

**Climat-Énergie-Société**  
**- LU2PY125 -**

3 ECTS

Travaux dirigés

*2024-2025*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.</b>	<b>3</b>
1.1	Ressources non renouvelables. Pic de Hubbert . . . . .	3
1.2	Recyclage de l'aluminium . . . . .	5
1.3	Ordres de grandeur sur les émissions de CO <sub>2</sub> . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Consommation automobile et économies d'énergie</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>L'énergie éolienne</b>	<b>17</b>
3.1	Introduction . . . . .	17
3.2	Rendement d'une éolienne – Limite de Betz . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Énergies hydraulique et solaire</b>	<b>25</b>
4.1	Hydroélectricité et stockage de l'énergie . . . . .	25
4.2	Énergie solaire : quelques ordres de grandeur . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Effet de serre (1) : introduction et épaisseur optique</b>	<b>27</b>
5.1	Approche simplifiée de l'effet de serre . . . . .	27
5.2	Épaisseur optique . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Effet de serre (2) : le modèle à deux faisceaux</b>	<b>31</b>
6.1	Bases théoriques de l'effet de serre : modèle à deux faisceaux . . . . .	31
6.2	Application : le profil de température dans l'atmosphère . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Forçages climatiques et rétroactions</b>	<b>39</b>
7.1	Le forçage radiatif . . . . .	39
7.2	Les rétroactions, approche par diagrammes systémiques . . . . .	40
7.3	Les rétroactions, approche quantitative . . . . .	41

## TD n° 1

# Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.

### Objectifs

- Révision de notions mathématiques et mécaniques
- Se familiariser avec différentes unités d'énergie et de puissance
- Se familiariser avec une approche par ordre de grandeur. S'approprier quelques chiffres clefs.

### Données

- Masses molaires :

Molécule/Atome	C	O	Al	CO <sub>2</sub>	« air » (moyenne)
Masse molaire (g/mol)	12	16	27	44	29

- 1 ppm (ou ppmv) signifie une partie par million : 1 ppm de CO<sub>2</sub> signifie que sur un million de molécules prises dans un volume d'air, l'une d'elles est une molécule de CO<sub>2</sub>.
- $P_{atm} = 10^5$  Pa et  $R_{Terre} \simeq 6400$  km

## 1.1 Ressources non renouvelables. Pic de Hubbert

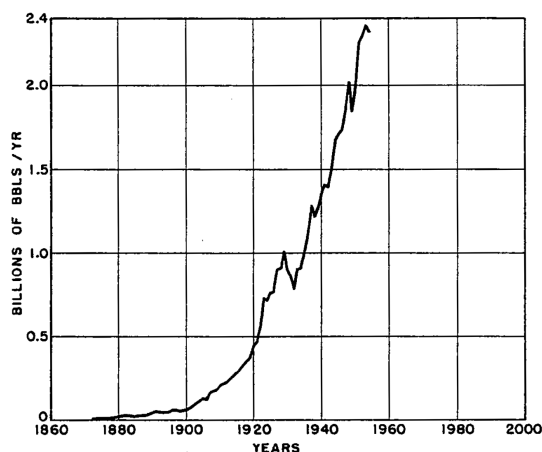


Figure 5 – United States production of crude oil.

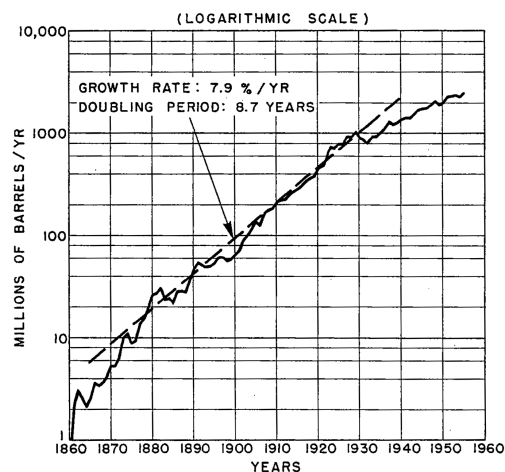


Figure 10 – Crude-oil production in the United States plotted on semilogarithmic scale.

FIGURE 1.1 – Production de pétrole annuelle  $P$  en échelles linéaire et logarithmique (source : Hubbert, 1956).

Dans les années 1950, le géophysicien M. K. Hubbert (Shell Company) a proposé un modèle mathématique appliqué à l'épuisement des ressources en énergies fossiles, et a ainsi prédit l'existence d'un pic de production de pétrole aux États-Unis situé vers 1970 et suivi d'un déclin. La quantité cumulée  $Q(t)$  est le stock de pétrole extrait depuis le début des forages (exprimée en milliards de barils ou Gbl, 1 bl = 159 L). La production annuelle (unité : Gbl/yr) est la quantité de pétrole extraite en une année :  $P(t) = dQ/dt$ . On a donc  $Q(t) = \int_0^t P(t') dt'$ .

1. Expliciter les limites mathématiques que doit vérifier  $P(t)$  et en déduire une proposition simple pour l'allure de la fonction  $P(t)$ . Quelle sera l'allure correspondante de  $Q(t)$  ?

#### Correction

$P = 0$ , à  $t = 0$  et à  $t = \infty$  lorsque le gisement est épuisé. La courbe la plus simple à envisager est donc une courbe croissante, qui atteint un maximum, et décroît à 0.  $Q(t)$  est l'intégrale de l'aire sous la cloche et présente une allure croissante de 0 à une valeur asymptotique  $Q_{t=\infty} = Q_{total}$ .

2. On observe sur la figure 1.1 que la courbe de production a initialement une allure exponentielle :  $P(t) \propto e^{rt}$ . Montrer que cela implique  $P(t) \propto Q(t)$  (dans ce régime initial).

#### Correction

$P = dQ/dt$ , avec  $P_{initial} = Ce^{rt}$ , s'intègre en  $Q_{initial}(t) = (C/r)e^{rt}$  donc  $P_{initial}(t) \propto Q_{initial}(t)$ . Explication : une fois les premiers gisements découverts, la demande croît exponentiellement, et la production (non contrainte) suit cette demande (ce qui n'est pas toujours le cas, la production peut aussi obéir à des considérations géopolitiques).

3. Il faut aussi rendre compte de ce que les gisements les plus accessibles ont été exploités en premier. De ce fait, l'extraction du pétrole devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que la quantité de pétrole disponible  $Q_{total} - Q(t)$  s'épuise (on appelle  $Q_{total}$  la quantité totale de pétrole récupérée après épuisement du gisement). On peut le décrire simplement dans  $P(t)$  par un facteur  $\propto 1 - \frac{Q(t)}{Q_{total}}$  et finalement, Hubbert propose la forme suivante :

$$P(t) = \frac{dQ}{dt} = r Q \left( 1 - \frac{Q}{Q_{total}} \right) \quad (1.1)$$

où  $r$  est un coefficient positif (unité :  $\text{yr}^{-1}$ ).

En posant  $y = Q/Q_{total}$ , montrer que l'équation (1) s'écrit :  $P = r Q_{total} y(1 - y)$ . Pour quelle valeur de  $y$  la production  $P$  atteint-elle son maximum ? En conclure que le pic de production  $t_{\text{peak}}$  est atteint lorsque la moitié des réserves a été exploitée. Donner l'expression de  $P_{\text{peak}}$ .

#### Correction

$0 < y < 1$ . La fonction  $f(y) = y(1 - y)$  est maximale pour  $y = 1/2$ , donc la production est maximale pour  $Q_{\text{peak}} = Q_{total}/2$  et  $P_{\text{peak}} = rQ_{total}/4$ . Pour une ressource finie, la production diminue alors même qu'il reste encore la moitié du stock accessible !

4. Montrer que

$$Q(t) = \frac{Q_{total}}{1 + e^{-r(t-t_{\text{peak}})}} \quad (1.2)$$

est solution de l'équation (1). Tracer l'allure de  $Q(t)$  et  $P(t)$ .

5. Application à la production de pétrole aux États-Unis<sup>1</sup>. Les expressions analytiques de  $P(t)$  et  $Q(t)$  font intervenir 3 paramètres,  $r$ ,  $Q_{total}$  et  $t_{\text{peak}}$ , qui peuvent être obtenus par un ajustement numérique de données réelles. Sur la figure 1.2 sont représentés : (en traits pleins) les données de la production annuelle  $P(t)$  et du stock cumulé  $Q(t)$  de pétrole aux États-Unis jusqu'en 2022 et, (en pointillés) les ajustements des données

#### Correction

L'allure de la courbe est très bien décrite par le modèle de Hubbert mais seulement jusqu'à 2010 environ. Ensuite, il faut prendre en compte le pétrole provenant de l'exploitation des schistes bitumineux ou extrait de sables bitumineux. On n'est donc plus dans l'hypothèse de gisements découverts à  $t = 1900$ , ou à intervalles réguliers. Il faut donc se méfier des prédictions de pic de production ou d'épuisement de

1. Données : [EIA \(Energy Information Administration\)](#)

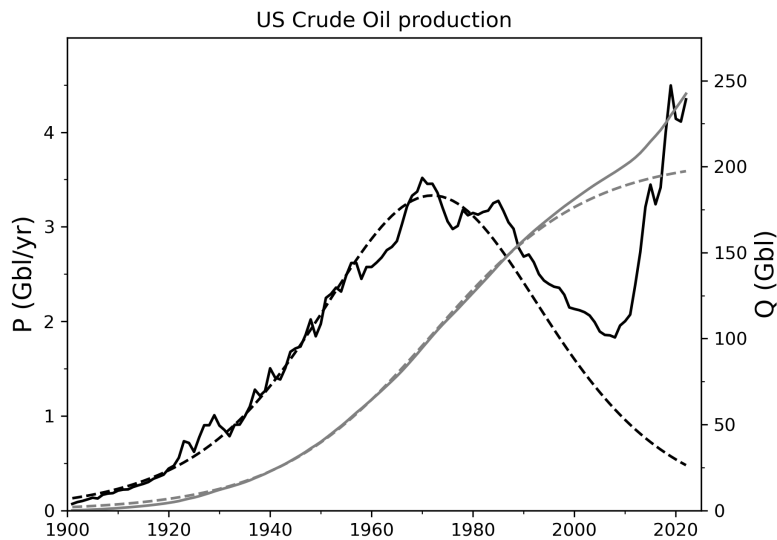


FIGURE 1.2 – En traits pleins : production annuelle (Gbl/yr, en noir) et cumulée  $Q$  (Gbl, en gris) aux États-Unis entre 1900-2022. En pointillés : modèle obtenu avec les paramètres  $r = 0,065 \text{ yr}^{-1}$ ,  $Q_{total} = 205 \text{ Gbl}$  et  $t_{peak} = 1972$ .

ressources, globalement les ressources s'épuisent mais pas toujours aussi vite qu'anticipé (et notamment attention au discours "de toute façon il n'y aura bientôt plus de pétrole" : il en reste assez pour nous faire dépasser largement les +2 degrés).

6. On revient plus en détail sur la démarche de Hubbert en exploitant les données d'une autre manière.

(a) Montrer que  $P/Q$  suit une loi linéaire avec  $Q$ .

**Correction**

On réécrit simplement l'équation (1) :  $P/Q = r(1 - Q/Q_{total})$ .

(b) Le graphe  $P/Q$  en fonction de  $Q$  est donné en figure 1.3. Commenter la pertinence du modèle et estimer  $r$  et  $Q_{total}$ .

**Correction**

La loi linéaire annoncée est vérifiée. On lit sur le graphe l'interception à  $Q = 0$  :  $r = 0,065 \text{ yr}^{-1}$  et à  $P/Q = 0$  :  $Q_{total} = 205 \text{ Gbl}$  (en gros). Pourquoi les points à  $t \lesssim 1930$  ne suivent-ils pas le modèle ? Parce que  $Q(t)$  – égale à l'intégrale de  $P$  – est calculée en sommant les valeurs annuelles de  $P$  depuis 1900, ce qui est une approximation grossière sur un intervalle de temps de quelques années.

(c) En déduire une estimation de  $Q_{peak}$  et  $P_{peak}$ .

**Correction**

$Q_{peak} = 102,5$ , et  $P_{peak} = rQ_{total}/4 = 3,3$ .

## 1.2 Recyclage de l'aluminium

7. L'aluminium est un métal très polluant à produire à partir de la bauxite mais fait partie des métaux qui se recyclent le mieux. On considère une canette produite en 2023 qui serait continuellement recyclée par la suite. En supposant une efficacité de recyclage de  $\sim 95 \%$ , un taux de collecte de  $\sim 75 \%$ , et une durée de cycle de 40 jours (de la poubelle jaune au retour sur le marché), calculer la part initiale d'aluminium encore sur le circuit 1 an plus tard et 10 ans plus tard.

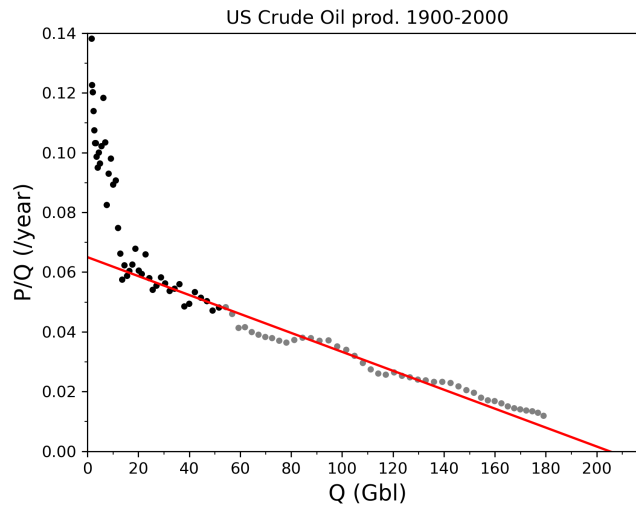


FIGURE 1.3 – Tracé de  $P/Q$  en fonction de  $Q$  pour les États-Unis. En noir : données de 1900 à 1956 utilisées par Hubbert. L'ajustement linéaire (en rouge) est réalisé sur la période 1930-1990.

### Correction

Dans 1 année, il y a  $365/40 \sim 9$  cycles (et  $\sim 90$  cycles sur 10 ans). Le taux effectif du recyclage à chaque cycle est  $0.95 \times 0.75 \% = 71 \%$ . La part initiale d'aluminium encore présente 1 an plus tard est donc  $0.71^9 = 0.046$  (moins de 5 %) et  $0.71^{90} = 4 \cdot 10^{-14}$  (quatre millièmes de milliardième de pourcent) 10 ans plus tard ...

Remarques : le seul levier technique est l'augmentation du taux de collecte (le taux de recyclage est déjà proche de 100 % et le taux d'incorporation dans le produit recyclé est de 95 % pour la canette d'aluminium). Le levier sociétal est de ne pas utiliser d'aluminium pour des usages aussi temporaires que des emballages. Evidemment, il ne s'agit pas de remplacer l'aluminium par du plastique ; c'est la question générale de l'emballage jetable qui se pose. Heureusement, il existe d'autres usages aux durées de vie plus longues : l'industrie aime mettre en avant que 3/4 de l'aluminium produit depuis le XIX<sup>e</sup> siècle serait encore en circulation (donnée non sourcée).

8. **Question complémentaire** : au bout de combien de temps une quantité initiale d'une mole (correspondant à la masse de 2 canettes) se réduit-elle à un seul atome encore présent ?

### Correction

On cherche  $(\text{taux})^{n_{\text{cycles}}} = 1/N_A \sim 1.67 \cdot 10^{-24}$ , d'où  $n_{\text{cycles}} = \frac{\ln(1.67 \cdot 10^{-24})}{\ln(0.71)} = 161$ . La durée correspondante est donc  $161 \times 40 \text{ jours} = 6460 \text{ jours} \sim 18 \text{ ans}$ .

9. Supposons que chaque personne sur Terre consomme une canette d'aluminium de 13 g par jour. Quelle masse d'aluminium faudrait-il alors extraire chaque année pour compenser les pertes du circuit de recyclage ? Comparer cette valeur à la production mondiale d'aluminium (64 Mt en 2018) et aux réserves mondiales de bauxite (entre 28 et 75 Gt, selon la façon dont elles sont définies et estimées - il faut 4 à 5 t de bauxite pour produire 1 t d'aluminium).

### Correction

Chaque canette consommée donne lieu à 29 % de pertes = 3,8 g. Il faudrait donc introduire dans le circuit  $3,8 \text{ g} \times$  le nombre de canettes consommées par an soit, pour une population humaine de 8 milliards, 11 Mt d'aluminium. C'est donc une portion significative de la production mondiale d'aluminium - mais sans doute surestimée car on ne consomme pas tous une canette par jour. Les réserves mondiales étant de l'ordre de 5-19 Gt d'aluminium, il n'y a pas de quoi les épuiser seulement avec cet usage.

## 1.3 Ordres de grandeur sur les émissions de CO<sub>2</sub>

### 10. Émissions et concentration de CO<sub>2</sub>.

- (a) **Conversion.** Sachant que la force de pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface terrestre est égale au poids de l'atmosphère, calculer la masse totale de l'atmosphère. En déduire la masse de CO<sub>2</sub> correspondant à 1 ppm de la masse de l'atmosphère.

#### Correction

Calcul de la masse d'air sur Terre : la pression atmosphérique correspond à F/S avec  $F = m_{air}g$  et  $S = 4\pi R_{Terre}^2$  d'où  $m_{air} = (P_{atm} \times 4\pi R_{Terre}^2)/g = 10^5 \times 4\pi \times (6380 \times 10^3)^2/10 = 5.1 \cdot 10^{18}$  kg. Or  $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = \frac{n_{CO_2}}{n_{air}} = \frac{m_{CO_2}}{m_{air}} \frac{M_{air}}{M_{CO_2}}$  d'où  $10^{-6} = m_{CO_2}/(5.1 \cdot 10^{18}) \times 29/44 = 0.129 \times 10^{-6} m_{CO_2}$  (exprimée en Gt), d'où  $1 \text{ ppm} \leftrightarrow 7.7 \text{ GtCO}_2$ .

- (b) **Cumul historique.** En 1870, la concentration de CO<sub>2</sub> atmosphérique était de 280 ppm. Un article<sup>2</sup> évalue les émissions dues aux activités humaines, cumulées sur la période 1870-2013, à  $(535 \pm 55)$  Gt d'atomes de carbone. Sachant que seule la moitié des émissions de CO<sub>2</sub> reste dans l'atmosphère, l'autre moitié étant absorbée par les océans et les sols, en déduire la concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub> en 2013.

#### Correction

$535 \pm 55 \text{ GtC} \leftrightarrow 44/12 \times (535 \pm 55) = 1962 \pm 202 \text{ GtCO}_2$ , soit une contribution de  $255 \pm 26$  ppm. La moitié environ a été absorbée par les océans (30 %) et les sols (20 %) (mentionné pendant le CM1), laissant dans l'atmosphère  $\sim 255/2 = 127$  ppm. On en déduit  $[CO_2]_{2013} = 280 + 127 = 407$  ppm (vraie valeur : 400 ppm).

- (c) **Exercice complémentaire : énergies fossiles et émissions de CO<sub>2</sub>.** On décompose ci-dessous les étapes d'une démarche pour aboutir à l'ordre de grandeur des émissions de CO<sub>2</sub> liées au transport individuel (en voiture).
- i. Proposer un ordre de grandeur du nombre moyen de km effectués quotidiennement puis annuellement par un automobiliste.

#### Correction

30 km/jour soit 10 000 km par an.

- ii. La consommation moyenne d'une voiture dans le Monde étant de 7 litres d'essence pour 100 km parcourus (source : Agence Internationale de l'Énergie), estimer la consommation typique, en litres d'essence, associée à ce trajet annuel (pour une personne).

#### Correction

Avec une voiture consommant 7L/100 km, cela représentera 700 litres par an.

- iii. Compte tenu que la combustion d'un litre d'essence émet 0,75 kg de carbone, évaluer les émissions de carbone puis de CO<sub>2</sub> liées au transport individuel, en tonnes par personne et par an. Que vous inspire la valeur obtenue ?

#### Correction

$700 \times 0,75 \text{ kg C} = 0,525 \text{ t C}$ , et 44/12 fois plus de CO<sub>2</sub>, soit 1,9 t CO<sub>2</sub> par personne et par an. C'est très comparable à l'objectif fixé par la France pour les émissions totales d'un individu en 2050 ...

- iv. Proposer un ordre de grandeur du nombre d'automobilistes dans le Monde et en déduire les émissions de CO<sub>2</sub> liées au transport individuel pour l'ensemble du Monde.

#### Correction

Entre 1 et 2 milliard d'automobilistes, soit 2 à 4 Gt CO<sub>2</sub>.

- v. Sachant que le transport individuel représente  $\sim 50\%$  des émissions du secteur du transport et que ce secteur représente lui-même environ  $20\%$  du total des émissions, vérifier la cohérence de votre calcul précédent.

#### Correction

Le transport individuel représente  $50\%$  de  $20\%$ , soit  $10\%$  du total des émissions. D'après notre estimation précédente, le total se situe entre 20 et 40 Gt CO<sub>2</sub>, ce qui est à peu près le cas.

Sources :

- les transports représentent  $20\%$  des émissions mondiales de CO<sub>2</sub> [Source : [OurWorldinData](#), qui renvoie vers la base de données [Climate Watch | Data Explorer](#). En 2020 : 35 Gt CO<sub>2</sub> tous secteurs confondus ; 7 Gt CO<sub>2</sub> pour le transport]. Rq : en France, la part du transport est  $30\%$  [Source : [Ministère](#)];
- la part des déplacements individuels sur route dans les transports est  $45\%$  [Source : [OurWorldinData](#), qui renvoie vers IEA + ICCT].

## 11. Travail humain / énergies fossiles

- (a) On cherche une estimation de la puissance mécanique qu'un humain peut fournir en une journée de (dur) travail. On considérera par exemple une ascension régulière correspondant à un dénivelé de 1700 m, effectuée en 10h par une personne de 74 kg et portant un bagage de 10 kg. Exprimer l'énergie mécanique fournie en MJ ainsi que la puissance correspondante.

#### Correction

$$E = mgh = 84 \times 9.81 \times 1700 \sim 1.4 \text{ MJ d'où } P = 40 \text{ W.}$$

(74 kg est la masse moyenne d'un individu de la population française)

Cette puissance est bien du même ordre que celle fournie par notre alimentation - de l'ordre de 100 W correspondant aux besoins physiologiques de base, une personne qui fournit quotidiennement un effort physique intense doit s'alimenter davantage.

La puissance que nous consommons, avec notre mode de vie actuel, est beaucoup plus élevée. Même en considérant que les procédés impliquant le travail humain ont un meilleur rendement que les procédés industriels, nous ne pourrions pas soutenir notre niveau de vie actuel uniquement par le travail manuel. Autrement dit, l'équivalent de 50 personnes "travaillent" pour nous par le biais de l'énergie principalement fossile que nous consommons (ce sont les "esclaves énergétiques" dont parlent Jancovici et d'autres, mais peut-être éviter ce terme : 1) c'est un peu "abrupt" et chargé de connotations, 2) ça suggère que notre mode de vie actuel serait soutenable sans énergies fossiles à condition d'avoir 50 esclaves chacun : peut-être mais il faudrait encore trouver l'énergie pour les nourrir, et le calcul ne convergerait pas puisqu'il n'inclut pas la source d'énergie de base qui ferait fonctionner tout ça, notamment le soleil nécessaire à l'agriculture.

- (b) **Question complémentaire** : On peut, de manière alternative, estimer la puissance mécanique fournie par une personne ayant excavé de la terre pendant 10 h, en faisant un trou d'une surface de 20 m<sup>2</sup> sur une hauteur de 1 m. Exprimer l'énergie mécanique mise en jeu en MJ puis en Wh ainsi que la puissance correspondante (on donne  $\rho_{\text{terre}} \sim 5,5 \text{ g/cm}^3$ ).

#### Correction

$$E = mgh = \rho Vgh = 5500 \times 20 \times 9.8 \times 1 \sim 1,1 \text{ MJ} \sim 300 \text{ Wh d'où } P_{\text{bras}} = (300 \text{ Wh})/(10\text{h}) = 30 \text{ W}$$

(on suppose que l'énergie à fournir est celle nécessaire pour soulever la terre de 1 m, il y en a peut-être davantage si le sol est très dur).

- (c) La combustion d'un litre d'essence génère environ 10 kWh de chaleur, qui est utilisée par un moteur automobile avec un rendement de l'ordre de 25 %. Comparer l'énergie fournie par un litre d'essence à celle fournie par une journée de travail humain.

#### Correction

$$0,25 \times 10^4 \times 3600 / (1,4 \times 10^6) \approx 6. \text{ Le litre d'essence contient ainsi environ 6 journées de travail}$$



humain.

- (d) **Question complémentaire** Le cheval-vapeur (ch) est une unité de puissance introduite lors de l'apparition des machines à vapeur, afin d'exprimer leur puissance par rapport à celle fournie par un cheval. Il est défini comme la puissance à fournir pour élever une masse de 75 kg sur une hauteur de 1 mètre en 1 seconde. Calculer la valeur de 1 ch dans l'unité SI.

### Correction

$P = mgh = 75 \times 9.8 \times 1 = 735 \text{ W}$ . Remarque : le cheval-vapeur n'est pas la même chose que le "cheval-fiscal" par lequel on caractérise la puissance des moteurs automobiles. Par exemple, un moteur 4 CV de Twingo fournit 90 ch.

12. **Exercice complémentaire : Feux de forêts.** Lors de l'été 2023, les incendies au Canada ont brûlé près de 18,5 millions d'hectares de forêt ([wikipedia, chiffre au 06/10/2023](#)). Estimer la masse de carbone émise dans l'atmosphère par cette combustion (on considérera que le carbone représente la moitié de la masse totale du bois). La comparer aux émissions de gaz à effet de serre du Canada et aux émissions annuelles mondiales :

- Canada (en 2021) : émissions territoriales annuelles (hors émissions induites par les importations) : 550 Mt CO<sub>2</sub>-eq, empreinte totale annuelle (incluant les importations) : 670 Mt CO<sub>2</sub>-eq (soit 17,5 t CO<sub>2</sub>-eq par habitant),
- Monde (actuellement) : émissions annuelles : ~ 50 Gt CO<sub>2</sub>-eq (dont 40 Gt de CO<sub>2</sub>), soit ~ 6 t CO<sub>2</sub>-eq par habitant.

### Correction

1 ha = 100 m × 100 m = 10 000 m<sup>2</sup>. En attribuant une surface de ~ 10 m<sup>2</sup> par arbre, on aboutit à une densité de 1000 arbres/ha (ce qui correspond bien à une forêt de sapins *basse densité*). En supposant que chaque arbre correspond à ~ 50 kg de bois (valeur assez faible pour tenir compte de l'hétérogénéité de la biomasse sur l'ensemble de la surface brûlée), on obtient une masse totale de bois brûlé  $M = 18,5 \times 10^6 \text{ ha} \times 1000 \text{ arbres/ha} \times 50 \text{ kg} = 9,25 \times 10^{11} \text{ kg} = 9,25 \times 10^8 \text{ tonnes de bois}$ . Compte-tenu que 1 tonne de bois ~ 0,5 tonne carbone, les émissions carbone dues aux incendies représentent  $4,6 \times 10^8 \text{ tC}$ . Cela correspond bien aux valeurs que l'on peut trouver sur le net (480 Mt C, d'après l'institut [Copernicus](#)).

On convertit en émissions CO<sub>2</sub> : le rapport des masses molaires étant  $M_{\text{CO}_2}/M_{\text{C}} = (12 + 2 \times 16)/12 = 44/12 = 3.67$ , on obtient une émission totale de CO<sub>2</sub> due aux incendies  $3,67 \times 0,46 \times 10^9 \sim 1,7 \text{ Gt CO}_2$ .

C'est du même ordre de grandeur (et même trois fois plus élevé) que les émissions territoriales annuelles du Canada, et pas du tout négligeable par rapport aux émissions mondiales !

### Remarques :

- justification des 50 kg de bois (25 kg de carbone) par arbre : un *gros* arbre, c'est 500 kg de carbone, alors qu'un acacia (2 mètres de hauteur avec un tronc de 5 centimètres), c'est ~ 0,2 kg (il y a beaucoup d'eau dedans). On prend la moyenne entre 1 et 500 kg et on tient compte que 10 à 15 % seulement de la biomasse aérienne d'une forêt brûle,
- les hautes latitudes connaissent le réchauffement le plus fort (vu en cours), c'est une des raisons pour lesquelles le Canada est très touché par ces incendies,
- l'impact net des incendies de forêts sur le climat n'est pas simple. Généralement cet impact est considéré comme nul, la reconstitution ultérieure de la biomasse captant, par photosynthèse, le carbone libéré lors de la combustion. En fait cela dépend de la nature de la végétation qui a brûlée, de ce qui repoussera à la place et du temps de cette repousse. Il faut aussi considérer l'impact sur le carbone stocké dans les sols (notamment dans le cas des forêts boréales et des tourbières). Dans le cas des mégafeux de 2019-2020, en Australie, la végétation aurait déjà plus que récupérée, grâce à des pluies abondantes ([source: INRAE](#)). Dans le cas des forêts boréales, d'un côté le remplacement des conifères par des feuillus à la repousse tend à augmenter la captation ([Science 2021](#)), d'un autre côté les temps de repousse sont longs (plusieurs décennies). Le bilan (carbone) dépendra de la récurrence et de l'intensité des sécheresses et des feux sur cette période de reconstitution (récurrence et intensité dont on ne sait pas grand chose si ce n'est qu'elles vont augmenter)... À noter cependant, l'impact des incendies sur la biodiversité est contrasté et peut même être globalement positif ([The Conversation 2018](#)). Enfin l'impact sur la qualité de l'air est lui très négatif, avec l'émission de particules fines (notamment les PM<sub>2.5</sub>) : celles-ci sont responsables de 50 000 morts sur la décennie 2008-2018 du fait des feux de forêts en Californie ([Science 2024](#)).
- les émissions CO<sub>2</sub> du Canada sont énormes, à relier avec leur consommation énergétique très élevée (14,14 exajoules en 2022 [[World Statistical Review of Energy](#)], soit 103 MWh/hab, encore plus que les États-Unis) et très supérieures à celles de la France (empreinte carbone autour de 10 t CO<sub>2</sub>-eq/hab. en 2022, valeur vue en cours, contre 17 pour le Canada),

### Remarques enseignants

**Exercices d'examen possibles en lien avec ce TD :**

Ordres de grandeur de la vie quotidienne

Pic de Hubbert : exploitation d'autres données, sur d'autres matériaux etc



## TD n° 2

# Consommation automobile et économies d'énergie

### Objectifs

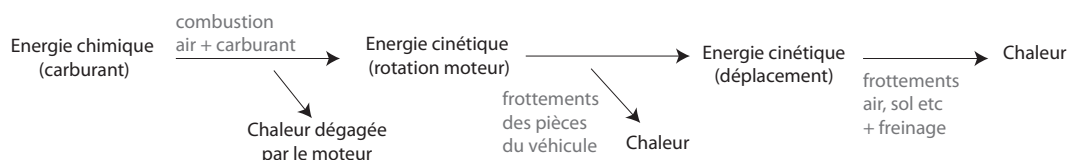
Le transport automobile est un exemple majeur de consommation d'énergie. Ce TD vise à

- identifier les transformations énergétiques impliquées dans le fonctionnement d'un véhicule,
- quantifier l'énergie mécanique à fournir par le moteur pour assurer un déplacement donné,
- chiffrer les économies d'énergie réalisables en jouant sur les paramètres pertinents (vitesse, masse etc),
- traduire ces données en termes d'émission de CO<sub>2</sub>.

La façon dont le moteur produit cette énergie mécanique, son optimisation et sa décarbonation, sont naturellement des enjeux majeurs mais ne seront pas abordées dans ce TD.

1. De quelle nature est l'énergie fournie au moteur d'une voiture thermique ? Quelles sont les transformations énergétiques successives et les sources de pertes associées ?

### Correction



**Energie mécanique à fournir pour un déplacement :** Une voiture de masse  $m$  effectue, sur terrain plat, un "déplacement" comprenant tout d'abord le démarrage, puis le mouvement sur une distance  $d$  à une vitesse  $v$  supposée constante, et enfin l'arrêt pour lequel on suppose qu'aucune énergie n'est à fournir. Afin de simplifier la discussion, on décrira cette voiture comme un objet ponctuel, subissant 3 forces : la force de traction du moteur  $\vec{F}_{mot}$ , la force de traînée (frottements de l'air)  $\vec{F}_{air}$  et la force de roulement  $\vec{F}_{roul}$  associée aux différents frottements solides entre les pièces de la voiture et entre les roues et le sol.

2. **Rappel :** un objet ponctuel se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$  et subit un ensemble de forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ . Exprimer la différence d'énergie mécanique  $E_m(B) - E_m(A)$  en fonction du travail de ces forces.

### Correction

$$E_m(B) - E_m(A) = \Sigma W_i = \Sigma \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

3. **Démarrage :** la voiture part d'une vitesse nulle et accélère jusqu'à une vitesse  $v$ . Quel est le travail (qui sera noté  $W_1$ ) du moteur pendant cette phase d'accélération, supposant que durant cette phase  $F_{mot} \gg F_{air}, F_{roul}$  ? Sur quels paramètres peut-on jouer pour le réduire ?

### Correction

On roule sur terrain plat donc l'énergie potentielle reste constante (disons  $E_p = 0$ ) si bien que  $E_m = E_c$ . La différence d'énergie mécanique entre le début et la fin de la phase d'accélération est donc  $mv^2/2 - m0^2/2$ . Si on néglige les autres forces, cette différence est égale au travail de la force de traction, si bien que  $W_1 = mv^2/2$ . Pour réduire le travail à fournir par le moteur à cette étape, on peut diminuer  $m$  ou  $v$ .

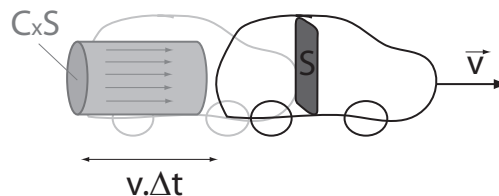
4. Pendant toute la suite du déplacement, la vitesse est supposée constante. Quelle est la relation entre  $W_{mot}$ ,  $W_{air}$  et  $W_{roul}$  pendant cette période ?

### Correction

L'énergie mécanique reste constante puisque  $v$  est constante. Il faut donc que  $W_{mot} = -W_{air} - W_{roul}$ , c'est-à-dire que le travail de traction du moteur compense le travail des deux forces de frottement.

Remarque : autrement dit, pour avoir  $v$  constante, d'après le principe fondamental de la dynamique, il faut que la somme des forces subies soit nulle et donc  $\vec{F}_{mot} = -\vec{F}_{air} - \vec{F}_{roul}$ .

5. **Frottements de l'air** : nous allons développer une modélisation de la force de traînée, extrêmement approximative mais qui aboutit à une expression correcte dans le régime d'écoulement considéré. Admettons que, sous l'effet du passage de la voiture, un tube d'air derrière elle est mis en mouvement à la vitesse  $v$ . Pour rendre compte du caractère plus ou moins aérodynamique du véhicule, on introduit un coefficient de traînée  $C_x$  (sans dimension) : la section du tube d'air mis en mouvement est supposée égale à  $C_x S$ , où  $S$  est l'aire de la section de la voiture.



Exprimer le volume  $\mathcal{V}$  du tube d'air traversé pendant un déplacement de longueur  $d$ , puis sa masse (on note  $\rho_a$  la masse volumique de l'air). En déduire le travail  $W_{air}$ , supposant que c'est l'opposé de l'énergie cinétique reçue par le tube d'air.

### Correction

Le tube d'air traversé est de volume  $\mathcal{V} = C_x S \times d$  et de masse  $\rho_a \mathcal{V} = \rho_a C_x S d$ .

Ce tube d'air, initialement immobile, a gagné la vitesse  $v$  et donc l'énergie cinétique  $\rho_a \mathcal{V} v^2 / 2$ . Le travail de la force de traînée (énergie - négative - reçue par la voiture de la part de l'air) est supposé l'opposé de l'énergie gagnée par l'air sous l'effet de la voiture : on a donc

$$W_{air} = -\frac{1}{2} \rho_a C_x S d v^2$$

6. En déduire le travail  $W_2 = -W_{air}$  que le moteur doit fournir pour compenser la force de traînée. Comment le réduire ? Montrer que l'on peut définir une "distance critique"  $d_c$  telle que  $W_2/W_1 = d/d_c$ .

### Correction

Le moteur doit donc fournir le travail (positif)  $W_2 = S \rho_a C_x v^2 d$  pour compenser ces pertes. On peut réduire ce travail en baissant  $v$  ou  $C_x$  principalement ; on peut aussi baisser  $S$  mais en général cette surface est déjà assez minimale. Par contre on ne peut pas jouer sur  $d$  (sauf si on décide qu'on va moins loin mais ce n'est pas l'objet de la discussion) ni  $\rho_a$  (il faudrait pour ça voyager dans un tunnel sous vide !).

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\rho_a S C_x v^2 d}{m_v v^2}$$

Le rapport  $W_2/W_1$  est indépendant de  $v$  parce que les deux quantités  $W_1$  et  $W_2$  sont en  $v^2$ . Ce rapport peut se réécrire

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{d}{d_c}$$

en introduisant

$$d_c = m_v / (\rho_a S C_x)$$

7. Calculer  $d_c$  pour  $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $m = 1,4 \text{ t}$ ,  $C_x = 0,33$  et  $S = 2,7 \text{ m}^2$  (valeurs typiques pour une voiture). Qu'en conclure ?

#### Correction

On calcule  $d_c = 1,3 \text{ km}$ . Pour les déplacements plus courts (typiquement : en ville), la dépense d'énergie correspond principalement à mettre en mouvement le véhicule ( $W_1$ ). Pour les déplacements plus longs, il s'agit surtout de vaincre les frottements de l'air ( $W_2$ ).

8. **Force de roulement** : il faut aussi prendre en compte, malgré une contribution plus faible, la résistance au roulement qui intègre le frottement de la gomme des pneus sur la route, la dissipation de l'énergie par les suspensions de la voiture, etc. Le modèle le plus simple pour l'évaluation de ces pertes fait l'hypothèse que la résistance est simplement de la forme  $\mu mg$ , où  $\mu$  est un coefficient de l'ordre de 0,01.

Exprimer le travail  $W_{roul}$  de la résistance au roulement pendant le déplacement et le travail  $W_3 = -W_{roul}$  que le moteur doit fournir pour compenser cette force. Comment le diminuer ?

#### Correction

$W_{roul} = -\mu mg \times D$  et donc  $W_3 = \mu mg D$ .

C'est principalement en diminuant la masse de la voiture que l'on peut baisser  $W_3$ , si on admet que la mécanique de la voiture est déjà suffisamment optimisée pour que  $\mu$  ne puisse pas être diminué davantage.

**Applications numériques** : Nous allons considérer deux "trajets" typiques :

- (1) "sur autoroute" : un unique "déplacement" de 100 km effectué à vitesse constante ;
- (2) "en ville" : une succession de 10 "déplacements" de 500 m (i.e. on parcourt 5 km en s'arrêtant 9 fois à cause des feux, carrefours etc).

et 5 jeux de paramètres :

- (a) "conditions normales" :  $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $m = 1,4 \text{ t}$ ,  $C_x = 0,33$  et  $S = 2,7 \text{ m}^2$  ;  $v = 130 \text{ km/h}$  sur autoroute et  $50 \text{ km/h}$  en ville,
- (b) conditions normales sauf pour la vitesse :  $v = 110 \text{ km/h}$  sur autoroute et  $35 \text{ km/h}$  en ville ;
- (c) conditions normales sauf pour la masse <sup>1</sup> :  $m = 1 \text{ t}$  ;
- (d) conditions normales sauf pour le coefficient de traînée <sup>2</sup> :  $C_x = 0,25$  ;
- (e) "conditions optimisées" :  $m = 1 \text{ t}$ ,  $C_x = 0,25$  et  $S = 2,7 \text{ m}^2$  ;  $v = 110 \text{ km/h}$  sur autoroute et  $35 \text{ km/h}$  en ville.

8. Calculer l'énergie totale  $\mathcal{E}$  à fournir pour les 2 types de trajet dans chacune des 5 conditions.

1. La masse à vide d'une voiture vendue en France est actuellement en moyenne de 1,25 t, alors qu'elle n'était que de 0,9-1,05 t en 1990. En France, un malus s'applique actuellement aux véhicules de plus de 1,6 t à vide.

2. On peut trouver un copieux tableau de valeurs de  $C_x$  dans l'article [Automobile drag coefficient](#) de Wikipedia.  $C_x = 0,25$  est le coefficient de la Toyota Prius, par exemple. Globalement les véhicules commercialisés les plus efficaces descendent à 0,19-0,20, ce sont des modèles de luxe assez récents.

9. Supposant que le véhicule possède un moteur à essence, calculer sa consommation pour chacun des 10 cas ci-dessus. La teneur énergétique de l'essence est d'environ 10 kWh/litre. Le rendement du moteur essence<sup>3</sup> est de l'ordre de 35 % au maximum (sur autoroute) et 15 % en ville (utilisations fréquentes mais courtes).

### Correction

Le calcul est fastidieux si on veut couvrir les 10 cas. En séance de TD, on pourra se répartir le travail entre les différents étudiants.

Trajet sur autoroute :

Conditions	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$W_1$ (MJ)	0,9	0,7	0,7	0,9	0,6
$W_2$ (MJ)	139	100	139	106	76
$W_3$ (MJ)	14	14	10	14	10
$\mathcal{E}$ (MJ)	154	114	150	120	86
essence (L)	12,2	9,1	11,9	9,5	6,8

On vérifie à chaque fois que  $W_1$  et  $W_3$  ne dépendent pas de  $C_x$ , que  $W_2$  ne dépend pas de  $m$  etc. C'est le travail  $W_2$  qui domine, ce qu'on pouvait anticiper puisque  $d_c \ll 100$  km. Les ordres de grandeur de consommation d'essence pour 100 km sont raisonnables, quoiqu'un peu élevés : la consommation moyenne des voitures à essence en France est actuellement de l'ordre de 7 L/100 km.. On voit que la consommation d'essence peut être réduite de presque 50 % dans les conditions optimisées.

Trajet en ville :

Conditions	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$W_1$ (kJ)	135	66	96	135	47
$W_2$ (kJ)	103	50	103	78	38
$W_3$ (kJ)	69	69	49	69	49
$\mathcal{E}$ (MJ)	3,07	1,85	2,48	2,82	1,34
essence (L)	0,57	0,34	0,46	0,52	0,25

Il faut bien noter qu'ici  $\mathcal{E}$  est donnée par  $10 \times (W_1 + W_2 + W_3)$  où  $W_2$  et  $W_3$  sont calculés pour  $d = 500$  m. Comme  $d < d_c$ , on a bien  $W_2 < W_1$ . Par contre, comme  $d$  n'est pas négligeable par rapport à  $d_c$ ,  $W_2$  n'est pas négligeable par rapport à  $W_1$ .

### Empreinte carbone :

10. En posant des ordres de grandeur raisonnables sur le nombre de trajets "en ville" et "sur autoroute", estimer la consommation d'essence par personne et par an dans chacune des conditions (a) à (e).

### Correction

En posant 4 trajets "en ville" par jour et 2000 km de trajet "sur autoroute" par an, on est sûrement assez proche de la vérité puisque (cf données sur le site Datalab du Ministère de la transition écologique) 1 ) les "trajets longs" (> 100 km) étaient en moyenne de 5000 km par personne de plus de 15 ans en 2016, dont 40 % du kilométrage en voiture (et 43 % en avion, 13 % en train) et 2 ) en 2019, 9300 km ont été parcourus en voiture au total par personne.

On trouve alors (a) 1074 L, (b) 682 L, (c) 908 L, (d) 953 L et (e) 498 L d'essence.

On voit en faisant le détail du calcul que ce sont les trajets courts qui contribuent le plus, d'où l'importance de développer des alternatives sans voiture à ces déplacements.

3. On rappelle que le rendement maximum théorique d'un cycle moteur idéal vaut :  $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$  avec  $T_f$  la température de la source froide et  $T_c$  la température de la source chaude.

**Remarques :**

On peut noter que la distance médiane domicile-travail était de 12,5 km en milieu rural et 6,1 km en milieu urbain en 2019, alors qu'elle était resp. de 8,1 et 4,8 km en 1999 : l'amélioration du rendement des moteurs est peut-être une cause de cette augmentation (effet rebond : on peut habiter plus loin de son travail si le coût du trajet baisse), mais les difficultés du marché du travail en sont sans doute un autre très important.

L'hypothèse que les 2000 km de trajets longs sont parcourus sur autoroute est sans doute un peu forte, une large partie est sans doute parcourue sur routes nationales etc, à vitesse nettement plus faible.

A 1,9 euros/L d'essence, le budget par personne serait de 1000 à 2000 euros/an, ce qui est beaucoup par rapport à la dépense moyenne d'un *foyer* périurbain de 1400 euros/an.

11. On donne 1 litre d'essence  $\leftrightarrow$  0,75 kgC. En déduire une estimation des émissions de gaz à effet de serre annuelles d'un automobiliste dans chacune des conditions (a) à (e).

**Correction**

Gros piège : la masse de carbone n'est pas la masse de CO<sub>2</sub> ! (cf TD 1) On calcule donc 1 litre d'essence  $\leftrightarrow$  2,75 kgCO<sub>2</sub>.

On trouve (a) 2,9 / (b) 1,9 / (c) 2,5 / (d) 2,6 / (e) 1,4 tCO<sub>2</sub>e, ce qui est un peu élevé mais un assez bon ordre de grandeur.

12. Quelle baisse des émissions peut-on attendre en passant des conditions "normales" aux conditions "optimisées" ? Cette baisse est-elle significative ?

**Correction**

On peut réduire les émissions de moitié, soit éviter 1,5 tCO<sub>2</sub>e, ce qui n'est pas du tout négligeable par rapport à l'empreinte totale d'une personne, qui était de 9 tCO<sub>2</sub>e par personne en France en 2019.

13. Notre automobiliste achète maintenant une voiture électrique. En restant dans les conditions (e)<sup>4</sup>, sachant que l'énergie stockée dans une batterie de voiture est restituée avec environ 15 % de pertes, et qu'en France le facteur d'émission de la production électrique est de 75 gCO<sub>2</sub>e/kWh, quelle est maintenant son empreinte carbone annuelle ?

**Correction**

Dans les conditions (e), sur une année, il faut fournir 3700 MJ d'énergie mécanique, ce qui nécessite d'avoir emmagasiné  $3700/0,85 = 4300$  MJ = 1200 kWh d'énergie électrique. Ceci représente une empreinte carbone à l'usage de 90 kgCO<sub>2</sub>e par an, ce qui est très négligeable par rapport à l'empreinte carbone d'une voiture à essence.

14. Il faut aussi prendre en compte l'énergie grise associée à la fabrication du véhicule<sup>5</sup>. Elle est de l'ordre de 8 tCO<sub>2</sub>e pour une voiture à essence mais monte à 14 tCO<sub>2</sub>e pour une voiture électrique à cause de la production des batteries. Au bout de combien de temps le choix d'une voiture électrique est-il avantageux du point de vue des émissions carbone ?

**Correction**

Les 6 tCO<sub>2</sub>e supplémentaires de la voiture électrique correspondent à environ 4 ans de l'empreinte d'une voiture à essence, c'est-à-dire que le choix d'une voiture électrique est amorti au bout de 4 ans d'un point

4. ceci afin de ne pas avoir à refaire de nouveaux calculs. En fait, pour bien faire, il faudrait prendre en compte que les voitures électriques sont plus lourdes à cause des batteries - c'est même un élément très limitant dans la conception de ces véhicules. Par exemple, le poids à vide de la Renault Zoé est de 1470 kg. Il existe de nombreux véhicules électriques beaucoup plus lourds car plus spacieux et haut de gamme - leur intérêt environnemental est plus limité car leur fabrication consomme davantage de ressources.

5. Les données utilisées ici sont issues de l'analyse du cabonet Carbone 4 (<https://www.carbone4.com/analyse-faq-voiture-electrique>) dans laquelle on peut aussi trouver des éléments de discussion sur les besoins en matières premières des batteries, l'impact environnemental et social de l'extraction, les véhicules hybrides etc.

**Conclusion :** *les calculs de ce TD donnent des valeurs assez réalistes de la consommation énergétique d'une voiture à essence (et pour une diesel les valeurs seraient proches). On voit que des baisses d'émissions significatives peuvent être réalisées sans développements technologiques nouveaux - de l'ordre d'une moitié pour les changements décrits ici, ce qui est important mais pas suffisant par rapport aux objectifs de la transition écologique. Quels moyens proposer pour aller au-delà ?*



## TD n° 3

# L'énergie éolienne

### Objectifs

Dans ce TD, on s'intéresse à l'énergie éolienne, à savoir l'énergie disponible dans les courants d'air sur Terre.

- Manipuler les notions de débit et puissances. Utiliser les relations de Bernoulli et la seconde loi de Newton dans un contexte de système ouvert.
- Mettre à profit ses connaissances pour déterminer une limite fondamentale au fonctionnement d'une éolienne.

On considérera l'air comme un fluide parfait, incompressible, irrotationnel et on négligera les effets de turbulence. On se placera de plus en régime stationnaire, avec un écoulement unidirectionnel. On négligera les effets de variation d'altitude.

### Rappels et définitions

- Le débit (volumique) d'un fluide est le volume de fluide passant à travers une surface  $S$  par unité de temps (unité :  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ). Pour un fluide à la vitesse  $v$  uniforme sur une surface  $S$ , on a  $Q = Sv$ .
- Relation de Bernoulli : en l'absence d'obstacle sur le chemin suivi par le fluide (supposé parfait et incompressible), la densité volumique d'énergie  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p$  est une grandeur qui se conserve dans l'écoulement.
- La puissance cinétique liée à un écoulement à la vitesse  $v$  s'écrit  $\mathcal{P}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho v^3 S$  où  $v$  est la vitesse du fluide et  $S$  la section traversée par le fluide considérée.
- Si un système crée une différence de pression  $\Delta p$  dans le fluide au débit  $Q$ , ce système récupère une puissance mécanique  $\mathcal{P} = \Delta p \times Q$ .

## 3.1 Introduction

1. Vérifier l'homogénéité de  $\mathcal{E}$  et des expressions des puissances  $\mathcal{P}_{\text{cin}}$  et  $\mathcal{P}$ .
2. On hésite entre deux sites pour implanter un parc éolien : en (A) le vent souffle à  $8 \text{ m s}^{-1}$  approximativement 1/3 du temps et est calme le reste du temps ; en (B), il y a un vent très régulier de vitesse  $5 \text{ m s}^{-1}$ . Comparer les vitesses moyennes du vent sur les deux sites. Puis comparer les puissances surfaciques moyennes. Quel site choisir, toutes choses égales par ailleurs ?

### Correction

- On a  $\langle v \rangle_A = \frac{1}{3} \times 8 = 2,7 \text{ m s}^{-1}$  et  $\langle v \rangle_B = 5 \text{ m s}^{-1}$ . La vitesse moyenne du vent au site (A) est presque deux fois plus petite que celle au site (B).
- Dans le calcul de la puissance surfacique moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\rho \langle v^3 \rangle$ , ce qui importe est la moyenne de  $v^3$ . Or  $\langle v^3 \rangle_A = \frac{1}{3} \times 8^3 = 171 \text{ m}^3 \text{s}^{-3}$  et  $\langle v^3 \rangle_B = 5^3 = 125 \text{ m}^3 \text{s}^{-3}$ . Le site (A) a une puissance potentielle 37% supérieure au site (B), malgré le vent qui ne souffle que 1/3 du temps. De façon contre-intuitive, le site (A) sera donc notre choix prioritaire.

### 3.2 Rendement d'une éolienne – Limite de Betz

On s'intéresse dans la suite au rendement d'une éolienne, système permettant de convertir de l'énergie cinétique du vent en énergie de rotation des pales, qui permet de produire de l'électricité grâce à un alternateur (exclu de l'étude). On considère le schéma sur la figure 3.1 : on suit l'évolution d'un tube d'air (un tube de champ de vitesse) lorsque celui-ci passe à travers la surface de l'éolienne. On néglige tout effet lié à l'altitude.

Loin en amont de l'éolienne, l'air est à la pression  $p_0$  avec une vitesse  $v_1$ , ça sera la situation de référence. La présence de l'éolienne va altérer l'écoulement : on note  $p_2$  et  $v_2$  (resp.  $p_3$  et  $v_3$ ) les pression et vitesse de l'écoulement juste avant (resp. après) l'éolienne. On s'attend à  $\Delta p = p_2 - p_3 > 0$  puisque l'éolienne va provoquer une chute de pression en récupérant de l'énergie.

Loin en aval de l'éolienne, l'air a retrouvé sa pression  $p_0$  pour être à l'équilibre mécanique avec son environnement, mais a une vitesse potentiellement différente  $v_4$ .

On supposera que l'écoulement a une vitesse uniforme sur toute section du tube de champ et en particulier sur la surface de l'éolienne notée  $S$ . De même, on suppose que l'action des pales de l'éolienne est homogène sur toute la surface.

3. *A priori*, la vitesse  $v_4$  est inconnue, et peut varier entre 0 et  $v_1$ . On cherche à comprendre qualitativement l'existence d'un optimum de fonctionnement pour l'éolienne. Si la vitesse  $v_4 = v_1$  quelle est la puissance récupérée par l'éolienne ? Et si  $v_4 = 0$  ? Commenter.

#### Correction

Si  $v_4 = v_1$ , alors  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_4$ , l'énergie volumique du tube d'air n'a pas variée, donc l'éolienne n'a récupéré aucune énergie.

À l'opposé, si  $v_4 = 0$ , toute l'énergie du tube a été récupérée précédemment. Mais alors le tube d'air est à l'arrêt. De proche en proche, on en déduit que  $v_3 = 0$  puis  $v_2 = 0$ , l'air est arrêté au niveau de l'éolienne : comme il n'y a plus aucun débit, on a une puissance nulle récupérée par l'éolienne.

Conclusion, il faut récupérer de l'énergie de l'écoulement mais pas trop de façon à maintenir un bon débit : il existe un optimum qui permet de maximiser la puissance récupérée.

#### Détermination de la vitesse au niveau de l'éolienne

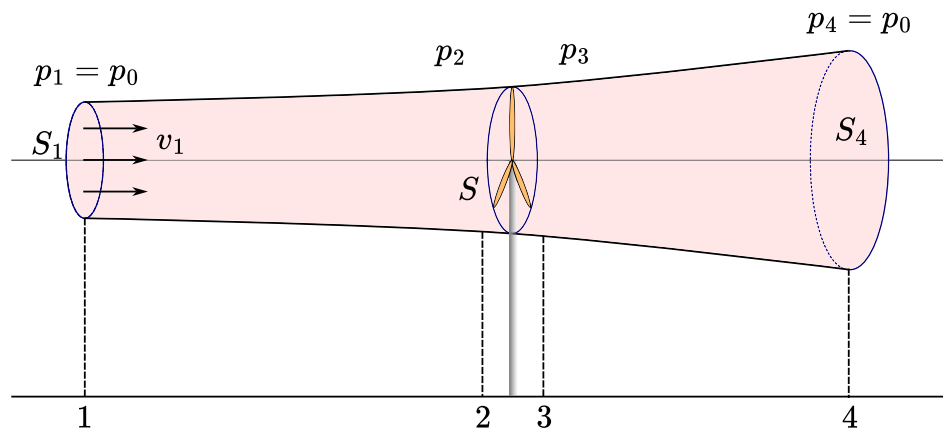


FIGURE 3.1 – Position du problème : flux d'air traversant une éolienne

On cherche ici à déterminer la vitesse  $v_2$  de l'écoulement en fonction de  $v_1$  et  $v_4$  les vitesses loin de l'éolienne.

4. Énoncer la conservation du débit le long de l'écoulement. En déduire en particulier une relation entre  $v_2$  et  $v_3$ .

#### Correction

Conservation du débit :  $Q = S_1 v_1 = S v_2 = S v_3 = S_4 v_4$ . On en déduit la continuité de la vitesse au niveau de l'éolienne :  $v_2 = v_3$ .

5. On suppose qu'entre 1 et 2 d'une part et entre 3 et 4 d'autre part, l'énergie volumique du fluide est conservée. Exprimer  $p_2 - p_3$  en fonction des vitesses  $v_1$  et  $v_4$  loin de celle-ci.

**Correction**

On peut utiliser la relation de Bernoulli deux fois : avant et après l'éolienne. On élimine l'énergie potentielle de pesanteur puisqu'elle est constante :

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\rho v_3^2 + p_3 = \frac{1}{2}\rho v_4^2 + p_4.$$

En utilisant  $p_4 = p_1 = p_0$  et  $v_2 = v_3$ , retrancher les deux relations donne

$$p_2 - p_3 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_4^2).$$

6. En déduire l'expression de la puissance récupérée  $\mathcal{P}$  par l'éolienne en fonction de  $v_1$  et  $v_4$ .

**Correction**

D'après le rappel, pour une chute de pression  $\Delta p = p_2 - p_3$  avec un débit  $Q = S v_2$ , on a

$$\mathcal{P} = \Delta p Q = \frac{1}{2} S \rho (v_1^2 - v_4^2) v_2.$$

Afin de déterminer une autre relation entre  $v_1$  et  $v_4$ , on cherche à exprimer la puissance récupérée d'une autre façon. Pour cela, nous allons faire déterminer la force exercée par l'éolienne grâce à un bilan de quantité de mouvement. Comme la seconde loi de Newton ne s'applique que sur un système fermé, il va falloir porter un soin particulier au choix du système.

On appelle  $\Sigma$  le fluide que l'on va suivre entre deux instants  $t$  et  $t + dt$ . À l'instant  $t$ ,  $\Sigma(t)$  est présenté sur la figure 3.2(a) : il s'agit de l'air entre les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  ainsi que l'air en amont de  $S_1$  qui va passer à travers  $S_1$  pendant  $dt$ . À l'instant  $t + dt$ , le fluide a bougé, en particulier une partie est passée à travers la surface  $S_4$  comme décrit sur la figure 3.2(b).

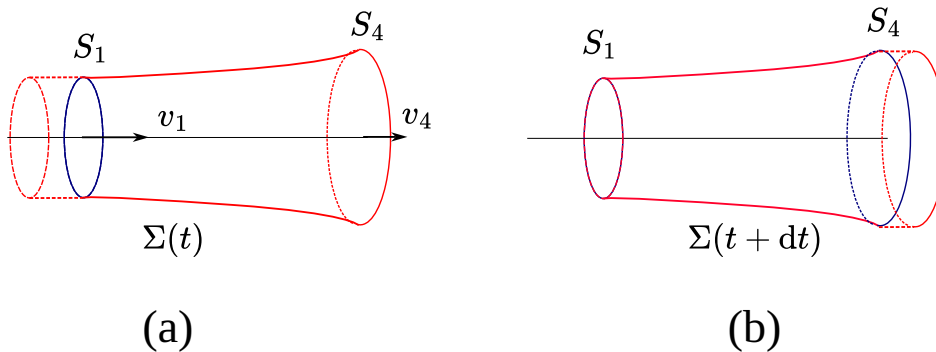


FIGURE 3.2 – Évolution du système entre les instants  $t$  et  $t + dt$

7. Calculer la variation de quantité de mouvement  $dp$  selon l'axe du problème que subit le système  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  en fonction de  $\rho$ ,  $Q$ ,  $v_1$ ,  $v_4$  et  $dt$ .

**Correction**

À travers une surface donnée, on peut exprimer la masse de fluide  $dm$  qui passe à travers la surface en fonction du débit. En effet :

$$dm = \frac{dm}{dt} dt = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} dt = \rho Q dt$$

Entre  $S_1$  et  $S_4$ , par conservation du débit, on a forcément la même masse de fluide qui entre et sort du système. Cependant, cela ne se fait pas à la même vitesse. On a donc une variante de quantité de

mouvement :

$$dp = p(\Sigma(t + dt)) - p(\Sigma(t)) = \rho Q v_4 dt - \rho Q v_1 dt = \rho Q (v_4 - v_1) dt.$$

8. En utilisant la seconde loi de Newton, en déduire la force exercée par l'éolienne, et ainsi une autre expression de la puissance  $\mathcal{P}$  récupérée par celle-ci en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_4$ .

#### Correction

La seconde loi de Newton indique que la variation temporelle de quantité de mouvement est exactement la force qui s'applique sur le système. Donc la force  $F = \frac{dp}{dt}$  vaut  $F = \rho Q (v_4 - v_1)$ .

Si on veut connaître la puissance de cette force, il suffit de multiplier par la vitesse où cette force s'applique :

$$\mathcal{P} = F v_2 = \rho (S v_2) (v_1 - v_4) v_2.$$

9. À l'aide des deux expressions de la puissance récupérée par l'éolienne obtenues aux questions 6 et 8, en déduire l'expression de la vitesse  $v_2$  en fonction de  $v_1$  et  $v_4$ .

#### Correction

On a donc

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} S \rho (v_1^2 - v_4^2) v_2 = \rho (S v_2) (v_1 - v_4) v_2$$

soit  $v_1 + v_4 = 2v_2$ . La vitesse au niveau de l'éolienne est simplement la moyenne des deux vitesses loin de l'éolienne :

$$v_2 = \frac{v_1 + v_4}{2}.$$

### Calcul du rendement maximal d'une éolienne

L'étude physique d'une éolienne —quel que soit son fonctionnement— nous a donc permis de trouver l'expression de la vitesse de l'écoulement au niveau de l'éolienne en fonction des conditions aux limites. Cette vitesse  $v_2$  peut varier entre 0 et  $v_1$ , selon le fonctionnement de l'éolienne. On définit :

$$a = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \tag{3.1}$$

le facteur qui quantifie la diminution de cette vitesse.

10. Exprimer  $v_2$  et  $v_4$  en fonction de  $a$  et  $v_1$ .

#### Correction

On retourne la définition de  $a$  pour trouver  $v_2 = v_1(1 - a)$ . Puis avec l'expression de  $v_2$  trouvée précédemment, on obtient  $v_4 = v_1(1 - 2a)$ .

11. On définit le rendement de l'éolienne  $C_p$ , ou coefficient de puissance, comme la puissance récupérée sur la puissance qui aurait traversé la même surface sans l'éolienne. Exprimer  $C_p$  comme un rapport de puissances et en déduire son expression en fonction de  $a$ .

#### Correction

On définit donc

$$C_p = \frac{\mathcal{P}}{\frac{1}{2} \rho v_1^3 S} = \frac{\frac{1}{2} S \rho (v_1^2 - v_4^2) v_2}{\frac{1}{2} \rho v_1^3 S} = \frac{(v_1^2 - v_4^2) v_2}{v_1^3} = [1 - (1 - 2a)^2](1 - a) = 4a(1 - a)^2.$$

**Remarque : cas limites**

- Si  $v_4 = v_1$  (donc  $v_2 = v_1$ ), on trouve  $a = 0$  qui correspond bien au cas où l'éolienne ne récupère aucune puissance :  $C_p = 0$ .
- Si  $v_4 = 0$ , l'application des formules obtenues donne  $a = 1/2$  et donc  $C_p = 1/2$ , ce qui n'est pas cohérent avec l'analyse qualitative précédente qui prévoyait qu'aucune puissance n'était récupérée car l'air était totalement bloqué au niveau de l'éolienne soit  $v_2 = 0$ . Dans ce cas, la formule  $v_2 = (v_1 + v_4)/2$  donne  $v_2 = v_1/2$  est fausse, car la simplification par  $v_2$  opérée à la question 9 en divisant l'égalité par  $v_2$  suppose que  $v_2 \neq 0$ . Si au contraire on pose  $v_2 = 0$  dans ces expressions de  $\mathcal{P}$ , on retrouve bien  $\mathcal{P} = 0$ .

12. Pour quelle valeur de  $a$  le coefficient  $C_p$  est-il maximal ? Déterminer le maximum de rendement d'une éolienne, qu'on notera  $C_{\text{Betz}}$ .

### Correction

Il s'agit d'une fonction de  $a$ . Calculons sa dérivée pour trouver son extremum :

$$\frac{dC_p}{da} = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 4(1-a)(1-3a).$$

La dérivée s'annule en  $a = 1$  et  $a = 1/3$ . Le cas  $a = 1$  correspond à l'absence d'éolienne (aucun changement de vitesse), donc l'annulation de la dérivée pertinente est  $a = 1/3$ , pour laquelle le rendement vaut :

$$C_{\text{Betz}} = \frac{16}{27} \approx 0,59.$$

13. Une éolienne de pales de longueur  $L = 60$  m est placée dans une zone où le vent, quand il est fort, a la puissance cinétique surfacique  $\mathcal{P}_{\text{cin}}/S = 1500 \text{ W m}^{-2}$ . Quelle est sa puissance maximale d'après la limite de Betz ?

### Correction

Calculons la puissance totale avec  $S = \pi L^2$  :

$$\mathcal{P}_{\text{cin}} = 1500 \times \pi 60^2 = 17 \text{ MW},$$

donc la puissance maximale imposée par la limite de Betz est  $\mathcal{P}_{\text{cin}} C_{\text{Betz}} = 10 \text{ MW}$ .

### Remarques enseignants

Remarque : on donne dans les transparents de cours la figure 30.3 du Jaffe et Taylor, qui indique, pour une éolienne commerciale de diamètre des pales 126 m, une puissance de 7,5 MW donc c'est assez cohérent, même si ça dépend fortement du choix de  $\mathcal{P}_{\text{cin}}$ . La puissance typique dans le nord de la France est  $300 \text{ W/m}^2$  à hauteur 50 m, et donc  $470 \text{ W/m}^2$  à la hauteur 140 m de notre éolienne (cf fig. 30.3) en supposant  $v \propto 1/z^7$  (cf p 542). Cette valeur étant une moyenne annuelle, on prend  $1500 \text{ W/m}^2$  comme valeur maximale afin de rendre compte d'un facteur de charge de l'ordre de 0,30.

### Performances des éoliennes

On a déterminé le rendement maximal d'une éolienne, qui constitue la limite de Betz. Ce rendement reste théorique et ne peut être atteint avec les éoliennes réelles.

14. Proposer des raisons pour lesquelles le rendement réel  $C_p$  d'une éolienne n'atteint pas  $C_{\text{Betz}}$ .

### Correction

De nombreuses limitations :

- le fluide n'est pas parfait, la distribution des vitesses n'est pas uniforme ;
- la perte de pression due à l'éolienne n'est pas uniforme ;
- le sillage en aval est perturbé par la présence des pales et leur rotation et n'est pas laminaire ;
- le rotor a un rendement propre, et possède une traînée qui perturbe l'écoulement en aval.

15. Afin de pouvoir comparer différents types d'éoliennes, on définit un nombre sans dimension  $\lambda$  appelé *paramètre de rapidité*, qui est le rapport entre la vitesse d'un point à l'extrémité d'une pale et la vitesse du vent. Exprimer  $\lambda$  avec les paramètres pertinents du problème.

### Correction

Avec  $R$  le rayon des pales,  $\Omega$  la vitesse de rotation angulaire et  $v_0$  la vitesse du vent, on peut construire le paramètre

$$\lambda = \frac{R\Omega}{v_0}.$$

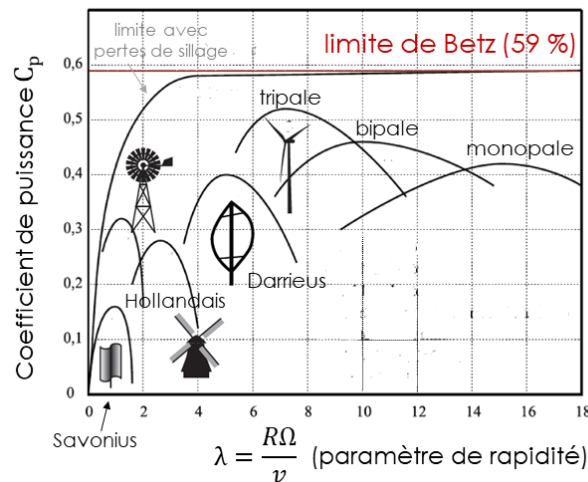


FIGURE 3.3 – Représentation des performances des différents types d'éoliennes. Adapté de Thomas W. Jr Murphy, *Energy and Human Ambitions on a Finite Planet*, UC San Diego (2021).

16. Le graphique 3.3 présente des rendements réels d'éoliennes, selon leur type, en particulier les éoliennes mono-bi- tripales, les moulins (américains et hollandais), le Savonius et le Darrieus qui sont des éoliennes à axe vertical. Quels commentaires peut-on faire ?

### Correction

- Le rendement dépend en réalité de la vitesse du vent, résultat qui n'était pas prévu par la limite de Betz.
- Les éoliennes sont nettement plus efficaces que les moulins, et leur optimum n'est pas au même paramètre de rapidité.
- Les éoliennes tripales ont un optimum légèrement supérieur aux éoliennes bipales et monopales
- Pour les éoliennes tripales, l'optimum est à  $\lambda = 7$ , ce qui signifie que la pale a une vitesse 7 fois supérieure au vent ! C'est très différent des moulins où les pales tournent essentiellement à la vitesse du vent ( $1 < \lambda < 3$ ).
- Le Savonius est une éolienne à axe vertical contrairement aux éoliennes à axe horizontal plus

classiques. Son rendement est nettement en dessous, mais aussi dans un régime très différent de vitesse.



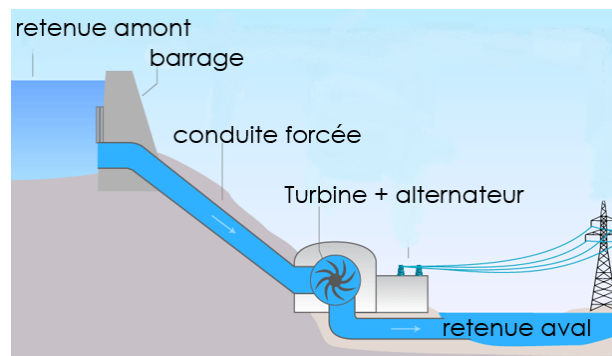


## TD n° 4

# Énergies hydraulique et solaire

### 4.1 Hydroélectricité et stockage de l'énergie

On s'intéresse à l'usine souterraine de la centrale hydroélectrique de Grand'Maison, qui fonctionne à partir d'une retenue d'eau en amont (lac de Grand'Maison) de volume utile 132 millions de m<sup>3</sup> et d'une retenue en aval (lac du Verney) de volume utile 14,3 millions de m<sup>3</sup>.



1. L'eau circule de l'amont vers l'aval dans une conduite forcée avec un débit de 140 m<sup>3</sup>/s, sur une hauteur de chute de 955 m, ce qui génère une puissance électrique de 1200 MW. En déduire l'efficacité énergétique de la conversion mécanique - électrique.

#### Correction

(cette centrale possède aussi une usine en surface qui ne fonctionne pas en mode pompage : on ne l'évoque pas ici pour simplifier)

La puissance générée est donnée par (formule vue en cours) :

$$P = D_v \rho g H \epsilon$$

où  $\epsilon$  est l'efficacité de conversion mécanique - électrique par le système turbine - alternateur. On en déduit  $\epsilon = P / (\rho g D_v H) = 92 \%$ .

2. Cette centrale est aussi une STEP (station de transfert d'énergie par pompage) servant à stocker l'énergie en surplus, générée pendant les heures creuses de consommation, et à la restituer pendant les pics de demande. Supposant que la conversion électrique - mécanique se fait à la même efficacité que celle déterminée précédemment, quelle énergie en surplus peut être récupérée en vidant totalement la retenue en aval ?

#### Correction

L'énergie potentielle mécanique stockée sera  $V \rho g H = 133 \text{ TJ} = 37 \text{ GWh}$ . Il faudra fournir  $37 / \epsilon = 40 \text{ GWh}$  d'énergie électrique.

Les STEP sont actuellement le principal (et presque unique) moyen de stockage et de restitution de

l'énergie électrique sur le réseau. Elles ont donc a priori un rôle important à jouer pour des pays qui miseraient sur les énergies renouvelables. Parmi les autres technologies qui pourraient monter en puissance : utiliser les batteries des voitures électriques des particuliers comme stockage à condition de s'appuyer sur une gestion fine du réseau ; générer du gaz, de l'hydrogène etc.

## 4.2 Énergie solaire : quelques ordres de grandeur

### Objectifs

L'objectif de cet exercice est de faire quelques calculs "sur un coin de table". Vous pouvez chercher sur Internet les grandeurs dont vous auriez besoin.

3. La puissance rayonnée par le Soleil est environ  $3,8 \cdot 10^{26}$  W. Estimer la puissance solaire arrivant en haut de l'atmosphère sur une surface équivalente à la France métropolitaine  $\mathcal{P}_F$ . La comparer à la consommation électrique moyenne de la France 54 GW.

### Correction

La distance Soleil-Terre étant  $D \simeq 1,5 \cdot 10^{11}$  m, le rayonnement arrivant en haut de l'atmosphère est de  $1345 \text{ W m}^{-2}$  - c'est la quantité  $E$  vue dans la partie climat.

La surface de la France métropolitaine est  $S \simeq 5,5 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$  (et  $6,7 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$  en incluant les outre-mers), donc une première estimation de  $\mathcal{P}_F$  est  $ES = 750 \text{ TW}$ . Une étape suivante serait de tenir compte de la latitude de la France en multipliant par  $\cos(46^\circ)$  :  $\mathcal{P}_F \sim 520 \text{ TW}$ . Pour aller plus loin, il faudrait tenir compte aussi de la variation en fonction de la saison, et bien sûr en fonction de l'heure puisque la valeur que nous avons trouvée est le maximum de la journée.

Il y a donc un facteur environ 10 000 par rapport à notre consommation électrique annuelle.

4. Pour quelles raisons cette valeur  $\mathcal{P}_F$  est-elle différente de la puissance accessible depuis le sol en France à tout instant ?

### Correction

La puissance au sol est plus basse à cause des nuages et de l'absorption dans l'atmosphère.

5. Moyenné sur une durée d'un an, le flux lumineux solaire mesuré au sol, en France métropolitaine, est d'environ  $150 \text{ W/m}^2$ . Quelle est la puissance solaire totale reçue au sol par la France métropolitaine ? Quel pourcentage de la surface française faudrait-il couvrir de panneaux photovoltaïques pour produire l'intégralité de notre consommation électrique ?

### Correction

N.B.  $150 \text{ W/m}^2$  est la moyenne annuelle, c'est donc aussi a fortiori une moyenne jour - nuit.

La puissance sommée sur la superficie française est donc  $8,2 \cdot 10^{13} \text{ W}$ .

Gros piège : il faut penser à introduire l'efficacité énergétique du panneau, qui a été donnée en cours et est rappelée plus bas. Prenons  $\eta = 15\%$  : il faut alors couvrir une portion 0,4 % de la superficie française totale. En fait peut-être un peu plus si on tient compte de l'espacement entre les panneaux.

## TD n° 5

# Effet de serre (1) : introduction et épaisseur optique

### Objectifs :

- blabla

## 5.1 Approche simplifiée de l'effet de serre

Cette partie s'inspire de l'article " L'effet de serre atmosphérique : plus subtil qu'on ne le croit !", J.-L. Dufresne et J. Treiner, La Météorologie, numéro 72, février 2011 <sup>1</sup>.

Un élément de surface de la Terre est modélisé (figure 5.1) par une surface totalement absorbante ( $a_T = 0$ ) aussi bien dans le visible que dans l'infrarouge. Une face est soumise au seul rayonnement solaire et l'autre face est isolée thermiquement (pas d'émission de rayonnement vers le bas).  $F_S$  est la densité de flux (infrarouge) émise par la surface de la Terre.

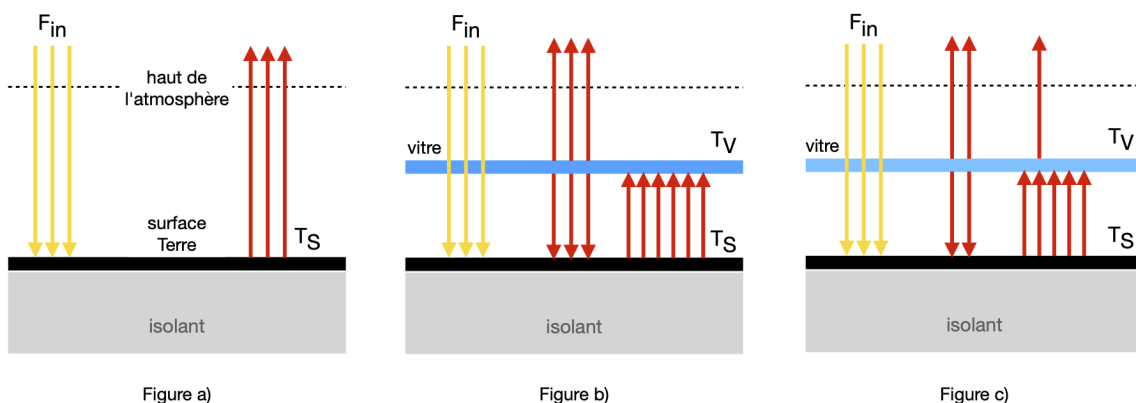


FIGURE 5.1 – Représentation schématique des échanges radiatifs pour un élément de surface terrestre dans le cas : a) sans atmosphère ; b) où l'atmosphère est assimilée à une vitre totalement transparente au rayonnement solaire et totalement opaque au rayonnement infrarouge ; c) où la vitre transmet une partie du rayonnement infrarouge qu'elle reçoit.

$F_{in}$  est la densité de flux d'énergie (puissance par unité de surface, en  $W/m^2$ ) reçue du Soleil et qui entre en haut de l'atmosphère, sous forme de rayonnement visible (on néglige ici la partie UV et IR du spectre solaire).

$F_{out}$  est la densité de flux d'énergie sortante (vers l'espace) en haut de l'atmosphère sous forme de rayonnement infrarouge.

L'effet de serre  $\mathcal{E}$  est la différence entre le flux émis par la surface de la Terre et celui émis vers l'espace en haut de

1. <https://www.researchgate.net/publication/275205925>

l'atmosphère :  $\mathcal{E} = F_S - F_{\text{out}}$

Le bilan radiatif s'écrit :  $G = F_{\text{in}} - F_{\text{out}}$ . Il est égal à  $G = 0$  quand l'équilibre radiatif est établi.

Dans cet exercice, on suppose que l'équilibre radiatif est établi

6. Montrer que  $F_{\text{in}} = E/4(1 - A_b)$  où  $E$  est la constante solaire et  $A_b$  l'albedo du système Terre+atmosphère vu de l'espace. Application numérique.
7. Rappeler la relation entre  $F_{\text{in}}$  et  $F_{\text{out}}$  impliquée par l'hypothèse d'un bilan radiatif en équilibre (en haut de l'atmosphère).
8. Rappeler l'expression de la densité de flux  $F_S$  émise par la surface de la Terre en fonction de  $T_S$ .

Données :  $A_b = 0,7$ ,  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$  SI,  $E = 1368 \text{ W/m}^2$ .

### 5.1.1 Une Terre sans atmosphère

On considère un modèle de Terre sans atmosphère (figure 5.1.a). Pour ce modèle fictif, on suppose que la valeur de  $F_{\text{in}}$  est inchangée<sup>2</sup>.

9. Montrer qu'alors l'effet de serre  $\mathcal{E} = 0$ .
10. Calculer  $T_S$  la température de la surface de la Terre. Application numérique. Conclusion.
11. Application - température de la surface de la Lune.

La surface de la Lune diffuse la lumière dans le visible :  $a_L \simeq 0,1$ . On considère que la surface de la Lune est totalement absorbante dans l'IR. Calculer  $T_S$  pour la Lune.

#### Correction

Si on souhaite faire un calcul réaliste, il convient d'évaluer  $F_{\text{in}}$  en utilisant  $a_L$  au lieu de  $A_b$ . La Lune n'a pas d'atmosphère, et un sol qui réfléchit partiellement la lumière incidente du soleil :  $F_{\text{in}} = E/4(1 - a_L)$ . L'équilibre radiatif nous donne :  $T_S = [E(1 - a_L)/(4\sigma)]^{1/4} \simeq 273\text{K}$ .  $E/4$  est la valeur moyennée sur la demi-sphère éclairée. Dans la région où l'éclairement est maximal et égal à  $E$ , la température serait égale à :  $T_S = [E(1 - a_L)/\sigma]^{1/4} \simeq 390\text{K}$ , proche des températures maximales observées de l'ordre de  $120^\circ\text{C}$ .

### 5.1.2 L'atmosphère : une vitre (totalement) transparente au visible et absorbante en IR

Pour modéliser la présence d'une atmosphère, positionnons au dessus de la surface terrestre une vitre idéalisée (figure 5.1.b) totalement transparente au rayonnement solaire (visible) et totalement absorbante au rayonnement infrarouge.

12. Soit  $T_V$  la température de la vitre. Donner l'expression de la densité de flux émise (en infrarouge) par chacune des deux faces de la vitre.

#### Correction

Chacune des deux faces de la vitre émet un rayonnement de corps noir en IR. La face vers le haut émet :  $\sigma T_V^4$  et la face vers le bas  $\sigma T_V^4$ .

13. Écrire le bilan radiatif en haut de l'atmosphère.

#### Correction

Le seul rayonnement sortant provient de la vitre.  $F_{\text{in}}$  (visible, entrant) =  $F_{\text{out}} = \sigma T_V^4$  (IR, sortant).

14. Écrire le bilan radiatif à la surface de la Terre.

2. Ce qui n'est pas très logique, puisque que  $A_b \neq 0$  essentiellement du fait des nuages de l'atmosphère !

**Correction**

La surface de la Terre émet  $\sigma T_S^4$  en IR. Elle reçoit :  $F_{\text{in}}$  du soleil, en visible, et  $\sigma T_V^4$ , en IR, de la face de la vitre tournée vers le sol. Donc :  $\sigma T_S^4 = F_{\text{in}} + \sigma T_V^4 = 2F_{\text{in}}$ .

15. Calculer l'effet de serre  $\mathcal{E}$ .

**Correction**

$\mathcal{E} = F_{\text{in}} = 240 \text{ W.m}^{-2}$ . Une partie du rayonnement émis par la surface de la Terre est piégé dans l'atmosphère.

16. Calculer  $T_S$ .

**Correction**

$$T_S = (2F_{\text{in}}/\sigma)^{1/4} = 303 \text{ K} = 30^\circ.$$

17. Vérifier que le bilan radiatif de la vitre est nul.

**Correction**

La vitre est transparente en visible : elle ne reçoit pas d'énergie du soleil. Elle reçoit en IR de la surface de la terre :  $F_{\text{reçu}} = \sigma T_S^4 = 2F_{\text{in}}$ . Elle émet par chacune de ses deux faces  $F_{\text{émis}} = 2 \times \sigma T_V^4 = 2F_{\text{in}}$  (voir question 13). On a donc bien  $F_{\text{reçu}} = F_{\text{émis}}$ .

### 5.1.3 L'atmosphère : une vitre (presque totalement) absorbante en IR

On suppose maintenant que la vitre n'est plus totalement opaque en infrarouge (figure 5.1.c).

On rappelle la **loi de Kirchhoff** : un corps gris de coefficient d'absorption  $a < 1$  et de température  $T$  émet une puissance surfacique  $P_S = a\sigma T^4$ .

18. Donner l'expression de la densité de flux reçue par la vitre et transmise par la vitre.

**Correction**

La vitre reçoit :  $a\sigma T_S^4$  et transmet  $(1-a)\sigma T_S^4$ .

19. Donner l'expression de la densité de flux émise (en infrarouge) par chacune des deux faces de la vitre.

**Correction**

Chacune des deux faces de la vitre émet un rayonnement de corps gris en IR. La face vers le haut émet :  $a\sigma T_V^4$  et la face vers le bas  $a\sigma T_V^4$ .

20. Ecrire le bilan radiatif de la vitre. En déduire une relation entre  $T_V$  et  $T_S$ .

**Correction**

La vitre reçoit :  $a\sigma T_S^4$  et émet  $2 \times a\sigma T_V^4$ . Donc  $a\sigma T_S^4 = 2 \times a\sigma T_V^4$  et  $T_S^4 = 2T_V^4$ .

21. Ecrire le bilan radiatif en haut de l'atmosphère et en déduire l'expression de  $T_S$ . Vérifier que l'on retrouve bien le cas 5.1.1 pour  $a = 0$  et 5.1.2 pour  $a = 1$ .

**Correction**

$$F_{\text{in}} = F_{\text{out}} = a\sigma T_V^4 + (1-a)\sigma T_S^4 = (1-a/2)\sigma T_S^4. \text{ Donc } T_S = (2F_{\text{in}}/\sigma/(2-a))^{1/4}.$$

22. Calculer la valeur de  $a$  correspondant à une valeur de l'effet de serre  $\mathcal{E} = 150 \text{ W.m}^{-2}$  (valeur de l'effet de serre à l'ère pré-industrielle).

**Correction**

$$\mathcal{E} = \sigma T_S^4 - (1 - a/2)\sigma T_S^4 = (a/2)\sigma T_S^4 = a/(2 - a)F_{\text{in}}. \text{ Donc } a \simeq 0,8.$$

NB : j'epoursuivrai bien sur le calcul de forçage radiatif de l'article mais il ne s'intéresse que à  $F_{\text{out}}$ , et d'une façon qui n'est pas encore claire pour moi. Il est dit : *Calculer la sensibilité de l'effet de serre à une variation de l'absorption du rayonnement infrarouge par l'atmosphère consiste à déterminer la variation du rayonnement infrarouge à la tropopause ( $\rightarrow$  en haut de l'atmosphère, donc de  $F_{\text{out}} = (1 - a)\sigma T_S^4 + a\sigma T_V^4$  et non  $G$ ) en réponse à une variation de la concentration d'un gaz, en maintenant fixe la température de l'atmosphère ( $\rightarrow$  donc  $T_V$ ) et celle de la surface (donc  $\rightarrow T_S$ ).*

## 5.2 Épaisseur optique

## TD n° 6

# Effet de serre (2) : le modèle à deux faisceaux

### Objectifs

- Quantifier le rayonnement infrarouge traversant les différentes couches de l'atmosphère ;
- Comprendre l'origine de l'effet de serre ;
- Exprimer le profil de température  $T(z)$  et la température de surface de la Terre  $T_s$  à l'équilibre radiatif.

**Remarque préalable :** L'énergie transitant à travers une surface de  $1 \text{ m}^2$  pendant 1 seconde est une quantité s'exprimant en  $\text{W m}^{-2}$  et appelée *flux surfacique d'énergie* (ou *densité de flux*, ou *éclairement* dans le visible, ou *émittance* dans l'infrarouge). Dans ce qui suit, pour des raisons de concision, cette quantité est simplement désignée par le terme *flux*.

### 6.1 Bases théoriques de l'effet de serre : modèle à deux faisceaux

Le modèle à deux faisceaux entend élucider les transferts de rayonnement dans l'infrarouge entre les couches qui composent la colonne atmosphérique. On rappelle les hypothèses simplificatrices vues en cours : <sup>1</sup>

- couches atmosphériques plan-parallèle (sphéricité négligée) ;
- on considère l'atmosphère complètement transparente dans le visible ;
- on néglige les phénomènes de diffusion dans l'infrarouge ;
- on fait l'approximation (drastique) du corps gris : les gaz absorbent de la même façon toutes les longueurs d'onde ( $k_\lambda = \text{cste}$ ), ce qui implique une hypothèse similaire pour l'épaisseur optique ( $\tau_\lambda = \tau$ ).

On définit comme en cours magistral  $F^+(\tau)$  (resp.  $F^-(\tau)$ ) le flux surfacique montant (resp. descendant) d'énergie. Pour rappel,  $\tau$  est l'épaisseur optique qui quantifie la quantité de rayonnement absorbée.  $\tau$  est prise nulle en haut de l'atmosphère, croît lorsque l'altitude  $z$  diminue et vaut  $\tau_s$  à la surface de la Terre.

1. En faisant un bilan sur une couche d'épaisseur  $d\tau$  à la température  $T(\tau)$ , montrer que le flux surfacique montant  $F^+(\tau)$  vérifie l'équation

$$\frac{dF^+}{d\tau} = F^+(\tau) - \sigma T(\tau)^4 \quad (6.1)$$

*Indication : la variation de flux surfacique entre  $\tau$  et  $\tau + d\tau$  est due d'une part à l'absorption de la couche ( $F^+ d\tau$ ) et à son émission ( $\sigma T^4 d\tau$ ).*

### Correction

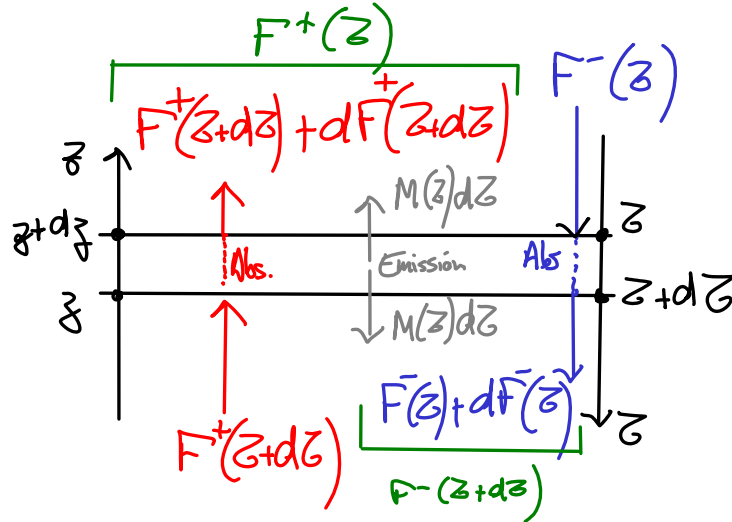
Sur la figure ??, on voit que  $F^+(\tau) = F^+(\tau + d\tau) + dF^+(\tau + d\tau) + M(\tau)d\tau$  avec  $dF^+(\tau + d\tau) = -F^+(\tau + d\tau)d\tau$  d'après la loi de Beer-Lambert et  $M(\tau) = \sigma T(\tau)^4$ . On a donc l'équation :

1. Ce modèle est une version simplifiée de l'équation de Schwarzschild du transfert radiatif. C'est un bon compromis entre simplicité et illustration de concepts importants de l'effet de serre.

$F^+(\tau) = F^+(\tau + d\tau) - F^+(\tau + d\tau)d\tau + \sigma T(\tau)^4 d\tau$ , soit en arrangeant les termes :

$$\frac{F^+(\tau + d\tau) - F^+(\tau)}{d\tau} = F^+(\tau + d\tau)d\tau - \sigma T(\tau)^4. \text{ La limite pour } d\tau \rightarrow 0 \text{ donne enfin :}$$

$$\frac{dF^+}{d\tau} = F^+(\tau) - \sigma T(\tau)^4$$



Bilan d'une couche d'épaisseur optique  $d\tau$ .

En faisant le même raisonnement sur  $F^-$ , on obtient le système d'équations :

$$\frac{dF^+}{d\tau} = F^+(\tau) - \sigma T(\tau)^4 \quad \frac{dF^-}{d\tau} = -F^-(\tau) + \sigma T(\tau)^4 \quad (6.2)$$

Ce système s'exprime plus simplement en définissant  $\Sigma(\tau) = F^+(\tau) + F^-(\tau)$  et  $\Delta(\tau) = F^+(\tau) - F^-(\tau)$ .

2. Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $\Sigma$  et  $\Delta$ .

#### Correction

$$\frac{d\Sigma}{d\tau} = \Delta(\tau) \quad (6.3)$$

et

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = \Sigma(\tau) - 2\sigma T(\tau)^4 \quad (6.4)$$

On se place dans ce TD à l'équilibre radiatif. On montre dans ce cas que le flux surfacique *net*  $\Delta = F^+ - F^-$  est constant à toute altitude, ou autrement dit à toute épaisseur optique  $\tau$ .<sup>2</sup> Cela impose :

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = 0 \quad (6.5)$$

#### Sommet de l'atmosphère et détermination des flux surfaciques dans l'atmosphère

Appelons  $E$  l'éclairement du Soleil sur Terre. Ce flux surfacique est essentiellement dans le visible. On négligera toute contribution infrarouge et donc à  $F^-$  par la suite. Le flux surfacique moyen arrivant sur Terre (en retirant la partie réfléchiée) s'écrit  $F_{\text{in}} = \frac{E}{4}(1 - A_b)$  avec  $A_b$  l'albédo de la Terre. À l'inverse, on note  $F_{\text{out}}$  le flux surfacique émis par le sommet de l'atmosphère vers l'univers.

3. Dédire de l'équilibre radiatif une relation entre  $F_{\text{in}}$  et  $F_{\text{out}}$ .

2. Il n'y a ni dépôt ni extraction d'énergie dans chaque couche  $d\tau$  de l'atmosphère.



### Correction

Équilibre radiatif : égalité des flux :  $F_{\text{in}} = F_{\text{out}}$ .

4. Justifier qu'au **sommet** de l'atmosphère<sup>3</sup>  $F^+(\tau = 0) = F_{\text{out}}$  et  $F^-(\tau = 0) = 0$ . En déduire que

$$\Delta(\tau = 0) = \Sigma(\tau = 0) = F_{\text{out}}. \quad (6.6)$$

### Correction

Comme l'épaisseur optique  $\tau$  est un axe orienté vers le bas, lorsque  $\tau$  est nulle, nous sommes au sommet de l'atmosphère.  $F_{\text{out}}$  étant le flux sortant au sommet de l'atmosphère, alors on a bien  $F^+(\tau = 0) = F_{\text{out}}$  par définition. Quant à  $F^-(\tau = 0)$ , qui est le flux descendant au sommet de l'atmosphère dans l'IR, il est négligeable car le Soleil émet principalement dans le domaine de longueur d'onde visible. Dès lors on a immédiatement  $\Delta(\tau = 0) = \Sigma(\tau = 0) = F_{\text{out}}$ .

5. À l'aide des résultats précédents, montrer que  $\Delta(\tau) = F_{\text{out}}$  et  $\Sigma(\tau) = F_{\text{out}}(1 + \tau)$  quel que soit  $\tau$ . En déduire l'expression de  $F^-(\tau)$ .

### Correction

Avec l'équation (6.5), on a  $\Delta(\tau) = \text{cste}$ . En particulier :

$$\Delta(\tau) = \Delta(\tau = 0) = F^+(0) - F^-(0) = F_{\text{out}} \text{ avec } F_{\text{out}} = F_{\text{in}}.$$

L'équation différentielle  $d\Sigma/d\tau = \Delta(\tau)$  (voir équation 6.3) s'intègre donc directement :

$$\Sigma(\tau) = \Sigma(0) + F_{\text{out}}(\tau - 0) = F_{\text{out}}(1 + \tau).$$

On en déduit :

$$F^-(\tau) = \frac{\Sigma - \Delta}{2} = F_{\text{out}} \frac{\tau}{2}$$

6. Déterminer finalement le profil vertical de température  $T(\tau)$  à l'équilibre radiatif dans l'atmosphère :

$$T(\tau) = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}(1 + \tau)}{2\sigma}}. \quad (6.7)$$

### Correction

Puisque  $d\Delta/d\tau = \Sigma(\tau) - 2\sigma T(\tau)^4$  d'après l'équation 6.4 et  $\frac{d\Delta}{d\tau} = 0$ , on a  $\Sigma(\tau) = 2\sigma T(\tau)^4$ . En isolant  $T$  et en utilisant le résultat de la question précédente :

$$T(\tau) = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}(1 + \tau)}{2\sigma}}.$$

## Surface terrestre

7. La *surface* de la Terre reçoit le rayonnement (visible) du Soleil  $F_{\text{in}}$ , ainsi que le flux surfacique descendant  $F^-(\tau = \tau_s)$  (infrarouge). Celle-ci étant à l'équilibre radiatif, en déduire une égalité faisant intervenir sa température de surface  $T_s$ .

3.  $F^+(\tau = 0)$  est aussi appelé appelé OLR, *outgoing longwave radiation* : c'est le flux surfacique infrarouge sortant au sommet de l'atmosphère

**Correction**

Égalité des flux entrant et sortant :

$$F_{\text{in}} + F^{-}(\tau = \tau_s) = \sigma T_s^4$$

8. Aboutir à l'expression de la température de surface suivante :

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}}{\sigma} \left(1 + \frac{\tau_s}{2}\right)} \quad (6.8)$$

En quoi une augmentation de la quantité de gaz à effet de serre conduit-elle à une augmentation de la température de surface ?

**Correction**

D'après la question précédente

$$T_s^4 = \frac{1}{\sigma} (F_{\text{in}} + F^{-}(\tau = \tau_s)) = \frac{F_{\text{out}}}{\sigma} \left(1 + \frac{\tau_s}{2}\right)$$

On constate que dans l'infrarouge, le rayonnement sortant au sommet de l'atmosphère  $F_{\text{out}}$  est inférieur au rayonnement émis par la surface  $\sigma T_s^4$  car  $F_{\text{out}} = \sigma T_s^4 / (1 + \tau_s/2)$ . Une partie du rayonnement émis par la surface reste donc piégée par la planète.

Avec un albédo et un rayonnement incident constant, donc à  $F_{\text{out}}$  constant, augmenter la quantité de gaz à effet de serre (GES) revient à augmenter  $\tau_s$  car  $\tau_s = \int_0^\infty \kappa \rho_X dz$  (voir le cours). Augmenter la concentration  $\rho_X$  des GES revient donc à augmenter la température de surface  $T_s$ .

## 6.2 Application : le profil de température dans l'atmosphère

L'objectif de cet exercice est de mettre en application les équations du modèle à deux faisceaux pour reconstruire le profil de température de l'atmosphère  $T(z)$ . Nous utiliserons l'éclairement solaire moyen au niveau de la Terre  $E = 1368 \text{ W m}^{-2}$  et l'albédo moyen de la Terre  $A_b = 0,3$ . Nous rappelons également la constante de Stefan-Boltzmann  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

9. Calculer numériquement le flux surfacique sortant  $F_{\text{out}}$  du sommet de l'atmosphère.

**Correction**

$$F_{\text{out}} = \frac{E}{4} (1 - A_b) = \frac{1368}{4} (1 - 0,3) = 342 \times 0,7 = 239 \text{ W m}^{-2}$$

10. Dans un premier temps, démontrer et calculer la température dite équivalente  $T_{\text{eq}}$  de la surface de la Terre si il n'y avait aucun effet de serre par l'atmosphère :

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{out}}}{\sigma}} \quad (6.9)$$

**Correction**

C'est le résultat de l'équation (6.8) sans opacité, c'est à dire  $\tau_s = 0$ . C'est-à-dire l'équilibre simple  $F_{\text{out}} = \sigma T_s^4$ .

On peut rappeler si besoin la définition de l'albédo  $A_b$ , en écrivant que  $A_b = E_{\text{réfléchi}}/E_{\text{incident}}$ , et que donc  $E_{\text{absorbé}} = E_{\text{incident}} - E_{\text{réfléchi}} = E_{\text{incident}} - A_b E_{\text{incident}} = E_{\text{incident}} (1 - A_b)$ . Le facteur  $1/4$  dans  $E/4$  provient du passage à l'éclairement instantané face au Soleil  $E$  à l'éclairement global moyen. Par le calcul, on obtient :

$$T_{eq} = (342. \cdot 0.7 / 5.67E-8) ** 0.25 = 255 \text{ K}$$

Sans effet de serre, la température à la surface de la Terre serait donc de  $-18^\circ\text{C}$ .

11. Pour calculer la température  $T_s$  en présence d'un effet de serre dans le modèle de la partie I, il faut estimer  $\tau_s$ . Nous prendrons  $\tau_s = 1.25$ . Calculer la température  $T_s$  dans ce modèle. Commenter.

#### Correction

Par application directe de l'équation 6.8, on obtient :

$$T_s = (342. \cdot 0.7 * (1. + 1.25 / 2.) / 5.67E-8) ** 0.25 = 288 \text{ K}$$

On retrouve la température moyenne « classique » préindustrielle de  $15^\circ\text{C}$ .

12. Comparer la température de surface  $T_s$  à la température de l'atmosphère juste au-dessus de la surface  $T(\tau = \tau_s)$  en utilisant l'équation 6.7. Que remarque-t-on ?

#### Correction

En utilisant l'équation 6.7, on obtient :

$$T_{atm} = (342. \cdot 0.7 * (1. + \tau_{surf}) / 2. / 5.67E-8) ** 0.25 = 262.5 \text{ K}$$

Il existe donc une très forte discontinuité (plus de  $25^\circ\text{C}$ ) entre la température de surface qu'impose l'équilibre radiatif avec effet de serre et la température de l'atmosphère juste au-dessus. On fait l'expérience de cette différence par exemple l'été sur une plage de sable brûlant au Soleil. Cette discontinuité déclenche la convection (et à moindre titre de la conduction) entre l'atmosphère et la surface pour finalement rétablir une continuité.

Afin de déterminer le profil de température  $T(z)$  dans l'atmosphère, il faut déterminer la fonction  $\tau(z)$ . Une bonne approximation est d'écrire l'épaisseur optique comme dépendant exponentiellement de l'altitude : <sup>4</sup>

$$\tau(z) = \tau_s e^{-z/H} \quad (6.10)$$

où nous avons défini une échelle de hauteur  $H$  qui sera ici l'épaisseur caractéristique de la couche de vapeur d'eau dans l'atmosphère (la vapeur d'eau étant le principal gaz à effet de serre). On prendra  $H = 2 \text{ km}$ .

13. En déduire le profil de température recherché  $T(z)$  grâce à l'équation 6.7. Montrer que la dérivée de la température par rapport à l'altitude vaut :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{T_{eq}}{4H\sqrt[4]{2}} \frac{\tau_s e^{-z/H}}{(1 + \tau_s e^{-z/H})^{3/4}} \quad (6.11)$$

#### Correction

Pas de piège particulier ; on fait apparaître à la fin  $T_{eq}$  en utilisant l'expression 6.9.

14. Montrer que la dérivée de la température avec l'altitude (autrement dit le gradient de température) lorsque  $z \rightarrow +\infty$  tend vers zéro. Montrer également que le gradient de température à la surface  $z = 0$  s'écrit :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{T_{eq}}{4H\sqrt[4]{2}} \frac{\tau_s}{(1 + \tau_s)^{3/4}} \quad (6.12)$$

et le calculer pour une épaisseur optique  $\tau_s = 1.25$ .

#### Correction

Obtenu directement.

$$dT/dz(z=0) = -255. / 4. / 2E3 / 2. ** 0.25 * 1.25 / (1. + 1.25) ** 0.75 = 0.018 \text{ K/m}$$

Le gradient imposé par l'équilibre radiatif proche de la surface est donc de  $-18^\circ\text{C km}^{-1}$ .

4. On considère les GES bien mélangés dans l'atmosphère. Si les GES sont bien mélangés, leur masse volumique dans l'air (en kg de GES par  $\text{m}^3$ ) suit la masse volumique de l'air. Cette masse volumique suit la pression, qui elle-même suit une décroissance exponentielle avec l'altitude, d'où l'expression proposée.

15. Lorsqu'une parcelle monte dans une atmosphère saturée en vapeur d'eau (cas le plus fréquent sur Terre), le premier principe stipule qu'elle se refroidit d'environ  $\left. \frac{dT}{dz} \right|_{\text{adia}} = -6,5^\circ\text{C km}^{-1}$ . Ce gradient de température est appelé le gradient *adiabatique saturé*. Il est possible de montrer que si le gradient de température dans l'atmosphère excède (en valeur absolue) ce gradient adiabatique saturé, l'atmosphère est instable et se mélange verticalement (par turbulence et panaches convectifs). Comparer le résultat de la question précédente au gradient adiabatique saturé. Que peut-on en conclure ?

### Correction

Le profil à l'équilibre radiatif est instable. On peut voir sur la figure 6.1 en comparant le profil à l'équilibre radiatif en noir à la droite en pointillé gris à  $-6,5 \text{ K km}^{-1}$  qu'il est instable jusqu'à environ 3 km. L'atmosphère va donc être instable verticalement et se mélanger. Les parcelles humides en montant et en condensant libèrent de la chaleur latente, initiant de la convection dite profonde, et finalement c'est toute la troposphère ( $z < 12 \text{ km}$ ) qui suivra le gradient adiabatique saturé pour donner le profil moyen observé. La température de surface est alors égale à la température de l'atmosphère proche de la surface (voir le profil observé sur la figure 6.1). Cette égalité n'est possible que par la convection, dont les moteurs sont les énergie sensible et latente.

L'effet de serre est subtile, car si  $\tau_s$  augmente par augmentation des GES, c'est par mélange que la colonne se réchauffe, et non par rayonnement. Même si c'est le rayonnement qui est à la source de l'instabilité et dudit mélange.

16. Le profil de température issu du modèle et celui effectivement mesuré sont représentés sur la figure 6.1. Vérifier les résultats de la question 6. D'après le modèle utilisé et compte-tenu de votre réponse à la question 7, jusqu'à quelle altitude s'attend-on à ce que la convection joue un rôle ? Quelle est dans la réalité cette altitude ? On pourra discuter de cet écart en faisant le lien avec le TD2.

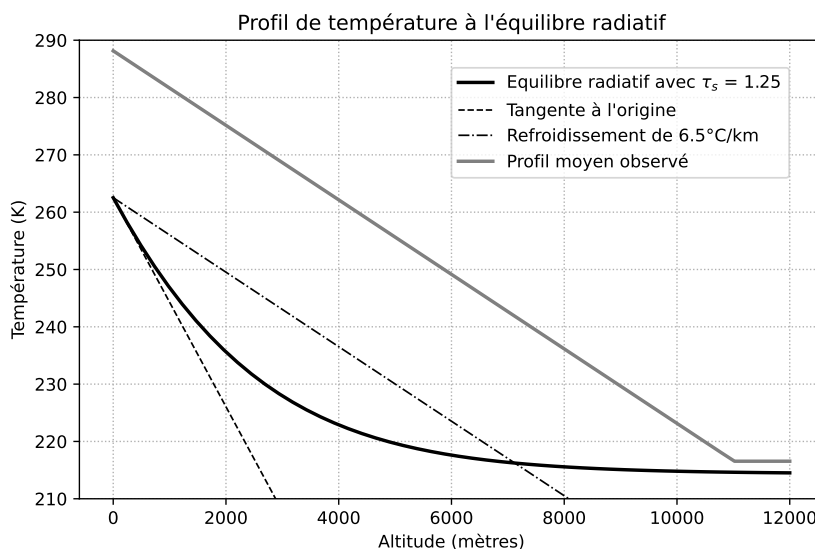
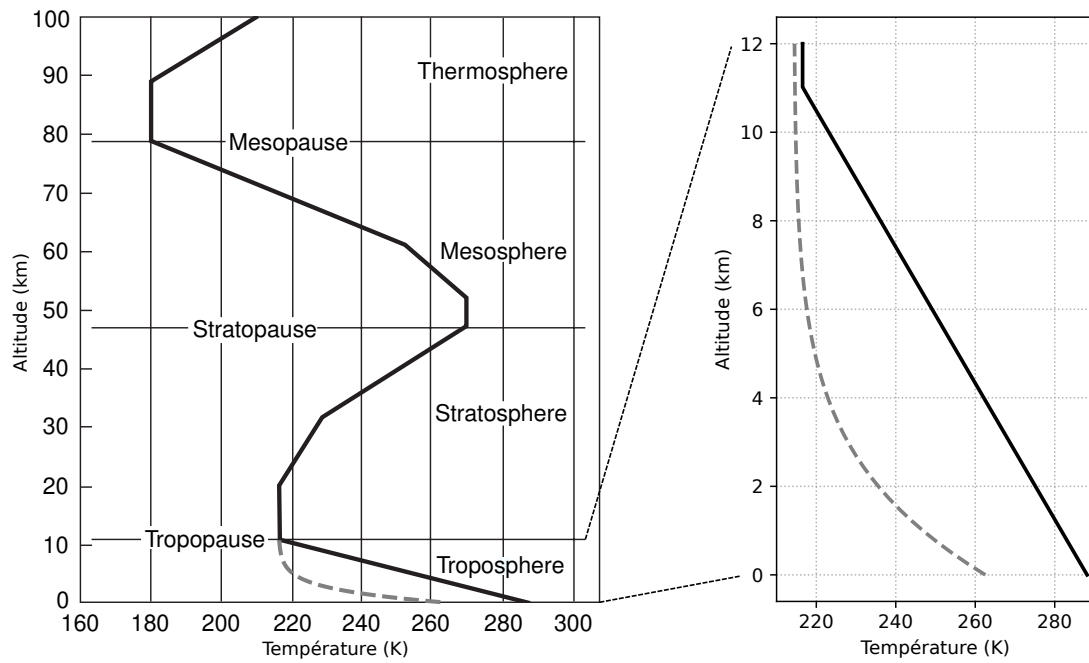


FIGURE 6.1 – Profil de température à l'équilibre radiatif : modèle à deux faisceaux (noir) et profil observé dans l'atmosphère (gris).

### Correction

On vérifie bien les calculs effectués, notamment la tangente à l'origine qui graphiquement montre bien un gradient d'approximativement  $(262-210)/2800=0.018 \text{ K/m}$ . Le profil radiatif étant instable dans la basse troposphère, il va donc forcer un mélange vertical par convection. Les parcelles en ascendance suivront en moyenne le gradient adiabatique humide dicté par la conservation de l'énergie statique humide (voir TD2). Le profil finalement observé est donc un profil à l'équilibre radiatif convectif humide partant d'une température de surface à l'équilibre radiatif, égale à 288 K.



Profil de température dans toute l'atmosphère (figure de gauche) et zoom sur la troposphère (à droite).  
Le profil à l'équilibre radiatif calculé dans ce TD est montré en pointillés gris sur les deux figures.



## TD n° 7

# Forçages climatiques et rétroactions

### 7.1 Le forçage radiatif

Le forçage radiatif  $\Delta F$  est défini comme le déséquilibre radiatif imposé depuis 1750 si on fige la température ( $\Delta T_s = 0$ ) et qu'on considère seulement les effets **directs** des émissions anthropiques (gaz à effet de serre et aérosols) sur les flux sans les rétroactions. Dans ce contexte, l'équation  $\Delta G = \Delta F + \eta \Delta T_s$  se réduit à :

$$\Delta G = \Delta F = \Delta F_{\text{in}} - \Delta F_{\text{out}}. \quad (7.1)$$

1. L'effet de serre  $\mathcal{E}$  est défini comme étant la différence entre la densité de flux émise par la surface et celle émise au sommet de l'atmosphère :

$$\mathcal{E} = F^+(\tau_s) - F_{\text{out}} \quad (7.2)$$

À l'équilibre radiatif, que vaut  $F_{\text{out}}$  ? Calculer l'effet de serre  $\mathcal{E}$  pour l'épaisseur optique pré-industrielle  $\tau_s = 1,25$ .

#### Correction

À l'équilibre  $F_{\text{out}} = F_{\text{in}} = \frac{E}{4}(1 - A_b) = 240 \text{ W m}^{-2}$ . On trouve pour l'effet de serre  $150 \text{ W m}^{-2}$ .

2. Entre 1750 et 2020, l'augmentation des gaz à effet de serre dans l'atmosphère a modifié le flux sortant  $F_{\text{out}}$ , avec une variation d'environ  $\Delta F_{\text{out}} = -3 \text{ W m}^{-2}$ . Montrer que  $\tau_s$  peut s'exprimer :

$$\tau_s = 2 \left( \frac{\sigma T_s^4}{F_{\text{out}}} - 1 \right). \quad (7.3)$$

En déduire une expression de  $\frac{\partial \tau_s}{\partial F_{\text{out}}}$  en supposant  $T_s$  constante. Entre 1750 et 2020, de combien doit augmenter  $\tau_s$  à  $T_s$  constant pour correspondre à  $\Delta F_{\text{out}} = -3 \text{ W m}^{-2}$  ?

#### Correction

On trouve :

$$\tau_s = 2 \left( \frac{\sigma T_s^4}{F_{\text{out}}} - 1 \right)$$

En dérivant :  $\frac{\partial \tau_s}{\partial F_{\text{out}}} = -2\sigma T_s^4 / F_{\text{out}}^2$

D'où une variation de  $\tau_s$  :

$$\Delta \tau_s = -2 \frac{\sigma T_s^4}{F_{\text{out}}^2} \Delta F_{\text{out}} = -2 \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \times 288^4}{240^2} \times (-3) = 0,04.$$

On obtient une variation positive de  $\tau_s$ , comme attendu. On remarque qu'il suffit d'une petite augmentation de  $\tau_s$  pour induire le forçage observé, car nous faisons ici l'hypothèse d'une atmosphère grise. Cela signifie que l'atmosphère absorbe de la même façon toutes les longueurs d'onde de l'infrarouge, ce qui n'est pas le cas en réalité. Les GES ont des bandes d'absorption bien marquées. Par exemple la principale bande

d'absorption du  $\text{CO}_2$  est à  $15\ \mu\text{m}$ . En absorbant toutes les longueurs d'onde, notre modèle surestime donc fortement la sensibilité à  $\tau_s$ , l'opacité totale en GES.

3. Les aérosols modifient quant à eux le flux incident  $F_{\text{in}}$ . Cette variation vaut environ  $\Delta F_{\text{in}} = -1,3\ \text{W m}^{-2}$ . Exprimer  $A_b$  en fonction de  $F_{\text{in}}$  puis  $\frac{\partial A_b}{\partial F_{\text{in}}}$ . À quelle augmentation de l'albédo correspond le forçage des aérosols ? Commenter la valeur.

#### Correction

On a

$$A_b = 1 - \frac{4F_{\text{in}}}{E} \longrightarrow \frac{\partial A_b}{\partial F_{\text{in}}} = -\frac{4}{E}$$

D'où une variation de l'albédo

$$\Delta A_b = \frac{\partial A_b}{\partial F_{\text{in}}} \Delta F_{\text{in}} = -\frac{4}{E} \Delta F_{\text{in}} = -\frac{4}{1368} \times (-1,3) = 0,004$$

La variation relative d'albédo est très faible  $\frac{0,004}{0,31} = 1\ \%$ . Une faible variation d'albédo permet de comprendre cette variation de flux incident. L'effet d'albédo est significatif et atténue l'effet de l'augmentation des gaz à effet de serre (mais pas suffisamment pour le compenser). On comprend ici que les humains soient tentés d'utiliser des techniques de géo-ingénierie (par exemple injection de poussières réfléchissantes dans l'atmosphère) pour augmenter l'albédo et compenser l'effet de l'augmentation des gaz à effet de serre. Ce type d'idée présente néanmoins de nombreux problèmes, technologiques, climatiques, météorologiques, et éthiques.

## 7.2 Les rétroactions, approche par diagrammes systémiques

Lorsque la température de surface est perturbée ( $\Delta T_s \neq 0$ ), toutes les composantes du système climatique vont être modifiées. Le système climatique peut alors amplifier ou atténuer la perturbation initiale par le biais de rétroactions dites positives si amplification et négative si atténuation. Un diagramme systémique permet de cartographier les composantes d'un système et d'y mettre en évidence les boucles de rétroactions.

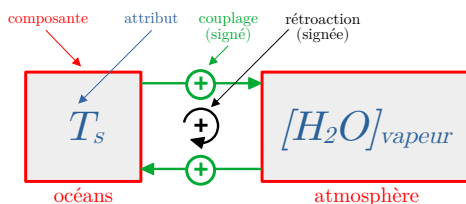
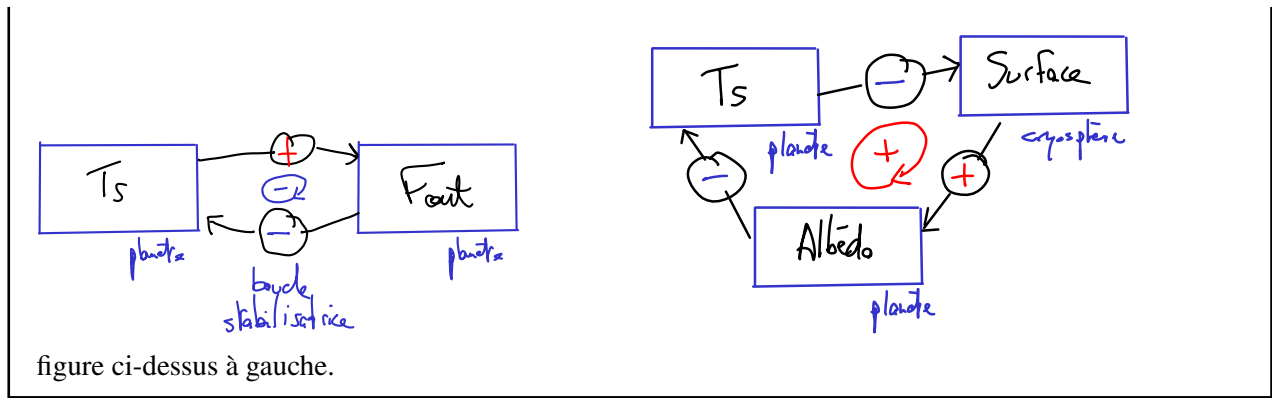


FIGURE 7.1 – Diagramme systémique : rétroaction de la vapeur d'eau. Une augmentation de la température de surface des océans augmente leur évaporation et la concentration de vapeur d'eau dans l'atmosphère : il s'agit donc d'un **couplage positif**. Une augmentation de vapeur d'eau engendre quant à elle une augmentation de la température de surface par effet de serre : il s'agit encore une fois d'un **couplage positif**. Comme  $(+1) \times (+1) = +1$ , la boucle de rétroaction est **positive** : une augmentation initiale de température est amplifiée par la boucle de rétroaction de la vapeur d'eau.

4. En plaçant  $T_s$  et  $F_{\text{out}}$  sur un diagramme systémique comme la figure 1, décrire ce qu'est la rétroaction de Planck, à savoir qu'une surface plus chaude se refroidit plus efficacement puisque son émittance suit la loi de Stefan-Boltzmann  $\sigma T^4$ .

#### Correction





5. Décrire ce qu'est la rétroaction de l'albédo en plaçant sur un diagramme systémique la surface de glace de mer, la température de surface et l'albédo moyen de la Terre. Cette rétroaction est-elle positive (amplificatrice) ou négative (stabilisatrice) ?

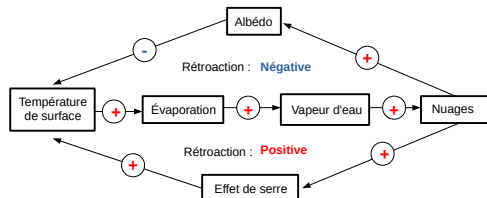
### Correction

figure ci-dessus à droite.

6. La figure ci-dessous montre la double rétroaction des nuages sur la température de surface. Compléter le diagramme systémique ci-dessous en indiquant le signe des couplages et des deux boucles de rétroactions mises en évidence. Peut-on conclure quant à l'effet des nuages sur  $T_s$  ? Que peut-on dire sur le rôle des nuages sur l'évolution de la température de surface en situation de changement climatique ?

### Correction

Les nuages augmentent l'albédo donc ont un effet refroidissant, mais ils augmentent aussi l'effet de serre car les gouttelettes/cristaux absorbent et émettent efficacement l'infrarouge. La plupart des modèles prédisent un effet plutôt réchauffant des nuages, mais la valeur exacte de ce réchauffement reste incertaine.



## 7.3 Les rétroactions, approche quantitative

Nous continuons l'analyse de l'équation  $\Delta G = \Delta F + \eta \Delta T_s$  avec maintenant le terme lié aux rétroactions  $\eta \Delta T_s$  qui reflète l'effet **indirect** sur les flux radiatifs des rétroactions associées à la variation de la température de surface  $T_s$ . Le bilan radiatif  $G = F_{in} - F_{out}$  dépend de nombreux paramètres qui eux-mêmes dépendent de la température :

$$G = f(E, T_s, A_b(T_s), \tau_s(T_s)) \quad (7.4)$$

On cherche par la suite à quantifier les variations de  $G$  selon chacun des paramètres, et à les comparer à la figure 7.2 qui donne les différentes valeurs des paramètres de rétroaction<sup>1</sup>. Nous écrirons la variation  $dG$  sous la forme :

$$dG = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial F_{out}} \frac{\partial F_{out}}{\partial T_s}}_{\eta_{Planck}} dT_s + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial A_b} \frac{\partial A_b}{\partial T_s}}_{\eta_{alb}} dT_s + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial T_s}}_{\eta_{vap}} dT_s = (\eta_{Planck} + \eta_{alb} + \eta_{vap}) dT_s \quad (7.5)$$

1. Nous n'évaluerons pas le paramètre de rétroaction des nuages, qui est trop complexe à estimer à la main, voir question II.6).

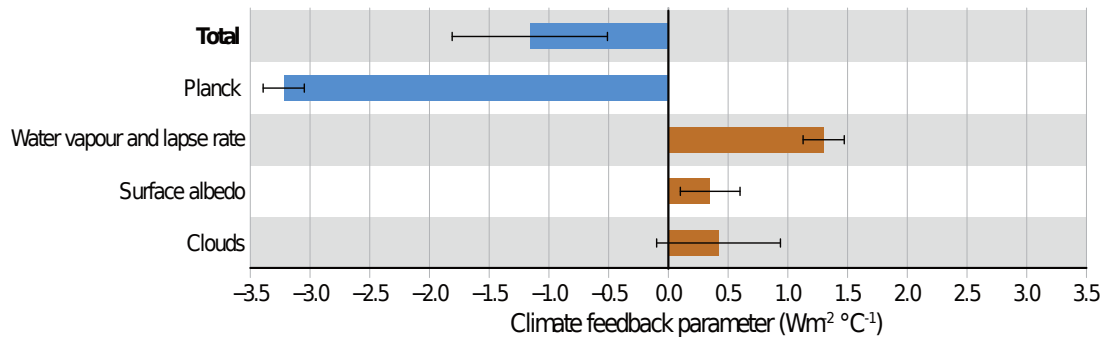


FIGURE 7.2 – Paramètre de rétroaction  $\eta$  pour les quatre rétroactions principales du système climatique. *Source : Sixième rapport du GIEC.*

### 7.3.1 Rétroaction de Planck

On s'intéresse d'abord à la variation directe de  $G$  en fonction de  $T_s$ , qu'on appelle rétroaction de Planck.

- Exprimer le paramètre de rétroaction de Planck  $\eta_{\text{Planck}}$  (voir équation 7.5) en fonction de  $T_s$  et  $\tau_s$  en utilisant le modèle à deux faisceaux. Calculer  $\eta_{\text{Planck}}$  pour  $\tau_s = 1.25$ . Commenter.

#### Correction

On a

$$F_{\text{out}} = \frac{\sigma T_s^4}{1 + \tau_s/2}$$

d'où

$$\eta_{\text{Planck}} = \frac{\partial G}{\partial F_{\text{out}}} \frac{\partial F_{\text{out}}}{\partial T_s} = (-1) \times \frac{4\sigma T_s^3}{1 + \tau_s/2} = -\frac{4 \times 5,67 \cdot 10^{-8} \times 288^3}{1 + 1.25/2} = -3,33 \text{ (W/m}^2\text{)/K}$$

Le résultat est vraiment en accord avec le résultat expérimental de la figure 7.2.

- Entre 1750 et 2020, le bilan radiatif  $G$  s'est déséquilibré de  $\Delta G = 0,8 \text{ W m}^{-2}$ . Le forçage radiatif  $\Delta F$  est quant à lui de  $2 \text{ W m}^{-2}$ . De combien serait l'augmentation de température de surface  $\Delta T_s$  si la rétroaction de Planck était la seule à l'œuvre ? Comparer cette valeur à l'augmentation de température effectivement constatée entre 1750 et 2020 de  $1^\circ\text{C}$ . Que peut-on en conclure sur le rôle des autres rétroactions ?

#### Correction

S'il n'y a que la rétroaction de Planck :

$$\Delta G = \Delta F + \eta_{\text{Planck}} \Delta T_s$$

d'où

$$\Delta T_s = \frac{\Delta G - \Delta F}{\eta_{\text{Planck}}} = \frac{0,8 - 2}{-3,33} = 0,36 \text{ K.}$$

On observe actuellement une élévation de température plus grande (déjà  $1^\circ\text{C}$  en 2020), ce qui suggère l'existence de rétroactions positives et leur importance capitale dans la réponse du système climatique aux modifications anthropiques.

### 7.3.2 Effet dû à l'albédo

9. On mesure une variation de l'albédo de la surface en fonction de sa température  $\frac{\partial A_b}{\partial T_s} = -1 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Montrer que le paramètre de rétroaction de l'albédo peut s'écrire :

$$\eta_{\text{alb}} = -\frac{E}{4} \frac{\partial A_b}{\partial T_s} \quad (7.6)$$

et en déduire la valeur de  $\eta_{\text{alb}}$ .

#### Correction

On a

$$\eta_{\text{alb}} = \frac{\partial G}{\partial A_b} \frac{\partial A_b}{\partial T_s} = \frac{\partial F_{\text{in}}}{\partial A_b} \frac{\partial A_b}{\partial T_s} = -\frac{E}{4} \frac{\partial A_b}{\partial T_s} = -\frac{1368}{4} \times (-1 \cdot 10^{-3}) = 0,342 \text{ (W/m}^2\text{)/K}$$

On trouve effectivement une valeur en accord avec la figure 7.2.

### 7.3.3 Effet dû à la vapeur d'eau

10. La vapeur d'eau étant un GES, son augmentation dans l'atmosphère en raison d'une évaporation accrue modifie l'épaisseur optique totale  $\tau_s$  et l'augmente. Montrer que le paramètre de rétroaction de la vapeur d'eau peut s'écrire :

$$\eta_{\text{vap}} = \frac{\sigma T_s^4}{2(1 + \frac{\tau_s}{2})^2} \frac{\partial \tau_s}{\partial T_s} \quad (7.7)$$

#### Correction

On a :

$$\frac{\partial G}{\partial \tau_s} = -\frac{\partial F_{\text{out}}}{\partial \tau_s} = -\frac{\partial}{\partial \tau_s} \left( \frac{\sigma T_s^4}{1 + \frac{\tau_s}{2}} \right) = \frac{\sigma T_s^4}{2(1 + \frac{\tau_s}{2})^2}$$

d'où l'expression recherchée

$$\eta_{\text{vap}} = \frac{\partial G}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial T_s} = \frac{\sigma T_s^4}{2(1 + \frac{\tau_s}{2})^2} \frac{\partial \tau_s}{\partial T_s}$$

Reste à déterminer la variation de l'épaisseur optique  $\tau_s$  avec la température  $T_s$  lorsque la rétroaction de la vapeur d'eau est active. Nous utilisons pour cela l'expression (7.3) trouvée à la question I.2) de  $\tau_s$  en fonction de  $\sigma T_s^4$  et  $F_{\text{out}}$ . La dépendance en  $T_s$  vient du numérateur mais aussi du dénominateur puisque le flux sortant  $F_{\text{out}}$  dépend de la température  $T_s$ . Sans l'effet des rétroactions de la vapeur d'eau, ce flux dépendrait de  $T_s^4$ , mais on observe expérimentalement sur la figure 7.3 que par l'effet de la vapeur d'eau le flux au sommet de l'atmosphère varie linéairement avec  $T_s$ . On obtient ainsi que :

$$F_{\text{out}} = aT_s + b \quad \text{avec} \quad a = 2,22 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad \text{et} \quad b = -370 \text{ W m}^{-2}. \quad (7.8)$$

11. Calculer la dérivée  $\frac{\partial \tau_s}{\partial T_s}$  et l'évaluer à la température moyenne de la Terre  $T_s = 288 \text{ K}$ .

#### Correction

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_s}{\partial T_s} &= 2\sigma \frac{4T_s^3(aT_s + b) - T_s^4 a}{(aT_s + b)^2} = 2\sigma T_s^3 \frac{3aT_s + 4b}{(aT_s + b)^2} \\ &= 2 \times 5,67 \cdot 10^{-8} \times 288^3 \frac{3 \times 2,22 \times 288 + 4 \times (-370)}{(2,22 \times 288 - 370)^2} = 0,0167 \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

12. En déduire une estimation du paramètre de rétroaction donné par l'équation (7.7). Comment se compare cette valeur à celle de la figure du rapport du GIEC ? Rappel :  $\tau_s = 1.25$ .

### Correction

On obtient finalement :

$$\eta_{\text{vap}} = \frac{\sigma T_s^4}{2\left(1 + \frac{\tau_s}{2}\right)^2} \frac{\partial \tau_s}{\partial T_s} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \times 288^4}{2\left(1 + \frac{1,25}{2}\right)^2} \times 0,0167 = 1,23 \text{ (W/m}^2\text{)/K}$$

On trouve un résultat très proche de ce qui est présenté sur la figure du rapport du GIEC.

Syukuro Manabe a conclu les travaux qui lui ont valu le Prix Nobel de Physique en 2021 par ce type de calculs ainsi que par la mise au point de modèles simplifiés mais retenant toute la physique de première ordre importante pour comprendre les mécanismes du changement climatique, notamment le rôle central de la rétroaction de la vapeur d'eau. Ces travaux prédisaient déjà, dès les années 70, l'amplitude du changement climatique avec une précision remarquable.

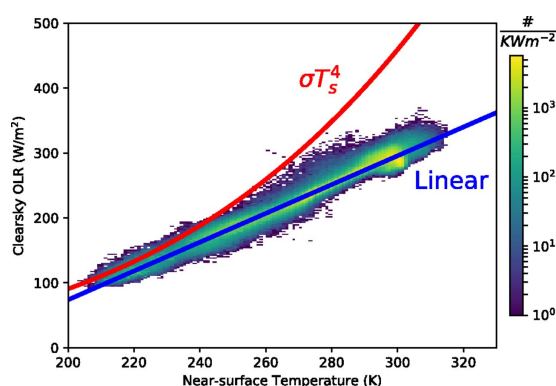


FIGURE 7.3 – Tracé du flux surfacique sortant  $F_{\text{out}}$  au sommet de la Terre en fonction de la température de surface  $T_s$ . La dépendance dévie largement du modèle du corps noir (pointillés) et est approximativement linéaire (ajustement en traits pleins). Manabe et Strickler avaient prédit théoriquement dans les années 60 cette forme approximativement linéaire. Les points montrés ici sont des mesures moyennes mensuelles de  $F_{\text{out}}$  mesurées par temps clair par satellite. La couleur indique la densité du nombres de points. Source : Koll & Cronin, PNAS 115 (41) 10293-10298 (2018).