Varianta 32

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s\in(1;\,2)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g(x)=-4x+1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x=1+\cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,\,0,\,1,\,2\}$. Să se determine numărul funcțiilor pare $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,3)$. Să se determine coordonatele punctului *D* ştiind că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ şi că $\sin x=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Să se rezolve sistemul în cazul $a=-2$.

2. Se consideră mulțimea $G\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 10b\\ b & a\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A=\begin{pmatrix} 19 & 60\\ 6 & 19\end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Să se arate că $X\cdot Y\in G$, pentru oricare $X,Y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea *G* este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b)** Să se determine $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.