Varianta 26

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie z_1 şi z_2 soluţiile complexe ale ecuaţiei $2z^2+z+50=0$. Să se calculeze $|z_1|+|z_2|$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se arate că funcţia $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+9^x=2$.

5p **4.** Fie mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ şi o funcţie bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(-1,3)$ şi $B(1,-1)$. Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^2=A$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1=0$, este convergent.

2. Fie funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $g:[-1,1]\to\mathbb{R}, g(x)=xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 x f(x)\,dx\leq\frac{\pi}{4}$.