

Énergie-Climat-Société
- LU2PY125 -

3 ECTS

Travaux dirigés

2024-2025

Table des matières

1	Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.	3
1.1	Ressources non renouvelables. Pic de Hubbert	3
1.2	Recyclage de l'aluminium	5
1.3	Ordres de grandeur sur les émissions de CO ₂	5
2	Consommation automobile et économies d'énergie	7
3	L'énergie éolienne	10
3.1	Introduction	10
3.2	Rendement d'une éolienne – Limite de Betz	10

TD n° 1

Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.

Objectifs

- Révision de notions mathématiques et mécaniques
- Se familiariser avec différentes unités d'énergie et de puissance
- Se familiariser avec une approche par ordre de grandeur. S'approprier quelques chiffres clefs.

Données

- Masses molaires :

Molécule/Atome	C	O	Al	CO ₂	« air » (moyenne)
Masse molaire (g/mol)	12	16	27	44	29

- 1 ppm (ou ppmv) signifie une partie par million : 1 ppm de CO₂ signifie que sur un million de molécules prises dans un volume d'air, l'une d'elles est une molécule de CO₂.
- $P_{atm} = 10^5$ Pa et $R_{Terre} \simeq 6400$ km

1.1 Ressources non renouvelables. Pic de Hubbert

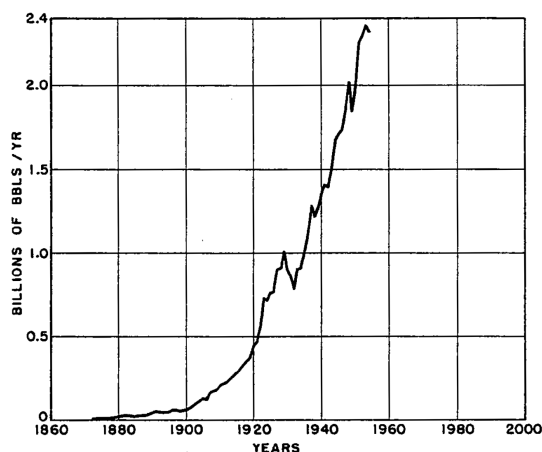


Figure 5 – United States production of crude oil.

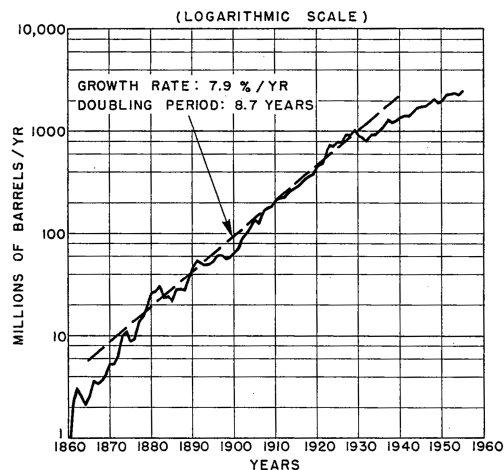


Figure 10 – Crude-oil production in the United States plotted on semilogarithmic scale.

FIGURE 1.1 – Production de pétrole annuelle P en échelles linéaire et logarithmique (source : Hubbert, 1956).

Dans les années 1950, le géophysicien M. K. Hubbert (Shell Company) a proposé un modèle mathématique appliqué à l'épuisement des ressources en énergies fossiles, et a ainsi prédit l'existence d'un pic de production de pétrole aux États-Unis situé vers 1970 et suivi d'un déclin. La quantité cumulée $Q(t)$ est le stock de pétrole extrait depuis le début des forages (exprimée en milliards de barils ou Gbl, 1 bl = 159 L). La production annuelle (unité : Gbl/yr) est la quantité de pétrole extraite en une année : $P(t) = dQ/dt$. On a donc $Q(t) = \int_0^t P(t') dt'$.

1. Expliciter les limites mathématiques que doit vérifier $P(t)$ et en déduire une proposition simple pour l'allure de la fonction $P(t)$. Quelle sera l'allure correspondante de $Q(t)$?
2. On observe sur la figure 1.1 que la courbe de production a initialement une allure exponentielle : $P(t) \propto e^{rt}$. Montrer que cela implique $P(t) \propto Q(t)$ (dans ce régime initial).
3. Il faut aussi rendre compte de ce que les gisements les plus accessibles ont été exploités en premier. De ce fait, l'extraction du pétrole devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que la quantité de pétrole disponible $Q_{total} - Q(t)$ s'épuise (on appelle Q_{total} la quantité totale de pétrole récupérée après épuisement du gisement). On peut le décrire simplement dans $P(t)$ par un facteur $\propto 1 - \frac{Q(t)}{Q_{total}}$ et finalement, Hubbert propose la forme suivante :

$$P(t) = \frac{dQ}{dt} = r Q \left(1 - \frac{Q}{Q_{total}} \right) \quad (1.1)$$

où r est un coefficient positif (unité : yr^{-1}).

En posant $y = Q/Q_{total}$, montrer que l'équation (1) s'écrit : $P = r Q_{total} y(1 - y)$. Pour quelle valeur de y la production P atteint-elle son maximum ? En conclure que le pic de production t_{peak} est atteint lorsque la moitié des réserves a été exploitée. Donner l'expression de P_{peak} .

4. Montrer que

$$Q(t) = \frac{Q_{total}}{1 + e^{-r(t-t_{\text{peak}})}} \quad (1.2)$$

est solution de l'équation (1). Tracer l'allure de $Q(t)$ et $P(t)$.

5. Application à la production de pétrole aux États-Unis¹. Les expressions analytiques de $P(t)$ et $Q(t)$ font intervenir 3 paramètres, r , Q_{total} et t_{peak} , qui peuvent être obtenus par un ajustement numérique de données réelles. Sur la figure 1.2 sont représentés : (en traits pleins) les données de la production annuelle $P(t)$ et du stock cumulé $Q(t)$ de pétrole aux États-Unis jusqu'en 2022 et, (en pointillés) les ajustements des données disponibles jusqu'en 1956 par les expressions (1.1) et (1.2). Commenter.

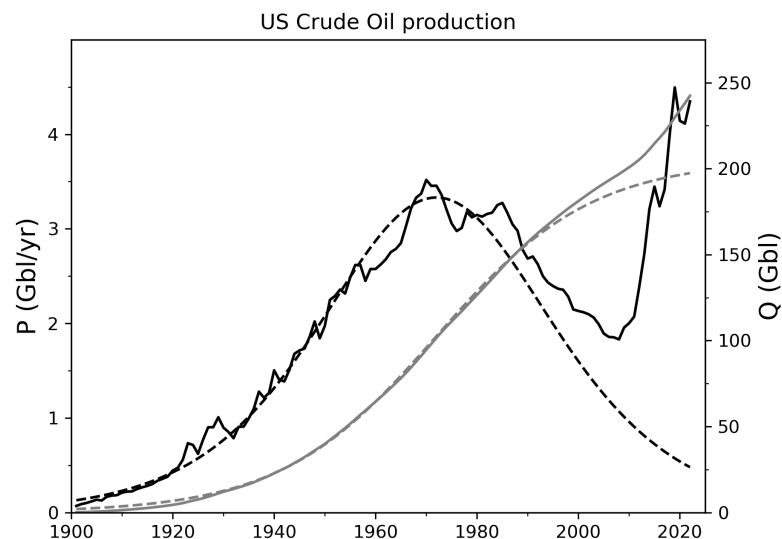


FIGURE 1.2 – En traits pleins : production annuelle (Gbl/yr, en noir) et cumulée Q (Gbl, en gris) aux États-Unis entre 1900-2022. En pointillés : modèle obtenu avec les paramètres $r = 0,065 \text{ yr}^{-1}$, $Q_{total} = 205 \text{ Gbl}$ et $t_{\text{peak}} = 1972$.

6. On revient plus en détail sur la démarche de Hubbert en exploitant les données d'une autre manière.
 - (a) Montrer que P/Q suit une loi linéaire avec Q .
 - (b) Le graphe P/Q en fonction de Q est donné en figure 1.3. Commenter la pertinence du modèle et estimer r et Q_{total} .
 - (c) En déduire une estimation de Q_{peak} et P_{peak} .

1. Données : [EIA \(Energy Information Administration\)](#)

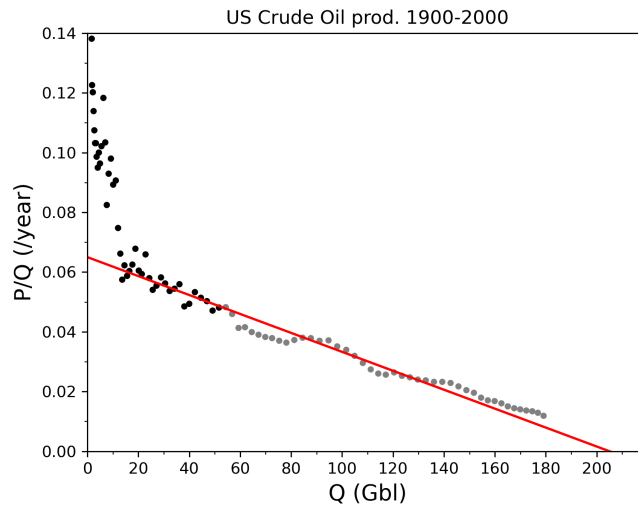


FIGURE 1.3 – Tracé de P/Q en fonction de Q pour les États-Unis. En noir : données de 1900 à 1956 utilisées par Hubbert. L'ajustement linéaire (en rouge) est réalisé sur la période 1930-1990.

1.2 Recyclage de l'aluminium

7. L'aluminium est un métal très polluant à produire à partir de la bauxite mais fait partie des métaux qui se recyclent le mieux. On considère une canette produite en 2023 qui serait continuellement recyclée par la suite. En supposant une efficacité de recyclage de $\sim 95\%$, un taux de collecte de $\sim 75\%$, et une durée de cycle de 40 jours (de la poubelle jaune au retour sur le marché), calculer la part initiale d'aluminium encore sur le circuit 1 an plus tard et 10 ans plus tard.
8. **Question complémentaire :** au bout de combien de temps une quantité initiale d'une mole (correspondant à la masse de 2 canettes) se réduit-elle à un seul atome encore présent ?
9. Supposons que chaque personne sur Terre consomme une canette d'aluminium de 13 g par jour. Quelle masse d'aluminium faudrait-il alors extraire chaque année pour compenser les pertes du circuit de recyclage ? Comparer cette valeur à la production mondiale d'aluminium (64 Mt en 2018) et aux réserves mondiales de bauxite (entre 28 et 75 Gt, selon la façon dont elles sont définies et estimées - il faut 4 à 5 t de bauxite pour produire 1 t d'aluminium).

1.3 Ordres de grandeur sur les émissions de CO_2

10. Émissions et concentration de CO_2 .

- (a) **Conversion.** Sachant que la force de pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface terrestre est égale au poids de l'atmosphère, calculer la masse totale de l'atmosphère. En déduire la masse de CO_2 correspondant à 1 ppm de la masse de l'atmosphère.
- (b) **Cumul historique.** En 1870, la concentration de CO_2 atmosphérique était de 280 ppm. Un article² évalue les émissions dues aux activités humaines, cumulées sur la période 1870-2013, à (535 ± 55) Gt d'atomes de carbone. Sachant que seule la moitié des émissions de CO_2 reste dans l'atmosphère, l'autre moitié étant absorbée par les océans et les sols, en déduire la concentration atmosphérique de CO_2 en 2013.
- (c) **Exercice complémentaire : énergies fossiles et émissions de CO_2 .** On décompose ci-dessous les étapes d'une démarche pour aboutir à l'ordre de grandeur des émissions de CO_2 liées au transport individuel (en voiture).
 - i. Proposer un ordre de grandeur du nombre moyen de km effectués quotidiennement puis annuellement par un automobiliste.
 - ii. La consommation moyenne d'une voiture dans le Monde étant de 7 litres d'essence pour 100 km parcourus (source : Agence Internationale de l'Énergie), estimer la consommation typique, en litres d'essence, associée à ce trajet annuel (pour une personne).
 - iii. Compte tenu que la combustion d'un litre d'essence émet 0,75 kg de carbone, évaluer les émissions de carbone puis de CO_2 liées au transport individuel, en tonnes par personne et par an. Que vous inspire la valeur obtenue ?

2. Quéré et al., *Earth Syst. Sci. Data*, **6**, 235 (2014)

- iv. Proposer un ordre de grandeur du nombre d'automobilistes dans le Monde et en déduire les émissions de CO_2 liées au transport individuel pour l'ensemble du Monde.
- v. Sachant que le transport individuel représente $\sim 50\%$ des émissions du secteur du transport et que ce secteur représente lui-même environ 20% du total des émissions, vérifier la cohérence de votre calcul précédent.

11. Travail humain / énergies fossiles

- (a) On cherche une estimation de la puissance mécanique qu'un humain peut fournir en une journée de (dur) travail. On considérera par exemple une ascension régulière correspondant à un dénivelé de 1700 m, effectuée en 10h par une personne de 74 kg et portant un bagage de 10 kg. Exprimer l'énergie mécanique fournie en MJ ainsi que la puissance correspondante.
- (b) **Question complémentaire** : On peut, de manière alternative, estimer la puissance mécanique fournie par une personne ayant excavé de la terre pendant 10 h, en faisant un trou d'une surface de 20 m^2 sur une hauteur de 1 m. Exprimer l'énergie mécanique mise en jeu en MJ puis en Wh ainsi que la puissance correspondante (on donne $\rho_{\text{terre}} \sim 5,5\text{ g/cm}^3$).
- (c) La combustion d'un litre d'essence génère environ 10 kWh de chaleur, qui est utilisée par un moteur automobile avec un rendement de l'ordre de 25% . Comparer l'énergie fournie par un litre d'essence à celle fournie par une journée de travail humain.
- (d) **Question complémentaire** Le cheval-vapeur (ch) est une unité de puissance introduite lors de l'apparition des machines à vapeur, afin d'exprimer leur puissance par rapport à celle fournie par un cheval. Il est défini comme la puissance à fournir pour élever une masse de 75 kg sur une hauteur de 1 mètre en 1 seconde. Calculer la valeur de 1 ch dans l'unité SI.

12. Exercice complémentaire : Feux de forêts.

Lors de l'été 2023, les incendies au Canada ont brûlé près de 18,5 millions d'hectares de forêt ([wikipedia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Incendies_de_forêt_du_Canada_2023), chiffre au 06/10/2023). Estimer la masse de carbone émise dans l'atmosphère par cette combustion (on considérera que le carbone représente la moitié de la masse totale du bois). La comparer aux émissions de gaz à effet de serre du Canada et aux émissions annuelles mondiales :

- Canada (en 2021) : émissions territoriales annuelles (hors émissions induites par les importations) : 550 Mt CO_2 -eq, empreinte totale annuelle (incluant les importations) : 670 Mt CO_2 -eq (soit 17,5 t CO_2 -eq par habitant),
- Monde (actuellement) : émissions annuelles : $\sim 50\text{ Gt CO}_2$ -eq (dont 40 Gt de CO_2), soit $\sim 6\text{ t CO}_2$ -eq par habitant.

TD n° 2

Consommation automobile et économies d'énergie

Objectifs

Le transport automobile est un exemple majeur de consommation d'énergie. Ce TD vise à

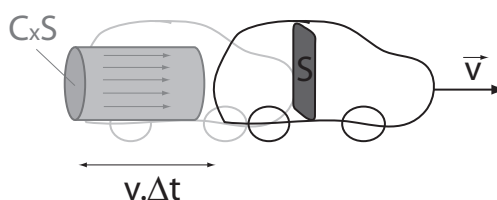
- identifier les transformations énergétiques impliquées dans le fonctionnement d'un véhicule,
- quantifier l'énergie mécanique à fournir par le moteur pour assurer un déplacement donné,
- chiffrer les économies d'énergie réalisables en jouant sur les paramètres pertinents (vitesse, masse etc),
- traduire ces données en termes d'émission de CO_2 .

La façon dont le moteur produit cette énergie mécanique, son optimisation et sa décarbonation, sont naturellement des enjeux majeurs mais ne seront pas abordées dans ce TD.

1. De quelle nature est l'énergie fournie au moteur d'une voiture thermique ? Quelles sont les transformations énergétiques successives et les sources de pertes associées ?

Energie mécanique à fournir pour un déplacement : Une voiture de masse m effectue, sur terrain plat, un "déplacement" comprenant tout d'abord le démarrage, puis le mouvement sur une distance d à une vitesse v supposée constante, et enfin l'arrêt pour lequel on suppose qu'aucune énergie n'est à fournir. Afin de simplifier la discussion, on décrira cette voiture comme un objet ponctuel, subissant 3 forces : la force de traction du moteur \vec{F}_{mot} , la force de traînée (frottements de l'air) \vec{F}_{air} et la force de roulement \vec{F}_{roul} associée aux différents frottements solides entre les pièces de la voiture et entre les roues et le sol.

2. **Rappel :** un objet ponctuel se déplace d'un point A à un point B et subit un ensemble de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$. Exprimer la différence d'énergie mécanique $E_m(B) - E_m(A)$ en fonction du travail de ces forces.
3. **Démarrage :** la voiture part d'une vitesse nulle et accélère jusqu'à une vitesse v . Quel est le travail (qui sera noté W_1) du moteur pendant cette phase d'accélération, supposant que durant cette phase $F_{mot} \gg F_{air}, F_{roul}$? Sur quels paramètres peut-on jouer pour le réduire ?
4. Pendant toute la suite du déplacement, la vitesse est supposée constante. Quelle est la relation entre W_{mot} , W_{air} et W_{roul} pendant cette période ?
5. **Frottements de l'air :** nous allons développer une modélisation de la force de traînée, extrêmement approximative mais qui aboutit à une expression correcte dans le régime d'écoulement considéré. Admettons que, sous l'effet du passage de la voiture, un tube d'air derrière elle est mis en mouvement à la vitesse v . Pour rendre compte du caractère plus ou moins aérodynamique du véhicule, on introduit un coefficient de traînée C_x (sans dimension) : la section du tube d'air mis en mouvement est supposée égale à $C_x S$, où S est l'aire de la section de la voiture.



Exprimer le volume \mathcal{V} du tube d'air traversé pendant un déplacement de longueur d , puis sa masse (on note ρ_a la masse volumique de l'air). En déduire le travail W_{air} , supposant que c'est l'opposé de l'énergie cinétique reçue par le tube d'air.

6. En déduire le travail $W_2 = -W_{air}$ que le moteur doit fournir pour compenser la force de traînée. Comment le réduire ? Montrer que l'on peut définir une "distance critique" d_c telle que $W_2/W_1 = d/d_c$.
7. Calculer d_c pour $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $m = 1,4 \text{ t}$, $C_x = 0,33$ et $S = 2,7 \text{ m}^2$ (valeurs typiques pour une voiture). Qu'en conclure ?
8. **Force de roulement** : il faut aussi prendre en compte, malgré une contribution plus faible, la résistance au roulement qui intègre le frottement de la gomme des pneus sur la route, la dissipation de l'énergie par les suspensions de la voiture, etc. Le modèle le plus simple pour l'évaluation de ces pertes fait l'hypothèse que la résistance est simplement de la forme μmg , où μ est un coefficient de l'ordre de 0,01.
Exprimer le travail W_{roul} de la résistance au roulement pendant le déplacement et le travail $W_3 = -W_{roul}$ que le moteur doit fournir pour compenser cette force. Comment le diminuer ?

Applications numériques : Nous allons considérer deux "trajets" typiques :

- (1) "sur autoroute" : un unique "déplacement" de 100 km effectué à vitesse constante ;
- (2) "en ville" : une succession de 10 "déplacements" de 500 m (i.e. on parcourt 5 km en s'arrêtant 9 fois à cause des feux, carrefours etc).

et 5 jeux de paramètres :

- (a) "conditions normales" : $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $m = 1,4 \text{ t}$, $C_x = 0,33$ et $S = 2,7 \text{ m}^2$; $v = 130 \text{ km/h}$ sur autoroute et 50 km/h en ville,
- (b) conditions normales sauf pour la vitesse : $v = 110 \text{ km/h}$ sur autoroute et 35 km/h en ville ;
- (c) conditions normales sauf pour la masse ¹ : $m = 1 \text{ t}$;
- (d) conditions normales sauf pour le coefficient de traînée ² : $C_x = 0,25$;
- (e) "conditions optimisées" : $m = 1 \text{ t}$, $C_x = 0,25$ et $S = 2,7 \text{ m}^2$; $v = 110 \text{ km/h}$ sur autoroute et 35 km/h en ville.
8. Calculer l'énergie totale \mathcal{E} à fournir pour les 2 types de trajet dans chacune des 5 conditions.
9. Supposant que le véhicule possède un moteur à essence, calculer sa consommation pour chacun des 10 cas ci-dessus. La teneur énergétique de l'essence est d'environ 10 kWh/litre. Le rendement du moteur essence ³ est de l'ordre de 35 % au maximum (sur autoroute) et 15 % en ville (utilisations fréquentes mais courtes).

Empreinte carbone :

10. En posant des ordres de grandeur raisonnables sur le nombre de trajets "en ville" et "sur autoroute", estimer la consommation d'essence par personne et par an dans chacune des conditions (a) à (e).
11. On donne 1 litre d'essence $\leftrightarrow 0,75 \text{ kgC}$. En déduire une estimation des émissions de gaz à effet de serre annuelles d'un automobiliste dans chacune des conditions (a) à (e).
12. Quelle baisse des émissions peut-on attendre en passant des conditions "normales" aux conditions "optimisées" ? Cette baisse est-elle significative ?
13. Notre automobiliste achète maintenant une voiture électrique. En restant dans les conditions (e) ⁴, sachant que l'énergie stockée dans une batterie de voiture est restituée avec environ 15 % de pertes, et qu'en France le facteur d'émission de la production électrique est de $75 \text{ gCO}_2\text{e/kWh}$, quelle est maintenant son empreinte carbone annuelle ?

1. La masse à vide d'une voiture vendue en France est actuellement en moyenne de 1,25 t, alors qu'elle n'était que de 0,9-1,05 t en 1990. En France, un malus s'applique actuellement aux véhicules de plus de 1,6 t à vide.

2. On peut trouver un copieux tableau de valeurs de C_x dans l'article [Automobile drag coefficient](#) de Wikipedia. $C_x = 0,25$ est le coefficient de la Toyota Prius, par exemple. Globalement les véhicules commercialisés les plus efficaces descendent à 0,19-0,20, ce sont des modèles de luxe assez récents.

3. On rappelle que le rendement maximum théorique d'un cycle moteur idéal vaut : $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ avec T_f la température de la source froide et T_c la température de la source chaude.

4. ceci afin de ne pas avoir à refaire de nouveaux calculs. En fait, pour bien faire, il faudrait prendre en compte que les voitures électriques sont plus lourdes à cause des batteries - c'est même un élément très limitant dans la conception de ces véhicules. Par exemple, le poids à vide de la Renault Zoé est de 1470 kg. Il existe de nombreux véhicules électriques beaucoup plus lourds car plus spacieux et haut de gamme - leur intérêt environnemental est plus limité car leur fabrication consomme davantage de ressources.

14. Il faut aussi prendre en compte l'énergie grise associée à la fabrication du véhicule⁵. Elle est de l'ordre de 8 tCO₂e pour une voiture à essence mais monte à 14 tCO₂e pour une voiture électrique à cause de la production des batteries. Au bout de combien de temps le choix d'une voiture électrique est-il avantageux du point de vue des émissions carbone ?

Conclusion : *les calculs de ce TD donnent des valeurs assez réalistes de la consommation énergétique d'une voiture à essence (et pour une diesel les valeurs seraient proches). On voit que des baisses d'émissions significatives peuvent être réalisées sans développements technologiques nouveaux - de l'ordre d'une moitié pour les changements décrits ici, ce qui est important mais pas suffisant par rapport aux objectifs de la transition écologique. Quels moyens proposer pour aller au-delà ?*

Pour s'entraîner :

Transports en commun : Un autocar de 2,5 m de largeur et 3,2 m de hauteur, de masse $m_{car, vide} = 12$ t, supposé de coefficient de traînée $C_{x, car} \simeq 1$ (son aérodynamisme est beaucoup moins bon que celui d'une voiture), transporte N passagers. Comparer l'énergie consommée \mathcal{E}_{car} avec l'énergie $N \times \mathcal{E}_{voit.}$ qui serait consommée si chaque passager roulait seul en voiture à la même vitesse (on prendra $m_{voit., vide} = 1,2$ t). Pour simplifier, on traitera uniquement les deux cas limites $\mathcal{E} \simeq W_1$ et $\mathcal{E} \simeq W_2$. Dans chaque cas, à partir de quel nombre de passagers le car devient-il plus rentable, en termes d'empreinte carbone, que la voiture individuelle ?

Transport aérien : voir annales 2023-2024, contrôle 2, exercice II

5. Les données utilisées ici sont issues de l'analyse du cabinet Carbone 4 (<https://www.carbone4.com/analyse-faq-voiture-electrique>) dans laquelle on peut aussi trouver des éléments de discussion sur les besoins en matières premières des batteries, l'impact environnemental et social de l'extraction, les véhicules hybrides etc.

TD n° 3

L'énergie éolienne

Objectifs

Dans ce TD, on s'intéresse à l'énergie éolienne, à savoir l'énergie disponible dans les courants d'air sur Terre.

- Manipuler les notions de débit et puissances. Utiliser les relations de Bernoulli et la seconde loi de Newton dans un contexte de système ouvert.
- Mettre à profit ses connaissances pour déterminer une limite fondamentale au fonctionnement d'une éolienne.

On considérera l'air comme un fluide parfait, incompressible, irrotationnel et on négligera les effets de turbulence. On se placera de plus en régime stationnaire, avec un écoulement unidirectionnel. On négligera les effets de variation d'altitude.

Rappels et définitions

- Le débit (volumique) d'un fluide est le volume de fluide passant à travers une surface S par unité de temps (unité : $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$). Pour un fluide à la vitesse v uniforme sur une surface S , on a $Q = Sv$.
- Relation de Bernoulli : en l'absence d'obstacle sur le chemin suivi par le fluide (supposé parfait et incompressible), la densité volumique d'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p$ est une grandeur qui se conserve dans l'écoulement.
- La puissance cinétique liée à un écoulement à la vitesse v s'écrit $\mathcal{P}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho v^3 S$ où v est la vitesse du fluide et S la section traversée par le fluide considérée.
- Si un système crée une différence de pression Δp dans le fluide au débit Q , ce système récupère une puissance mécanique $\mathcal{P} = \Delta p \times Q$.

3.1 Introduction

1. Vérifier l'homogénéité de \mathcal{E} et des expressions des puissances \mathcal{P}_{cin} et \mathcal{P} .
2. On hésite entre deux sites pour implanter un parc éolien : en (A) le vent souffle à 8 m s^{-1} approximativement 1/3 du temps et est calme le reste du temps ; en (B), il y a un vent très régulier de vitesse 5 m s^{-1} . Comparer les vitesses moyennes du vent sur les deux sites. Puis comparer les puissances surfaciques moyennes. Quel site choisir, toutes choses égales par ailleurs ?

3.2 Rendement d'une éolienne – Limite de Betz

On s'intéresse dans la suite au rendement d'une éolienne, système permettant de convertir de l'énergie cinétique du vent en énergie de rotation des pales, qui permet de produire de l'électricité grâce à un alternateur (exclu de l'étude). On considère le schéma sur la figure 3.1 : on suit l'évolution d'un tube d'air (un tube de champ de vitesse) lorsque celui-ci passe à travers la surface de l'éolienne. On néglige tout effet lié à l'altitude.

Loin en amont de l'éolienne, l'air est à la pression p_0 avec une vitesse v_1 , ça sera la situation de référence. La présence de l'éolienne va altérer l'écoulement : on note p_2 et v_2 (resp. p_3 et v_3) les pression et vitesse de l'écoulement juste avant (resp. après) l'éolienne. On s'attend à $\Delta p = p_2 - p_3 > 0$ puisque l'éolienne va provoquer une chute de pression en récupérant de l'énergie.

Loin en aval de l'éolienne, l'air a retrouvé sa pression p_0 pour être à l'équilibre mécanique avec son environnement, mais a une vitesse potentiellement différente v_4 .

On supposera que l'écoulement a une vitesse uniforme sur toute section du tube de champ et en particulier sur la surface de l'éolienne notée S . De même, on suppose que l'action des pales de l'éolienne est homogène sur toute la surface.

3. *A priori*, la vitesse v_4 est inconnue, et peut varier entre 0 et v_1 . On cherche à comprendre qualitativement l'existence d'un optimum de fonctionnement pour l'éolienne. Si la vitesse $v_4 = v_1$ quelle est la puissance récupérée par l'éolienne ? Et si $v_4 = 0$? Commenter.

Détermination de la vitesse au niveau de l'éolienne

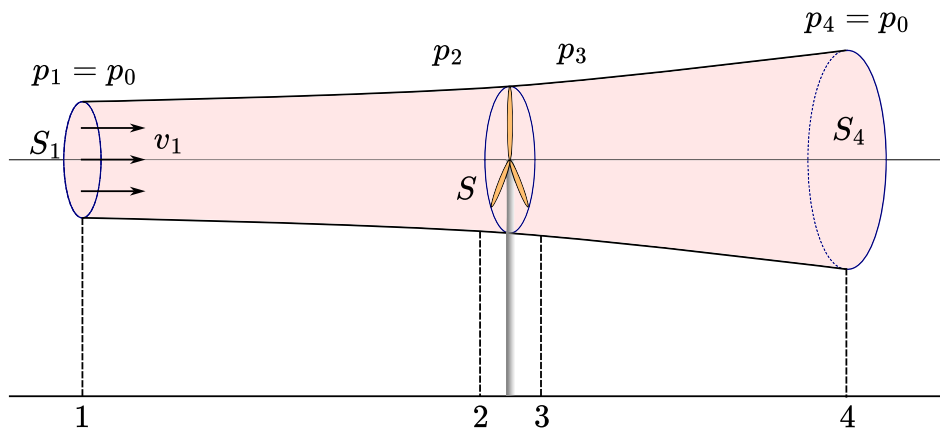


FIGURE 3.1 – Position du problème : flux d'air traversant une éolienne

On cherche ici à déterminer la vitesse v_2 de l'écoulement en fonction de v_1 et v_4 les vitesses loin de l'éolienne.

4. Énoncer la conservation du débit le long de l'écoulement. En déduire en particulier une relation entre v_2 et v_3 .
5. On suppose qu'entre 1 et 2 d'une part et entre 3 et 4 d'autre part, l'énergie volumique du fluide est conservée. Exprimer $p_2 - p_3$ en fonction des vitesses v_1 et v_4 loin de celle-ci.
6. En déduire l'expression de la puissance récupérée \mathcal{P} par l'éolienne en fonction de v_1 et v_4 .

Afin de déterminer une autre relation entre v_1 et v_4 , on cherche à exprimer la puissance récupérée d'une autre façon. Pour cela, nous allons faire déterminer la force exercée par l'éolienne grâce à un bilan de quantité de mouvement. Comme la seconde loi de Newton ne s'applique que sur un système fermé, il va falloir porter un soin particulier au choix du système.

On appelle Σ le fluide que l'on va suivre entre deux instants t et $t + dt$. À l'instant t , $\Sigma(t)$ est présenté sur la figure 3.2(a) : il s'agit de l'air entre les surfaces S_1 et S_2 ainsi que l'air en amont de S_1 qui va passer à travers S_1 pendant dt . À l'instant $t + dt$, le fluide a bougé, en particulier une partie est passée à travers la surface S_4 comme décrit sur la figure 3.2(b).

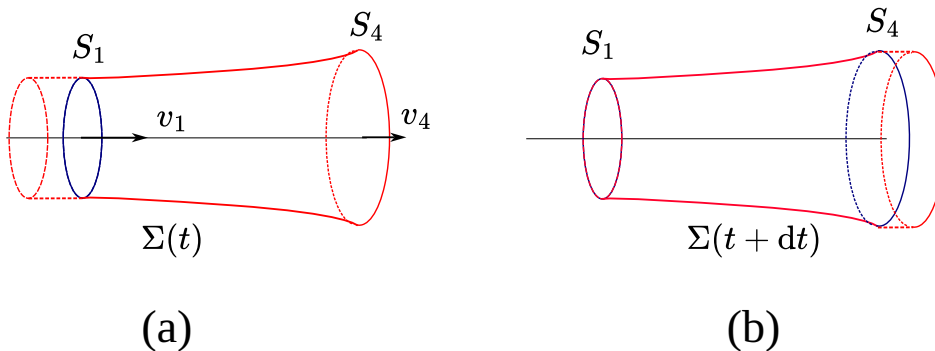


FIGURE 3.2 – Évolution du système entre les instants t et $t + dt$

7. Calculer la variation de quantité de mouvement dp selon l'axe du problème que subit le système Σ entre les instants t et $t + dt$ en fonction de ρ , Q , v_1 , v_4 et dt .
8. En utilisant la seconde loi de Newton, en déduire la force exercée par l'éolienne, et ainsi une autre expression de la puissance \mathcal{P} récupérée par celle-ci en fonction de ρ , S , v_1 , v_2 et v_4 .
9. À l'aide des deux expressions de la puissance récupérée par l'éolienne obtenues aux questions 6 et 8, en déduire l'expression de la vitesse v_2 en fonction de v_1 et v_4 .

Calcul du rendement maximal d'une éolienne

L'étude physique d'une éolienne —quel que soit son fonctionnement— nous a donc permis de trouver l'expression de la vitesse de l'écoulement au niveau de l'éolienne en fonction des conditions aux limites. Cette vitesse v_2 peut varier entre 0 et v_1 , selon le fonctionnement de l'éolienne. On définit :

$$a = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \quad (3.1)$$

le facteur qui quantifie la diminution de cette vitesse.

10. Exprimer v_2 et v_4 en fonction de a et v_1 .
11. On définit le rendement de l'éolienne C_p , ou coefficient de puissance, comme la puissance récupérée sur la puissance qui aurait traversé la même surface sans l'éolienne. Exprimer C_p comme un rapport de puissances et en déduire son expression en fonction de a .
12. Pour quelle valeur de a le coefficient C_p est-il maximal ? Déterminer le maximum de rendement d'une éolienne, qu'on notera C_{Betz} .
13. Une éolienne de pales de longueur $L = 60 \text{ m}$ est placée dans une zone où le vent, quand il est fort, a la puissance cinétique surfacique $\mathcal{P}_{\text{cin}}/S = 1500 \text{ W m}^{-2}$. Quelle est sa puissance maximale d'après la limite de Betz ?

Performances des éoliennes

On a déterminé le rendement maximal d'une éolienne, qui constitue la limite de Betz. Ce rendement reste théorique et ne peut être atteint avec les éoliennes réelles.

14. Proposer des raisons pour lesquelles le rendement réel C_p d'une éolienne n'atteint pas C_{Betz} .
15. Afin de pouvoir comparer différents types d'éoliennes, on définit un nombre sans dimension λ appelé *paramètre de rapidité*, qui est le rapport entre la vitesse d'un point à l'extrémité d'une pale et la vitesse du vent. Exprimer λ avec les paramètres pertinents du problème.

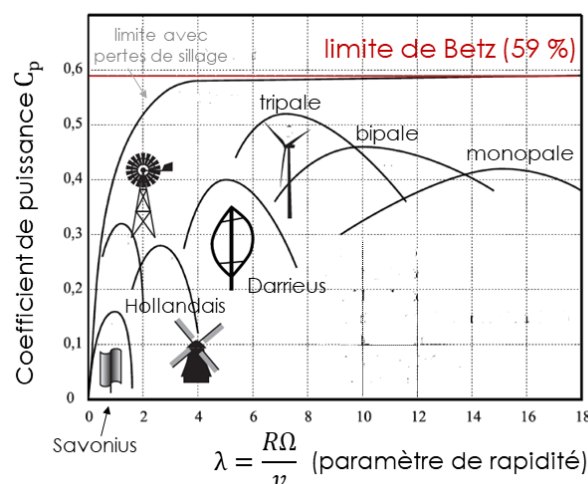


FIGURE 3.3 – Représentation des performances des différents types d'éoliennes. Adapté de Thomas W. Jr Murphy, *Energy and Human Ambitions on a Finite Planet*, UC San Diego (2021).

16. Le graphique 3.3 présente des rendements réels d'éoliennes, selon leur type, en particulier les éoliennes mono-bi- tri-pales, les moulins (américains et hollandais), le Savonius et le Darrieus qui sont des éoliennes à axe vertical. Quels commentaires peut-on faire ?