Varianta 38

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3 \in (1,2)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x+\cos(-x)=1$.

5p **4.** Să se arate că, pentru orice număr natural n, $n\ge 3$, are loc relația $C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1: 2x+3y+1=0$, $d_2: 3x+y-2=0$ şi $d_3: x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*, ştiind că $AB=4$, $AC=3$ şi $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ şi mulțimea de matrice $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ şi $AX=XA$, atunci $X\in M$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f=aX^4+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că numărul $f(3)-f(1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$, numărul $f(x)-f(y)$ este divizibil cu $x-y$.

5p **c)** Să se determine coeficienții polinomului *f* ştiind că $f(1)=4$ şi $f(b)=3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.