz przekształcenia, przez którą się mnoży, musi być macierzą $3\ x\ 3$. Równania (1) przekształcenia typu przesunięcie przyjmują we współrzędnych jednorodnych postać:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

W niektórych podręcznikach z zakresu grafiki komputerowej jest stosowana *konwencja mnożenia wektorów wierszowych przez macierze* zamiast mnożenia macierzy przez wektory kolumnowe.

Przy przejściu od jednej konwencji do drugiej trzeba dokonać *transponowania macierzy*

$$\boldsymbol{pM} = \boldsymbol{M}^T \boldsymbol{p}^T \tag{12}$$

Równanie (11) można zapisać inaczej w postaci

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{T}(d_x, d_y)\ \boldsymbol{p} \tag{13}$$

przy czym

$$\boldsymbol{T}(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Złożenie dwóch translacji

Co się stanie, jeżeli punkt $\boldsymbol{p}$ jest przesuwany o $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{d_{x1}}, \boldsymbol{d_{y1}})$ do $\boldsymbol{p}'$, a potem o $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{d_{x2}}, \boldsymbol{d_{y2}})$ do $\boldsymbol{p}''$?

Wynik, którego się *spodziewamy intuicyjnie*, to łączne przesunięcie $\boldsymbol{T}(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$. Dla potwierdzenia tego przypuszczenia zaczynamy od danych początkowych:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{T}(d_{x1}, d_{y1})\,\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}'' &= \boldsymbol{T}(d_{x2}, d_{y2})\,\boldsymbol{p}' \end{aligned} \tag{15}$$

A po podstawieniach

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' &= \boldsymbol{T}(d_{x2}, d_{y2})\,\left(\boldsymbol{T}(d_{x1}, d_{y1})\,\boldsymbol{p}\right) = \\ &= \left[\boldsymbol{T}(d_{x2}, d_{y2})\boldsymbol{T}(d_{x1}, d_{y1})\,\right]\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{16}$$

Iloczyn $\boldsymbol{T}(d_{x2}, d_{y2})\boldsymbol{T}(d_{x1}, d_{y1})$ jest następujący

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Końcowe przesunięcie jest rzeczywiście równe $\boldsymbol{T}(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$.

Iloczyn macierzy jest czasami określany jako złożenie albo konkatenacja $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{d_{x1}}, \boldsymbol{d_{y1}})$ i $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{d_{x2}}, \boldsymbol{d_{y2}})$. Na ogół będziemy korzystali z określenia *złożenie*.

Złożenie dwóch skalowań

Podobnie równanie skalowania (3) w postaci macierzowej przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Definiując

$$\boldsymbol{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Otrzymujemy

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}(s_x, s_y)\, \boldsymbol{p} \tag{20}$$

Kolejne przesunięcia są *addytywne*, tutaj natomiast spodziewamy się, że kolejne skalowania powinny być multiplikatywne.

Jeżeli rozważymy dwie kolejne zmiany skali:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{S}(s_{x1}, s_{y1})\, \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}'' &= \boldsymbol{S}(s_{x2}, s_{y2})\, \boldsymbol{p}' \end{aligned} \tag{21}$$

to po podstawieniach

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' &= \boldsymbol{S}(s_{x2}, s_{y2})\, [\boldsymbol{S}(s_{x1}, s_{y1})\, \boldsymbol{p}] = \\ &= [\boldsymbol{S}(s_{x2}, s_{y2}) \boldsymbol{S}(s_{x1}, s_{y1})\,]\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{22}$$

Iloczyn macierzy $\boldsymbol{S}(s_{x2}, s_{y2})\boldsymbol{S}(s_{x1}, s_{y1})$ jest równy

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1}s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1}s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

A więc skalowanie jest rzeczywiście multiplikatywne.

Złożenie dwóch rotacji

Wreszcie równanie obrotu (6) może być reprezentowane jako równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Równanie:

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R}(\theta)\,\boldsymbol{p} \tag{25}$$

Otrzymamy otrzymujemy oznaczając

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Podobnie jak *translacje* dwa kolejne obroty są addytywne – $\boldsymbol{R}(\theta_1)\boldsymbol{R}(\theta_2) = \boldsymbol{R}(\theta_1 + \theta_2)$.

W górnej lewej podmacierzy 2 x 2 z równania (26) potraktujmy każdy z dwóch wierszy jako wektor. Można wykazać, że te wektory mają następujące *trzy właściwości*:

- Każdy jest wektorem jednostkowym.
- Każdy jest prostopadły do drugiego (ich iloczyn skalarny jest równy 0).
- Na to, żeby wektory pierwszy i drugi leżały odpowiednio na osiach x i y, muszą zostać obrócone o $R(\theta)$ (przy spełnieniu warunków 1 i 2 ta właściwość jest równoważna temu, że *podmacierz ma wyznacznik równy* 1).

Pierwsze dwie właściwości są *również prawdziwe dla kolumn* podmacierzy 2×2. Te dwa kierunki, o których mowa, to te, na które są obracane wektory osi dodatnich x i y.

Ortonormalne macierze przekształceń

Wymienione właściwości sugerują dwie użyteczne metody wyznaczania macierzy obrotu, gdy znamy *pożądany efekt obrotu*. Macierz o takich właściwościach jest określana jako ortonormalna.

Macierz przekształcenia o postaci

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

przy czym górna podmacierz 2×2 jest ortonormalna, zachowuje kąty i długości. Oznacza to, że:

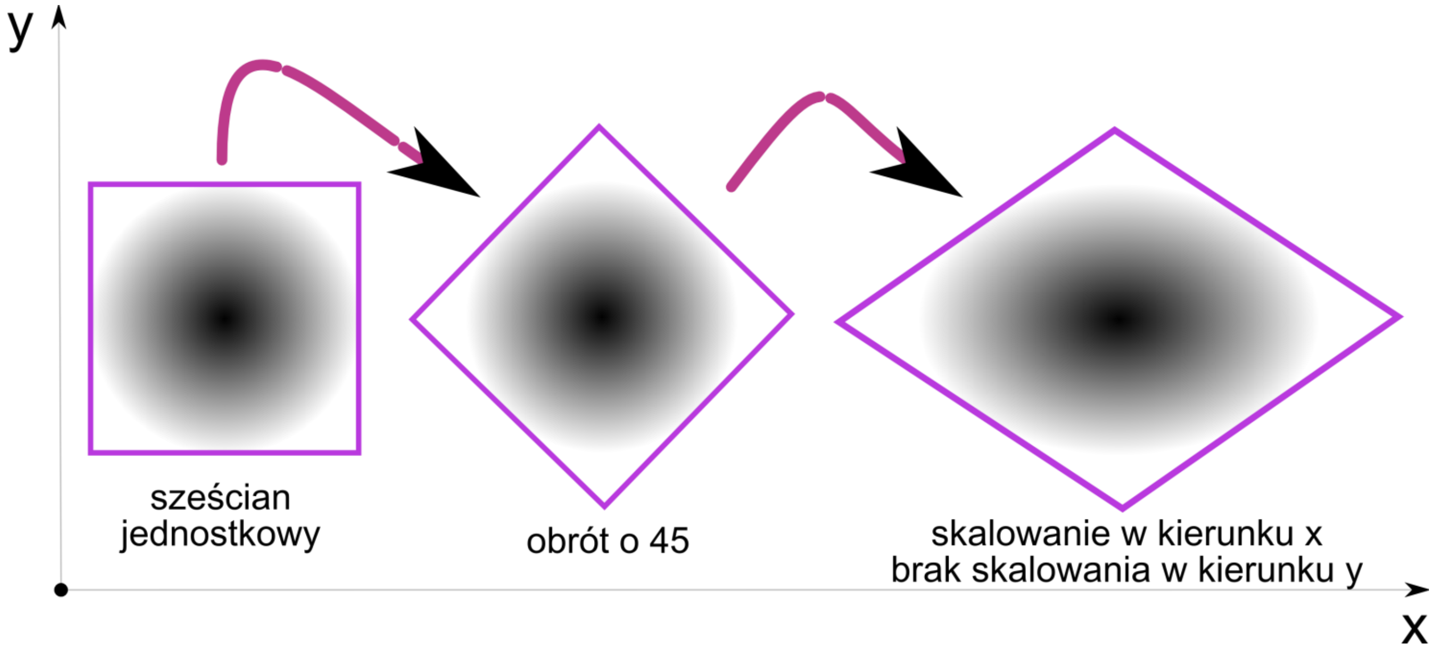
Kwadrat jednostkowy pozostaje kwadratem jednostkowym i nie staje się rombem o boku jednostkowym ani kwadratem o boku różnym od jednostki.

Takie przekształcenia są również określane jako przekształcenia ciała sztywnego, ponieważ ciało albo obiekt poddawane przekształceniu w żaden sposób nie jest odkształcane.

Ortonormalne złożenie translacji i rotacji

Dowolne złożenie macierzy obrotu i przesunięcia tworzy macierz ortonormalną.

Co można powiedzieć o iloczynie *dowolnej sekwencji macierzy obrotu, przesunięcia i skalowania*?

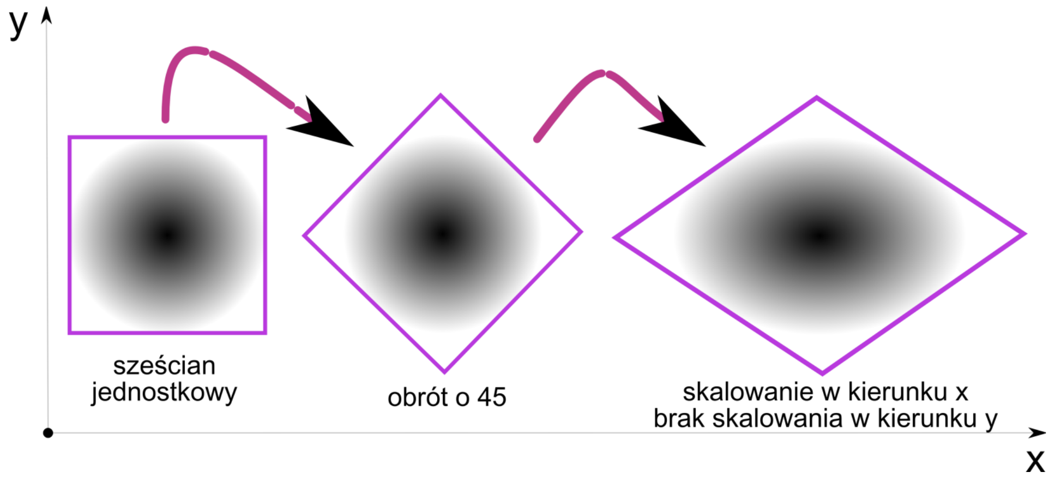


Dowolne złożenie macierzy obrotu, przesunięcia i skalowania

Są one określane jako przekształcenia afiniczne i mają właściwość zachowania *równoległości linii* – nie odnosi się to do długości i kątów.

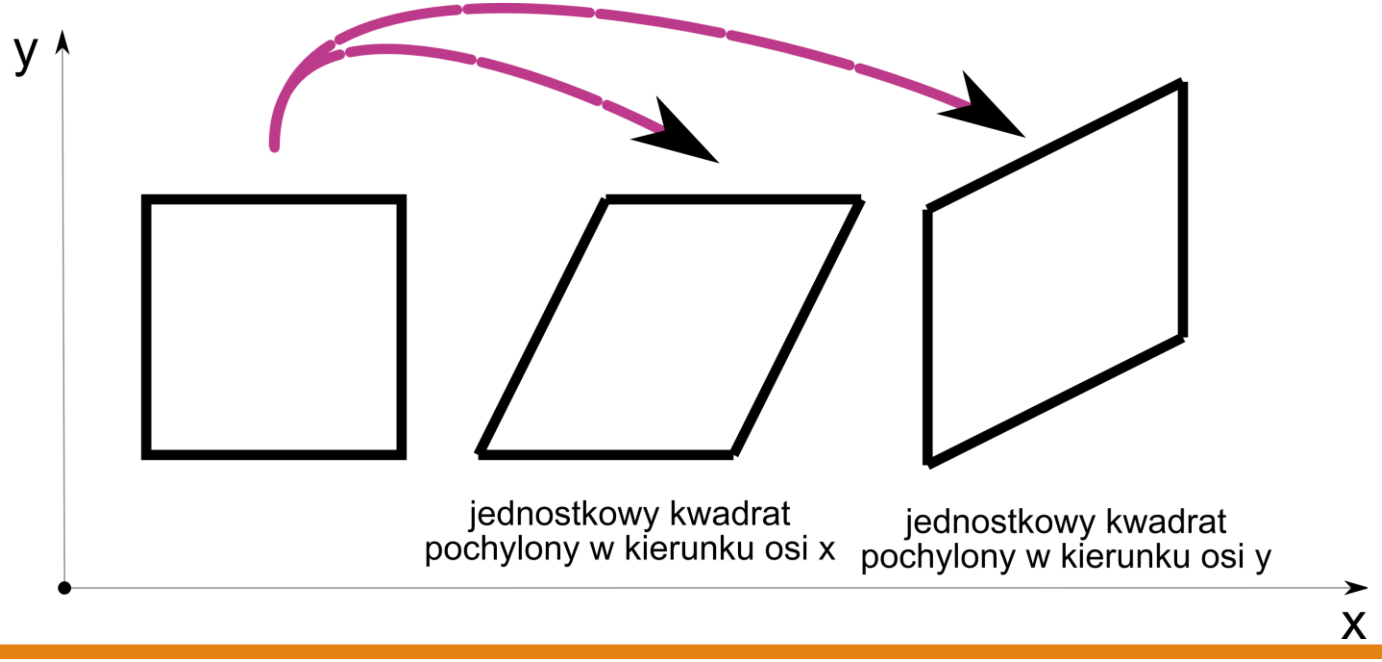
Na rysunku pokazano przykład obrotu jednostkowego kwadratu o 45°, a potem skalowania niejednorodnego. Widać, że *ani kąty, ani długości nie zostały zachowane* w wyniku tej sekwencji, natomiast odcinki równoległe pozostały równoległe. *Dalsze operacje obrotu, skalowania i przesuwania* nie spowodują tego, że odcinki równoległe przestaną być równoległe.

Przekształcenia $\boldsymbol{R(\theta)}$, $\boldsymbol{S(s_x, s_y)}$ i $\boldsymbol{T(d_x, d_y)}$ są również afiniczne.



Przekształcenia pochylające

Innym przekształceniem podstawowym jest przekształcenie pochylające. Jest to również przekształcenie afiniczne. Na płaszczyźnie są dwa rodzaje przekształceń pochylających: *pochylenie wzdłuż osi* x i *pochylenie wzdłuż osi y*.



Przekształcenia pochylające

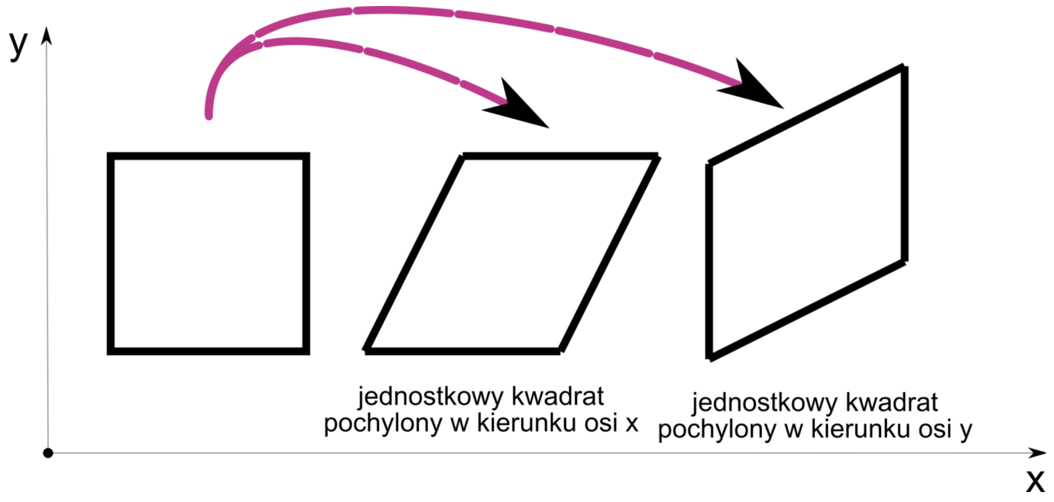
Na rysunku pokazano efekt pochylenia jednostkowego kwadratu wzdłuż obu osi. Operacja pochylania opisywana jest macierzą:

$$\boldsymbol{SH}_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Wyraz a w macierzy pochylania jest współczynnikiem proporcjonalności. Zauważmy, że iloczyn $\boldsymbol{SH}_x\ [x \ \ y \ \ 1]^T$ jest równy $[x \ \ ay \ \ 1]^T$, co demonstruje proporcjonalność zmiany x w funkcji y. Podobnie macierz

$$\boldsymbol{SH}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

pochyla wzdłuż osi y.



Przekształcenia złożone

Idea składania została już wprowadzona. Teraz zastosujemy składanie do łączenia podstawowych macierzy $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ i $\boldsymbol{T}$ w celu uzyskania pożądanego wyniku.

Podstawowym *celem składania przekształceń* jest zwiększenie efektywności – zamiast stosować ciąg przekształceń jedno po drugim, można stosować jedną macierz złożoną.

Rozważmy obrót obiektu wokół pewnego dowolnego punktu $\boldsymbol{p}_1$. Ponieważ *wiemy* tylko, jak wykonywać obrót *wokół początku układu* współrzędnych, zamieniamy nasz oryginalny (trudny) problem na trzy oddzielne (łatwe) problemy.

Rotacja wokół dowolnego punktu

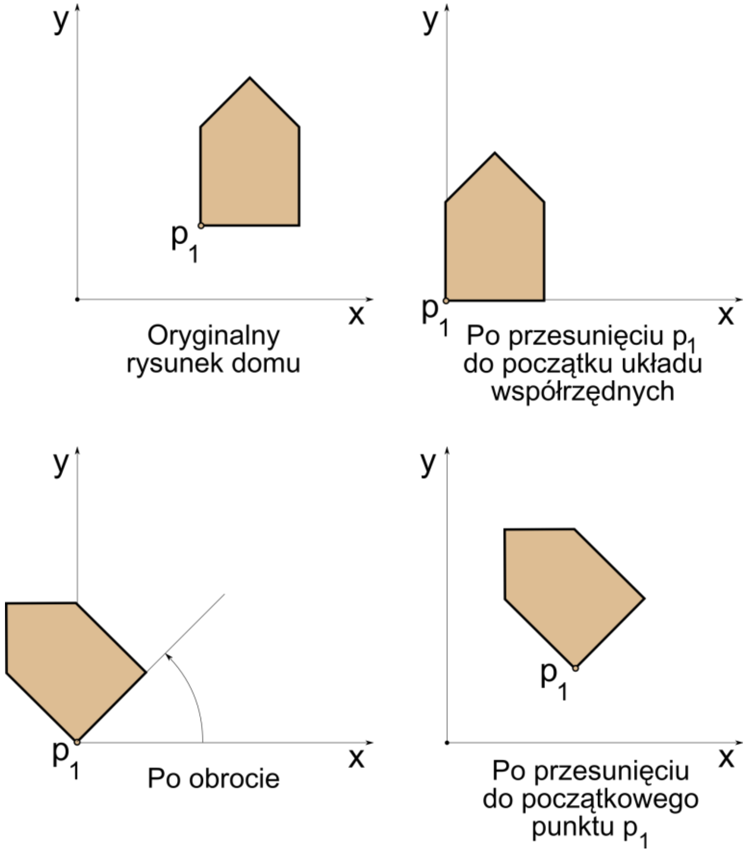
Dlatego, żeby obrócić punkt wokół $\boldsymbol{p}_1$ potrzeba sekwencji trzech przekształceń:

1. Takie przesunięcie, żeby punkt $\boldsymbol{p}_1$ znalazł się w początku układu współrzędnych.
2. Obrót.
3. Takie przesunięcie, żeby punkt znajdujący się w początku układu współrzędnych wrócił do $\boldsymbol{p}_1$.

Ta sekwencja jest zilustrowana na rysunku, na którym dom zostaje obrócony wokół $\boldsymbol{p}_1(x_1, y_1)$.

Pierwsze przesunięcie charakteryzuje się wektorem $(-x_1, -y_1)$, a drugie wektorem (x_1, y_1).

Wynik jest różny od tego, jaki powstałby w wyniku zastosowania tylko obrotu.



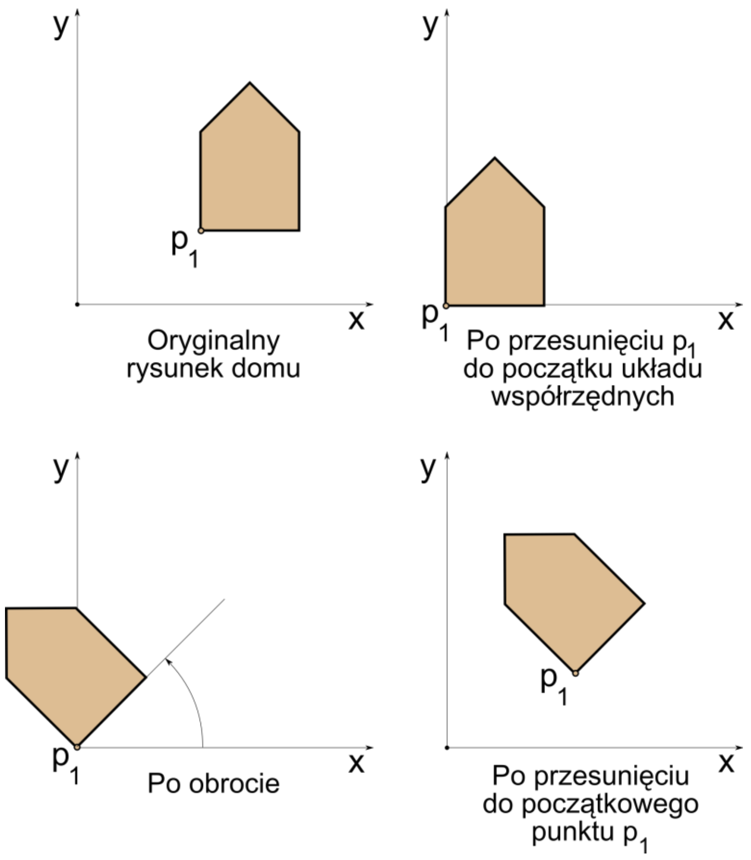
Rotacja wokół dowolnego punktu

Całe przekształcenie wygląda następująco:

$\boldsymbol{T}(x_1, y_1)\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{T}(-x_1, -y_1) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta) + y_1\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta) + x_1\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$



Skalowanie złożone

Podobne podejście jest wykorzystane przy **skalowaniu obiektu** wokół dowolnego punktu $\boldsymbol{p}_1$. Najpierw dokonujemy takiego przesunięcia, żeby punkt $\boldsymbol{p}_1$ *znalazł się w początku układu współrzędnych*, potem wykonujemy skalowanie i ponownie przesunięcie do $\boldsymbol{p}_1$.W tym przypadku całkowite przekształcenie ma postać

$$\boldsymbol{T}(x_1, y_1)\boldsymbol{S}(s_x, s_y)\boldsymbol{T}(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Składanie przekształceń elementarnych

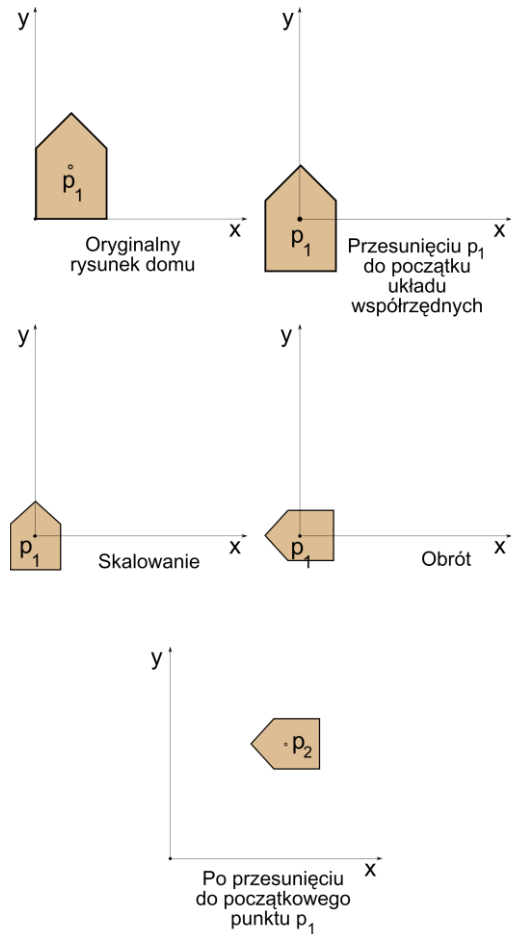
Załóżmy, że należy dokonać skalowania, obrotu i przesunięcia zarysu domu pokazanego na rysunku, z punktem $\boldsymbol{p}_1$ jako środkiem obrotu i skalowania.

Sekwencja działań jest następująca:

1. przesunięcie punktu $\boldsymbol{p}_1$, do początku układu współrzędnych,
2. skalowanie ,
3. obrót,
4. przesunięcie z początku układu współrzędnych do nowej pozycji $\boldsymbol{p}_2$.

Struktura danych, która pamięta to przekształcenie, mogłaby zawierać współczynnik(i) skalowania, kąt obrotu i wielkość przesunięcia oraz kolejność wykonywania przekształceń albo też mogłaby po prostu zawierać złożoną macierz przekształcenia

$$\boldsymbol{T}(x_2, y_2)\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{S}(s_x, s_y)\boldsymbol{T}(-x_1, -y_1) \tag{32}$$



Przemienność przekształceń elementarnych

Jeżeli $\boldsymbol{M}_1$, i $\boldsymbol{M}_2$ reprezentują podstawowe przekształcenia przesunięcia, skalowania albo obrotu, to, czy $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$? To znaczy, czy $\boldsymbol{M}_1$, i $\boldsymbol{M}_2$ mogą być zamienione miejscami?

Na ogół mnożenie macierzy nie jest przemienne. Łatwo jednak wykazać, że w następujących specjalnych przypadkach przemienność obowiązuje:

$\boldsymbol{M}_1$	$\boldsymbol{M}_2$
przesunięcie	przesunięcie
skalowanie	skalowanie
obrót	obrót
skalowanie z $s_x = s_y$	obrót

W tych przypadkach *nie musimy dbać* o kolejność składania macierzy.

Przykład 1

Co stanie się z odcinkiem łączącym punkty $(3, 2)$ i $(-1, -1)$ jeśli całkowitą zmianę układu współrzędnych uzyskamy w drodze:

1. Przesunięcia początku układu do punktu $(1, 0)$.
2. Obrotu osi współrzędnych o $\pi/4$ radianów.
3. Zmiany skali osi x ze współczynnikiem $s_x = 2$.

UWAGI: Zauważmy, że mamy tu do czynienia z przekształcaniem osi układu współrzędnych, a nie z przekształcaniem obiektów.

Translacja układu współrzędnych o wektor (d_x, d_y) jest równoważna przesunięciom obiektów o wektor przeciwny, tzn. $(-d_x, -d_y)$. Rotacja układu współrzędnych o kąt θ jest równoważna obrotem obiektów o kąt przeciwny, tj. $-\theta$.

W związku z tym dla translacji: $\begin{aligned} x' &= x - d_x \\ y' &= y - d_y \end{aligned}$

oraz dla rotacji: $\begin{aligned} x' &= x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta) \\ y' &= x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta) \end{aligned} = \begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$

Przykład 1 – rozwiązanie tradycyjne

Krok nr 1: Translacja

$$(3,2) \to (2,2)$$
$$(-1,-1) \to (-2,-1)$$

Krok nr 2: Rotacja

$$(2,2) \to (2\cos\theta + 2\sin\theta, -2\sin\theta + 2\cos\theta) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(2\sqrt{2}, 0\right)$$

$$(-2,-1) \to (-2\cos\theta - 1\sin\theta, -2\sin\theta - 1\cos\theta) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Krok nr 3: Zmiana skali

$$\left(2\sqrt{2}, 0\right) \to \left(4\sqrt{2}, 0\right)$$
$$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \left(-3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Przykład 1 – rozwiązanie macierzowe

- Translacja – $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rotacja – $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Zmiana skali – $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Złożenie powyższych przekształceń jest równoważne jednemu przekształceniu zastępczemu $\boldsymbol{SRT}$.

$$\boldsymbol{SRT} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1 – rozwiązanie macierzowe

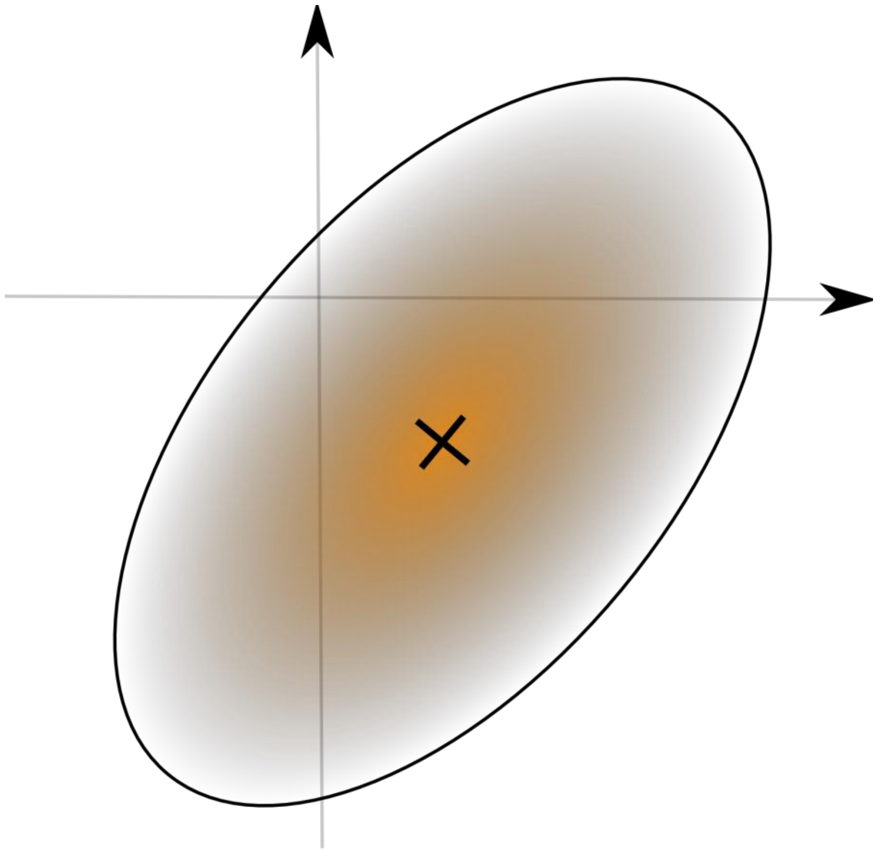
Stąd rozwiązaniem zadania są punkty:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

Narysować elipsę o środku w punkcie (x_c, y_c), wielkiej osi a i małej osi b, przy czym wielka oś jest nachylona do osi Ox pod kątem ϑ.



Zadanie 2 – algorytm rozwiązania

Reprezentacja funkcyjna takiej elipsy jest skomplikowana, więc zadanie *wydaje się trudne*.

Zastosowanie teorii przekształceń afinicznych upraszcza sprawę.

Należy wykonać następujące operacje:

1. Wykreślić okrąg o średnicy 1
2. Zmienić skalę osi Ox ze współczynnikiem a oraz osi Oy ze współczynnikiem b.
3. Dokonać obrotu osi układu współrzędnych o kąt $-\vartheta$.
4. Przesunąć początek układu współrzędnych do punktu $(-x_c, -y_c)$.

Prowadzi to do łatwego rozwiązania problemu.