Varianta 91

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$.

5p **2.** Să se determine numerele reale x şi y ştiind că $x+2y=1$ şi $x^2-6y^2=1$.

5p **3.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$ nu este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^3-C_9^3$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Ştiind că vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au acelaşi modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.

5p **6.** Să se arate că $\sin 40^\circ\cdot\sin 140^\circ=\cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $A^2=5A$.

5p **b)** Pentru $x=2$ să se calculeze A^{2009}.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}\left(A+A^t\right)=1$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c, ştiind că $a=b=c$, iar restul împărţirii lui f la $X+1$ este 10.

5p **b)** Ştiind că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcţiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\sin^2 x},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x F(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}$.