

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Știind că  $z \in \mathbb{C}$  și că  $z^2 + z + 1 = 0$ , să se calculeze  $z^4 + \frac{1}{z^4}$ .
- 5p** 2. Să se determine funcția  $f$  de gradul întâi, pentru care  $f(f(x)) = 2f(x) + 1$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(x+1) - \lg 9 = 1 - \lg x$ .
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea  $(3 + \sqrt[3]{3})^{10}$ .
- 5p** 5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului  $ABC$ , știind că  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(2, -1)$ .
- 5p** 6. Să se arate că unghiul vectorilor  $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$  și  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  este obtuz.

## SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră permutările  $e, \alpha \in S_3$ ,  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5p a)** Să se calculeze  $\alpha^3$ .
- 5p b)** Să se rezolve ecuația  $\alpha^{2009} \cdot x = e$ ,  $x \in S_3$ .
- 5p c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din  $S_3$  este permuatare impară.
- 2.** Fie inelul  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .
- 5p a)** Să se dea exemplu de un număr complex  $z$  astfel încât  $z \notin \mathbb{Z}[i]$  și  $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$ .
- 5p b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului  $\mathbb{Z}[i]$ .
- 5p c)** Să se arate că mulțimea  $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}[i]$  în raport cu înmulțirea.

## SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ .
- 5p a)** Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p b)** Să se arate că funcția  $f'$  este mărginită.
- 5p c)** Să se demonstreze că  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 2.** Se consideră sirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p a)** Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p b)** Să se arate că  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p c)** Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .