Varianta 23

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{x-1}{x-2}$.

5p **3.** Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{1,2,3,...,40\}$, numărul $2^{n+2}\cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(5,-3), B(2,-1), C(0,9)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\alpha = 2$, să se calculeze $\sin 4\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall X \in C(A)$, $XA = AX$.

5p **b)** Să se arate că dacă $Y \in C(A)$ și $Y^2 = O_2$, atunci $Y = O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Z \in C(A), Z \neq O_2$ și Z are toate elementele raționale, atunci $\det Z \neq 0$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ și polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

5p **b)** Pentru $a = \hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuația $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^a \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+a), \forall a > -1$.

5p **b)** Să se arate că $f(x) < \ln(1+x), \forall x > 0$.

5p **c)** Să se arate că $f(\pi) > f(2\pi)$.