

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se demonstreze că numărul  $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$  este natural.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx + 2$ . Să se determine mulțimea valorilor parametrului real  $m$  pentru care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte distincte.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , aceasta să aibă produsul elementelor 120.
- 5p** 5. Se consideră punctele  $A(0,2)$ ,  $B(1,-1)$  și  $C(3,4)$ . Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Să se demonstreze că  $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale  $a, b, c$ , funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x + 3$  și determinanții

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

- 5p** a) Să se arate că  $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ .
- 5p** b) Să se arate că  $A = B$ .
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției  $f$ , aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.
2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $X(a)X(b) = X(a+b-10ab)$ .
- 5p** b) Să se arate că mulțimea  $H = \left\{ X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\} \right\}$  este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$ .

- 5p** a) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 5p** b) Să se calculeze derivata a doua a două funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $f(x) \leq 0, \forall x \geq 0$ .
2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \arctg x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p** c) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , definit de  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , este convergent.