Varianta 8

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f, să se determine numerele reale a și c.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1} - x = 1$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F și C sunt coliniare.

5p **6.** Fie triunghiul ABC. Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC ştiind că $AB = 13$, $AC = 14$ şi $BC = 15$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A^{2n} = \dfrac{2^{2n}-1}{3}A + \dfrac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuația $x^3 - x + a = 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se determine x_2 şi x_3 ştiind că $x_1 = 2$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $0 \le x_n \le \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este convergent la $\dfrac{\pi}{2}$.

2. Se consideră şirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

5p **c)** Să se arate că $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.