Varianta 46

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x + \lg x = 6$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \to B$, cu proprietatea că $f(3) = 1$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ şi $P(0, 3)$. Să se determine coordonatele punctului *Q* astfel încât *MNPQ* să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din *A* în triunghiul *ABC*, ştiind că $AB = 2$, $AC = 3$ şi $BC = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

5p **b)** Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a + d = 0$.

5p **c)** Ştiind că $A^2 = O_2$, să se calculeze $\det(A + 2I_2)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1 \}$ şi operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $(a, 15) \in G$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.

5p **c)** Să se arate că $(G, *)$ este grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x-1|}{e^x}$.

5p **a)** Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) \right)$.

2. Se consideră funcția $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$.

5p **a)** Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât funcția $F : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f* şi graficul funcției $g : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \pi x - x^2$.