Varianta 72

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x.$

5p **4.** Să se calculeze $C_{2009}^0\cdot 5^{2009}-C_{2009}^1\cdot 5^{2008}\cdot 4+C_{2009}^2\cdot 5^{2007}\cdot 4^2-...-C_{2009}^{2009}\cdot 4^{2009}$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(1,\ 2)$ şi dreapta de ecuație $d:\ 4x-2y+5=0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3+xA^2)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2=A$.

5p **c)** Să se arate că $\forall C\in M_3(\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \det(C+xA)\det(C-xA)\le(\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p=X^3-X+m$ cu $m\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $m=-6$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x),x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)$.