Varianta 57

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Să se arate că $\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x+\log_2\left(4x\right)=4$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu-l conține pe x, din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:\ 4x-8y+1=0$ şi punctul $A\left(2\ ;1\right)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta d .

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=2$, $AC=4$ şi $m\left(\sphericalangle A\right)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}$ şi $x_0=1, y_0=0$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, y_1 şi y_2 .

5p **b)** Să se arate că $x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că $x_{n+2}-6x_{n+1}+x_n=0$, $\forall n\geq 0$.

2. Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$ şi $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2+\hat{4}=\hat{0}.$

5p **b)** Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_7^*,\cdot\right)$.

5p **c)** Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ cu $f\left(\overline{2}\right)=\hat{3}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ şi $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\geq 1$ are limită .

5p **b)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}xf(x) & ,x\leq 0\\ \operatorname{arctg}x, & x>0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x, \forall x\in(0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=e^{-x^2}$ şi F o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F\left(\cos x\right)-F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.