

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.
- 5p** 2. Să se arate că funcția $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ este impară.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și O centrul cercului circumscris lui. Știind că $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Să se calculeze $\tan 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că A este matrice inversabilă.
- 5p** b) Să se demonstreze că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n - b^n & a^n - b^n \\ 0 & b^n & b^n - c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze A^{-1} .
2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f(X^2 + 3X + 1) = f^2(X) + 3f(X) + 1$ și $f(0) = 0$.
- 5p** a) Să se determine $f(-1)$.
- 5p** b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X - 5$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $f = X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul b).
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geq 1$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.