Varianta 53

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui *x*.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p,r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5 , 7 şi 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A)=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\right\}$. Se consideră matricele $E_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in C(A)$, atunci $X+Y\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1,E_2\in C(A)$, atunci există $\alpha\in\mathbb{C}$ astfel încât $A=\alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conţine trei dintre matricele E_1,E_2,E_3,E_4, atunci o conţine şi pe a patra.

2. Fie $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuaţia $ax=b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **c)** Fie $k\in\mathbb{Z}$ cu $b^k=e$. Să se arate că 6 divide *k*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ şi un număr real *m* din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuaţia $x^3-3x=m$ are soluţie unică în mulţimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine primitiva F a funcţiei f care are proprietatea $F(0)=-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.