Varianta 66

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{3x\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului *a*.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuația $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

5p **4.** Să se calculeze $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ şi $D(m,5)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul *ABCD* să fie paralelogram .

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2 x$, ştiind că $\operatorname{tg} x=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie dreptele $d_1: x+2y=3,\ d_2: 3x-4y=-1,\ d_3: 4x+3y=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze valorile lui *m* pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie polinomul $f=2X^3-aX^2-aX+2$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine *a* pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine *a* astfel încât $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\sqrt{|1-x^2|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3],\ f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\ge\alpha$.