

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$.
- 5p** 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50)$.
- 5p** 3. Se consideră funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 3x + 1$. Să se demonstreze că funcția f este neinversabilă.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din multimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)! - x! \leq 100$.
- 5p** 5. Să se arate că dreptele de ecuații $d_1 : 2x - y + 1 = 0$ și $d_2 : 2x + y - 1 = 0$ sunt simetrice față de axa Oy .
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos \frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se verifice relația $A^3 - A = A^2 - I_3$.
- 5p** b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n + 3$.
- 2.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$.
- 5p** a) Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4 .
- 5p** b) Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.
- 5p** c) Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$.
- 5p** a) Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.
- 5p** b) Să arate că, pentru orice $k \in (0, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$, este strict descrescător.
- 2.** Fie funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, +\infty)$.
- 5p** c) Să se arate, folosind eventual funcția f , că $\int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \frac{5}{12}$.