

Subiecte:

1. Legile de conservare în mecanica clasică (inclusiv conservarea energiei)
2. Oscillatorul armonic (simple/naamortizat și energia acestuia)
3. Oscillatorul amortizat (inclusiv amortizat fluid)
4. Oscillatorul forțat (inclusiv rezonanță de amplitudine, viteză și putere)
5. Oscillatorul cuplat/dublu (elastic)
6. Oscillatorul LC
 - + Oscillatorul RLC (inclusiv comparația RLC cu oscillatorul mecanic)
 - ++ Resonanță de amplitudine, viteză și putere
7. Legea Fourier
8. Ecuații calenduri (deduceri, soluția 2D, cazul omogen)

9. Ecuațiile lui Maxwell (formă, discutie)
10. Legea lui Coulomb
11. Legea lui Faraday
12. Legea lui Gauss (pl.câmp electric și magnetic)
13. Forța Lorentz
14. Vectorul Poynting
15. Energia și intensitatea câmpului elecromagnetic
16. Legi (relații) de material în electrodinamica
17. Operatorii diferențiali (Gradient, Divergență, Rotor)

Unde

18. Ecuația mecanică (și unde mecanice în general)
19. Ecuația undei electrodinamice (deduceri, propagare în vid)
20. Clasificarea undei electrodinamice
21. Efectul Doppler (inclusiv demonstrația cu viteze)

- 22. Ecuația Schrödinger (temp+atemp, valori și vectori propri)
- 23. Funția de undă (semnif.+prop.)
- 24. Grupa de potențial cu porți: infinit;
- 25. Grupa de potențial cu porți: finiti;
- 26. Bariera de potențial dreptunghiulară
- 27. Efectul Tunnel prin Bariera de potențial de formă oarăcon
- 28. Efectul Tunnel (prin barieră dreptunghiulară)
- 29. Emisie Alfa (radioactivitatea alpha explicată prin efect tunnel)
- 30. Autoemisie (emisie electronică „la reac”)



Foarile formule

$$1. \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

$$2. F_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$3. x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t})$$

$$4. \ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{\kappa}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$5. \ddot{\eta}_2 + \frac{k}{m_2} \eta_2 + \frac{k_0 k}{m_2} (\eta_2 - \eta_1) = 0$$

$$6. \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{U}{L} \cos(\omega t)$$

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{16 h^2 \alpha^2}{(\alpha^2 + h^2) e^{-2\alpha} + (\alpha^2 + h^2) e^{2\alpha} - 2(\alpha^4 - 6\alpha^2 h^2 + h^4)}$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 \exp \left[- \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{\pi/2} \sqrt{U(r) - E} dr \right]$$

1. Legile de conservare în mecanica clasica

1. Principiile lui Newton

P I (Inertie): Un corp își menține starea de repaus sau de MRU dacă suma forțelor e nulă

P II (Fundamental): $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; $[\vec{F}]_{SI} = N$

P III (Acțiuni și reacții): Oricare acțiune îi coresp o reacție egală și de sens contrar

2. Conservarea impulsului

P II $\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{p} = m \vec{v}$ - impuls

Dacă $\vec{F}_{ext} = 0$ (sunt izolat) $\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constant}$

Pt un sistem de N particule: $P_{total} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{constant}$

3. Conservarea energiei mecanice

Energia mecanică totală: $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r})$

În absența forțelor neconservative (fricare):

$$E = E_c + E_p = \text{constant}$$

Relația forță - energie potențială: $\vec{F} = -\nabla U$

4. Mecanica analitică

Formalism Lagrange:

Lagrangianul $L = T - U$ (energie cinetică - potențială)

Ecuație Euler-Lagrange: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$

$$[L]_{SI} = J$$

Formalism Hamilton:

Hamiltonianul $H = T + U$ (energia totală)

Ec. Hamilton: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ și $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

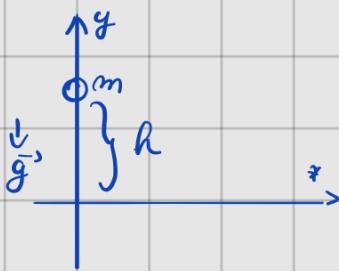
Ec. Ham:

$$\ddot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Formalism Lagrange

$$L = T - U$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} \right) = 0$$



$$L = \frac{1}{2} m v^2 - m g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot \ddot{y}^2 - m g \cdot y$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -\frac{1}{2} m \cdot 2 \dot{y} = -m \dot{y}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= -m g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= -m \dot{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -m g - \frac{d}{dt}(m \dot{y}) = 0 \\ & -m g - m \ddot{y} = 0 \\ & \ddot{y} = -g \text{ (acceleration)} \end{aligned}$$

2. Oscilatorul liniar armonnic

Oscilația armonnică = evoluție descrișă cu funcții armonice (\sin, \cos)

Legea de mișcare: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Mărimi:

$x(t)$ → Elongația (pozitia la momentul t); $x \in [-A, A]$

A → Amplitudinea (elongația maximă) $[A] = m$

$\Phi(t) = \omega t + \varphi \rightarrow$ fază oscilației

$\varphi = \Phi(0) \rightarrow$ fază initială $[\varphi] = \text{rad}$

ω → pulsăție (frecvență angulară); $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $[f] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Foata elastică (Legea lui Hooke): $F_e = -k \cdot \Delta \vec{x} \Rightarrow F_e = -kx \Rightarrow$

Ecuatia de mișcare a pendulului elastic: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$$\begin{aligned} & \text{P.II al} \\ & L = F_e = -kx \\ & \text{mechanicii} \\ & -kx = ma \end{aligned}$$

Legea vitezei: $v(t) = \dot{x}(t) = \underbrace{Aw}_{v_0} \cos \Phi(t)$

Legea accelerării: $a(t) = \ddot{x}(t) = Aw^2 \sin \Phi(t)$

Pulsăția proprie: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Perioada proprie a oscilatorului: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Frecvența proprie: $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ $[\nu_0] = Hz = \frac{1}{s}$

Condiții initiale: $\left. \begin{array}{l} \text{Amplitudinea: } A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} \\ x(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Taza initială } \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \end{array} \right.$

Energie cinetică: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi)$

Energie potentială: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$

Energia totală se conservă:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \text{constant}$$

3. Oscilatorul amortizat în fluid

Forță de fricare fluidă (rezistență viscoasă): $\vec{F}_r = -b\vec{v}$



b = coef de fricare viscoasă [b]s_i = N·s/m

$$F_t + F_r = m\ddot{x} \Rightarrow -b\dot{x} - b\ddot{x} = m\ddot{x}$$

Ecuatia miscarii: $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{b}{m}x = 0$

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ & \zeta = \frac{b}{2m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Not $\frac{b}{m} = 2\zeta \rightarrow$ coef de amortizare

$\frac{b}{m} = \omega_0^2 \rightarrow$ patratul pulsatiui propriu

Caz I. Miseare cu amortizare mare (supracritică): $\zeta > \omega_0$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A e^{\sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2}t} + B e^{-\sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2}t})$$

- mișcarea este o revenire lenta spre echilibru.

Caz II. Miseare cu amortizare critică $\zeta = \omega_0$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A + Bt)$$

- cea mai rapidă revenire la echilibru fără oscilații

Caz III. Mișcarea amortizată slabă sau necritică $\zeta < \omega_0$

$$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \underbrace{\left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2}t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2}t} \right)}_{A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi)}$$

factor de amortizare real

Pseudo-pulsalia: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2}$

A_0 = amplitudinea initială

Pseudo-perioada: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} > T_0$

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

Decrementul logaritmice

$$\Delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_1)} = 8 T_1 = \frac{2\pi f}{\sqrt{\omega_0^2 - 8^2}}$$

Timpul de relaxare

$$\tau = \frac{1}{8}$$

tempul după care amplitudinea scade de e ori

Ratarea dissipată

$$P_d(t) = -b v^2(t)$$

4. Oscilatorul forțat (- rezonanță de amplitudine, viteză și putere)

Ecuatia de mișcare

Cu forță exterioară: $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega t)$:

$$\ddot{x}_p + 2\delta \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

Solutia în regim permanent

$$x(t) = B \sin(\omega t + \delta)$$

Amplitudinea oscilatorului forțat: $B(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$

Faza initială a tonenului armonic permanent: $\tan \delta = \frac{-2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Rezonanță de amplitudine

Pulsatia de rezonanță: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ și doar dacă $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

Amplitudinea maximă: $B_{max} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Rezonanță de viteză: are loc la pulsatia proprie $\omega'_R = \omega_0$

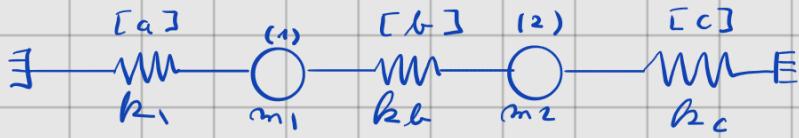
Rezonanță de putere: coincide cu rezonanță de viteză $\omega = \omega_0$

Factorul de calitate

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

5. Oscilatorul cuplat/dublu (elastic)

Model mecanic cu 2 grade de libertate



Două corpură de masă m legate prin ressorturi cu constante k_a (la capete) și k_b, k_c (de cuplaj)

Sistemul Lagrange $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\eta}_1} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\eta}_2} \right) \end{array} \right\} =,$

Ecuatiile de miscare: $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\eta}_1 + \frac{k_a}{m_1} \eta_1 + \frac{k_{ab}}{m_1} (\eta_1 - \eta_2) = 0 \\ SD II, CC, L, O \quad \ddot{\eta}_2 + \frac{k_{bc}}{m_2} \eta_2 + \frac{k_{ab}}{m_2} (\eta_2 - \eta_1) = 0 \end{array} \right.$

Caz particular simetric $\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 = m \\ k_{ab} = k_{bc} = k_{ac} = k \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\eta}_1 + \frac{k}{m} (2\eta_1 - \eta_2) = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{k}{m} (2\eta_2 - \eta_1) = 0 \end{array} \right.$$

Coordinate Normale (Decuplare)

$s(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$ (Modul simetric)

$d(t) = \eta_1(t) - \eta_2(t)$ (Modul antisimetric)

Moduri proprii de vibrație

1. Modul fundamental (simetric) $w_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Corporile oscilează în fază ($\eta_1 = \eta_2$)

2. Modul Excitat (antisimetric) $w_d = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

Corporile oscilează în antifază ($\eta_1 = -\eta_2$)

Observație: $w_d > w_s$

6. Oscilatorul LC/RLC (comp RLC cu osc mecanic)

Circuitul LC (Oscilator ideal)

$$\text{Ec tensiunilor } L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Pulsatia proprie (Formula lui Thomson)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Analogia Mecano - Electromagnetică

Oscilator mecanic

elongatia x

viteza $v = \dot{x}$

masa m

constanta elastică k

coef di fricare b

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Oscilatorul electromagnetic

sarcina electrică q

currentul $i = \dot{q}$

inductanța L

$$L/C$$

rezistența R

$$W_m = \frac{1}{2}L i^2$$

$$W_e = \frac{1}{2C}q^2$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U}{L} \cos(\omega t)$$



$$\text{Timpul de relaxare } T = \frac{1}{g} = \frac{2m}{b} \rightarrow T = \frac{2L}{R}$$

Circuitul RLC serie (amortizat). Regimul transitoriu e scurt și se trece la regimul permanent.

$$\text{Ecuația: } L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

$$\text{Factor de amortizare } g = \frac{R}{2L}$$

$$\text{Pulsatia proprie } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{Pseudo-pulsatia } \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0 - g$$

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \delta)$$

$$Q(m) = \frac{U}{L \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2) + g^2 \omega^2}} = \frac{U}{\sqrt{(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2 + 4g^2 \omega^2}}$$

amplitudinea sarcinii pe armăturile condensatorului

$$\delta = \arctg \frac{2g\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\text{Impedanța în curent alternativ } Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad j X_C = \frac{1}{\omega C} \quad j X_L = \omega L$$

La rezonanță ($\omega = \omega_0$): $Z = R$ (minim), current maxim $I_{max} = \frac{U}{R}$

$$\omega R = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad ;$$

$$u(t) = U \cos(\omega t)$$

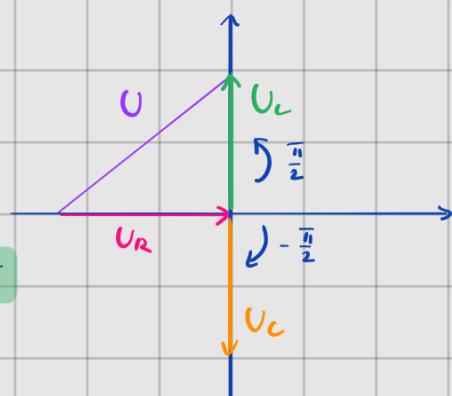
$$i(t) = \frac{U}{Z} = \cos(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2})$$

$$U_R = \frac{R}{Z} \cdot U$$

$$U_L = \frac{X_L}{Z} \cdot U$$

$$U_C = \frac{X_C}{Z} \cdot U$$

} reprezinta
printre-a diagramă
orizontală



+ Rezonanță (amplitudine, viteză și putere)

Rezonanță de amplitudine = fenomen prin care la o anumită valoare ω_r a pulsării de întărire (numita pulsărie de rezonanță) amplitudinea oscilației lăsată în regim permanent se maximizează.

$B(\omega)$ este derivată și $\omega > 0$

$$B(\omega) = \frac{F_0(m)}{\sqrt{E(\omega)}} \quad B \text{ se maximizează când } E \text{ se maximizează}$$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ pulsărie rezonantă de amplitudine

$$B_{\max} = \frac{F_0 / m}{2m \sqrt{\omega_r}}$$

Rezonanță de viteză = fenomen prin care la o anumită pulsărie ω_r' se maximizează amplitudinea vitezei de oscilație (nu ampl. elongație)

$$v(t) = \dot{x}(t) = B \omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$v_a(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{G(\omega)}} \quad v_a$$

v_a se maximizează când G se maximizează

$$G(m) = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + \underbrace{4\gamma^2}_{\text{constant}}$$

$\Rightarrow \omega_r = \omega_0$ pulsărie rezonantă de viteză

Rezonanță de putere = fenomen prin care la o anumită pulsărie de întărire, puterea de întărire sau extirioară se maximizează în amplitudinu

$$P_{ext}(t) = F_0 B \omega \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

$$\overline{P_{ext}}(t) = -2m \gamma^2 B^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\overline{P_{ext}} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{P_{ext}}(t) dt = -m \gamma^2 v_a^2$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$b = 2m \gamma$$

$v_a = \omega B$ = amplitudinea vitezei

Obs: rezonanță de viteză (la $\omega_i = \omega_0$) este în același timp rezonanță puterii de întărire și rezonanță puterii de întărire.

$$\begin{aligned} \omega_- &= \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} - \gamma \\ \omega_+ &= \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} + \gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \omega = \omega_- + \omega_+ = 2\gamma$$

7. Legea lui Fourier (transferul de căldură)

Nabla = gradient - are componente derivate spațiale de ordin I

$$\text{grad } S = \nabla S = \vec{i} \frac{\partial S}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial S}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial S}{\partial z}$$

$\nabla S \rightarrow$ arată cât de mult și în ce direcție variază mărimea cu poziția

$$\nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Legea Fourier în formă 1D.

$$\frac{Q}{A \cdot \Delta t} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

2- conductivitatea termică a materialului

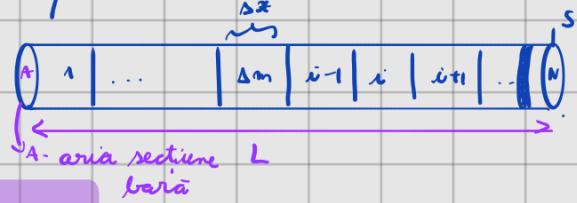
Forma diferențială

$$\frac{dQ}{dA \cdot dt} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Enunț Fourier: densitatea superficială a fluxului de căldură este proporțională cu gradientul temperatură

Legea lui Fourier în formă 3D:



$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \rightarrow \frac{dS}{dA_x} \vec{i} + \frac{dS}{dA_y} \vec{j} + \frac{dS}{dA_z} \vec{k}$$

vectorul densitate flux
de căldură

$$= -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \vec{i} + \frac{dT}{dy} \vec{j} + \frac{dT}{dz} \vec{k} \right)$$

$$dA_x \perp x, dA_y \perp y, dA_z \perp z$$

"Feliș" bara în portiuni de grosime $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

$$x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1}$$

$$\Delta x = \frac{L}{N} \text{ nr de diviziuni}$$

$$\Delta V = A \cdot \Delta x \text{ volumul unei felii}$$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x \text{ masa unei felii}$$

înlocuind aceste date în legea lui Fourier și trecând la limită $\Delta x \rightarrow 0$ și $\Delta t \rightarrow 0$ se obține ecuația căldurii (casul omogen)

$$1D: \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta(x) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$3D: \frac{\partial T}{\partial t} = D(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Observații:

- 1) Gradientul temp: $\text{grad } T \equiv \hat{\nabla} T = \frac{dT}{dx} \vec{i} + \frac{dT}{dy} \vec{j} + \frac{dT}{dz} \vec{k}$
- 2) $q^{\rightarrow} = \frac{\text{putere}}{\text{suprafață}} \Rightarrow [q]_{S_1} = \frac{W}{m^2}$
- 3) $\lambda = \text{conductivitate termică} \Rightarrow [q]_{S_1} = \frac{W}{mk}$
- 4) $D = \text{difuzivitate} = \frac{k}{\rho c}$
- 5) $c = \text{căldură specifică} c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t} \quad \text{și } [c]_{S_1} = \frac{J}{kg \cdot K}$
- 6) Transferul de căldură e mai rapid în lichid decât în gaz.
- 7) Soluția generală Fourier: $T(x, t) = \left[\sum_m T_m \sin(m\pi x) \right] \exp\left(-D \frac{m^2 \pi^2}{L^2} t\right)$

8. Ecuatia căldurii

7+

Condiții de Frontieră

Dirichlet (temperatura impusă): $T(0, t) = T_S; T(L, t) = T_D$

Neumann (flux impus/izolare): $\frac{\partial T}{\partial x}(L) = 0$

↳ derivata la
stânga

Soluția pt capete termostati ($T=0$): $T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_0 \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{m^2 \pi^2}{L^2} t}$

9. Ecuatiile lui Maxwell

Forme locale (diferentiale) ale legilor electromagnetismului

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_1) \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \\ (M_2) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ (M_3) \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (M_4) \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{câmpuri stationare (nu variază în timp)} \\ \rightarrow \text{electrostatică, magnetostatică} \\ \text{câmpuri dinamice (variază în timp)} \\ \rightarrow \text{electrodinamică, magnetodinamică} \end{array}$$

\vec{E} - intensitatea câmpului electric $[E] = V/m$

\vec{H} - intens. cîmp. magnetic $[\vec{H}] = A/m$

\vec{D} - inductia cîmp electric $[\vec{D}] = C/m^2$

\vec{B} - inductia cîmp electric $[\vec{B}] = T$ (Tesla)

ρ_v - densitatea volumică de sarcină el. $[\rho_v] = C/m^3$

\vec{j} - densitatea de curent de conductie $[\vec{j}] = A/m^2$

Expresiile matematice ale legilor EMG în formă integrală (globală) sunt adesea orice pînă la orice moment.

1) Gauss electric: $\iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho_v dv$

2) Gauss magnetic: $\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

3) Faraday: $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$

4) Ampere - Maxwell

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{ds} \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{D} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

10. Legea lui Coulomb

Enunț: „Forța de interacțiune electrostatică între două sarcini punctiforme q_1 și q_2 este direct proporțională cu sarcinile și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

$$|\vec{F}_{Q_2}| = |\vec{F}_{Q_1}Q_1| = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ unde } k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}$$

permisabilitatea vi-dului
(constantă electrică)

$$[\epsilon_0] = \text{F/m}$$

permisibilitatea
relativă

$$[\epsilon_r] = 1$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$Q_1 > 0 \Rightarrow \vec{F}_{Q_2}$ are sensul lui \vec{r} (repulsie)

$Q_1 < 0 \Rightarrow \vec{F}_{Q_2}$ are sens opus lui \vec{r} (attracție)

Intensitatea câmpului electric în punctul P (unde se află sarcina de probă q)

$$\vec{E}_Q = \frac{\vec{F}_{Q_2}}{q} = k \cdot \frac{Q_1}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$[E]_{\text{SI}} = \text{V/m}$$

II. Legea lui Faraday

Enunț: Tensiunea electromotoare pe o curbă închisă este egală și de sens opus cu viteză de variație temporală a flușului magnetic prin orice suprafață marginală de curbă.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

tensiunea
 electromotoare
 sau circulația
 câmpului electric pe
 curba închisă Γ

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

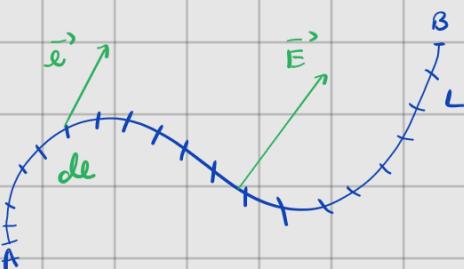
$$[e]_{\text{și}} = V$$

$$u \rightarrow$$

$$L_{AB} = \int_{AB} \vec{F}'(\vec{r}') d\vec{r}'$$

circulația vectorului \vec{F}' pe curba AB

\oint - integrală pe curba închisă
 Γ - contur



12 Legea lui Gauss

Pentru câmp electric:

"Fluxul electric total printr-o suprafață închisă oarecare este egală cu sarcina electrică totală conținută în volumul delimitat de suprafață."

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} \vec{D}' d\vec{s}'}_{\text{flux}} = \iiint_{V(\Sigma)} \rho_v(\vec{r}') dv$$

$\underbrace{V(\Sigma)}_{\text{sarcină}}$

$\vec{D}'(x, y, z) \rightarrow$ câmpul vectorial al inducției electrice

$$\vec{D}' = \epsilon \vec{E}' \quad ; \quad \epsilon - \text{permisivitatea electrică}$$

$$[\vec{D}'] = \text{cm}^{-2}$$

$\rho_v(x, y, z) \rightarrow$ densitatea volumică în sarcina electrică

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad ; \quad [\rho_v]_{s_i} = \text{cm}^{-3}$$

vector suprafață elementară infinit mică

$$\text{fluxul elementar} \quad d\Phi = \vec{D}' d\vec{s}' = |\vec{D}'| \cdot |d\vec{s}'| \cdot \cos\alpha$$

$$[\Phi]_{s_i} = \text{C}$$

$$\text{fluxul total: } \Phi_e = \iint d\Phi = \iint \vec{D}' d\vec{s}'$$

Pentru câmpul magnetic

"Fluxul magnetic total printr-o suprafață închisă este egal cu zero"

Motiv: Nu există sarcină electrică de monopoli!

$$\iint_{\Sigma} \vec{B}' d\vec{s}' = 0$$

$\underbrace{\Sigma}_{\text{flux}}$

\vec{B}' - inducția magnetică

$$[B]_{s_i} = \text{T} (\text{Tesla})$$

13. Faza Lorentz

Faza care acționează asupra sarcini electrică q aflată în câmp electromagnetic este suma dintre forță electrică și forță magnetică

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

q = sarcina electrică

\vec{E} = câmpul electric

\vec{v} = viteză sarcinii

\vec{B} = câmpul magnetic

$$\vec{F}_E = q\vec{E} - \text{forță electrică}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} - \text{forță magnetică}$$

Prop. forță magnetică

- nu afectează lucrul mecanic (perpendicular pe deplasare)
- modifică direcția vitezei, nu modulul
- în câmp magnetic uniform, particula descrie o traекторie circulară sau elicoidală

Pentru o particulă în câmp magnetic uniform:

raza de rotație

$$r = \frac{mv}{qB}$$

pulsatia de rotație

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

↑ factor Lorentz

Transformările Lorentz
indirecte

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

14. Vectorul Poynting \vec{S}

Vectorul Poynting reprezintă densitatea fluxului de putere electromagnetică

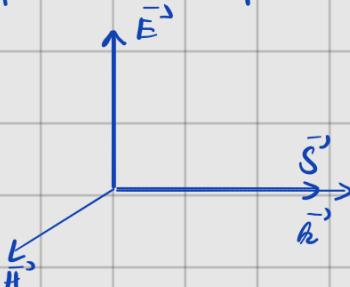
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{S} \perp \vec{E}; \vec{S} \perp \vec{H}; \vec{S} \parallel \vec{B}$$

\vec{S} are direcție de propagare

$$[S] = \frac{W}{m^2} \quad (\frac{\text{putere}}{\text{arie}})$$

$$|S| = c w$$



media temporală a vectorului Poynting

$$\langle |S| \rangle = c \cdot \langle w \rangle_T = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot \vec{E}_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Modulul vectorului Poynting în valoare medie semnifică densitatea de suprafață a fluxului de energie (densitatea de putere ELMG) transportată de unda ELMG

$$\nabla(\vec{E} + \vec{H}) = -\vec{E}(\nabla \times \vec{H})$$

$$\nabla \vec{S} = -\vec{E} \left(\vec{j} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{j} \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{div } \vec{S}}$

(relația locală/diferențială)

$\vec{j} \vec{E}$ = densitatea volumică de putere produsă prin efect Joule

Ecuatia de continuitate a energiei ELMG

$$-\frac{\partial}{\partial t} w = \underbrace{v \vec{E}^2}_{\substack{\text{ pierderea de energie} \\ \text{ELMG din unitate de valoare}}} + \text{div } \vec{S}$$

v = pierderea de energie
ELMG din unitate de valoare
prin efect Joule

$\text{div } \vec{S}$ = pierderea de energie
prin propagare (transport spatial)

Teorema lui Poynting: Viteza de variație a energiei electromagnetică totală dintr-un volum, luată cu semn schimbat este egală cu suma dintre puterea dissipată termică în interiorul volumului și puterea propagată prin suprafața ce mărginește volumul

$$-\frac{dW}{dt} = P_J + P_S$$

15. Energia și intensitatea câmpului electromagnetic

Densitatea energiei ELMG

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

în ved $\vec{D} = \epsilon_0$

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Pentru o undă electromagnetică plană: $\epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$

Intensitatea undei ELMG

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_0^2 \text{ unde } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Energia totală în volum $W_T = \iiint_V w dV$

16. Legi de material în electromagnetism

1. Relația pt câmp electric: $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

ϵ → permeabilitatea absolută

$\epsilon_0 \rightarrow 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$: permeabilitatea vidului

$\epsilon_r \rightarrow$ permeabilitatea relativă (constantă dielectrică)

2. Relația pt câmp magnetic $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

μ → permeabilitatea absolută

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ → permeabilitatea vidului

$\mu_r \rightarrow$ permeabilitatea relativă

3. Legea lui Ohm (formă locală) : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

σ → conductivitatea electrică $[\sigma] = \text{S/m} = (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$

$\rho = 1/\sigma \rightarrow$ rezistivitatea

$j \rightarrow$ densitatea câmpului electric $[j] = \text{A/m}^2$

Clasificarea mediilor

liniar: ϵ, μ, σ nu depind de intensitatea câmpului

omogen: ϵ, μ, σ nu depind de poziție

izotrop: ϵ, μ, σ nu depind de direcție

17. Operatori diferențiali

Operatorul nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

1) Gradientul unui câmp scalar S și $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad } S = \nabla S = \frac{\partial S}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \vec{k}$$

2) Divergența unui câmp vectorial \vec{A} ; $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\text{div } A = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Teorema Gauss - Ostrogradski: $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{A} dV$

3) Rotoriul unui câmp vectorial \vec{A}

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Teorema lui Stokes: $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{s}$

4) Laplacianul $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

18. Ecuatia undei mecanice

$\eta(x, t)$ -> funcția de undă

η - deplasarea particulelor mediului față de poziția lor de echilibru.

v - viteză de propagare a undei (viteză de fază)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{tensiunea} \\ \uparrow \text{elastica} \\ \text{masa unită de} \\ \text{lunghime} \end{matrix}$$

Ex pt medii elastice continue - oscilațile se produc pe direcția de propagare

$$\cdot v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{modul de elasticitate} \\ \leftarrow \text{densitatea mediului} \end{matrix} \quad [E] = Pa \quad [\rho]_{S1} = \frac{kg}{m^3}$$

în cazul mediilor elastici - oscilațile se produc perpendicular pe direcția de propagare

$$\cdot v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{modul de forfecare} \\ \leftarrow \text{de propagare} \end{matrix} \quad [G]_{S1} = Pa$$

în cazul undelor elmg în substancă

$$\cdot v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n} \quad ; \quad \epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \text{permisivitatea mediului} \\ \mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad \text{permeabilitatea mediului} \\ c \approx 3 \cdot 10^8 m/s^{-1} \quad \text{viteză luminii în vid} \\ n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad \text{indice de refracție}$$

Ecuatii undelor

$$\Delta \eta = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

\hookrightarrow operatorul Laplace

$$\square \eta = 0$$

\uparrow operatorul d'Alembert

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Unda monocromatică plană

$$\eta(x, t) = A \cdot \sin(\omega t \pm kx) \quad \text{- funcția de undă} ; \quad k \text{- modul de undă}$$

$$[k]_{S1} = m^{-1}$$

A - amplitudinea

$\omega = 2\pi f$ - pulsării oscilației

$$\text{Unda progresivă } \eta_x = \eta(x_p, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx_p)$$

$$\text{Unda progresivă } \eta(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{regresivă } \eta(x, t) = B \cdot \sin(\omega t + kx)$$

$$\text{în mediu: } \begin{matrix} \text{- nedispersiv} & k(\omega) = \frac{\omega}{v} \\ \text{- dispersiv} & k(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)} \end{matrix}$$

19. Ecuatia undei electromagnetice

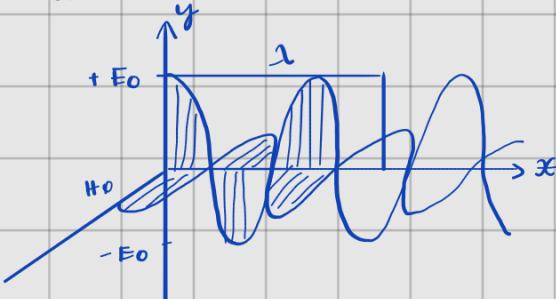
$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla g_v + \mu \frac{d \vec{j}}{dt}$$

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ - legea lui Ohm forma diferențială

$\text{grad}(g_v) = 0$ $\frac{d \vec{v}}{dt} = 0$ \Rightarrow curent statonar, nul în vid

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

amplitudinea vectorială a undei

pulsată undei

vectorul de undă

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$\Phi(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ fază undei

\vec{k} - vector de undă

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{\nu} = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

viteză de fază

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

viteză de variație temporală a fazii

$$\vec{k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}}$$

$\nabla \Phi$ - viteză de variație spațială fazii

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

viteză de grup

Soluția armonică

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = +\frac{1}{\mu \omega} \vec{k} \times \vec{E} \\ \vec{E} = \frac{1}{\epsilon \omega} \vec{H} \times \vec{k} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_0 \perp \vec{k} ; \vec{H} \perp \vec{k} \\ \vec{H}_0 \perp \vec{E} ; \vec{H} \perp \vec{E} \\ \vec{E} \perp \vec{H} \end{array} \right.$$

20. Clasificarea undelor ELMG

1) Clasificare după mediul de propagare

- unde în mediu dielectric perfect $\rightarrow \sigma = 0$ (undele se propagă fără pierderi)
viteză de fază $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} < c$
- unde în mediu conductoare $\rightarrow \sigma \neq 0$. (onda e atenuată exponential pe măsură ce patrunde în mediu, energia fiind transformată în căldură)
- unde în mediu ionizativ \rightarrow proprietățile depend de sarcina liberă

2) După starea de polarizare

- liniar polarizat - vectorul \vec{E} are bază într-un sg plan
- circular polarizat - \vec{E} se rotește în planul perpendicular pe direcția de propagare

3) După regimul de propagare

- unde monochromatice - o sg frecuri w ideală
- pachete de unde - suprapunere de frecvenți
viteză de grup $v_g = \frac{dw}{dk}$

4) După structură câmpului

- moduri transversal electromagnetic: $\vec{E} \perp \vec{k}$ ← direcția de propagare
 $\vec{H} \perp \vec{k}$
- moduri transversal electric: $\vec{E} \perp \vec{k}$
- moduri transversal magnetic: $\vec{H} \perp \vec{k}$

5) După spectrul de frecvențe:

- raze gamma $\lambda < 0.01\text{nm} \Rightarrow \nu = 30\text{ EHz}$
- radiatia infraroșu și ultravioletă $\lambda \in (10,700)\text{nm}$; $\nu \in (300,750)\text{THz}$
- unde radio $\lambda > 1\text{m} \Rightarrow \nu < 300\text{MHz}$
- raze X

21. Efectul Doppler

- Cuadrivectorul de undă (de propagare)

$$|\vec{k}| = \frac{m}{c} \Rightarrow k = |\vec{k}| \cdot \vec{\ell} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad ; \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\cos \alpha = \frac{k_x}{k} ; \cos \beta = \frac{k_y}{k} ; \cos \gamma = \frac{k_z}{k}$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

componenti

cuadrivector de
undă

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = k_x = k \cos \alpha = \frac{m}{c} \cos \alpha \\ k_2 = k_y = k \cos \beta = \frac{m}{c} \cos \beta \\ k_3 = k_z = k \cos \gamma = \frac{m}{c} \cos \gamma \\ k_0 = i \frac{m}{c} \end{array} \right.$$

$\vec{k} = [\vec{\ell}, i \frac{m}{c}]$ cuadrivector
de undă

$$|\vec{k}| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 k_i^2} = \frac{m^2}{c^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1) = 0$$

Efectul Doppler longitudinal

$\vec{v} \parallel$ direcție observator - sursă ($\alpha=0, \gamma=\pi$)

$$\omega_{obs} = \omega_{sursă} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$



Efectul Doppler - Fizean

$$\omega_{obs} = \omega_{sursă} \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \cos \alpha$$

$\alpha =$ unghiul dintre direcția de propagare și direcția vitezii

Efectul Doppler transversal

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \cos \alpha = 0$$

$$\omega_{obs} = \omega_{sursă} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \omega_{sursă}$$



22 Ecuatia lui Schrödinger

Ecuatia Schrödinger temporală

formă generală: $\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow \Psi(x, y, z, t) = \Psi$

unde $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r})$ - operatorul Hamilitonian

Reprezentare în
coordonate $\hat{H} = \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi \longrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta \Psi$$

$\frac{i\hbar}{2m}$ → "difuzivitatea" funcției de undă

Forma atemporală (stationară) $\hat{H}\Psi = E\Psi$

Câmpul electromagnetic propagativ $\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - k' \vec{r})]$

Ecuatia atemporală se interprează matematic ca o ecuație cu vectori și valori proprii, în sensul că pot exista mai multe perechi (E_j, Ψ_j) care o satisfac

- Ψ_j - vector proprie al operatorului \hat{H}

- E_j - valoare proprie a operatorului \hat{H} (energiei potențiale)

23. Funcția de undă

Funcția de undă nu are o semnificație directă, ci e interpretată în sens probabilistic (în acelul patrat al funcției de undă reprezintă densitatea de probabilitate de localizare)

$$\Psi(x, t') \in \mathbb{C}$$

$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ densitate de probabilitate \rightarrow particulele nu au o poziție unică definită și un mic impuls precis cunoscut.

Ψ -vectori ai unui sp Hilbert, asupra căror acțiunează

Condiții de normare $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1$

Valori medii

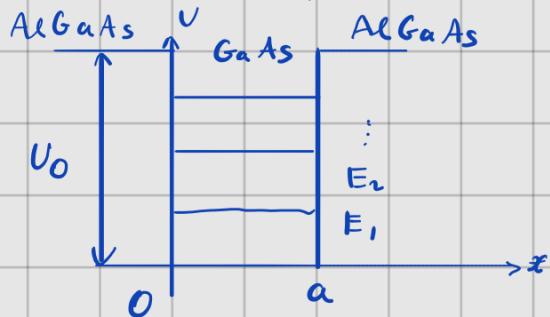
$$\text{pozitie } \langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx$$

$$\text{impuls } \langle p \rangle = \int \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

24. Groapa de potențial cu pereti infiniti

potențialul $U(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, a] \\ \infty & ; x \in [0, a] \end{cases}$

a - lungimea grădinii



Ec atemporală $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} - \frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta + U$

m^* - masa efectivă a electronului

Dacă $U = \infty \Rightarrow$ particula nu poate pătrunde

Dacă $U = 0 \Rightarrow \psi'' + \frac{2m^*E}{\hbar^2} \psi = 0 \quad \text{EDO II}$

$$\Rightarrow \psi(x) = A \cdot \sin \left(-\sqrt{\frac{2m^*E}{\hbar^2}} x + \delta \right)$$

funcția de undă proprie $\psi_n(x) = A_n \sin \left(\sqrt{\frac{2m^*E}{\hbar^2}} x \right)$

Studiem continuitatea lui ψ

$$\psi_m = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\sqrt{\frac{2m^*E_m}{\hbar^2}} x \right) \quad m \geq 1$$

$$\begin{cases} \psi(0_-) = \psi(a_+) \\ \psi(a_-) = \psi(a_+) \end{cases}$$

$$a = A \sin \delta \xrightarrow{A \neq 0} \delta = 0$$

$$A \sin \left(\sqrt{\frac{2m^*E}{\hbar^2}} a - \delta \right) = 0$$

$$\Rightarrow a = n\pi$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{8m^* a^2}$$

energia este
cuantificată

- Primul nivel de energie $n=1 \Rightarrow E_1 = \frac{\hbar^2}{8m^* a^2} \quad ; \quad E_1 \sim \frac{1}{a^2}$
(fundamental)

- Al doilea nivel (primul nivel excitant) $E_2 = 4E_1$

$$n=3 \Rightarrow E_3 = 9E_1$$

25. Grupa de potențial cu pereti finite

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x \notin (0, a) \\ 0; & x \in (0, a) \end{cases}$$

unde U_0 este finit și $E \leq U_0$

Caz I $x < 0 \Rightarrow \varphi(x) = A e^{k_2 x}$

(doar termenul care tinde la 0 pt $x \rightarrow -\infty$)

Caz II $x \in (0, a) \Rightarrow \varphi(x) = A \sin(k_2 x) + B \cos(k_2 x)$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Caz III $x > a \Rightarrow \varphi(x) = A e^{-k_2 x}$

$$k = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Diferență față de grapa infinită

- funcția de undă pătrunde în barieră (nu este nula pt $x < 0$ și $x > a$)
- nivelurile de energie sunt mai joase
- nr de stări legate este finit
- condițiile de cuantificare sunt mai complicate

26. Bariera de potențial rectangular

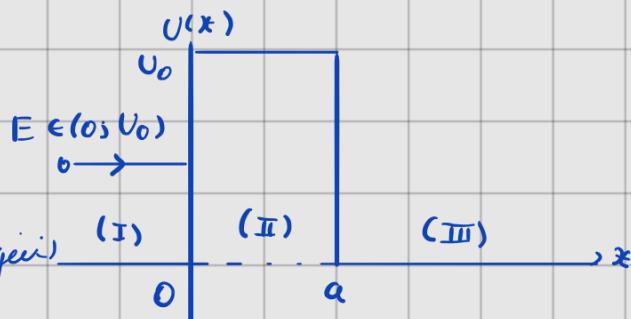
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & ; x \in [0, a] \\ \infty & ; x \notin [0, a] \end{cases}$$

U_0 - "înălțimea" barierii (a energiei)

a - lărgimea barierii

E - energia particulei

clasici $\begin{cases} E < U_0 & \rightarrow \text{reflecta } 100\% \\ E > U_0 & \text{trece } 100\% \end{cases}$



Ec Schrödinger atemporală:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{m} \Delta \Psi + U\Psi = E\Psi$$

Funcția de undă

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & ; x \in (-\infty, 0) \text{ unde } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} ; k \in \mathbb{R}_+^* \\ A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx} & ; x \in (0, a] ; k = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}} ; k \in \mathbb{R}_+^* \\ A_3 e^{ikx} & ; x \in (a, +\infty) (B_3 = 0 \text{ pt inexistența undei regresive}) \end{cases}$$

Continuitatea în $x=0$ și $x=a$

$$\Psi_I(0) = \Psi_{III}(0) \quad \int A_1 + A_2 = A_2 + B_2 \quad (1)$$

$$\Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a) \quad A_2 e^{ka} + B_2 e^{-ka} = A_3 e^{ika} \quad (2)$$

Drivabilitatea $\Psi'_V = 0$ și $x=a$

$$\int A_1 ik - B_1 ik = A_2 k - B_2 k \quad (3)$$

$$A_2 k e^{ka} - B_2 k \cdot e^{-ka} = A_3 i k \cdot e^{ika} \quad (4)$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{A_2(k + ik) + B_2(k - ik)}{2ik} \quad (5)$$

$$\overline{J} = \frac{|\vec{J}_{III}|}{|\vec{J}_I|} = \frac{A_3^2}{A_1^2} \xrightarrow{\text{după barieră}}$$

Înainte de barieră

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{A_3}{2k} (k + ik) \cdot e^{(ik - k)a} \end{cases} \quad (6)$$

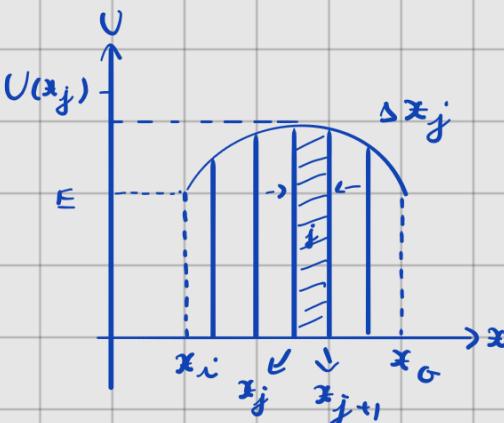
$$\begin{cases} B_2 = \frac{A_3}{2k} (k - ik) \cdot e^{(ik - k)a} \end{cases} \quad (7)$$

27. Efectul tunel prin Bariera de potential de formă oarecare

$$E = U(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_i \\ x_0 \end{array} \right.$$

- (I) $x \in (-\infty, x_i)$
- (II) $x \in (x_i, x_0)$
- (III) $x \in (x_0, \infty)$

$[x_i, x_0]$ se disertizează



sub forma unui set ordonat

$$\{x_j\}_{i \leq j \leq N} \text{ a.c. } \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$$

$$J = \prod_{j=1}^N J_j = \frac{|A_{11}|^2}{|A_{11}|^2} \cdot \frac{|A_{21}|^2}{|A_{21}|^2} \cdots \frac{|A_{N1}|^2}{|A_{N1}|^2}$$

$$J = \frac{|A_{N1}|^2}{|A_{11}|^2} = \frac{|A_{01}|^2}{|A_{11}|^2}$$

$$J = \prod_{j=1}^N \frac{iG_E (U(x_j) - E)}{V(x_j)^2} \exp\left(-\frac{2\Delta x_j}{\hbar} \sqrt{2m(U(x_j) - E)}\right)$$

- Aproximarea WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)

$|x| \rightarrow 0$

$$J = J_0 \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{x_i}^{x_v} \sqrt{[U(x) - E]} dx\right)$$

Radioactivitate $\rightarrow \alpha$



$\rightarrow \beta$

$\rightarrow \gamma$ (curentă lumină sau fotoni)

- emisie de particule / unde

- foarte energetice din nucleile atomice, produsă spontană cu caracter abatoriu
- în general radioactivitatea α se întâlnește la izotopi cu $z > 90$

28. Efect tunel în bariera rectangulară

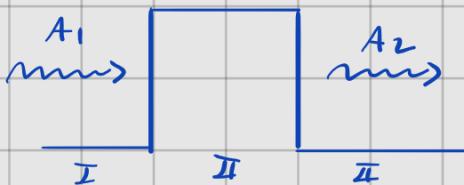
$$A_1 = \frac{A_3(d+ik) - B_2(d-ik)}{2ik} \quad (5)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$A_2 = \frac{A_3}{2d} (d+ik)e^{(ik-d)a} \quad (6)$$

$$\lambda^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$$

$$B_2 = \frac{A_3}{2d} (d-ik) e^{(ik+d)a} \quad (7)$$



$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{v |A_3|^2}{v |A_1|^2} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

probabilitatea de tunelare

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{16 k^2 d^2}{(d^2 + k^2) e^{-2da} + (d^2 + k^2) e^{2da} - 2(d^4 - 6d^2 k^2 + k^4)}$$

Intr-o aproximare valabilă dacă grosimea barierii nu este foarte mică, se poate scrie $e^{-da} \ll e^{da} \Rightarrow A_2 \ll B_2$

$$A_1 \approx \frac{A_3(d-ik)^3}{4ik^2 d} \cdot e^{ikd} \cdot e^{da}$$

$$A_1^* = + \frac{A_3^*(d+ik)^2}{4ik^2 d} \cdot e^{-ikd} \cdot e^{da}$$

$$T = \frac{A_3 \cdot A_3^*}{A_1 \cdot A_1^*} = \frac{16 k^2 d^2}{(d^2 + k^2)^3 \cdot e^{2da}}$$

$$T = \frac{16 \cdot \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}{\left[\frac{2mE + 2m(V_0-E)}{\hbar^2} \right]^2} \cdot e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}$$

$$T = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0-E)}\right)$$

2.9. Dezintegrarea 2 (prin efect tunel)

Legea de dezintegrare radioactivă

$$m(t) = m_0 \exp(-\gamma t)$$

\hookrightarrow masa de izotop radioactiv la $t=0$

γ - coef de dezintegrare radioactivă

$t_{1/2}$ - timpul de înjumătățire

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma}$$
 (varată pe 23 ordine de mărime)

Folosim modelul Gamov - Garvey - Condor

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(z-2)e^2}{r} \quad (U \propto \frac{1}{r} \text{ variație hiperbolică})$$

$$J = J_0 \exp \left[-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{U(r) - E} dr \right]$$

r_1 - este poziția "de ieșire" a particulei din bariera de potential

$$\hbar = \frac{k}{2\pi} \quad \text{și} \quad k = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{Planck})$$

$$\int_R^{r_1} \sqrt{U_0 \frac{R}{r} - E} dr = \sqrt{E} \int_R^{r_1} \sqrt{\frac{U_0 R}{E r} - 1} dr = \sqrt{E} \int_R^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2} - 1} dr, \text{ deoarece } U_0 = E \cdot \frac{r_0}{R}$$

$$\text{Not } \frac{r}{r_1} = \sin^2 \theta \in (0; 1) \Rightarrow \int_R^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} dr = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} \cdot 2r_1 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= r_1 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \Big|_{\theta_2}^{\theta_1}$$

$$\theta_2 = \arcsin \sqrt{\frac{R}{r_1}}$$

$$\text{Dacă } E \ll U_0 \rightarrow R \ll r_1 \rightarrow \sqrt{\frac{R}{r_1}} \ll 1 \Rightarrow \theta_2 \approx \sqrt{\frac{R}{r_1}} \Rightarrow \int_R^{r_1} \sqrt{U(r) - E} dr = \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{U_0 R}{E}} - 2\sqrt{U_0} \right)$$

$$C = \frac{\sqrt{2m\pi}}{R} \cdot \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (z-2)e^2 \quad ; \quad U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2(z-2)e^2}{R}$$

$$z-2 = 90 \Rightarrow C = 360 \text{ MeV}^{\frac{1}{2}}$$

Cof de dezintegrare γ este proporțional cu probabilitatea de tunelare

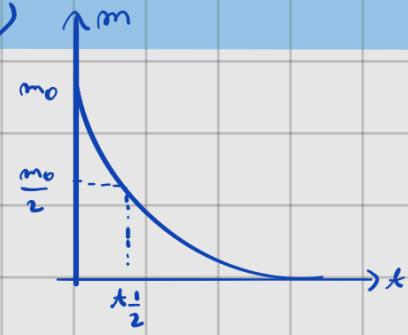
$$E \xrightarrow{?} L \Rightarrow \sqrt{E} \xrightarrow{?} L \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{E}} \xrightarrow{?} L \Rightarrow t_{1/2} \xrightarrow{?}$$

$$\gamma = \Gamma \cdot \exp(C \cdot E^{-\frac{1}{2}})$$

$$E \approx 4,9 \text{ MeV}$$

$C_{\text{teoretic}} = C_{\text{experimental}}$ (modelul tunel pt dezintegrare 2 este satisfăcător)

\Rightarrow Nu \exists un model clasic al acestui proces



30. Autoemisie (emisie electrică la „rece”)

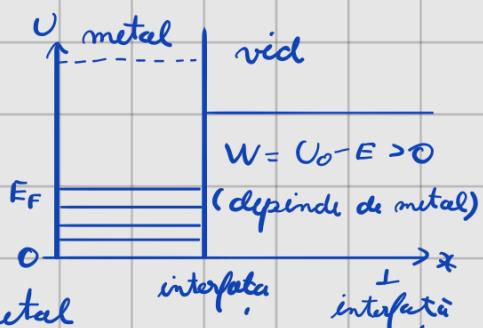
Efect fizic: - la valorile mari ale intensității câmpului electric se observă că electroni pot părăsi

Model teoretic cu efect tunnel

U_0 - discontinuitatea energiei potențiale a e- la trecerea din metal în vid

E_F - „energia Fermi” - nivelul maxim al energiei e- din metal

$$E_F < U_0 \quad E \ll E_F$$



$$\rightarrow \text{fără câmp: } U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \text{ (în metal)} \\ U_0; & x > 0 \text{ (în vid)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{cu câmp electric: } U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ U_0 - eFx; & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Model WKB: } \tilde{J} = \tilde{J}_0 \exp \left[-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^L \sqrt{U(x) - E} dx \right]$$

$$m \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\int_0^L \sqrt{U_0 - eFx - E} dx$$

$$U(L) = E \\ U_0 - eFL = E \Rightarrow L = \frac{U_0 - E}{eF} = \frac{W}{eF}$$

$$\int_0^L \sqrt{W - eFx} dx = \sqrt{eF} \int_0^L \sqrt{L-x} dx = -\frac{2}{3} \frac{W^{3/2}}{eF}$$

$$\tilde{J} = \tilde{J}_0 \exp \left[-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{2}{3} \cdot \frac{W^{3/2}}{eF} \right]$$

Electronii extrăși în câmp formează un curent de emisie (măsurabil)

$$i \propto \tilde{J} \quad ; \quad I = I_0 \exp \left[-\frac{E_C}{F_C} \right] \quad \text{unde} \quad F_C = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{W^{3/2}}{e}$$

Câmpul caracteristic $F_C(W) \propto W^{3/2}$

Aplicații practice

a) Condensator $F = \frac{U}{d} = \frac{Q}{cd}$

b) sferă metalică $\Rightarrow |I|^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$

c) electro-negativitate $\Rightarrow R \approx 500 \text{ mm} \quad \Rightarrow F = \frac{500}{5 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{V}{m} = 10^3 V = 1 \text{ GV}$

