SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(-1)=f(1)=0,\ f(2)=6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

5p **4.** Să se demonstreze că dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $|x|\geq 1$, atunci $(1+x)^2+(1-x)^2\geq 4$.

5p **5.** Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, ştiind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ şi $C(5,-3)$.

5p **6.** Să se calculeze $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei *A*.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX)=z^3\det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A-A^t)=0$.

5p **c)** Ştiind că $A\neq A^t$, să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A-A^t)=2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, cu $f=X^4-5X^2+4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine polinomul $h\in\mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0)=1$ şi care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Ştiind că *g* este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$, să se arate că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1,\ \forall x>0$.