Varianta 4

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul III.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=-(5a-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC ştiind că $AB=6$, $AC=10$ şi că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t\cdot A)=0$.

5p **c)** Să se determine o matrice nenulă $B\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB=O_2$.

2. Se ştie că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $\left((0,\infty),\cdot\right)$ la $\left(G,\circ\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k\ge 4$, atunci H conține toate numerele raționale $q>3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{x^n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.