

Varianta 6

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.
- 5p 2. Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea $(0, \pi)$ ecuația $\sin 3x = \sin x$.
- 5p 4. Câte numere naturale de trei cifre distințe se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2, 4, 6, 8\}$?
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ și $C(4, 6)$. Să se calculeze $\cos B$.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C = \frac{\pi}{6}$ și $AB = 6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$.
- 5p a) Să se calculeze σ^{2009} .
- 5p b) Să se dea exemplu de o permutare $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma \neq e$ și $(\tau\sigma)^2 = e$.
- 5p c) Să se demonstreze că, pentru orice $\tau \in S_5$, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p = e$.
2. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ și determinantul
- $$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$
- 5p a) Pentru $a = 1$, să se determine x_1, x_2 și x_3 .
- 5p b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.
- 5p c) Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$.
- 5p a) Să se arate că $f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$, $\forall x > 0$.
- 5p b) Să se determine valoarea minimă a funcției f .
- 5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
2. Se consideră, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + f_n(x)$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x) dx$.
- 5p b) Să se arate că $0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$, $n \in \mathbb{N}$.