

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de termen general  $a_n = \frac{4n}{n+3}$ , este crescător.
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor  $y = x^2 + x + 1$  și  $y = -x^2 - 2x + 6$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ .
- 5p** 4. Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării  $(2x^2 - 5y)^n$  este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.
- 5p** 5. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât dreptele  $d_1: mx + 3y + 2 = 0$  și  $d_2: 2x + y - 8 = 0$  să fie concurente.
- 5p** 6. Fie  $ABCD$  un patrulater. Să se arate că dacă  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ , atunci  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimile  $P = \{S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | S^t = S\}$  și  $Q = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in P$  și  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in Q$ .
- 5p** b) Să se arate că, dacă  $A, B \in Q$ , atunci  $AB \in P$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\det(X) \geq 0$ , oricare ar fi  $X \in Q$ .
2. Se consideră polinoamele  $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 45 \in \mathbb{Z}[X]$  și  $\hat{f} = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ .
- 5p** a) Să se arate că rădăcinile din  $\mathbb{C}$  ale polinomului  $f$  nu sunt toate reale.
- 5p** b) Să se arate că polinomul  $\hat{f}$  nu are rădăcini în  $\mathbb{Z}_2$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că polinomul  $f$  nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .
- 5p** a) Să arate că  $|f(x)| \leq |x|$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ .
- 5p** b) Să arate că funcția  $f$  este continuă în origine.
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f$  nu este derivabilă în origine.
2. Se consideră  $a, b \in \mathbb{R}$  și funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} axe^x - x, & x \leq 0 \\ x \cos x + b, & x > 0 \end{cases}$ .
- 5p** a) Să se determine  $a$  și  $b$  știind că funcția  $f$  este primitivă pe  $\mathbb{R}$  a unei funcții.
- 5p** b) Știind că  $a = 0$  și  $b = 0$ , să se calculeze  $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$ .
- 5p** c) Să se arate că, dacă  $b = 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} x^n f(x) dx = -\infty$ .