

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2x-1}{1-x} \geq \frac{3x+2}{1-2x}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x} + x = 2$.
- 5p** 4. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe x și y la aceeași putere.
- 5p** 5. Fie $\vec{r}_A = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_B = \vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{r}_C = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC . Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $BC = 3$ și $\cos A = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se verifice că $AB \neq BA$.
- 5p** b) Să se arate că $A^4 + B^6 = 2I_2$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(AB)^n \neq I_2$.
2. Se consideră sirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ și polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^2 - X - 1$, $Q_n = X^n - F_n X - F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.
- 5p** a) Să se arate că polinomul $X^3 - 2X - 1$ este divizibil cu P .
- 5p** b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3 .
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
- 5p** a) Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu prima bisectoare.
- 5p** b) Să se arate că valoarea minimă a funcției f este 1.
- 5p** c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$.
2. Se consideră funcțiile $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_2^x \frac{t^2}{t^2 - 1} dt$ și $g : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{\ln \frac{x^2 - 1}{3}} \sqrt{3e^t + 1} dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(3)$.
- 5p** b) Să se arate că $g'(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$, $\forall x \in (1, \infty)$.
- 5p** c) Să se arate că $g(x) = 2f(x)$, $\forall x \in (1, \infty)$.