Homeworks Algorithms and Data Strucutres

Rocco Lo Russo
roc.lorusso@studenti.unina.it

Università di Napoli Federico II - DIETI — 25/08/2025

Introduzione

In questo documento verranno sviluppati i due set di Homeworks assegnati per sostenere l'esame.

1 Homework set 1

1.1 Esercizio 1.1

Traccia:
Per ognuna delle seguenti affermazioni, si dica se essa è sempre vera, mai vera, o a volte vera, per funzioni asintoticamente non-negative. Se la si considera sempre vera o mai vera, si spieghi il perché. Se è a volte vera, si dia un esempio per cui è vera e uno per cui è falsa.

- $f(n) = O(f(n)^2)$;
- $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$;
- $f(n) = \Omega(g(n))$ e $f(n) = o(g(n))$

Soluzione:
$f(n) = O(f(n)^2)$ è un'affermazione vera a volte: infatti $f(n) = O(f(n)^2) \iff f(n) \leq cf(n)^2$ per qualche costante $c > 0$ e per qualche $n > n_0$. Poichè la funzione f(n) è definita asintoticamente *non negativa*, possiamo assumere che per n sufficientemente grande la funzione assumerà soltanto valori o positivi o nulli.
Nel caso in cui $f(n) = 0$, la disuguaglianza è verificata perchè $0 \leq c \cdot 0^2$ è vero sempre.
Nel caso in cui $f(n) > 0$:

$$f(n) \leq cf(n)^2 \implies f(n) \geq \frac{1}{c}, \forall n \geq n_0 \tag{1}$$

La disuguaglianza nel secondo caso è verificata solo se la funzione $f(n)$ risulta, per n sufficientemente grande, maggiore di $\frac{1}{c}$, ovvero se risulta limitata inferiormente da una costante strettamente maggiore di 0, come riportato nel passaggio (1). Un esempio di funzione asintoticamente non negativa che soddisfa la definizione è $f(n) = n$, mentre un esempio di funzione asintoticamente non negativa che non soddisfa la definizione è $f(n) = \frac{1}{n}$.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$, dimostriamo che è sempre vera: il generico elemento $h(n) \in \{f(n) + O(n)\}$ possiamo scriverlo come $h(n) = f(n) + g(n)$, con $g(n) \in O(n)$; I passaggi illustrati in (2) dimostrano che $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$ $\forall n \geq n_0$, mentre i passaggi illustrati in (3) dimostrano che $f(n) + O(f(n)) = \Omega(f(n))$ $\forall n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} g(n) \leq cf(n) \implies h(n) &= f(n) + g(n) \\ &\leq f(n) + cf(n) \\ &\leq (1 + c)f(n) \end{aligned} \tag{2}$$

$$g(n) \geq 0 \implies f(n) + g(n) \geq f(n) \tag{3}$$

Possiamo concludere che il generico elemento $h(n) \in \{f(n) + O(f(n))\}$ è sia un elemento di $O(f(n))$ che un elemento di $\Omega(f(n))$, ragione per cui $\{f(n) + O(f(n))\} \subseteq \Theta(f(n)) \implies f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$.

1.2 Esercizio 1.2

prova prova

2 Homework set 2

2.1 Esercizio 2.1

prova prova

2.2 Esercizio 2.2

prova prova