Homeworks Algorithms and Data Strucutres

Rocco Lo Russo
roc.lorusso@studenti.unina.it

Università di Napoli Federico II - DIETI — 26/08/2025

Introduzione

In questo documento verranno sviluppati i due set di Homeworks assegnati per sostenere l'esame.

1 Homework set 1

1.1 Esercizio 1.1

Traccia:
Per ognuna delle seguenti affermazioni, si dica se essa è sempre vera, mai vera, o a volte vera, per funzioni asintoticamente non-negative. Se la si considera sempre vera o mai vera, si spieghi il perché. Se è a volte vera, si dia un esempio per cui è vera e uno per cui è falsa.

- $f(n) = O(f(n)^2)$;
- $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$;
- $f(n) = \Omega(g(n))$ e $f(n) = o(g(n))$

Soluzione:
$f(n) = O(f(n)^2)$ è un'affermazione vera a volte: infatti $f(n) = O(f(n)^2) \iff f(n) \leq cf(n)^2$ per qualche costante $c > 0$ e per qualche $n > n_0$. Poichè la funzione f(n) è definita asintoticamente *non negativa*, possiamo assumere che per n sufficientemente grande la funzione assumerà soltanto valori o positivi o nulli.
Nel caso in cui $f(n) = 0$, la disuguaglianza è verificata perchè $0 \leq c \cdot 0^2$ è vero sempre.
Nel caso in cui $f(n) > 0$:

$$f(n) \leq cf(n)^2 \implies f(n) \geq \frac{1}{c}, \forall n \geq n_0 \tag{1}$$

La disuguaglianza nel secondo caso è verificata solo se la funzione $f(n)$ risulta, per n sufficientemente grande, maggiore di $\frac{1}{c}$, ovvero se risulta limitata inferiormente da una costante strettamente maggiore di 0, come riportato nel passaggio (1). Un esempio di funzione asintoticamente non negativa che soddisfa la definizione è $f(n) = n$, mentre un esempio di funzione asintoticamente non negativa che non soddisfa la definizione è $f(n) = \frac{1}{n}$.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$, dimostriamo che è sempre vera: il generico elemento $h(n) \in \{f(n) + O(n)\}$ possiamo scriverlo come $h(n) = f(n) + g(n)$, con $g(n) \in O(n)$; I passaggi illustrati in (2) dimostrano che $f(n) + O(f(n)) = O(f(n))$ $\forall n \geq n_0$, mentre i passaggi illustrati in (3) dimostrano che $f(n) + O(f(n)) = \Omega(f(n))$ $\forall n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} g(n) \leq cf(n) \implies h(n) &= f(n) + g(n) \\ &\leq f(n) + cf(n) \\ &\leq (1+c)f(n) \end{aligned} \tag{2}$$

$$g(n) \geq 0 \implies f(n) + g(n) \geq f(n) \tag{3}$$

Possiamo concludere che il generico elemento $h(n) \in \{f(n) + O(f(n))\}$ è sia un elemento di $O(f(n))$ che un elemento di $\Omega(f(n))$, ragione per cui $\{f(n) + O(f(n))\} \subseteq \Theta(f(n)) \implies f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$.

Per quanto riguarda la terza affermazione, $f(n) = \Omega(g(n))$ e $f(n) = o(g(n))$, è sempre falsa. Intuitivamente, dire che $f(n) = \Omega(g(n))$ significa che $f(n)$ asintoticamente cresce almeno come cresce $g(n)$, mentre dire che $f(n) = o(g(n))$ significa che $f(n)$ è asintoticamente trascurabile rispetto a $g(n)$, e questo è chiaramente in contraddizione. Verifichiamolo tramite definizioni, assumendo $f(n)$ definitivamente non negativa e $g(n)$ definitivamente positiva:

$$\begin{aligned} f(n) = \Omega(g(n)) &\implies \exists c > 0, n > n_0 \mid f(n) \geq cg(n)\ \forall n > n_0 \\ f(n) = o(g(n)) &\implies \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon\ \forall\ n > n_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Se dalla definizione del limite scegliamo $\epsilon = \frac{c}{2}$, risulta, per $n > \max\{n_0, n_1\}$, contemporaneamente $f(x) \geq cg(n)$ e $f(x) < \frac{c}{2}g(n)$, e questo è impossibile.

1.2 Esercizio 1.2

Traccia:
Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni $f(n)$ e $g(n)$, trovare una appropriata costante positiva c tale che $f(n) \leq cg(n)$ per tutti i valori di $n > 1$.

- $f(n) = n^2 + n + 1, \quad g(n) = 2n^3;$
- $f(n) = n\sqrt{n} + n^2, \quad g(n) = n^2;$
- $f(n) = n^2 - n + 1, \quad g(n) = n^2/2$

Soluzione:
La prima costante c che soddisfi $f(n) = n^2 + n + 1 \leq cg(n) = 2cn^3$ può essere facilmente trovata tramite i passaggi presentati in (5), nei quali osserviamo che $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ è una funzione definitivamente decrescente $\forall n > 1$, e in particolare assume il valore massimo proprio in $n = 1$.

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 \leq 2cn^3 \implies \frac{n^2 + n + 1}{n^3} \leq 2c &\implies \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 2c \\ 3 \leq 2c &\implies c \geq \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Per questo motivo, anche se stiamo assumendo $n > 1$ strettamente, una costante opportuna potrebbe essere proprio $c = \frac{3}{2}$.

La seconda costante c che soddisfi $f(n) = n\sqrt{n} + n^2 \leq cg(n) = cn^2$ può essere trovata tramite lo stesso metodo presentato sopra, ovvero osservando nei passaggi (6) che la funzione $\frac{\sqrt{n}}{n} + 1 = \frac{1}{\sqrt{n}} + 1$ è una funzione decrescente $\forall n > 1$, e che assume valore massimo pari a 2 proprio in $n = 1$.

$$\begin{aligned} n\sqrt{n} + n^2 \leq cn^2 &\implies n\sqrt{n} \leq cn^2 - n^2 = n^2(c-1) \\ &\implies c \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Per questo motivo, anche se stiamo assumendo $n > 1$, una costante opportuna potrebbe essere proprio $c = 2$.

La terza costante c che soddisfi $f(n) = n^2 - n + 1 \leq cg(n) = cn^2/2$ può essere trovata ancora tramite lo stesso metodo, ovvero osservando nei passaggi (7) che la funzione $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ è una funzione che per $n \to \infty$ viene limitata dal valore 1.

$$\begin{aligned}
n^2 - n + 1 \le \frac{cn^2}{2} &\implies 1 - n \le \frac{cn^2}{2} - n^2 \\
&\implies 1 - n \le n^2(\frac{c}{2} - 1) \\
&\implies \frac{c}{2} \ge 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Per questo motivo, anche se stiamo assumendo $n > 1$, una costante opportuna potrebbe essere proprio $c = 2$, e in particolare c è la costante più piccola che garantisca la diseguaglianza $\forall n > 1$.

1.3 Esercizio 1.3

Traccia:
Dimostrare che per qualsiasi costante reale a e b, con b > 0, $(n + a)^b = \Theta(n^b)$.

Soluzione:

$$(n + a)^b = n^b \left(1 + \frac{a}{n}\right)^b \tag{8}$$

Osserviamo che se scegliamo $n_0 = 2|a|$ ad esempio, è soddisfatta la disuguaglianza $\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2}$ $\forall n > 2|a|$. Possiamo continuare con la (9):

$$\frac{1}{2} \le 1 - \frac{|a|}{n} \le 1 + \frac{a}{n} \le 1 + \frac{|a|}{n} \le \frac{3}{2} \implies \frac{1}{2} \le 1 + \frac{a}{n} \le \frac{3}{2} \tag{9}$$

Dato che b>0, possiamo elevare tutti i membri della catena di disequazioni (9) alla b senza alterare i segni, così come possiamo moltiplicare per n^b.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b n^b \le \left(1 + \frac{a}{n}\right)^b n^b \le \left(\frac{3}{2}\right)^b n^b \implies \left(\frac{1}{2}\right)^b n^b \le (n + a)^b \le \left(\frac{3}{2}\right)^b n^b \tag{10}$$

La dimostrazione risulta praticamente conclusa, infatti abbiamo dimostrato che la diseguaglianza finale in (10) è valida $\forall n > 2|a|$. Osserviamo che vale $\forall n > |a|$, e la scelta è stata dettata dalla semplicità espositiva.

1.4 Esercizio 1.4

Traccia:
Fornire il limite inferiore e superiore per $T(n)$ *nella seguente ricorrenza, usando il metodo dell'albero delle ricorrenze ed il teorema dell'esperto se applicabile. Si fornisca il limite più stretto possibile giustificando la risposta.*

- $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \lg n$;
- $T(n) = 3T(\frac{n}{5}) + \lg^2 n$;

Soluzione:

2 Homework set 2

2.1 Esercizio 2.1

prova prova

2.2 Esercizio 2.2

prova prova