

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se ordoneze crescător numerele  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[4]{5}$ .
- 5p** 2. Să se determine valoarea minimă a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(6, 4)$  și este perpendiculară pe dreapta  $d : 2x - 3y + 1 = 0$ .
- 5p** 6. Știind că  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , să se calculeze  $\cos 2\alpha$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- 5p** a) Să se verifice egalitatea  $A^2 - A = 2I_3$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $A^{-1}$ .
- 5p** c) Să se arate că  $A^{2009} + A^{2008} = 2^{2008}(A + I_3)$ .
2. Se consideră cunoscut că  $(\mathbb{Z}, *, \circ)$  este un inel comutativ, unde  $x * y = x + y - 3$  și  $x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** a) Să se arate că elementul neutru al legii de compozitie „ $\circ$ ” este 4.
- 5p** b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Z}$  astfel încât între inelele  $(\mathbb{Z}, *, \circ)$  și  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  să existe un izomorfism de forma  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = a \cdot x + b$ .
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{Z}$  ecuația  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = 2^{2009} + 3$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 18x^2 - \ln x$ .
- 5p** a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $f(x) \geq a$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- 5p** c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației  $f(x) = m$ , unde  $m$  este un parametru real.
2. Se consideră funcțiile  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_a(x) = \frac{1}{|x-a|+3}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se arate că, pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ , funcția  $f_a$  are primitive strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^3 f_2(x) dx$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^3 f_a(x) dx$ .