

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $(1-i)(1+2i) - 3(2-i)$ .
- 5p** 2. Să se arate că pentru oricare  $a \in \mathbb{R}^*$ , dreapta  $y = x + 4$  intersectează parabola  $y = ax^2 + (a-2)x + 1$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{10, 11, 12, \dots, 40\}$ , suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.
- 5p** 5. În triunghiul  $ABC$  punctele  $M, N, P$  sunt mijloacele laturilor. Fie  $H$  ortocentrul triunghiului  $MNP$ . Să se demonstreze că  $AH = BH = CH$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea  $S_3$  a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se verifice că permutarea  $\sigma$  este pară.
- 5p** b) Să se determine toate permutările  $x \in S_3$ , astfel încât  $x\sigma = \sigma x$ .
- 5p** c) Să se rezolve ecuația  $x^2 = \sigma$ , cu  $x \in S_3$ .
2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$ .
- 5p** b) Să se arate că  $(G, \cdot)$  este un grup abelian, unde „ $\cdot$ ” reprezintă înmulțirea matricelor.
- 5p** c) Să se determine  $t \in \mathbb{R}$  astfel încât  $X(1)X(2)\dots X(2009) = X(t-1)$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția este convexă pe intervalul  $(0, e]$ .
- 5p** b) Să se determine asymptotele graficului funcției.
- 5p** c) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \geq 3}$ , dat de  $a_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln n}{n} - f(n)$ , este descrescător.
2. Se consideră funcția  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ .
- 5p** a) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției  $f$  și axele de coordonate.
- 5p** b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \left( f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$ .