Varianta 97

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $3!,\ \sqrt[3]{100},\ \log_2 32$.

5p **2.** Să se arate că $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x = \cos x$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3 - 4C_6^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A, B, C astfel încât $A(1,3), B(2,5)$ şi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $BC = 8$ şi $\cos A = \frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $\det\left(A \cdot A^t\right) \geq 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A \cdot A^t = A^t \cdot A$, atunci $(a-d)(b-c) = 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\left(A - A^t\right)^{2009} = A - A^t$, atunci $|b-c| \in \{0,1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuația $\hat{2}x = \hat{3}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $p = \hat{2}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7, +)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1) - f(x)\right)$.

5p **c)** Să se rezolve inecuația $f(x) < x - \frac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2) f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x)dx < \frac{1}{4}$.