

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+\dots+x=231$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\leq 0$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\rightarrow(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\dots,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A , care conțin elementul 1.
- 5p** 5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $b\neq 0$.
- 5p** a) Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $u,v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.
- 5p** b) Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ și polinomul $f=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$.
- 5p** a) Să se verifice că, pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\neq\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.
- 5p** b) Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4})$, $\forall x\in\mathbb{Z}_7$.
- 5p** c) Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră numărul real $a>0$ și funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.
- 5p** a) Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p** c) Să se determine $a\in(0,\infty)$, știind că $f(x)\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.
- 5p** c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{1}{e}$ și $x=e$.