

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine  $a_1$ .
- 5p** 2. Să se determine toate perechile  $(a,b)$  de numere reale pentru care  $a^2 + b^2 = a + b = 2$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg x + \lg(9 - 2x) = 1$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , acesta să nu fie divizibil cu 7.
- 5p** 5. Se consideră punctele  $A(0,2)$ ,  $B(1,-1)$  și  $C(5,1)$ . Să se determine ecuația dreptei duse din vârful  $A$ , perpendiculară pe dreapta  $BC$ .
- 5p** 6. Să se arate că  $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Fie  $M$  mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.
- 5p** a) Să se arate că, dacă  $A, B \in M$ , atunci  $A + B \in M$ .
- 5p** b) Să se arate că orice matrice din  $M$  este neinversabilă.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă  $A \in M$ , atunci  $A^2 \in M$ .
2. Se consideră inelele  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  și  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .
- 5p** a) Să se arate că, dacă  $x \in \mathbb{R}$  și  $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ , atunci  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .
- 5p** b) Să se arate că  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  la  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f_n : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n + \ln x$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției  $f_1$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcțiile  $g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_n(x) = f_n(x) + f_n\left(\frac{1}{x}\right)$  sunt convexe.
- 5p** c) Admitem că ecuația  $f_n(x) = 2^n$  are soluția unică  $x_n$ . Să se arate că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge la 2.
2. Fie  $a \in [0,1]$  și  $I_n = \int_0^a \frac{t^n}{t+1} dt$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $I_2$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $I_n + I_{n-1} = \frac{a^n}{n}$ ,  $\forall n \geq 2$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .