Varianta 59

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,...,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4 , dar să nu fie divizibil cu 8.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 x$ ştiind că ctg x = 6.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: mx+y+1=0,\ d_2: x+3y+2=0,\ d_3: -x-y+4=0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \mid m,n\in\mathbb{Z}_5,\ m=\pm\hat{1}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, atunci $B\cdot A=A^{-1}\cdot B$.

5p **b)** Să se arate că *H* este un grup cu 10 elemente în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul *H*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\sin x$ și F o primitivă a lui f .

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3 \frac{f(x)}{\sin x}dx=2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.