Varianta 55

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $[-\sqrt{8}]-\{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$ astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

5p **5.** Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ și $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$, știind că ctg x = 3.

SUBIECTUL II (30p)

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2\leq 1$, atunci șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ și $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6}=64x_n$, $\forall n\geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11},+,\cdot)$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $x^2=\hat{8}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

5p **b)** Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

5p **c)** Să se arate că polinomul $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției *f*.

2. Fie funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt\leq\dfrac{x-1}{6},\forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx$.