

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $(1+i)^{20}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Să se calculeze suma $S = f(f(-10)) + f(f(-9)) + \dots + f(f(-1)) + f(f(1)) + \dots + f(f(9)) + f(f(10))$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(3^x + 1)$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze $A_5^3 - 6C_5^3$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că distanța de la punctul $A(m, m+1)$ la dreapta $d : 3x - 4y - 1 = 0$ este 1.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește matricea $[A, B] = AB - BA$.
- 5p** a) Pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A, A^2]$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A, A^*] = O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A .
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_2$.
2. Se consideră intervalul $H = (0, 1)$.
- 5p** a) Să se arate că relația $a \circ b = \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ definește o lege de compoziție pe H .
- 5p** b) Să se arate că funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y > 0$, unde legea " \circ " este definită la punctul a).
- 5p** c) Știind că legea " \circ " definită la punctul a) este asociativă, să se rezolve în mulțimea (H, \circ) ecuația $x \circ x \circ x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se definește funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$ și, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.
- 5p** a) Să se arate că $f_3(x) = 8e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să determine asymptotele graficului funcției f_n .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.
2. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0, 1]$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.