Varianta 100

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x| = 1-x$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.

5p **4.** Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate. Ştiind că $A(1,1), B(5,2)$ şi $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie $a\in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n\in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n\in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ şi polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(2)$ şi $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$, $a\in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^3 - x^2 + x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+2}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n\in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.