Varianta 89

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z+3i=6\cdot\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1-2x|=|x+4|$.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+4x^2}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{5,6,7,8\}$.

5p **5.** Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

5p **6.** Fie a și b numere reale, astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_3-x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui a și b, sistemul este compatibil.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1,x_2,x_3,x_4) cu proprietatea că x_1,x_2,x_3,x_4 și x_1+x_2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a+b<1$.

2. Fie polinomul $f=X^3-3X^2+5X+1\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a>0$ se consideră funcția $f_a:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x)$, $x>0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, $\forall n\ge3$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.