

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine primul termen al progresiei aritmetice  $a_1, a_2, 13, 17, \dots$ .
- 5p** 2. Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2\sin x$  este impară.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 2.
- 5p** 5. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că dreptele  $d_1: mx + 3y - 2 = 0$  și  $d_2: 12x + 2y + 1 = 0$  sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Știind că  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , să se calculeze  $\sin \alpha$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul  $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 6, \text{ cu } a, b \in \mathbb{R} \\ 3x - y - 2z = b \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine  $a, b$  pentru care sistemul are soluția  $(1, 1, 1)$ .
- 5p** b) Să se determine  $a, b$  astfel încât sistemul să fie incompatibil.
- 5p** c) Să se arate că pentru orice  $a \in \mathbb{Z}$  există  $b \in \mathbb{Z}$  astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componente numere întregi.
2. Se consideră mulțimea de matrice  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ .
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $A$ .
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice  $X \in A$ ,  $X^2 = I_3$  sau  $X^2 = O_3$ .
- 5p** c) Să se determine numărul matricelor  $X$  din mulțimea  $A$  care au proprietatea  $X^2 = O_3$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^x$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.
- 5p** b) Să se arate că  $f(x) \geq 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă  $f(x) \geq mx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , atunci  $m = 2$ .
2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^3 x \cos x$  și  $F$  o primitivă a funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să arate că există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $4F(x) = \sin^4 x + c$ .
- 5p** b) Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției  $f$  la intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\int_0^\pi f^{2n+1}(x) dx = 0$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .