Varianta 68

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$ este întreg.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se consideră punctele *M* şi respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B=A+A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B^t=B$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $B=2I_2$, atunci $\det(A)\geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x,y\in\mathbb{C}$ şi matricea $xA+yA^t$ este inversabilă, atunci $x+y\neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$, şi x_1,x_2,x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Ştiind că $p=1$ şi $q=0$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se determine *p* şi *q* ştiind că $x_1=1+i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7+x_2^7+x_3^7)=7(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\leq e-2$.