Sorbonne Université Année 2023-2024
Licence de Physique 7 février 2024
LU2PY125 : UE Climat-Énergie-Société

TD3 Effet de serre avec modèle à deux faisceaux

Durée : 2 h

Objectifs :
- *Quantifier le rayonnement infrarouge traversant les différentes couches de l'atmosphère ;*
- *Comprendre l'origine de l'effet de serre ;*
- *Exprimer le profil de température $T(z)$ et la température de surface de la Terre T_s à l'équilibre radiatif.*

Remarque préalable : L'énergie transitant à travers une surface de $1\,\mathrm{m}^2$ pendant 1 seconde est une quantité s'exprimant en $\mathrm{W\,m^{-2}}$ et appelée *flux surfacique d'énergie* (ou *densité de flux*, ou *éclairement* dans le visible, ou *émittance* dans l'infrarouge). Dans ce qui suit, pour des raisons de concision, cette quantité est simplement désignée par le terme *flux*.

Exercice I Bases théoriques de l'effet de serre : modèle à deux faisceaux

Le modèle à deux faisceaux entend élucider les transferts de rayonnement dans l'infrarouge entre les couches qui composent la colonne atmosphérique. On rappelle les hypothèses simplificatrices vues en cours : [1]
- couches atmosphériques plan-parallèle (sphéricité négligée) ;
- on considère l'atmosphère complètement transparente dans le visible ;
- on néglige les phénomènes de diffusion dans l'infrarouge ;
- on fait l'approximation (drastique) du corps gris : les gaz absorbent de la même façon toutes les longueurs d'onde (k_λ = cste), ce qui implique une hypothèse similaire pour l'épaisseur optique ($\tau_\lambda = \tau$).

On définit comme en cours magistral $F^+(\tau)$ (resp. $F^-(\tau)$) le flux surfacique montant (resp. descendant) d'énergie. Pour rappel, τ est l'épaisseur optique qui quantifie la quantité de rayonnement absorbée. τ est prise nulle en haut de l'atmosphère, croît lorsque l'altitude z diminue et vaut τ_s à la surface de la Terre.

Q.1) En faisant un bilan sur une couche d'épaisseur $\mathrm{d}\tau$ à la température $T(\tau)$, montrer que le flux surfacique montant $F^+(\tau)$ vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = F^+(\tau) - \sigma\,T(\tau)^4 \tag{1}$$

Indication : la variation de flux surfacique entre τ et $\tau + \mathrm{d}\tau$ est due d'une part à l'absorption de la couche ($F^+\mathrm{d}\tau$) et à son émission ($\sigma T^4\,\mathrm{d}\tau$).

R.1) Sur la figure 1, on voit que $F^+(\tau) = F^+(\tau+\mathrm{d}\tau) + \mathrm{d}F^+(\tau+\mathrm{d}\tau) + M(\tau)\mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}F^+(\tau+\mathrm{d}\tau) = -F^+(\tau+\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}\tau$ d'après la loi de Beer-Lambert et $M(\tau) = \sigma T(\tau)^4$. On a donc l'équation :

$F^+(\tau) = F^+(\tau+\mathrm{d}\tau) - F^+(\tau+\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}\tau + \sigma T(\tau)^4\mathrm{d}\tau$, soit en arrangeant les termes :

$\dfrac{F^+(\tau+\mathrm{d}\tau) - F^+(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = F^+(\tau+\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}\tau - \sigma T(\tau)^4$. La limite pour $\mathrm{d}\tau \to 0$ donne enfin :

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = F^+(\tau) - \sigma\,T(\tau)^4$$

1. Ce modèle est une version simplifiée de l'équation de Schwarzschild du transfert radiatif. C'est un bon compromis entre simplicité et illustration de concepts importants de l'effet de serre.

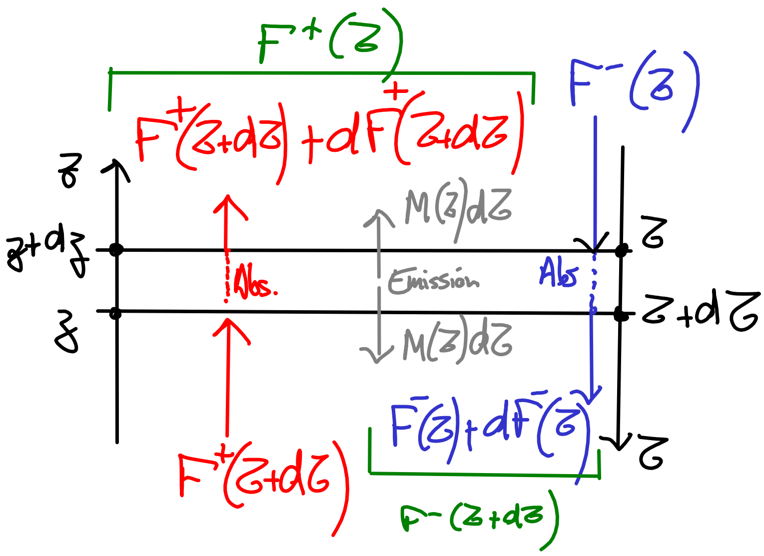

FIGURE 1 – Bilan d'une couche d'épaisseur optique $\mathrm{d}\tau$.

En faisant le même raisonnement sur F^-, on obtient le système d'équations :

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = F^+(\tau) - \sigma T(\tau)^4 \qquad \frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}\tau} = -F^-(\tau) + \sigma T(\tau)^4 \tag{2}$$

Ce système s'exprime plus simplement en définissant $\Sigma(\tau) = F^+(\tau) + F^-(\tau)$ et $\Delta(\tau) = F^+(\tau) - F^-(\tau)$.

Q.2) Déterminer les équations différentielles vérifiées par Σ et Δ.

R.2)

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}\tau} = \Delta(\tau) \tag{3}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\tau} = \Sigma(\tau) - 2\,\sigma\, T(\tau)^4 \tag{4}$$

On se place dans ce TD à l'équilibre radiatif. On montre dans ce cas que le flux surfacique *net* $\Delta = F^+ - F^-$ est constant à toute altitude, ou autrement dit à toute épaisseur optique τ.[2] Cela impose :

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{5}$$

Sommet de l'atmosphère et détermination des flux surfaciques dans l'atmosphère

Appelons E l'éclairement du Soleil sur Terre. Ce flux surfacique est essentiellement dans le visible. On négligera toute contribution infrarouge et donc à F^- par la suite. Le flux surfacique moyen arrivant sur Terre (en retirant la partie réfléchie) s'écrit $F_{\text{in}} = \frac{E}{4}(1 - A_b)$ avec A_b l'albédo de la Terre. À l'inverse, on note F_{out} le flux surfacique émis par le sommet de l'atmosphère vers l'univers.

Q.3) Déduire de l'équilibre radiatif une relation entre F_{in} et F_{out}.

R.3) Équilibre radiatif : égalité des flux : $F_{\text{in}} = F_{\text{out}}$.

Q.4) Justifier qu'**au sommet** de l'atmosphère[3] $F^+(\tau = 0) = F_{\text{out}}$ et $F^-(\tau = 0) = 0$. En déduire que

$$\Delta(\tau = 0) = \Sigma(\tau = 0) = F_{\text{out}}. \tag{6}$$

2. Il n'y a ni dépôt ni extraction d'énergie dans chaque couche $d\tau$ de l'atmosphère.
3. $F^+(\tau = 0)$ est aussi appelé appelé OLR, *outgoing longwave radiation* : c'est le flux surfacique infrarouge sortant au sommet de l'atmosphère

R.4) Comme l'épaisseur optique τ est un axe orienté vers le bas, lorsque τ est nulle, nous sommes au sommet de l'atmosphère. F_{out} étant le flux sortant au sommet de l'atmosphère, alors on a bien $F^+(\tau = 0) = F_{\text{out}}$ par définition. Quant à $F^-(\tau = 0)$, qui est le flux descendant au sommet de l'atmosphère dans l'IR, il est négligeable car le Soleil émet principalement dans le domaine de longueur d'onde visible. Dès lors on a immédiatement $\Delta(\tau = 0) = \Sigma(\tau = 0) = F_{\text{out}}$.

Q.5) À l'aide des résultats précédents, montrer que $\Delta(\tau) = F_{\text{out}}$ et $\Sigma(\tau) = F_{\text{out}}(1 + \tau)$ quel que soit τ. En déduire l'expression de $F^-(\tau)$.

R.5) Avec l'équation (5), on a $\Delta(\tau) = \text{cste}$. En particulier :

$$\Delta(\tau) = \Delta(\tau = 0) = F^+(0) - F^-(0) = F_{\text{out}} \text{ avec } F_{\text{out}} = F_{\text{in}}.$$

L'équation différentielle $\mathrm{d}\Sigma/\mathrm{d}\tau = \Delta(\tau)$ (voir équation 3) s'intègre donc directement :

$$\Sigma(\tau) = \Sigma(0) + F_{\text{out}}(\tau - 0) = F_{\text{out}}(1 + \tau).$$

On en déduit :

$$F^-(\tau) = \frac{\Sigma - \Delta}{2} = F_{\text{out}} \frac{\tau}{2}$$

Q.6) Déterminer finalement le profil vertical de température $T(\tau)$ à l'équilibre radiatif dans l'atmosphère :

$$T(\tau) = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}\,(1 + \tau)}{2\,\sigma}}. \tag{7}$$

R.6) Puisque $\mathrm{d}\Delta/\mathrm{d}\tau = \Sigma(\tau) - 2\,\sigma\,T(\tau)^4$ d'après l'équation 4 et $\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\tau} = 0$, on a $\Sigma(\tau) = 2\,\sigma\,T(\tau)^4$. En isolant T et en utilisant le résultat de la question précédente :

$$T(\tau) = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}\,(1 + \tau)}{2\,\sigma}}.$$

Surface terrestre

Q.7) La *surface* de la Terre reçoit le rayonnement (visible) du Soleil F_{in}, ainsi que le flux surfacique descendant $F^-(\tau = \tau_s)$ (infrarouge). Celle-ci étant à l'équilibre radiatif, en déduire une égalité faisant intervenir sa température de surface T_s.

R.7) Égalité des flux entrant et sortant :

$$F_{\text{in}} + F^-(\tau = \tau_s) = \sigma\,T_s^4$$

Q.8) Aboutir à l'expression de la température de surface suivante :

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}}{\sigma}\left(1 + \frac{\tau_s}{2}\right)} \tag{8}$$

En quoi une augmentation de la quantité de gaz à effet de serre conduit-elle à une augmentation de la température de surface ?

R.8) D'après la question précédente

$$T_s^4 = \frac{1}{\sigma}\left(F_{\text{in}} + F^-(\tau = \tau_s)\right) = \frac{F_{\text{out}}}{\sigma}\left(1 + \frac{\tau_s}{2}\right)$$

On constate que dans l'infrarouge, le rayonnement sortant au sommet de l'atmosphère F_{out} est inférieur au rayonnement émis par la surface $\sigma\,T_s^4$ car $F_{\text{out}} = \sigma T_s^4/(1+\tau_s/2)$. Une partie du rayonnement émis par la surface reste donc piégée par la planète.

Avec un albédo et un rayonnement incident constant, donc à F_{out} constant, augmenter la quantité de gaz à effet de serre (GES) revient à augmenter τ_s car $\tau_s = \int_0^\infty \kappa\rho_X \mathrm{d}z$ (voir le cours). Augmenter la concentration ρ_X des GES revient donc à augmenter la température de surface T_s.

Exercice II   Application : le profil de température dans l'atmosphère

L'objectif de cet exercice est de mettre en application les équations du modèle à deux faisceaux pour reconstruire le profil de température de l'atmosphère $T(z)$. Nous utiliserons l'éclairement solaire moyen au niveau de la Terre $E = 1368\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ et l'albédo moyen de la Terre $A_b = 0.3$. Nous rappelons également la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.

Q.9) Calculer numériquement le flux surfacique sortant F_{out} du sommet de l'atmosphère.

R.9)

$$F_{\text{out}} = \frac{E}{4}(1 - Ab) = \frac{1368}{4}(1 - 0.3) = 342 \times 0.7 = 239\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

Q.10) Dans un premier temps, démontrer et calculer la température dite équivalente T_{eq} de la surface de la Terre si il n'y avait aucun effet de serre par l'atmosphère :

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}}{\sigma}} \tag{9}$$

R.10) C'est le résultat de l'équation (8) sans opacité, c'est à dire $\tau_s = 0$. C'est-à-dire l'équilibre simple $F_{\text{out}} = \sigma T_s^4$.

On peut rappeler si besoin la définition de l'albédo A_b, en écrivant que $A_b = E_{\text{réfléchi}}/E_{\text{incident}}$, et que donc $E_{\text{absorbé}} = E_{\text{incident}} - E_{\text{réfléchi}} = E_{\text{incident}} - A_b E_{\text{incident}} = E_{\text{incident}}(1 - A_b)$. Le facteur $1/4$ dans $E/4$ provient du passage à l'éclairement instantané face au Soleil E à l'éclairement global moyen. Par le calcul, on obtient :

```
Teq = (342.*0.7/5.67E-8)**0.25 = 255 K
```

Sans effet de serre, la température à la surface de la Terre serait donc de $-18\,°\mathrm{C}$.

Q.11) Pour calculer la température T_s en présence d'un effet de serre dans le modèle de la partie I, il faut estimer τ_s. Nous prendrons $\tau_s = 1.25$. Calculer la température T_s dans ce modèle. Commenter.

R.11) Par application directe de l'équation 8, on obtient :

```
Ts = (342.*0.7*(1.+1.25/2.)/5.67E-8)**0.25 = 288 K
```

On retrouve la température moyenne « classique » préindustrielle de $15\,°\mathrm{C}$.

Q.12) Comparer la température de surface T_s à la température de l'atmosphère juste au-dessus de la surface $T(\tau = \tau_s)$ en utilisant l'équation 7. Que remarque-t-on ?

R.12) En utilisant l'équation 7, on obtient :

```
Tatm = (342.*0.7*(1.+tausurf)/2./5.67E-8)**0.25 = 262.5 K
```

Il existe donc une très forte discontinuité (plus de $25\,°\mathrm{C}$) entre la température de surface qu'impose l'équilibre radiatif avec effet de serre et la température de l'atmosphère juste au-dessus. On fait l'expérience de cette différence par exemple l'été sur une plage de sable brûlant au Soleil. Cette discontinuité déclenche de la convection (et à moindre titre de la conduction) entre l'atmosphère et la surface pour finalement rétablir une continuité.

Afin de déterminer le profil de température $T(z)$ *dans* l'atmosphère, il faut déterminer la fonction $\tau(z)$. Une bonne approximation est d'écrire l'épaisseur optique comme dépendant exponentiellement de l'altitude :[4]

$$\tau(z) = \tau_s\, \mathrm{e}^{-z/H} \tag{10}$$

où nous avons définit une échelle de hauteur H qui sera ici l'épaisseur caractéristique de la couche de vapeur d'eau dans l'atmosphère (la vapeur d'eau étant le principal gaz à effet de serre). On prendra $H = 2\,\mathrm{km}$.

4. On considère les GES bien mélangés dans l'atmosphère. Si les GES sont bien mélangés, leur masse volumique dans l'air (en kg de GES par $\mathrm{m^3}$) suit la masse volumique de l'air. Cette masse volumique suit la pression, qui elle-même suit une décroissance exponentielle avec l'altitude, d'où l'expression proposée.

Q.13) En déduire le profil de température recherché $T(z)$ grâce à l'équation 7. Montrer que la dérivée de la température par rapport à l'altitude vaut :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{T_{\text{eq}}}{4H\sqrt[4]{2}} \frac{\tau_s\,\mathrm{e}^{-z/H}}{(1+\tau_s\,\mathrm{e}^{-z/H})^{3/4}} \tag{11}$$

R.13) Pas de piège particulier; on fait apparaître à la fin T_{eq} en utilisant l'expression 9.

Q.14) Montrer que la dérivée de la température avec l'altitude (autrement dit le gradient de température) lorsque $z \longrightarrow +\infty$ tend vers zéro. Montrer également que le gradient de température à la surface $z = 0$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=0) = -\frac{T_{\text{eq}}}{4H\sqrt[4]{2}} \frac{\tau_s}{(1+\tau_s)^{3/4}} \tag{12}$$

et le calculer pour une épaisseur optique $\tau_s = 1.25$.

R.14) Obtenu directement.

```
dT/dz(z=0) = -255./4./2E3/2.**0.25*1.25/(1.+1.25)**0.75 = 0.018 K/m
```

Le gradient imposé par l'équilibre radiatif proche de la surface est donc de $-18\,°\mathrm{C\,km^{-1}}$.

Q.15) Lorsqu'une parcelle monte dans une atmosphère saturée en vapeur d'eau (cas le plus fréquent sur Terre), le premier principe stipule qu'elle se refroidit d'environ $\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{\text{adia}} = -6.5\,°\mathrm{C\,km^{-1}}$. Ce gradient de température est appelé le gradient *adiabatique saturé*. Il est possible de montrer que si le gradient de température dans l'atmosphère excède (en valeur absolue) ce gradient adiabatique saturé, l'atmosphère est instable et se mélange verticalement (par turbulence et panaches convectifs). Comparer le résultat de la question précédente au gradient adiabatique saturé. Que peut-on en conclure ?

R.15) Le profil à l'équilibre radiatif est instable. On peut voir sur la figure 3 en comparant le profil à l'équilibre radiatif en noir à la droite en pointillé gris à $-6.5\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ qu'il est instable jusqu'à environ 3 km. L'atmosphère va donc être instable verticalement et se mélanger. Les parcelles humides en montant et en condensant libèrent de la chaleur latente, initiant de la convection dite profonde, et finalement c'est toute la troposphère ($z < 12\,\mathrm{km}$) qui suivra le gradient adiabatique saturé pour donner le profil moyen observé. La température de surface est alors égale à la température de l'atmosphère proche de la surface (voir le profil observé sur la figure 3). Cette égalité n'est possible que par la convection, dont les moteurs sont les énergie sensible et latente.

L'effet de serre est subtile, car si τ_s augmente par augmentation des GES, c'est par mélange que la colonne se réchauffe, et non par rayonnement. Même si c'est le rayonnement qui est à la source de l'instabilité et dudit mélange.

Q.16) Le profil de température issu du modèle et celui effectivement mesuré sont représentés sur la figure 3. Vérifier les résultats de la question 6. D'après le modèle utilisé et compte-tenu de votre réponse à la question 7, jusqu'à quelle altitude s'attend-on à ce que la convection joue un rôle ? Quelle est dans la réalité cette altitude ? On pourra discuter de cet écart en faisant le lien avec le TD2.

R.16) On vérifie bien les calculs effectués, notamment la tangente à l'origine qui graphiquement montre bien un gradient d'approximativement `(262-210)/2800=0.018 K/m`. Le profil radiatif étant instable dans la basse troposphère, il va donc forcer un mélange vertical par convection. Les parcelles en ascendance suivront en moyenne le gradient adiabatique humide dicté par la conservation de l'énergie statique humide (voir TD2). Le profil finalement observé est donc un profil à l'équilibre radiatif convectif humide partant d'une température de surface à l'équilibre radiatif, égale à 288 K.

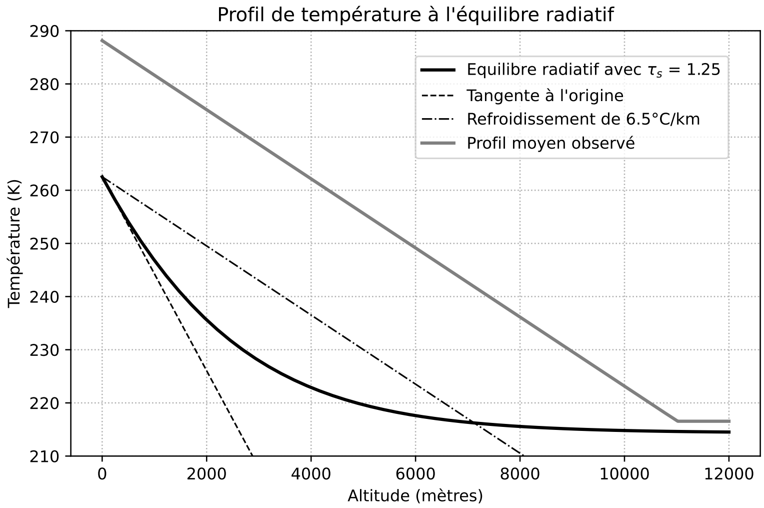

FIGURE 2 – Profil de température à l'équilibre radiatif : modèle à deux faisceaux (noir) et profil observé dans l'atmosphère (gris).

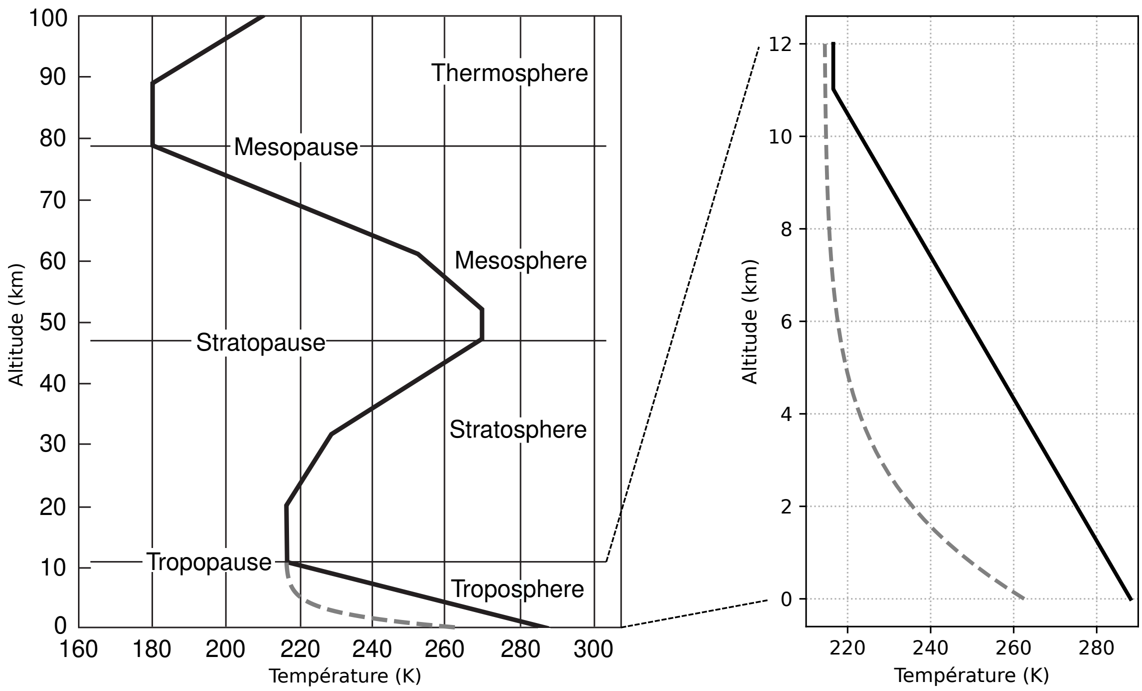

FIGURE 3 – Profil de température dans toute l'atmosphère (figure de gauche) et zoom sur la troposphère (à droite). Le profil à l'équilibre radiatif calculé dans ce TD est montré en pointillés gris sur les deux figures.