

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.
- 5p** 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Se știe că, în triunghiul ABC , vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine rangul matricei A .
- 5p** b) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.
- 5p** c) Să se demonstreze că ecuația $XA = B$ nu are soluții $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, și pentru fiecare $t \in \mathbb{Z}$ notăm cu $H_t = \{A(kt-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că (G, \cdot) este un grup, unde „ \cdot ” este înmulțirea matricelor.
- 5p** a) Să se arate că $\forall n, p \in \mathbb{Z}$, $A(n) \cdot A(p) = A(n+p+1)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că, pentru orice $t \in \mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului (G, \cdot) .
- 5p** c) Să se demonstreze că grupurile (G, \cdot) și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $k > 0$, $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător și are termenii pozitivi.
2. Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \operatorname{arctg} x$, unde a, b, c sunt parametri reali.
- 5p** a) Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Să se studieze monotonia funcției F , în cazul în care F este primitivă a funcției f .