

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul natural  $x$  pentru care  $1+3+5+\dots+x=225$ .
- 5p** 2. Să se determine valorile parametrului real  $m$  știind că graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + mx - 2m$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte situate la distanță 3.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2^{-x+1} + 1) = x$ .
- 5p** 4. Să se arate că  $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$
- 5p** 5. Fie hexagonul regulat  $ABCDEF$  de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .
- 5p** 6. Să se arate că  $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ = \frac{91}{2}$

## SUBIECTUL II (30p)

1. Fie  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$  trei puncte din plan și matricea  $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- 5p** a) Să se arate că, dacă  $A, B, C$  se află pe dreapta de ecuație  $y=2x$ , atunci  $\det(M)=0$ .
- 5p** b) Să se arate că, dacă triunghiul  $ABC$  este dreptunghic și are catetele de lungime 1, atunci  $\det(M)=\pm 1$ .
- 5p** c) Să se arate că, dacă matricea  $M$  este inversabilă, atunci suma elementelor matricei  $M^{-1}$  este 1.
2. Se consideră mulțimea de matrice  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- 5p** a) Să se arate că, dacă  $X \in A$  și  $Y \in A$ , atunci  $X+Y \in A$ .
- 5p** b) Să se arate că, dacă  $X \in A, Y \in A$  și  $XY = O_2$ , atunci  $X = O_2$  sau  $Y = O_2$ .
- 5p** c) Admitem cunoscut faptul că  $A$  este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \sin x$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare.
- 5p** b) Admitem că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  ecuația  $f(x) = n$  are o soluție unică  $x_n$ . Să se arate că sirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este nemărginit.
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ , unde sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  a fost definit la b).
2. Fie funcțiile  $f, g_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_0^1 (f(x) - g_2(x)) dx$ .
- 5p** b) Să se arate că  $0 \leq \int_0^1 g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$ .