Varianta 75

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a = -\sqrt[3]{27}, b = \log_2 \frac{1}{16}$ şi $c = -2$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2m$ se află situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(\sqrt{x^2+x-2}\right) = 1$.

5p **4.** Se consideră dreptele paralele d_1, d_2 şi punctele distincte $A, B, C \in d_1$, $M, N, P, Q \in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulţimea celor şapte puncte date.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3;2)$ faţă de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1;-4)$ şi $C(-5,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM = BC = 4$, unde M este mijlocul lui (BC), iar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M_x = \frac{x}{3}A + \frac{1}{3x^2}B$, cu $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_x M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x) \neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ şi funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1,\infty)\setminus\{0\}, \forall \alpha \in (1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y) \le f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0,\infty)$.

2. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, dat de $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) - \int_0^n f(x)dx$, este convergent.