

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că numerele 2,  $a, b$  sunt în progresie geometrică și 2, 17,  $a$  sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se rezolve ecuația  $f(f(x))=0$ , știind că  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=-3x+2$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea  $[0, 2\pi)$  ecuația  $\operatorname{tg}(-x)=1-2\operatorname{tg}x$ .
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor  $f : \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$  care verifică relația  $f(2)=2$ .
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E$  astfel încât  $\overline{AD}=2\overline{DB}, \overline{AE}=2\overline{EC}$ . Să se arate că dreptele  $DE$  și  $BC$  sunt paralele.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , dacă  $A=\frac{\pi}{4}, B=\frac{\pi}{6}$  și  $AB=6$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$  și matricea transpusă  $A^t$ .

- 5p** a) Pentru  $a=c=1$  și  $b=d=0$ , să se calculeze  $\det(A)$ .
- 5p** b) Să se arate că  $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$ , unde  $\alpha=a^2+b^2+c^2+d^2$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă  $A \neq O_4$ , atunci  $A$  este inversabilă.
2. Se consideră  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și polinomul  $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ , astfel încât  $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1$ .
- 5p** a) Să se demonstreze că  $|a| \leq 3$ .
- 5p** b) Să se arate că, dacă  $c < 0$ , polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul  $(0, \infty)$ .
- 5p** c) Să se arate că, dacă  $a=1, c=-1$ , atunci  $b=-1$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$ .

- 5p** a) Să se studieze derivabilitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0=0$ .
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației  $f(x)=m$ , unde  $m$  este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$  și  $g : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt$ .

Se admite cunoscut faptul că  $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se arate că funcția  $g$  este strict descrescătoare.
- 5p** c) Să se arate că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) > 0,9$ .