

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = 2x^2 + x + 4 \end{cases}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arctg x + \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt[4]{5} + 1)^{100}$.
- 5p** 5. Să se arate că punctele $A(-1, 5)$, $B(1, 1)$ și $C(3, -3)$ sunt coliniare.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 și 7.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ și matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se determine rangul matricei A_0 .
- 5p** b) Să se arate că $A_0 B_0 - B_0 A_0 = A_0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $A^n B - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.
- 5p** a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.
- 5p** b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.
- 5p** c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică și, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit de $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.