SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5p **2.** Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = \frac{4}{9}$.

5p **4.** Câte funcții $f:\{1,2,3,...,10\} \to \{0,1\}$ au proprietatea că $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(10)=2$?

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ și $P(3,m)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.

5p **6.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t + xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0) \geq 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\{\cos q\pi + i\sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \in G$.

5p **b)** Să se arate că *G* este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în *G*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t \, dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.