

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie a, b, c numere naturale nenule în progresie geometrică. Știind că $a + b + c$ este un număr par, să se arate că numerele a, b, c sunt pare.
- 5p** 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Să se arate că $f(a) + f(a+1) \geq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_2 x + \log_4 x > 3$.
- 5p** 4. Să se determine numerele naturale n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 120$.
- 5p** 5. Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} - a\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ este obtuz dacă și numai dacă $a > 2$.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi cu $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = 1$ și $BC = 4$. Să se calculeze aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $tr(A) = a + d$.
- 5p** a) Să se verifice că $A^2 - tr(A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = 0_2$.
- 5p** b) Să se demonstreze că, dacă $tr(A) = 0$, atunci $A^2B = BA^2$, pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** c) Să se arate că dacă $tr(A) \neq 0$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $A^2B = BA^2$, atunci $AB = BA$.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p** a) Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini complexe ale polinomului f .
- 5p** b) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X - 1)(X - 3)$.
- 5p** c) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie mulțimea $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \dots, 2009\}$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-2009}$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Știind că $a \in \mathbb{R}^*$, să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = a$.
- 5p** c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(f(n))_{n \geq 1}$ este convergent.