

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7} = 0.a_1a_2a_3\dots$. Să se determine a_{60} .
- 5p** 2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$, $g(x) = 3x + 2$. Să se calculeze $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$.
- 5p** 3. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 + 1$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1, -2)$, $B(4, 1)$ și $C(-1, a)$ sunt coliniare.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi care are $AB = 3$, $AC = 5$ și $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2 = O_2$.
- 5p** a) Să se arate că $a + d = 0$.
- 5p** b) Să se arate că matricea $I_2 + A$ este inversabilă.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $AX = O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, numărul $a = \sqrt{2} + i$ și mulțimile $A = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X]\}$ și $B = \{h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \leq 3\}$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(a)$.
- 5p** b) Să se calculeze $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.
- 5p** c) Să se arate că $A = B$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - x}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, \sqrt{3})$ și pe $(\sqrt{3}, \infty)$.
- 5p** b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu este convergent.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
- 5p** a) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^1 F(x)dx$.