Varianta 83

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că $x^2+3x+m\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă şi numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m\in\{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0-y_0+2009\cdot z_0=1$.

2. Se consideră mulțimile $H=\{a^2\mid a\in\mathbb{Z}_7\}$ şi $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0} \text{ sau } b\neq\hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulțimii *H*.

5p **b)** Fie $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că *G* este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{\cos^n x+\sin^n x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4, atunci $F''(x)=\left(f_4(x)\right)^2\sin 4x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\, f_1(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\, f_1(x)dx=\frac{\pi-1}{4}$.