

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului  $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$ .
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x + \frac{1}{|1+x|} = 1$ .
- 5p** 3. Să se studieze monotonia funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2009^x + \log_{2009} x$ .
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor să fie impar?
- 5p** 5. Să se demonstreze că vectorii  $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = (a+1)\vec{i} + a\vec{j}$  nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului  $a$ .
- 5p** 6. Să se arate că  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (1 + 2\cos 2x) \cdot \sin 3x$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră  $n \in \mathbb{N}^*$  și matricea  $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 și restul elementelor egale cu 1.
- 5p** a) Să se calculeze  $\det(2A_2)$ .
- 5p** b) Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\det(A_3 + xI_3) = 0$ .
- 5p** c) Să se arate că  $A_4$  are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu  $\frac{4}{5}$  și restul elementelor egale cu  $-\frac{1}{5}$ .
2. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și polinomul  $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$  cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ .
- 5p** a) Să se determine  $a, b, c$  pentru care  $x_1 = 2$  și  $x_2 = 1+i$ .
- 5p** b) Să se arate că resturile împărțirii polinomul  $f$  la  $(X-1)^2$  și la  $(X-2)^2$  nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor  $a, b, c$ .
- 5p** c) Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului  $f$  sunt reale și  $a, b, c$  sunt strict pozitive, atunci  $x_1, x_2, x_3$  sunt strict pozitive.

## SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  și  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ .
- 5p** a) Să se arate că graficul funcției  $f$  admite asimptotă spre  $+\infty$ .
- 5p** b) Să se arate că  $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+2+2^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} \right)$ .
2. Se consideră sirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p** b) Să se arate că  $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$ , pentru orice  $n \geq 2$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .