

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3 + (2-i)^3$.
- 5p** 2. Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1, -3)$, $B(-1, 3)$, $C(0, 1)$. Să se calculeze valoarea funcției în punctul $x = 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3 \cdot 4^x - 6^x = 2 \cdot 9^x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A , acesta să fie divizibil cu 5.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, -3)$ și $B(4, 0)$. Să se calculeze distanța de la punctul O la dreapta AB .
- 5p** 6. Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB = 6$, $AD = 8$ și $m(\angle ADC) = 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că ecuația $AX = B$ are o infinitate de soluții $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.
- 5p** b) Să se verifice că $A^3 = 10A$.
- 5p** c) Să se determine rangul matricei A^* , adjuncta matricei A .
2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, funcția $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ și mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = -1\}$.
- 5p** a) Să se arate că $7 + 5\sqrt{2} \in A$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy) = f(x)f(y)$.
- 5p** c) Să se arate că mulțimea A este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a f(x) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se determine asymptotele graficului funcției f .
2. Fie sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.