

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (\log_2 3, \infty) = \emptyset$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se determine abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, astfel încât C_n^3 să dividă C_{n+1}^3 .
- 5p** 5. Fie punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ și $C(0, 4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului ABC .
- 5p** 6. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg}^2 x = 6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
- 5p** c) Pentru $m = 1$ să se determine soluțiile reale (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$.
2. Pe mulțimea $G = [0, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .
- 5p** a) Să se calculeze $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$.
- 5p** b) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{1}{2}$, $x \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} + 2x + 1$.
- 5p** a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se arate că funcția f este inversabilă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(-1) + f(-2) + f(-3) + \dots + f(-n) + n^2)$.
2. Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin \pi x dx$.
- 5p** a) Să se calculeze a_1 .
- 5p** b) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.