SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\overline{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2+4x-3\geq 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ este injectivă.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie ABC un triunghi care are $AB=2$, $AC=3$ şi $BC=2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul, în cazul în care a,b,c sunt distincte două câte două.

5p **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a=b\neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{a+b\sqrt{5}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $x=9+4\sqrt{5}\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea M are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0\in(0,1), x_{n+1}=e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{4x+5}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1}+5I_n=\dfrac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.