

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = 3$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f : \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + 1$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr \overline{ab} din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.
- 5p** 5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde A(-2, -1), B(2, 0), C(0, 6).
- 5p** 6. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii \vec{u} și \vec{v} să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.
- 5p** b) Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.
- 5p** a) Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0, 1)$ și $a_{n+1} = a_n \left(1 - \sqrt{a_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că $a_n \in (0, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** b) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dat de $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1 .
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze aria suprafeței delimitată de dreptele $x=0, x=1, Ox$ și graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)f(x)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.