Varianta 71

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_7 2009 - \log_7 287 - 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$. Să se arate că funcția f este pară.

5p **3.** Să se arate că valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x^4$ este $f(0)$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

5p **6.** Să se determine ecuația medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC, știind că $A(2,2)$ și ecuațiile medianelor duse din B și C sunt $2x + y - 2 = 0$, respectiv $x - y + 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n = n + 1$, $\forall n \geq 2$.

2. Un grup $(G, \cdot)$, cu elementul neutru e, are proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

5p **a)** Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a,b) \cdot (c,d) = (a + c, b + d), \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2 = x^2 y^2$, $\forall x, y \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^2 t^x dt$.

5p **a)** Să se verifice că $1 + (x + 1)F(x) = 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcție continuă $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât $F(x) = 1 + \int_0^x f(y)dy, \forall x \in (-1, \infty)$.