

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{7}{6}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos 2x = \frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine $a > 0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.
- 5p** 5. Să se determine ecuația simetricei dreptei $d : 2x - 3y + 1 = 0$ față de punctul $A(-3, 4)$.
- 5p** 6. Știind că $\operatorname{ctg} x = 3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 și

$$g = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0. \text{ Fie matricele } A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \text{ și } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

- 5p** a) Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.
- 5p** b) Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1g(x_1) & x_2g(x_2) \\ g(1) & x_1^2g(x_1) & x_2^2g(x_2) \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.
- 5p** c) Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste \mathbb{Z}_5 .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

- 5p** a) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 5p** c) Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$.

- 5p** a) Să se calculeze $f(2)$.
- 5p** b) Să se demonstreze relația $f(x) \leq \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$.
- 5p** c) Să se demonstreze relația $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}$, $\forall x > 1$.