

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z .
- 5p** 2. Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.
- 5p** 4. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin cel puțin un număr par.
- 5p** 5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.
- 5p** 6. Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\tan a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + y - z = 2, \text{ unde } m \in \mathbb{R}. \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$.
2. Fie $p \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 4X + p \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p** a) Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.
- 5p** b) Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se definește funcția $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.
- 5p** a) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funcția f_n este convexă.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.
2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^x f(t) \cos t dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se studieze monotonia funcției g pe intervalul $[0, \pi]$.
- 5p** c) Să se calculeze $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.