

Varianta 51

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ știind că $A = (-3; 4]$ și $B = (1; 5]$.
- 5p 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreaptei $y = 2x + 1$ cu parabola $y = x^2 - x + 3$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2^{x!} \leq 2048$.
- 5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(1; 1)$ la dreapta $d: 5x + 12y - 4 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ știind că $\operatorname{ctg}a = 2$ și $\operatorname{ctg}b = 5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sirul $(F_n)_{n \geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se verifice relația $A^2 = A + I_2$.
- 5p b) Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ și $AX = XA$, atunci X este inversabilă.
- 5p c) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$.
2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.
- 5p b) Să se determine numărul elementelor mulțimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
- 5p c) Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului (S_5, \cdot) .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p c) Să se arate că funcția f este bijectivă.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$.
- 5p a) Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.
- 5p c) Să se arate că, pentru funcția $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (F(x) - 1)\sin x$, are loc relația $\int_1^\pi h(x)h''(x) dx \leq 0$.