Varianta 77

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 2 și cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x.$ Să se calculeze $f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-10).$

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 56$.

5p **4.** Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}.$ Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.

5p **6.** Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\mathrm{tg}\alpha.$

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}.$

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R},$ matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty).$ Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x+y) + 7\alpha.$

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha = 2,$ cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f: G_2 \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 3x - 6$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = e^x - 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că funcția f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=1$.

5p **c)** Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x=0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n = \int_1^2 ((x-1)(2-x))^n\,dx.$

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n = nI_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.