SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_4 16+\log_3 9+\sqrt[3]{27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+4x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+3\cdot 4^x=4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{n}\ \mid n\in\mathbb{N},\ n<100\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x\in\mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și $A=aI_3+bB+cB^2$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A)\ge 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ și $H=\left\{x^2\mid\ x\in\mathbb{Z}_7\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$ există $x,y\in\mathbb{Z}_7$ astfel încât $a=x^2+y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000}\mid x\in\mathbb{Z}_7\}=H$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2k\sqrt{k}},\ \forall k\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\int_0^x t^n \operatorname{arctg} t\,dt,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $f_1(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2},\ \forall x\ge 0$.

5p **b)** Să arate că $f_n(1)\le\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1},\forall n\ge 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nf_n(1)$.