

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^{a-1}, 2^{-a+2} + 1, 2^{a+1} + 1$ să fie în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuație $4x + 4y = 1$.
- 5p** 3. Să se arate că, dacă z este soluție a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, atunci $z^2 - \frac{8}{z} = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{11, 12, \dots, 50\}$, aceasta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p** 5. Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$ și lungimea înălțimii egală cu 4. Să se calculeze $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$, știind că $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, și punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.
- 5p** a) Să se calculeze B știind că $P_1(1, 2), P_2(2, 4), P_3(-3, -6)$.
- 5p** b) Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3 .
- 5p** c) Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.
2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.
- 5p** c) Să se arate că (M, \cdot) este un grup, unde „ \cdot ” este înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 5p** b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** c) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției f către $+\infty$.
2. Fie sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.