SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve inecuația $f(2x)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ şi $C(3,-2)$. Să se calculeze $\sin C$.

5p **6.** Ştiind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+z=0\\ mx+y+z=m-1\\ x+my+2z=-1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\ m&1&1\\ 1&m&2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu $z_0=2$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)\,\middle|\, X=\begin{pmatrix}a&\hat{2}b\\ b&a\end{pmatrix}\right\}$ şi matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=G\backslash\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$ şi funcțiile $f_n, g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+x^{2n}$, $g_n(x)=x^{2n+1}+1$.

5p **a)** Să se verifice că $f_n'(x)=\frac{g_n'(x)}{x+1}-\frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.