

Varianta 5

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în \mathbb{Z} inecuația $x^2 - 10x + 12 \leq 0$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 3 \log_2 x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(4)$.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ știind că $A(-2, 9), B(7, -4), C(8, -3)$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A(0, 6), B(1, 4), C(-1, 8)$ și matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 6 & 4 & 8 & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.
- 5p** b) Să se determine rangul matricei M în cazul $a = 3, b = 0$.
- 5p** c) Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M , care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M) = 2$.
2. Pe mulțimea \mathbb{Z} definim legea de compozиție $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$.
- 5p** a) Să se arate că legea “*” este asociativă.
- 5p** b) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z} în raport cu legea “*”.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de 2009 ori } x} = -1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.
- 5p** a) Să se calculeze derivata funcției f .
- 5p** b) Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y = 2x$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $x > 1$, atunci $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
- 5p** a) Să se arate că $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \forall k \in (0, \infty)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx, n \in \mathbb{N}$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.