

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $|5 - 12i| - |12 + 5i|$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x^4$ . Să se calculeze  $(f \circ f \circ f \circ f)(1)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x + 4^x = 20$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii  $A = \{0, 5, 10, \dots, 2010\}$ , acesta să fie divizibil cu 25.
- 5p** 5. Se consideră un triunghi  $ABC$ , cu lungimile laturilor  $AB = c$ ,  $AC = b$  și un punct  $D$  astfel încât  $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ . Să se arate că semidreapta  $[AD$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ .
- 5p** 6. Fie  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  astfel încât  $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ . Să se calculeze  $\cos \alpha$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Se asociază fiecărui punct  $A(x, y)$  punctul  $A_M(x', y')$ , unde  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

- 5p** a) Știind că  $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$  și că  $A(-1, 1)$ , să se determine coordonatele punctului  $A_M$ .
- 5p** b) Știind că  $a = 1, b = 2, c = 2, d = 4$ , să se arate că toate punctele  $A_M$  se află pe dreapta  $y = 2x$ .
- 5p** c) Fie  $A, B, C$  trei puncte în plan. Dacă se notează cu  $S$  și  $S_M$  ariile triunghiurilor  $ABC$ , respectiv  $A_M B_M C_M$ , atunci  $S_M = S \cdot |\det M|$ .

2. Se consideră mulțimea  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ .

- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $A$ .
- 5p** b) Să se arate că mulțimea  $A$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ .
- 5p** c) Să se rezolve ecuația  $X^2 = X$ , cu  $X \in A$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și funcția  $f : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 - 1}$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^x$ .
- 5p** b) Să se determine valoarea numărului  $a$  știind că 3 este punct de extrem local al funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se determine valoarea numărului  $a$  știind că graficul funcției  $f$  are exact o asimptotă verticală.
2. Se consideră funcția  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = 1$  și, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , se definește funcția  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ .
- 5p** a) Să se arate că  $f_1^2(x) = 2f_2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$ .
- 5p** c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $g : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ ,  $g(x) = f_1(x) \sin x$  în jurul axei  $Ox$ .