

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $x > 0$ știind că numerele x , 6 și $x - 5$ sunt în progresie geometrică .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$. Să se calculeze $f(2 \cdot (f(-1)))$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- 5p** 4. Să se arate că $(n!)^2$ divide $(2n)!$, pentru oricare n natural.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(3, 2)$ și $B(6, 5)$. Să se determine coordonatele punctelor M și N știind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A, M, N, B .
- 5p** 6. Să se determine numerele naturale a pentru care numerele a , $a + 1$ și $a + 2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = 2A$.
- 5p** a) Să se arate că matricea $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2 = 2B$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $a + d \neq 2$, atunci $A = O_2$ sau $A = 2I_2$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $a + d = 2$, atunci $\det(A) = 0$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 1$, $g = X^6 - 1$.
- 5p** a) Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este $X^2 - 1$.
- 5p** b) Să se determine numărul soluțiilor complexe distințe ale ecuației $f(x)g(x) = 0$.
- 5p** c) Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x) = 0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$.