

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , de termen general  $a_n = n^2 - n$ , este strict monoton.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  și  $g(x) = x - 2009$ .  
Să se demonstreze că, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f \circ g)(x) \geq 0$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în  $(0, \pi)$  ecuația  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .
- 5p** 4. Să se determine  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 3$  știind că  $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$ .
- 5p** 5. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că dreptele  $d_1 : mx + (m+2)y - 1 = 0$  și  $d_2 : (m+2)x + 4my - 8 = 0$  sunt paralele.
- 5p** 6. Fie  $ABC$  un triunghi cu  $\operatorname{tg} A = 2$ ,  $\operatorname{tg} B = 3$ . Să se determine măsura unghiului  $C$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se arate că dacă  $Y \in M_2(\mathbb{Z})$  și  $AY = YA$ , atunci  $Y \in M$ .
- 5p** b) Să se arate că dacă  $X \in M$  și  $\det(X) = 0$ , atunci  $X = O_2$ .
- 5p** c) Să se arate că  $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^5 - X^4 + 3X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$ .
- 5p** a) Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$ , unde  $x_1, x_2, \dots, x_5$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că  $f$  are o singură rădăcină reală.

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(-\infty, -2)$ .
- 5p** b) Să calculeze limita sirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln\frac{n(n+1)}{2}$ .
- 5p** c) Să se arate că există un punct  $c \in (1, 2)$  astfel încât  $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$ .
2. Fie funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_0^1 xf(x)dx$ .
- 5p** b) Să se arate că  $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx$ .