

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul  $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$  este rațional.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $f(x) \leq 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$ .
- 5p** 4. Fie mulțimea  $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$ . Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea  $\{\sqrt[3]{n} \mid n \in A\}$ , acesta să fie număr rațional.
- 5p** 5. Fie triunghiul  $ABC$  și  $M \in (BC)$  astfel încât  $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ . Să se demonstreze că  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$ .
- 5p** 6. Știind că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\tan x = 3$ , să se calculeze  $\sin 2x$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră  $a \in \mathbb{R}$ , sistemul  $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$  și  $A$  matricea sa.
- 5p** a) Să se arate că  $\det A \neq 0$ .
- 5p** b) Să se arate că soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.
- 5p** c) Să se determine inversa matricei  $A$ .
2. Se consideră pe  $\mathbb{R}$  legea de compoziție dată de relația  $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  și mulțimea  $G = (5, \infty)$ .
- 5p** a) Să se arate că legea "\*" are element neutru.
- 5p** b) Să se demonstreze că  $G$  este grup abelian în raport cu legea "\*".
- 5p** c) Să se rezolve în grupul  $(G, *)$  sistemul  $\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovației

**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4-3x^2}{x^3}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că graficul funcției  $f$  admite asimptotă spre  $+\infty$ .
- 5p** b) Să se determine mulțimea valorilor funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției  $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \arccos f(x)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$  și  $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$ .
- 5p** c) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=2$ , graficul funcției  $F$  și axa  $Ox$ .