Sorbonne Université
Licence de Physique
LU2PY125: UE Climat-Énergie-Société

Année 2023-2024

TD n°6 L'énergie éolienne

Durée : 2h

Objectifs: Dans ce TD, on s'intéresse à l'énergie éolienne, à savoir l'énergie disponible dans les courants d'air sur Terre.

- *Connaître les ordres de grandeur des puissances disponible et utilisable associées au vent;*
- *Mettre à profit ses connaissances pour déterminer une limite fondamentale au fonctionnement d'une éolienne.*

On considérera l'air comme un fluide parfait, **incompressible**, irrotationnel et on négligera les effets de turbulence. On se placera de plus en régime stationnaire, avec un écoulement unidirectionnel. On négligera les effets de variation d'altitude.

Rappels et définitions

- On définit le débit (volumique) d'un fluide comme le volume de fluide passant à travers une surface S par unité de temps (unité : $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$). Pour un fluide à la vitesse v uniforme sur la surface, on a $Q = Sv$.
- Relation de Bernoulli : en l'absence d'obstacle sur le chemin suivi par le fluide, supposé parfait et incompressible, la densité volumique d'énergie $E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p$ est une grandeur conservée.
- La puissance cinétique liée à un écoulement à la vitesse v s'écrit $\mathcal{P}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho v^3 S$ où v est la vitesse du fluide et S la section traversée par le fluide considérée.
- Si un système crée une différence de pression Δp dans le fluide au débit Q, ce système récupère une puissance mécanique $\mathcal{P} = \Delta p \times Q$.

I Introduction

Q.1) Vérifier l'homogénéité de E et des expressions des puissances $\mathcal{P}_{\text{cin}}$ et $\mathcal{P}$.

Q.2) Par un calcul d'ordre de grandeur, estimer l'énergie cinétique totale transportée par l'ensemble des courants d'air sur la planète.

R.2) Il faut estimer la masse d'air et sa vitesse moyenne.

- Pour la masse d'air, on peut utiliser la pression atmosphérique $p_{\text{atm}} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ qui signifie qu'il y a une force $10^5\,\mathrm{N}$ par m^2, soit une masse $m = \dfrac{F}{g} \approx 10^4\,\mathrm{kg}$. La surface de la Terre étant $4\pi R^2$ on en déduit la masse totale d'air: $m = 4\pi \times (6.4 \times 10^6)^2 \times 10^4 = 5.1 \times 10^{18}\,\mathrm{kg}$.
- Difficile d'estimer la vitesse typique, tellement changeante selon les endroits et l'altitude. Les vitesses typiques vont entre 0 et $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ à la louche, on peut partir sur $v = 5\,\mathrm{m/s} = 18\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Ainsi $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \times 5.1 \times 10^{18} \times 5^2 = 6.4 \times 10^{19}\,\mathrm{J}$.

Q.3) Estimer ensuite la puissance totale du vent sur Terre. Quelle portion serait récupérable selon vous?

R.3) Pour estimer la puissance:

- Si on capturait toute cette énergie de l'air (ce qui stopperait complètement son mouvement), on pourrait s'attendre à ce que l'atmosphère retrouve son fonctionnement normal après une durée typique de 24 heures (une journée d'énergie solaire qui constitue le moteur de l'énergie éolienne). On obtient donc une puissance de $\dfrac{6 \times 10^{19}}{86\,400} \sim 700$ TW. C'est le bon ordre de grandeur ($\sim 1000\,\mathrm{TW}$).
- On peut vouloir utiliser la formule $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho v^3 S$. Attention, c'est la surface transverse balayée par le fluide. Pour une atmosphère d'environ $10\,\mathrm{km}$ de hauteur (H), et un périmètre de la Terre $2\pi R$, on a $S = H \times 2\pi R = 10^4 \times 2\pi \times 6.4 \times 10^6 = 4.0 \times 10^{11}\,\mathrm{m}^2$. D'où pour la puissance $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \times 1 \times 5^3 \times 4.0 \times 10^{11} = 250 \times 10^{11}\,\mathrm{W} = 25\,\mathrm{TW}$. Remarque: pour capter le vent dans toutes les directions horizontales, il faudrait imaginer 2 surfaces perpendiculaires, une le long de l'équateur, une autre le long d'une longitude. On obtient alors 50 TW. C'est beaucoup moins que les 700 TW de la première méthode mais il faudrait aussi ajouter une *voûte* (de surface $4\pi R^2$) pour capter le vent dans la direction verticale. Cette surface domine largement les précédentes et introduit une grande variation dans le résultat final vis-à-vis du choix de la vitesse moyenne.

Évidemment, on ne mettra pas d'éoliennes sur toute la surface du globe et sur 10 km de hauteur (sans même parler de limitation d'espacement entre éoliennes). L'estimation basse de ce qui est récupérable est plutôt de l'ordre de 1 TW (pour rappel, la consommation de l'humanité en 2022 est 20 TW).

Q.4) On hésite entre deux sites pour implanter un parc éolien: en (A) le vent souffle à $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ approximativement 1/3 du temps et est calme le reste du temps; en (B), il y a un vent très régulier de vitesse $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Comparer les vitesses moyennes du vent sur les deux sites. Puis comparer les puissances surfaciques moyennes. Quel site choisir, toutes choses égales par ailleurs?

R.4)
- On a $\langle v\rangle_A = \frac{1}{3} \times 8 = 2.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $\langle v\rangle_B = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La vitesse moyenne du vent au site (A) est presque deux fois plus petite que celle au site (B).
- Mais dans le calcul de la puissance surfacique moyenne, ce qui importe est la moyenne de v^3, pusque $\langle \mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}\rho\langle v^3\rangle$. Or $\langle v^3\rangle_A = 171\,\mathrm{m^3\,s^{-3}}$ et $\langle v^3\rangle_B = 125\,\mathrm{m^3\,s^{-3}}$. Le site A a une puissance potentielle $37\,\%$ supérieur au site B, malgré le vent qui ne souffle que 1/3 du temps, ce sera donc notre choix prioritaire.

II Rendement d'une éolienne – Limite de Betz

On s'intéresse au rendement d'une éolienne, système permettant de transformer de l'énergie cinétique du vent en énergie de rotation des pales, et ainsi produire de l'électricité pour transporter et utiliser cette énergie.
On considère le schéma sur la figure 1: on suit l'évolution d'un tube d'air (un tube de champ de vitesse) lorsque celui-ci passe à travers la surface de l'éolienne.
Loin de l'éolienne, l'air est à la pression p_0 et avec une vitesse v_1, ça sera la situation de référence. Juste avant (resp. après) l'éolienne, la pression du fluide vaut p_2 (resp. p_3).
L'éolienne récupère de l'énergie de l'écoulement et provoque donc une chute de pression $\Delta p = p_2 - p_3$. Loin en aval de l'éolienne, l'air a retrouvé sa pression p_0, mais a une vitesse potentiellement différente v_4.
On supposera que l'écoulement a une vitesse uniforme sur la surface de l'éolienne, en amont et en aval. On note S la surface de l'éolienne.

Q.5) On cherche à comprendre qualitativement l'existence d'un optimum de fonctionnement pour l'éolienne. Si la vitesse $v_4 = v_1$ quelle est la puissance récupérée par l'éolienne? Et si $v_4 = 0$? Commenter.

R.5) Si $v_4 = v_1$, alors l'énergie du tube d'air n'a pas variée, donc l'éolienne n'a récupéré aucune énergie. À l'opposé, si $v_4 = 0$, toute l'énergie du tube a été récupérée précédemment. Mais alors $v_3 = v_2 = 0$, l'air est arrêté au niveau de l'éolienne: comme il n'y a plus aucun débit, on a une puissance nulle récupérée par l'éolienne. Conclusion, il faut récupérer de l'énergie de l'écoulement mais pas trop de façon à maintenir un bon débit: il existe un optimum qui permet de maximiser la puissance récupérée.

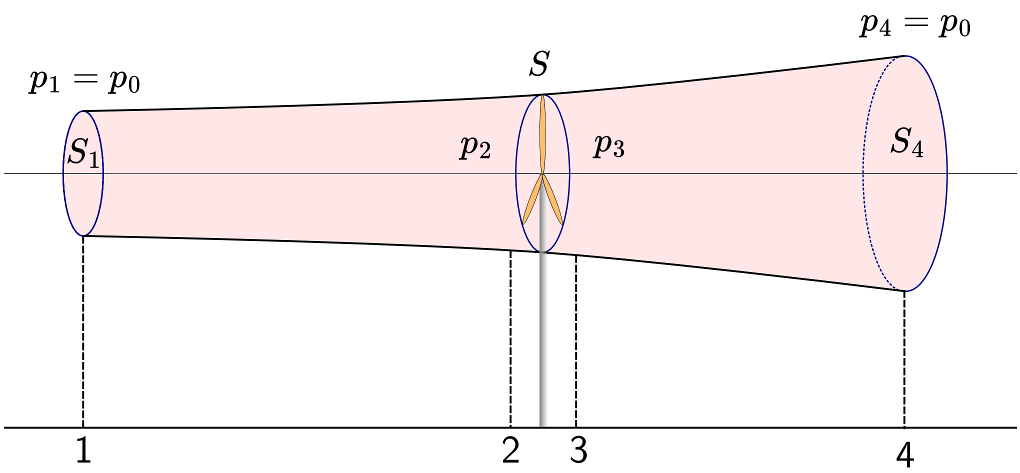

Figure 1: Position du problème: flux d'air traversant une éolienne

Détermination de la vitesse au niveau de l'éolienne

On étudie maintenant quantitativement le problème présenté sur la figure 1.
On considère un tube de champ: tout le fluide entrant par S_1 sort par S_4. On cherche ici à déterminer la vitesse v_2 de l'écoulement en fonction de v_1 et v_4 les vitesses loin de l'éolienne.

Q.6) Énoncer la conservation du débit le long de l'écoulement. En déduire en particulier une relation entre v_2 et v_3.

R.6) Conservation du débit: $Q = S_1 v_1 = S v_2 = S v_3 = S_4 v_4$. On en déduit la continuité de la vitesse au niveau de l'éolienne: $v_2 = v_3$.

Q.7) On suppose qu'il n'y a une perte d'énergie dans le tube d'air qu'au niveau de la turbine. Exprimer $p_2 - p_3$ en fonction des vitesses v_1 et v_4 loin de celle-ci.

R.7) On peut utiliser la relation de Bernoulli deux fois: avant et après l'éolienne. On élimine l'énergie potentielle de pesenteur puisqu'elle est constante:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\rho v_3^2 + p_3 = \frac{1}{2}\rho v_4^2 + p_4$$

En utilisant $p_4 = p_1 = p_0$ et $v_2 = v_3$, retrancher les deux relations donne

$$p_2 - p_3 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_4^2)$$

Q.8) En déduire l'expression de la puissance récupérée $\mathcal{P}$ par l'éolienne.

R.8) D'après le rappel, pour une chute de pression $\Delta p = p_2 - p_3$ avec un débit $Q = S v_2$, on a

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} S\rho(v_1^2 - v_4^2)v_2.$$

Q.9) On cherche maintenant à exprimer la puissance récupérée d'une autre façon:

II.9.a) Pendant un instant $\mathrm{d}t$, quelle est la quantité de mouvement qui passe à travers la surface S_1? S_4?

II.9.b) Remplacer les surfaces S_1 et S_4 par S grâce à la conservation du débit. En déduire la variation de quantité de mouvement (volumique) entre l'amont et l'aval de la turbine.

R.9.b) Pendant $\mathrm{d}t$, par conservation du débit, la masse d'air qui traverse S_1, S et S_4 est la même: $\rho Q\mathrm{d}t = \rho S_1 v_1 \mathrm{d}t = \rho S v_2 \mathrm{d}t = \rho S_4 v_4 \mathrm{d}t$. Cette masse traverse S_1 à v_1 et S_4 à v_4, donc la quantité de mouvement volumique prélevée au fluide est

$$\rho Q\mathrm{d}t v_1 - \rho Q \mathrm{d}t v_4 = \rho(S v_2)(v_1 - v_4)\mathrm{d}t$$

II.9.c) En utilisant la seconde loi de Newton, en déduire une autre expression de la puissance $\mathcal{P}$.

R.9.c) La seconde loi de Newton indique que la variation temporelle de quantité de mouvement est exactement la force qui s'applique sur le système. Si on veut connaître la puissance de cette force, il suffit de multiplier par la vitesse où cette force s'applique. En quantités volumiques, on a:

$$\mathcal{P} = F v_2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} v_2 = \rho(S v_2)(v_1 - v_4) v_2$$

Q.10) À l'aide des deux expressions de la puissance récupérée, en déduire l'expression de la vitesse v_2 en fonction de v_1 et v_4.

R.10) On a donc

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} S\rho(v_1^2 - v_4^2) v_2 = \rho(S v_2)(v_1 - v_4) v_2$$

soit $v_1 + v_4 = 2v_2$. La vitesse en 2 est simplement la moyenne des deux vitesses loin de l'éolienne:

$$\boxed{v_2 = \frac{v_1 + v_4}{2}}$$

Calcul du rendement maximal d'une éolienne

L'étude physique d'une éolienne —quel que soit son fonctionnement— nous a donc permis de trouver l'expression de la vitesse de l'écoulement au niveau de l'éolienne en fonction des conditions aux limites. Cette vitesse v_2 peut varier entre 0 et v_1, selon le fonctionnement de l'éolienne. On définit :

$$a = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \tag{1}$$

le facteur qui quantifie la diminution de cette vitesse.

Q.11) Exprimer v_2 et v_4 en fonction de a et v_1.

R.11) On retourne la définition de a pour trouver $v_2 = v_1(1-a)$. Puis avec l'expression de v_2 trouvée précédemment, on obtient $v_4 = v_1(1-2a)$.

Q.12) On définit le rendement de l'éolienne C_p, ou coefficient de puissance, comme la puissance récupérée sur la puissance qui aurait traversé la même surface sans l'éolienne. Exprimer C_p comme un rapport de puissances et en déduire son expression en fonction de a.

R.12) On pose

$$C_p = \frac{\mathcal{P}}{\frac{1}{2}\rho v_1^3 S} = \frac{\frac{1}{2} S\rho(v_1^2 - v_4^2)v_2}{\frac{1}{2}\rho v_1^3 S} = \frac{(v_1^2 - v_4^2)v_2}{v_1^3} = [1 - (1-2a)^2](1-a) = 4a(1-a)^2$$

Remarque : cas limites

$v_4 = v_1$ (donc $v_2 = v_1$ et $a = 0$ correspond bien au cas où l'éolienne ne récupère aucune puissance : $C_p = 0$.

Si $v_4 = 0$, l'application des formules obtenues donne $a = 1/2$ et donc $C_p = 1/2$, ce qui n'est pas cohérent avec l'analyse qualitative qui prévoyait qu'aucune puissance n'était récupérée car l'air était totalement bloqué au niveau de l'éolienne ($v_2 = 0$). En fait, l'hypothèse de régime stationnaire ne tient plus dans ce cas. De plus, la formule $v_2 = (v_1 + v_4)/2$ donne $v_2 = v_1/2$ ce qui est faux : c'est parce que cette expression a été obtenue à la question 10 en divisant la double expression de $\mathcal{P}$ par v_2, ce qui suppose que $v_2 \neq 0$. Si au contraire on pose $v_2 = 0$ dans ces expressions de $\mathcal{P}$, on retrouve bien $\mathcal{P} = 0$.

Q.13) Pour quelle valeur de a le coefficient C_p est-il maximal ? Déterminer le maximum de rendement d'une éolienne, qu'on notera C_{Betz}.

R.13) Il s'agit d'une fonction de a. Calculons sa dérivée pour trouver son extremum:

$$\frac{\mathrm{d}C_p}{\mathrm{d}a} = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 4(1-a)(1-3a)$$

La dérivée s'annule en $a = 1$ et $a = 1/3$. Le cas $a = 1$ correspond à l'absence d'éolienne (aucun changement de vitesse), donc l'annulation de la dérivée pertinente est $a = 1/3$, pour laquelle le rendement vaut:

$$C_{\text{Betz}} = \frac{16}{27} \approx 0.59$$

Q.14) Une éolienne de pales de longueur 60 m est placée dans une zone où le vent, quand il est fort, a la puissance cinétique surfacique $\mathcal{P}_{\text{cin}}/S = 1500$ W/m^2. Quelle est sa puissance maximale d'après la limite de Betz ?

R.14) $\mathcal{P}_{\text{cin}} = 1500\text{W/m}^2 \times \pi(60\text{m})^2 = 17$ MW donc la puissance maximale imposée par la limite de Betz est $\mathcal{P}_{\text{cin}}C_{\text{Betz}}$ = 10 MW.

Remarque : on donne dans les slides de cours la figure 30.3 du Jaffe et Taylor, qui indique, pour une éolienne commerciale de diamètre des pales 126 m, une puissance de 7,5 MW donc c'est assez cohérent, même si ça dépend fortement du choix de $\mathcal{P}_{\text{cin}}$. La puissance typique dans le nord de la France est 300 W/m² à hauteur 50 m, et donc 470 W/m² à la hauteur 140 m de notre éolienne (cf fig. 30.3) en supposant $v \propto 1/z^7$ (cf p 542). Cette valeur étant une moyenne annuelle, on prend 1500 W/m² comme valeur maximale afin de rendre compte d'un facteur de charge de l'ordre de 0,30.

Performances des éoliennes

On a déterminé le rendement maximal d'une éolienne, qui constitue la limite de Betz. Ce rendement reste théorique et ne peut être atteint avec les éoliennes réelles.

Q.15) Proposer des raisons pour lesquelles le rendement réel C_p d'une éolienne n'atteint pas C_{Betz}.

R.15) De nombreuses limitations:

- le fluide n'est pas parfait, la distribution des vitresses n'est pas uniforme;
- la perte de pression due au capteur n'est pas uniforme;
- le sillage en aval est perturbé par la présence des pales et leur rotation;
- le rotor a un rendement propre, et possède une trainée qui perturbe l'écoulement en aval.

Q.16) Afin de pouvoir comparer différents types d'éoliennes, on définit un nombre sans dimension λ appelé *paramètre de rapidité*, qui est le rapport entre la vitesse d'un point à l'extrémité d'une pale et la vitesse du vent. Exprimer λ avec les paramètres pertinents du problème.

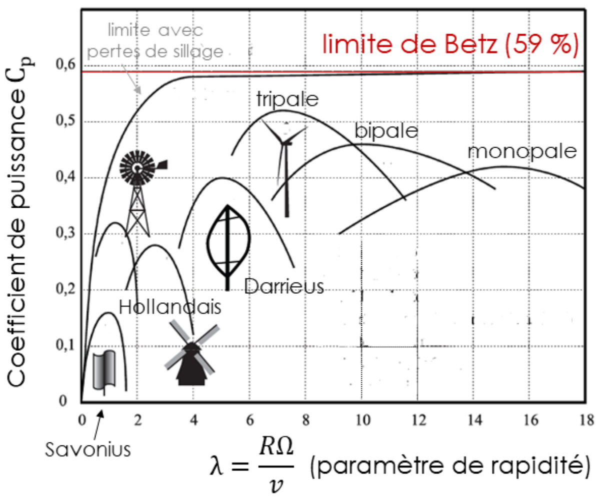

Figure 2: Représentation des performances des différents types d'éoliennes. Adapté de Thomas, W. Jr Murphy, Energy and Human Ambitions on a Finite Planet, UC San Diego (2021).

R.16) Avec R le rayon des pales, Ω la vitesse de rotation angulaire et v_0 la vitesse du vent, on peut construire le paramètre

$$\lambda = \frac{R\Omega}{v_0}$$

Q.17) Le graphique 2 présente des rendements réels d'éoliennes, selon chaque type de fonctionnement, en particulier les éoliennes mono- bi- tripales, les moulins, le savonius qui est une éolienne à axe vertical. Quels commentaires peut-on faire?

R.17)
- Le rendement dépend en réalité de la vitesse du vent, résultat qui n'était pas prévu par la limite de Betz.
- Les éoliennes sont nettement plus efficaces que les moulins, et leur optimum n'est pas au même paramètre de rapidité.
- Les éoliennes tripales ont un optimum légèrement supérieur aux éoliennes bipales et monopales
- Pour les éoliennes tripales, l'optimum est à $\lambda = 7$, ce qui signifie que la pale a une vitesse 7 fois supérieure au vent! C'est très différent des moulins où les pales tournent essentiellement à la vitesse du vent ($1 < \lambda < 3$).
- Le Savonius est une éolienne à axe vertical contrairement aux éoliennes à axe horizontal plus classiques. Son rendement est nettement en dessous, mais aussi dans un régime très différent de vitesse.