Varianta 34

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+2x+1$ se găseşte pe dreapta de ecuație $x+y=0$.

5p **3.** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x=\sin 2x$ din intervalul $[0,\ 2\pi)$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$, cu proprietatea că $f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $K=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi $A=LK$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2=32A$.

5p **c)** Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=axy-x-y+6$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a=\dfrac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$” admite element neutru dacă şi numai dacă $a=\dfrac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă intervalul $[0,6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”, atunci $a\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<0,\ \forall x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f_n(x)=\int_0^x t^n\arcsin t\,dt,\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f_3.

5p **b)** Să se calculeze $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_2(x)$.