Varianta 43

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional.”

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2.$ Să se rezolve ecuația $f(f(x))=f^2(x).$

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^x=12$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din mulțimea $A\times A$, produsul numerelor *a* şi *b* să fie impar.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(1,\ 3)$ şi $C(-1,\ 1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală *AC*.

5p **6.** Să se arate că $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{N}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M$.

5p **a)** Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?

5p **b)** Să se arate că $A^{-1}\notin M$.

5p **c)** Să se determine toate matricele inversabile $B\in M$ care au proprietatea $B^{-1}\in M$.

2. Se consideră ecuația $x^4-8x^3+ax^2+8x+b=0$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ şi cu soluțiile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $(x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3+(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=a-8$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_4=x_2+x_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât x_1,x_2,x_3,x_4 să fie în progresie aritmetică.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.

5p **c)** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m,$ unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{t}{1+t^2}dt$ şi $g:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\int_1^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{t(1+t^2)}dt.$

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)+g(x)=0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.