

# Calcolo Parallelo e Distribuito

a.a. 2021-2022

---

Prodotto Matrice-Vettore  
approfondimenti  
parte 7

Docente: Prof. L. Marcellino

# PROBLEMA: Prodotto Matrice-Vettore

---

Progettazione  
di un algoritmo parallelo  
per architettura MIMD

per il calcolo del prodotto  
di una matrice  $A$  pr un vettore  $b$ :

matrice  $A$ :  $N$  righe,  $M$  colonne  
Vettore  $b$ :  $M$  elementi

# III STRATEGIA

---

Decomposizione 1: BLOCCHI di RIGHE

+

Decomposizione 2: BLOCCHI di COLONNE

=

Decomposizione 3: **BLOCCHI QUADRATI**

Abbiamo calcolato...

Calcolo **di speedup ed efficienza**  
(def classica)

in ambiente **MIMD-DM**

e

in ambiente **MIMD-SM**

... in tutte le possibilità!

Abbiamo calcolato...

**isoefficienza**

**non si considerano le comunicazioni**

in ambiente **MIMD-DM**

e

in ambiente **MIMD-SM**

### III Strategia: **isoefficienza**

---

**Ma...**

I conti devono essere rifatti nel caso in cui  
 $\text{mod}(N, q) \neq 0$  e/o  $\text{mod}(M, p) \neq 0$

Calcolo **di speedup**  
(def Ware Amdahl-generalizzata)

in ambiente **MIMD-DM**

e

in ambiente **MIMD-SM**

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

matrice A: N righe, M colonne  
Vettore b: M elementi

**In sequenziale:**

$$T_1(N \times M) = N[2M - 1] \text{ operazioni}$$

Per calcolare lo speedup con la legge di W-A, la prima domanda che mi devo fare è se per questa strategia di parallelizzazione posso esattamente distinguere la parte parallela  
(nella fase di calcolo locale lavorano tutti i processori)  
e la parte sequenziale  
(la collezione dei risultati avviene in maniera sequenziale)



### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

matrice A: N righe, M colonne  
Vettore b: M elementi

**In sequenziale:**

$$T(1) = N[2M-1] \text{ operazioni}$$

Per calcolare lo speedup con la legge di W-A, la prima domanda che mi devo fare è se per questa strategia di parallelizzazione posso esattamente distinguere la parte parallela  
(nella fase di calcolo locale lavorano tutti i processori)  
e la parte sequenziale  
(la collezione dei risultati avviene in maniera sequenziale)

Quasi sempre fasi a parallelismo medio

$$S_p = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\alpha_k}{k} + \frac{\alpha_p}{p}}$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

matrice A: N righe, M colonne  
Vettore b: M elementi

**In sequenziale:**

$$T(1) = N[2M-1] \text{ operazioni}$$

**In parallelo:**

1 fase (tutta parallela)

Calcolo prodotti parziali

$N/q [2M/p - 1]$  operazioni



contemporaneamente

fatto da  $q \times p$  processori/core

$q \times p [N/q [2M/p - 1]]$   
delle  $N[2M-1]$  operazioni



$$\alpha_{q \times p} = q \times p \frac{\frac{N}{q} [\frac{2M}{p} - 1]}{N[2M - 1]}$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

matrice A: N righe, M colonne

Vettore b: M elementi

**In sequenziale:**

$$T(1) = N[2M-1] \text{ operazioni}$$

**Per procedere con i calcoli bisogna  
fissare dei valori per q e p**

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$6 = q \times p = 2 \times 3$       $p = 3$   
I strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$

$8 = q \times p = 2 \times 4$       $p = 4$   
II strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$	$P_{03}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$6=q \times p=2 \times 3$        $p=3$   
I strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$

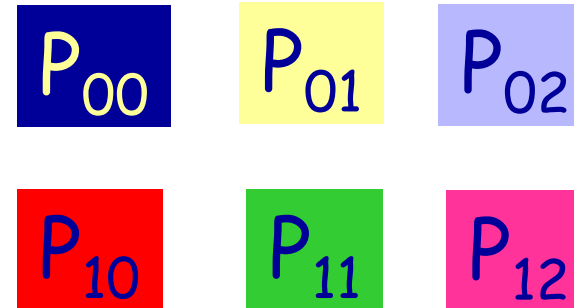
### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

**In sequenziale:**

**$T(1) = N[2M-1]$  operazioni**

**$6=qxp=2 \times 3$        $p=3$**

matrice A: N righe, M colonne  
Vettore b: M elementi



**In parallelo:**

1 fase (tutta parallela)

Calcolo prodotti parziali

**$N/q [2M/p - 1]$  operazioni**

contemporaneamente

fatto da  $qxp$  processori/core

**$qxp N/q [2M/p - 1]$   
delle  $N[2M-1]$  operazioni**

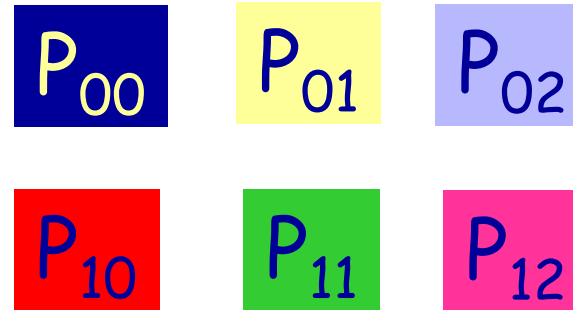
$$\alpha_6 = 6 \frac{\frac{N}{2} \left[ \frac{2M}{3} - 1 \right]}{N[2M - 1]}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$6=q \times p=2 \times 3$       $p=3$   
I strategia



## Parallelismo medio:

Non esiste nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 5, 4, 3 processori/core



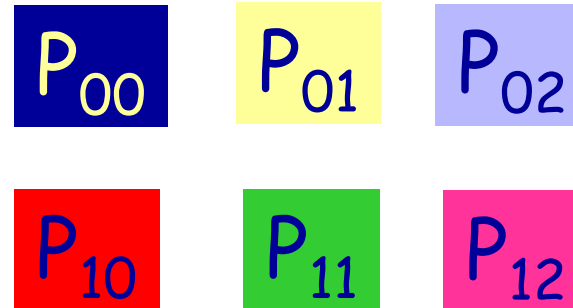
$$\alpha_5 = \alpha_4 = \alpha_3 = 0$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

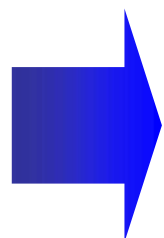
Collezione dei risultati

$6=q \times p=2 \times 3$       $p=3$   
I strategia



#### Parallelismo medio:

Esiste, invece, una fase in cui, i due processori/core lavorano in sequenziale per effettuare la somma dei contributi, ovvero vettori di dimensione  $N/2$  (lungo le colonne) contemporaneamente (per 2)

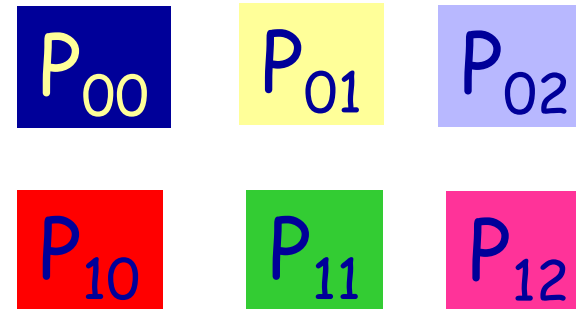

$$\alpha_2 = 2 \frac{(3-1) \frac{N}{2}}{N[2M-1]}$$



# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

Collezione dei risultati

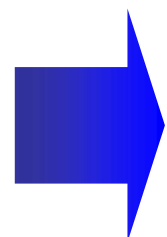
$6=q \times p=2 \times 3$       $p=3$   
I strategia



## Parallelismo medio:

Fase in cui, i due processori  $P_{00}$  e  $P_{10}$  della griglia (colonne) contemporaneamente calcolano la somma dei contributi (le colonne) contemporaneamente.

Tutti i passi della I strategia

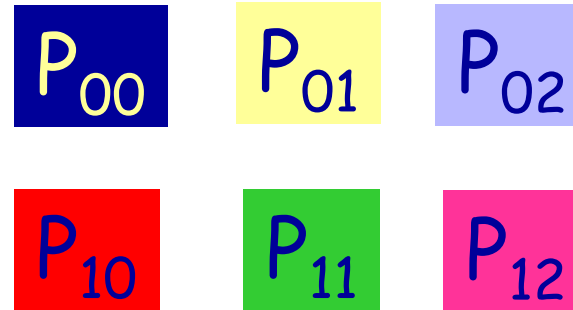

$$\alpha_2 = 2 \frac{(3-1) \frac{N}{2}}{N[2M-1]}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

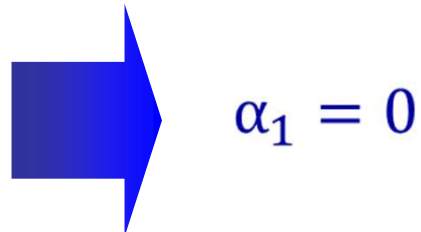
Collezione dei risultati

$6=q \times p=2 \times 3$       $p=3$   
I strategia



**Parallelismo medio:**

Non esiste nessuna fase in cui lavora 1 processore/core



# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$6=q \times p=2 \times 3$        $p=3$   
I strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$

**Attenzione:**

Per essere sicura di aver fatto bene i conti devo sommare tutti i numeratori e trovarmi il denominatore comune!

$$\alpha_6 = 6 \frac{\frac{N}{2} \left[ \frac{2M}{3} - 1 \right]}{N[2M - 1]} \quad \alpha_5 = \alpha_4 = \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 = 2 \frac{(3 - 1) \frac{N}{2}}{N[2M - 1]} \quad \alpha_1 = 0$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$6=q \times p=2 \times 3$        $p=3$   
I strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$

Non resta che sostituire i valori  
calcolati nella formula generalizzata

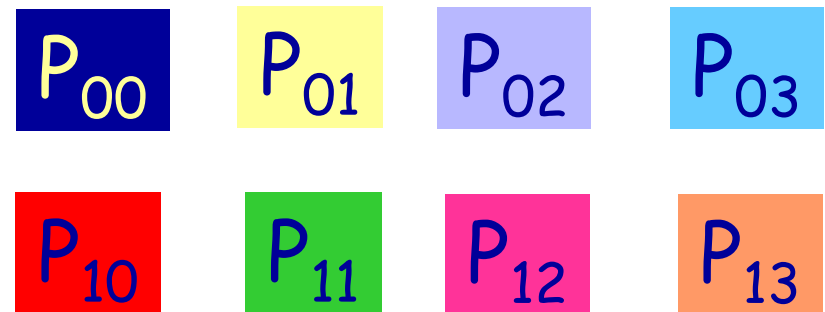
$$S_p = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\alpha_k}{k} + \frac{\alpha_p}{p}}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$       $p=4$   
II strategia



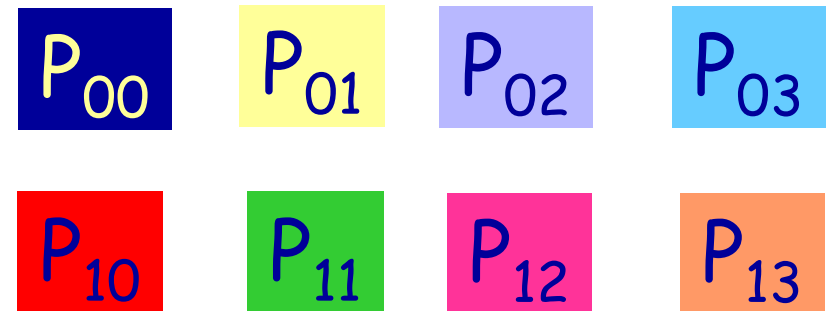
### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

**In sequenziale:**

**$T(1) = N[2M-1]$  operazioni**

matrice A: N righe, M colonne  
Vettore b: M elementi

**$8=q \times p=2 \times 4$        $p=4$**



**In parallelo:**

1 fase (tutta parallela)


Calcolo prodotti parziali

**$N/q [2M/p - 1]$  operazioni**

contemporaneamente

fatto da  $q \times p$  processori/core

**$q \times p N/q [2M/p - 1]$   
delle  $N[2M-1]$  operazioni**



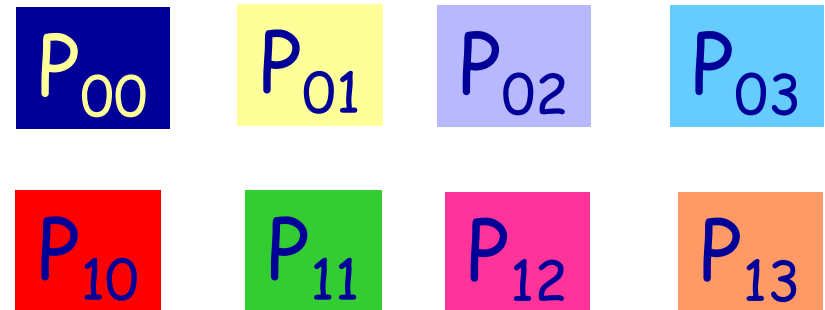
$$\alpha_8 = 8 \frac{\frac{N}{2} \left[ \frac{2M}{4} - 1 \right]}{N[2M-1]}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia



**Parallelismo medio:**

Non esiste nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 7, 6, 5 processori/core



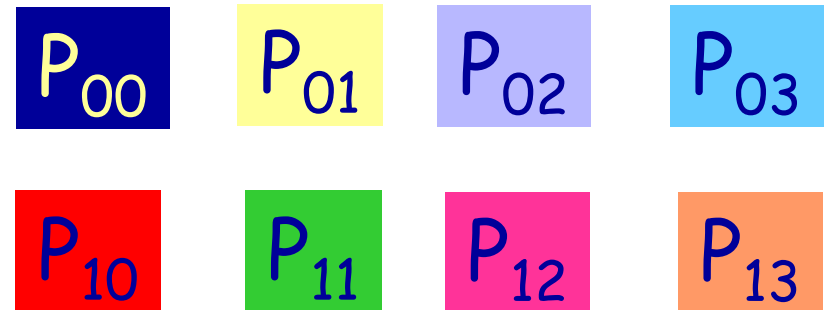
$$\alpha_7 = \alpha_6 = \alpha_5 = 0$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

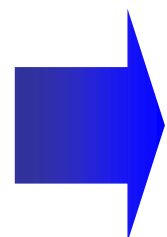
Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia



#### Parallelismo medio:

Esiste, invece, una fase (1passo II strategia) in cui quattro processori/core lavorano contemporaneamente per effettuare la somma parziale dei contributi, ovvero vettori di dimensione  $N/2$  (lungo le colonne)

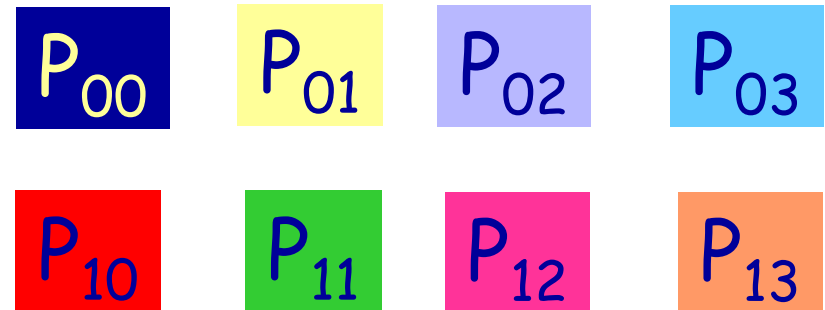

$$\alpha_4 = 4 \frac{1 \cdot \frac{N}{2}}{N[2M - 1]}$$



# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

Collezione dei risultati

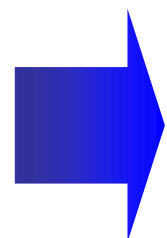
$8=q \times p=2 \times 4$       $p=4$   
II strategia



Parallelismo medio:

Processori  $P_{00}, P_{10}, P_{02}, P_{12}$  della griglia (par colonne) fase (1 passo II strategia) (altro  
contemporaneamente p  
vettori, ovvero vettori di dime

Primo passo della II strategia

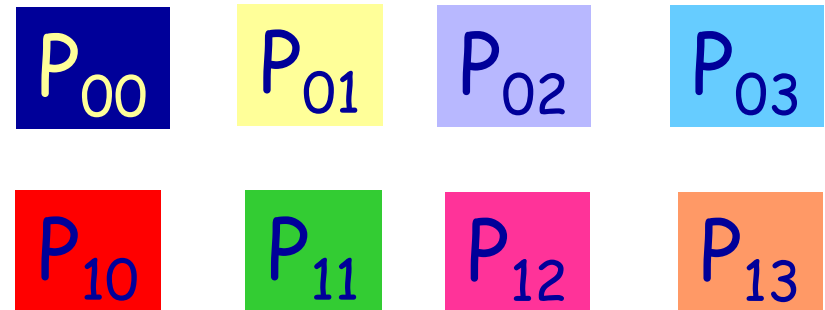

$$\alpha_4 = 4 \frac{1 \cdot \frac{N}{2}}{N[2M - 1]}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

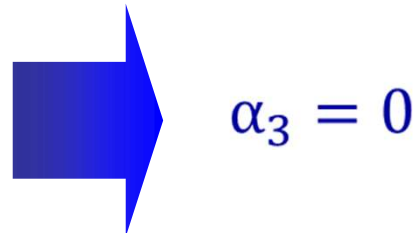
Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia



**Parallelismo medio:**

Non esiste nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 3 processori/core

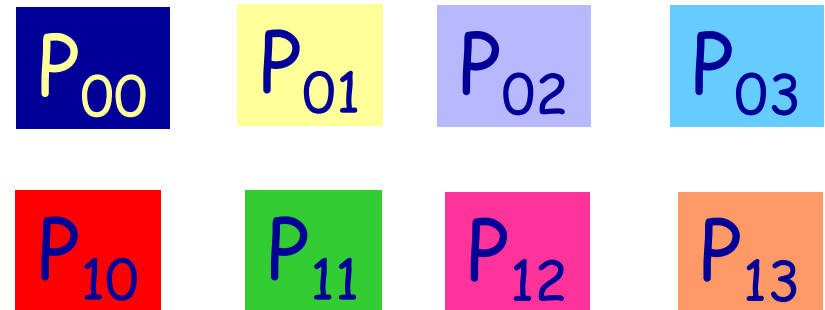


### III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

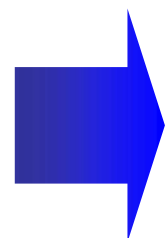
Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia



#### Parallelismo medio:

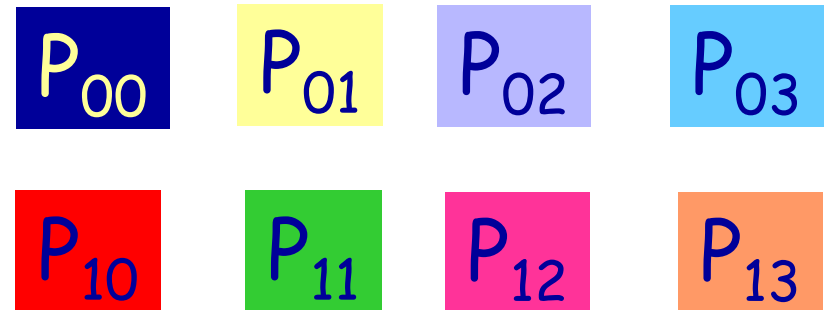
Esiste, infine, una fase (2passo II strategia) in cui due processori/core lavorano contemporaneamente per effettuare la somma parziale dei contributi al 1passo, ovvero vettori di dimensione  $N/2$  (lungo le colonne)


$$\alpha_2 = 2 \frac{1 \cdot \frac{N}{2}}{N[2M - 1]}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

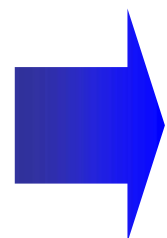
Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia



**Parallelismo medio:**

È la strategia (2passo II strategia) in cui due processori (ad esempio  $P_{00}$  e  $P_{10}$ ) della griglia lavorano contemporaneamente per effettuare calcoli su vettori di dimensione  $N/2$ .  
Secondo passo della II strategia

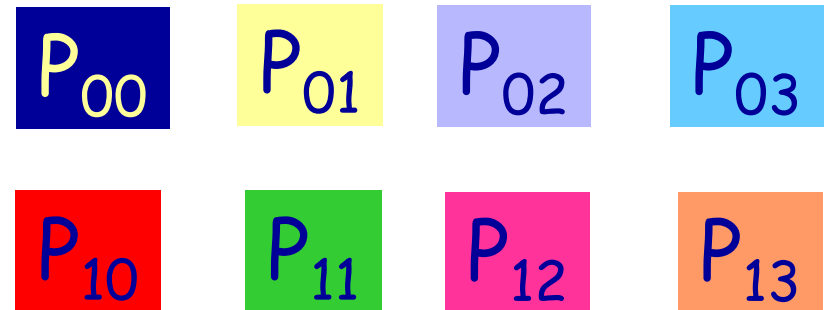

$$\alpha_2 = 2 \frac{1 \cdot \frac{N}{2}}{N[2M - 1]}$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

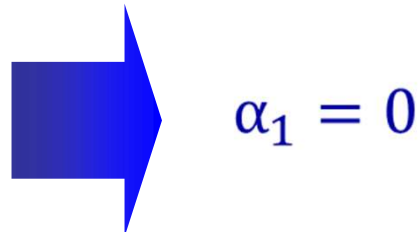
Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia



**Parallelismo medio:**

Non esiste nessuna fase in cui lavora 1 processore/core



# III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

## Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$	$P_{03}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$

## Attenzione:

Per essere sicura di aver fatto bene i conti devo sommare tutti i numeratori e trovarmi il denominatore comune!

$$\alpha_8 = 8 \frac{\frac{N}{2} \left[ \frac{2M}{4} - 1 \right]}{N[2M - 1]} \quad \alpha_7 = \alpha_6 = \alpha_5 = 0 \quad \alpha_2 = 2 \frac{1 \cdot \frac{N}{2}}{N[2M - 1]}$$
$$\alpha_4 = 4 \frac{1 \cdot \frac{N}{2}}{N[2M - 1]} \quad \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**def classica**)

---

Collezione dei risultati

$8=q \times p=2 \times 4$      $p=4$   
II strategia

$P_{00}$	$P_{01}$	$P_{02}$	$P_{03}$
$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$

Non resta che sostituire i valori  
calcolati nella formula generalizzata

$$S_p = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\alpha_k}{k} + \frac{\alpha_p}{p}}$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

In sequenziale:

$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni

$$4 = q \times p = 2 \times 2 \quad p = 2$$

 $P_{00}$  $P_{01}$  $P_{10}$  $P_{11}$



### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

In sequenziale:

$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni

$4 = q \times p = 2 \times 2$

Vediamo le dimensioni che ogni processore/core deve trattare

$$\dim[A_{00}] = (7/2 + 1) \times (9/2 + 1)$$

$$\dim[b_0] = 9/2 + 1$$

$$\dim[A_{10}] = (7/2) \times (9/2 + 1),$$

$$\dim[A_{01}] = (7/2 + 1) \times (9/2)$$

$$\dim[A_{11}] = (7/2) \times (9/2)$$

$$\dim[b_1] = 9/2$$

$P_{00}$

$P_{01}$

$P_{10}$

$P_{11}$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

In sequenziale:

$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni

$4 = q \times p = 2 \times 2$

Vediamo le dimensioni che ogni processore/core deve trattare:

$$\dim[A_{00}] = 4 \times 5$$

$$\dim[b_0] = 5$$

$$\dim[A_{10}] = 3 \times 5, \dim[A_{01}] = 4 \times 4$$

$$\dim[A_{11}] = 3 \times 4$$

$$\dim[b_1] = 4$$

$P_{00}$

$P_{01}$

$P_{10}$

$P_{11}$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

Ultimo esercizio:

**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

**In parallelo:**

Ognuno dei 4 processori effettua un prodotto di tipo matrice-vettore con strutture di diverse dimensioni, riportando i valori nell'ordine:



**$P_{00}$**

**$P_{01}$**

**$P_{10}$**

**$P_{11}$**

$$\alpha_4 = \frac{1 \cdot 4[2 \cdot 5 - 1] + 1 \cdot 4[2 \cdot 4 - 1] + 1 \cdot 3[2 \cdot 5 - 1] + 1 \cdot 3[2 \cdot 4 - 1]}{119}$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

**Parallelo parziale (I-II strategia stessi conti se  $p=2$ ):**

Nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 3  
processori/core



$$\alpha_3 = 0$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

Ultimo esercizio:

**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

## Parallelo parziale (I-II strategia stessi conti se $p=2$ ):

Due processori/core (sulle due righe), contemporaneamente effettuano la somma dei contributi dei vettori distribuiti lungo le colonne

$$\dim[A_{00}] = 4 \times 5$$

$$\dim[b_0] = 5$$

$$\dim[A_{10}] = 3 \times 5, \dim[A_{01}] = 4 \times 4$$

$$\dim[A_{11}] = 3 \times 4$$

$$\dim[b_1] = 4$$

$P_{00}$

$P_{01}$

$$4 = \dim[r_0] = \dim[s_0]$$

$P_{10}$

$P_{11}$

$$3 = \dim[r_1] = \dim[s_1]$$

# III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

Ultimo esercizio:

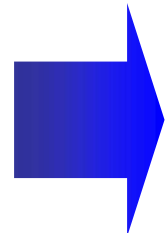
matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

**Parallelo parziale (I-II strategia stessi conti se  $p=2$ ):**

Due processori/core (sulle due righe), contemporaneamente effettuano la somma dei contributi dei vettori distribuiti lungo le colonne



$$\alpha_2 = \frac{P_{00} + P_{10}}{119} = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{119} = \frac{7}{119}$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

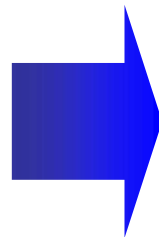
**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

**Parallelo parziale (I-II strategia stessi conti se  $p=2$ ):**

Nessuna fase sequenziale



$$\alpha_1 = 0$$

### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

### Attenzione:

Per essere sicura di aver fatto bene i conti devo sommare tutti i numeratori e trovarmi il denominatore comune!

$$\alpha_4 = \frac{112}{119} \quad \alpha_3 = 0 \quad \alpha_2 = \frac{7}{119} \quad \alpha_1 = 0$$



### III Strategia: speed-up/efficienza (**W-A**)

---

Ultimo esercizio:

**$7[2 \cdot 9 - 1] = 119$  operazioni**

matrice A: 7 righe, 9 colonne  
Vettore b: 9 elementi

**$4 = q \times p = 2 \times 2$**

**Non resta che sostituire i valori  
calcolati nella formula generalizzata**

$$S_p = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\alpha_k}{k} + \frac{\alpha_p}{p}}$$