

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4 + 4 = 0$.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ se află pe dreapta de ecuație $x + y = 7$.
- 5p** 3. Fie $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1) + f(2) + f(3) = 15$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(1, 0), B(2, 3)$ și $C(-1, 4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Fie $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a = \frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x + ay + (b+c)z = 0 \\ x + by + (c+a)z = 0 \\ x + cy + (a+b)z = 0 \end{cases}$
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, sistemul admite soluții nenule.
- 5p** c) Să se rezolve sistemul, știind că $a \neq b$ și că $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 5p** b) Să se arate că (G, \cdot) este grup abelian.
- 5p** c) Să se arate că funcția $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ cu $f(x+iy) = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, definit prin $a_0 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.
- 5p** b) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$.
2. Fie funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t) \sin t}{\cos^2 t} dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$.