

Énergie-Climat-Société
- LU2PY125 -

3 ECTS

Travaux dirigés

2024-2025

Table des matières

1	Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.	3
1.1	Ressources non renouvelables. Pic de Hubbert	3
1.2	Recyclage de l'aluminium	5
1.3	Ordres de grandeur sur les émissions de CO ₂	7
2	Consommation automobile et économies d'énergie	11
3	L'énergie éolienne	17
3.1	Introduction	17
3.2	Rendement d'une éolienne – Limite de Betz	18

À venir : TD n°4 (Énergies hydraulique et solaire) et TD n°5-6-7 (Climat)

TD n° 1

Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.

Objectifs

- Révision de notions mathématiques et mécaniques
- Se familiariser avec différentes unités d'énergie et de puissance
- Se familiariser avec une approche par ordre de grandeur. S'approprier quelques chiffres clefs.

Données

- Masses molaires :

Molécule/Atome	C	O	Al	CO ₂	« air » (moyenne)
Masse molaire (g/mol)	12	16	27	44	29

- 1 ppm (ou ppmv) signifie une partie par million : 1 ppm de CO₂ signifie que sur un million de molécules prises dans un volume d'air, l'une d'elles est une molécule de CO₂.
- $P_{atm} = 10^5$ Pa et $R_{Terre} \simeq 6400$ km

1.1 Ressources non renouvelables. Pic de Hubbert

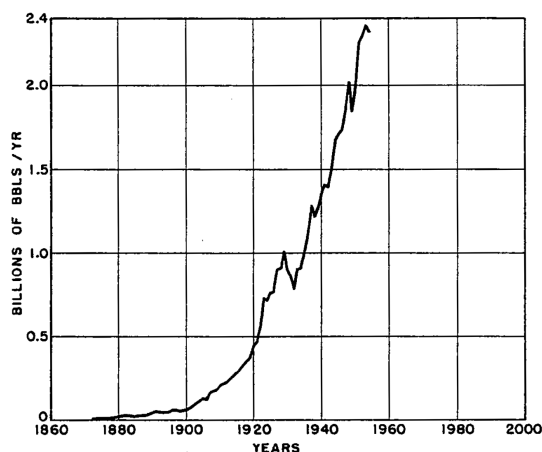


Figure 5 – United States production of crude oil.

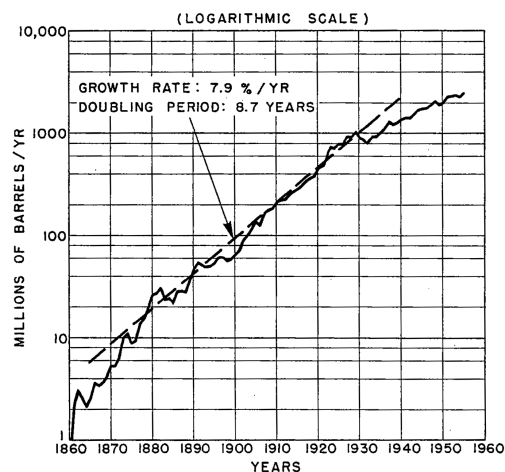


Figure 10 – Crude-oil production in the United States plotted on semilogarithmic scale.

FIGURE 1.1 – Production de pétrole annuelle P en échelles linéaire et logarithmique (source : Hubbert, 1956).

Dans les années 1950, le géophysicien M. K. Hubbert (Shell Company) a proposé un modèle mathématique appliqué à l'épuisement des ressources en énergies fossiles, et a ainsi prédit l'existence d'un pic de production de pétrole aux États-Unis situé vers 1970 et suivi d'un déclin. La quantité cumulée $Q(t)$ est le stock de pétrole extrait depuis le début des forages (exprimée en milliards de barils ou Gbl, 1 bl = 159 L). La production annuelle (unité : Gbl/yr) est la quantité de pétrole extraite en une année : $P(t) = dQ/dt$. On a donc $Q(t) = \int_0^t P(t') dt'$.

1. Expliciter les limites mathématiques que doit vérifier $P(t)$ et en déduire une proposition simple pour l'allure de la fonction $P(t)$. Quelle sera l'allure correspondante de $Q(t)$?

Correction

$P = 0$, à $t = 0$ et à $t = \infty$ lorsque le gisement est épuisé. La courbe la plus simple à envisager est donc une courbe croissante, qui atteint un maximum, et décroît à 0. $Q(t)$ est l'intégrale de l'aire sous la cloche et présente une allure croissante de 0 à une valeur asymptotique $Q_{t=\infty} = Q_{total}$.

2. On observe sur la figure 1.1 que la courbe de production a initialement une allure exponentielle : $P(t) \propto e^{rt}$. Montrer que cela implique $P(t) \propto Q(t)$ (dans ce régime initial).

Correction

$P = dQ/dt$, avec $P_{initial} = Ce^{rt}$, s'intègre en $Q_{initial}(t) = (C/r)e^{rt}$ donc $P_{initial}(t) \propto Q_{initial}(t)$. Explication : une fois les premiers gisements découverts, la demande croît exponentiellement, et la production (non contrainte) suit cette demande (ce qui n'est pas toujours le cas, la production peut aussi obéir à des considérations géopolitiques).

3. Il faut aussi rendre compte de ce que les gisements les plus accessibles ont été exploités en premier. De ce fait, l'extraction du pétrole devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que la quantité de pétrole disponible $Q_{total} - Q(t)$ s'épuise (on appelle Q_{total} la quantité totale de pétrole récupérée après épuisement du gisement). On peut le décrire simplement dans $P(t)$ par un facteur $\propto 1 - \frac{Q(t)}{Q_{total}}$ et finalement, Hubbert propose la forme suivante :

$$P(t) = \frac{dQ}{dt} = r Q \left(1 - \frac{Q}{Q_{total}} \right) \quad (1.1)$$

où r est un coefficient positif (unité : yr^{-1}).

En posant $y = Q/Q_{total}$, montrer que l'équation (1) s'écrit : $P = r Q_{total} y(1 - y)$. Pour quelle valeur de y la production P atteint-elle son maximum ? En conclure que le pic de production t_{peak} est atteint lorsque la moitié des réserves a été exploitée. Donner l'expression de P_{peak} .

Correction

$0 < y < 1$. La fonction $f(y) = y(1 - y)$ est maximale pour $y = 1/2$, donc la production est maximale pour $Q_{\text{peak}} = Q_{total}/2$ et $P_{\text{peak}} = rQ_{total}/4$. Pour une ressource finie, la production diminue alors même qu'il reste encore la moitié du stock accessible !

4. Montrer que

$$Q(t) = \frac{Q_{total}}{1 + e^{-r(t-t_{\text{peak}})}} \quad (1.2)$$

est solution de l'équation (1). Tracer l'allure de $Q(t)$ et $P(t)$.

5. Application à la production de pétrole aux États-Unis¹. Les expressions analytiques de $P(t)$ et $Q(t)$ font intervenir 3 paramètres, r , Q_{total} et t_{peak} , qui peuvent être obtenus par un ajustement numérique de données réelles. Sur la figure 1.2 sont représentés : (en traits pleins) les données de la production annuelle $P(t)$ et du stock cumulé $Q(t)$ de pétrole aux États-Unis jusqu'en 2022 et, (en pointillés) les ajustements des données

Correction

L'allure de la courbe est très bien décrite par le modèle de Hubbert mais seulement jusqu'à 2010 environ. Ensuite, il faut prendre en compte le pétrole provenant de l'exploitation des schistes bitumineux ou extrait de sables bitumineux. On n'est donc plus dans l'hypothèse de gisements découverts à $t = 1900$, ou à intervalles réguliers. Il faut donc se méfier des prédictions de pic de production ou d'épuisement de

1. Données : [EIA \(Energy Information Administration\)](#)

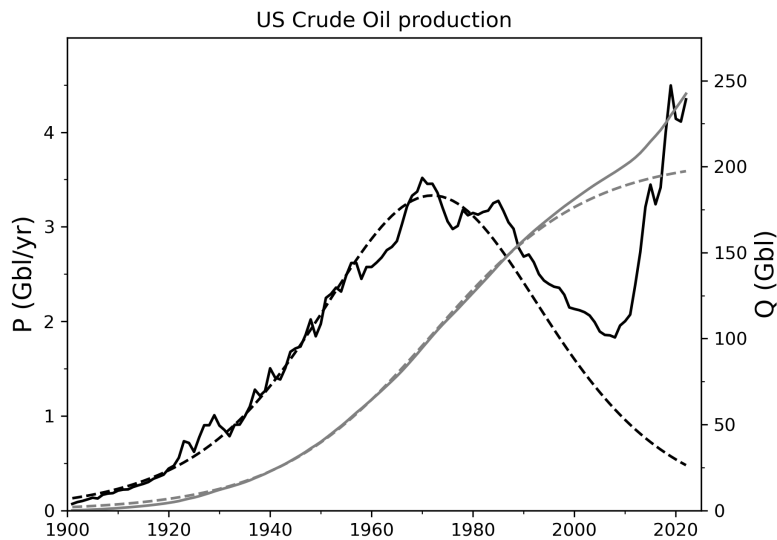


FIGURE 1.2 – En traits pleins : production annuelle (Gbl/yr, en noir) et cumulée Q (Gbl, en gris) aux États-Unis entre 1900-2022. En pointillés : modèle obtenu avec les paramètres $r = 0,065 \text{ yr}^{-1}$, $Q_{\text{total}} = 205 \text{ Gbl}$ et $t_{\text{peak}} = 1972$.

ressources, globalement les ressources s'épuisent mais pas toujours aussi vite qu'anticipé (et notamment attention au discours "de toute façon il n'y aura bientôt plus de pétrole" : il en reste assez pour nous faire dépasser largement les +2 degrés).

6. On revient plus en détail sur la démarche de Hubbert en exploitant les données d'une autre manière.

(a) Montrer que P/Q suit une loi linéaire avec Q .

Correction

On réécrit simplement l'équation (1) : $P/Q = r(1 - Q/Q_{\text{total}})$.

(b) Le graphe P/Q en fonction de Q est donné en figure 1.3. Commenter la pertinence du modèle et estimer r et Q_{total} .

Correction

La loi linéaire annoncée est vérifiée. On lit sur le graphe l'interception à $Q = 0$: $r = 0,065 \text{ yr}^{-1}$ et à $P/Q = 0$: $Q_{\text{total}} = 205 \text{ Gbl}$ (en gros). Pourquoi les points à $t \lesssim 1930$ ne suivent-ils pas le modèle ? Parce que $Q(t)$ – égale à l'intégrale de P – est calculée en sommant les valeurs annuelles de P depuis 1900, ce qui est une approximation grossière sur un intervalle de temps de quelques années.

(c) En déduire une estimation de Q_{peak} et P_{peak} .

Correction

$Q_{\text{peak}} = 102,5$, et $P_{\text{peak}} = rQ_{\text{total}}/4 = 3,3$.

1.2 Recyclage de l'aluminium

7. L'aluminium est un métal très polluant à produire à partir de la bauxite mais fait partie des métaux qui se recyclent le mieux. On considère une canette produite en 2023 qui serait continuellement recyclée par la suite. En supposant une efficacité de recyclage de $\sim 95 \%$, un taux de collecte de $\sim 75 \%$, et une durée de cycle de 40 jours (de la poubelle jaune au retour sur le marché), calculer la part initiale d'aluminium encore sur le circuit 1 an plus tard et 10 ans plus tard.

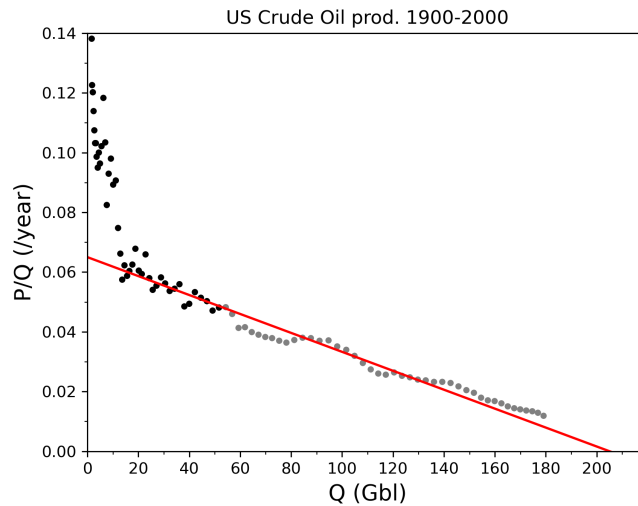


FIGURE 1.3 – Tracé de P/Q en fonction de Q pour les États-Unis. En noir : données de 1900 à 1956 utilisées par Hubbert. L'ajustement linéaire (en rouge) est réalisé sur la période 1930-1990.

Correction

Dans 1 année, il y a $365/40 \sim 9$ cycles (et ~ 90 cycles sur 10 ans). Le taux effectif du recyclage à chaque cycle est $0.95 \times 0.75 \% = 71 \%$. La part initiale d'aluminium encore présente 1 an plus tard est donc $0.71^9 = 0.046$ (moins de 5 %) et $0.71^{90} = 4 \cdot 10^{-14}$ (quatre millièmes de milliardième de pourcent) 10 ans plus tard ...

Remarques : le seul levier technique est l'augmentation du taux de collecte (le taux de recyclage est déjà proche de 100 % et le taux d'incorporation dans le produit recyclé est de 95 % pour la canette d'aluminium). Le levier sociétal est de ne pas utiliser d'aluminium pour des usages aussi temporaires que des emballages. Evidemment, il ne s'agit pas de remplacer l'aluminium par du plastique ; c'est la question générale de l'emballage jetable qui se pose. Heureusement, il existe d'autres usages aux durées de vie plus longues : l'industrie aime mettre en avant que 3/4 de l'aluminium produit depuis le XIX^e siècle serait encore en circulation (donnée non sourcée).

8. **Question complémentaire** : au bout de combien de temps une quantité initiale d'une mole (correspondant à la masse de 2 canettes) se réduit-elle à un seul atome encore présent ?

Correction

On cherche $(\text{taux})^{n_{\text{cycles}}} = 1/N_A \sim 1.67 \cdot 10^{-24}$, d'où $n_{\text{cycles}} = \frac{\ln(1.67 \cdot 10^{-24})}{\ln(0.71)} = 161$. La durée correspondante est donc $161 \times 40 \text{ jours} = 6460 \text{ jours} \sim 18 \text{ ans}$.

9. Supposons que chaque personne sur Terre consomme une canette d'aluminium de 13 g par jour. Quelle masse d'aluminium faudrait-il alors extraire chaque année pour compenser les pertes du circuit de recyclage ? Comparer cette valeur à la production mondiale d'aluminium (64 Mt en 2018) et aux réserves mondiales de bauxite (entre 28 et 75 Gt, selon la façon dont elles sont définies et estimées - il faut 4 à 5 t de bauxite pour produire 1 t d'aluminium).

Correction

Chaque canette consommée donne lieu à 29 % de pertes = 3,8 g. Il faudrait donc introduire dans le circuit $3,8 \text{ g} \times$ le nombre de canettes consommées par an soit, pour une population humaine de 8 milliards, 11 Mt d'aluminium. C'est donc une portion significative de la production mondiale d'aluminium - mais sans doute surestimée car on ne consomme pas tous une canette par jour. Les réserves mondiales étant de l'ordre de 5-19 Gt d'aluminium, il n'y a pas de quoi les épuiser avec ce seul usage mais l'aluminium

en a évidemment beaucoup d'autres (câbles électriques, carrosserie, vélos, ...).

1.3 Ordres de grandeur sur les émissions de CO₂

10. Émissions et concentration de CO₂.

- (a) **Conversion.** Sachant que la force de pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface terrestre est égale au poids de l'atmosphère, calculer la masse totale de l'atmosphère. En déduire la masse de CO₂ correspondant à 1 ppm de la masse de l'atmosphère.

Correction

Calcul de la masse d'air sur Terre : la pression atmosphérique correspond à F/S avec $F = m_{air}g$ et $S = 4\pi R_{Terre}^2$ d'où $m_{air} = (P_{atm} \times 4\pi R_{Terre}^2)/g = 10^5 \times 4\pi \times (6380 \times 10^3)^2/10 = 5.1 \times 10^{18}$ kg. Or $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = \frac{n_{CO_2}}{n_{air}} = \frac{m_{CO_2}}{m_{air}} \frac{M_{air}}{M_{CO_2}}$ d'où $10^{-6} = m_{CO_2}/(5.1 \times 10^{18}) \times 29/44 = 0.129 \times 10^{-6} m_{CO_2}$ (exprimée en Gt), d'où $1 \text{ ppm} \leftrightarrow 7.7 \text{ GtCO}_2$.

- (b) **Cumul historique.** En 1870, la concentration de CO₂ atmosphérique était de 280 ppm. Un article² évalue les émissions dues aux activités humaines, cumulées sur la période 1870-2013, à (535 ± 55) Gt d'atomes de carbone. Sachant que seule la moitié des émissions de CO₂ reste dans l'atmosphère, l'autre moitié étant absorbée par les océans et les sols, en déduire la concentration atmosphérique de CO₂ en 2013.

Correction

$535 \pm 55 \text{ GtC} \leftrightarrow 44/12 \times (535 \pm 55) = 1962 \pm 202 \text{ GtCO}_2$, soit une contribution de 255 ± 26 ppm. La moitié environ a été absorbée par les océans (30 %) et les sols (20 %) (mentionné pendant le CM1), laissant dans l'atmosphère $\sim 255/2 = 127$ ppm. On en déduit $[\text{CO}_2]_{2013} = 280 + 127 = 407$ ppm (vraie valeur : 400 ppm).

- (c) **Exercice complémentaire : énergies fossiles et émissions de CO₂.** On décompose ci-dessous les étapes d'une démarche pour aboutir à l'ordre de grandeur des émissions de CO₂ liées au transport individuel (en voiture).

- i. Proposer un ordre de grandeur du nombre moyen de km effectués quotidiennement puis annuellement par un automobiliste.

Correction

30 km/jour soit 10 000 km par an.

- ii. La consommation moyenne d'une voiture dans le Monde étant de 7 litres d'essence pour 100 km parcourus (source : Agence Internationale de l'Énergie), estimer la consommation typique, en litres d'essence, associée à ce trajet annuel (pour une personne).

Correction

Avec une voiture consommant 7L/100 km, cela représentera 700 litres par an.

- iii. Compte tenu que la combustion d'un litre d'essence émet 0,75 kg de carbone, évaluer les émissions de carbone puis de CO₂ liées au transport individuel, en tonnes par personne et par an. Que vous inspire la valeur obtenue ?

Correction

$700 \times 0,75 \text{ kg C} = 0,525 \text{ t C}$, et 44/12 fois plus de CO₂, soit 1,9 t CO₂ par personne et par an. C'est très comparable à l'objectif fixé par la France pour les émissions totales d'un individu en 2050 ...

- iv. Proposer un ordre de grandeur du nombre d'automobilistes dans le Monde et en déduire les émissions de CO₂ liées au transport individuel pour l'ensemble du Monde.

2. Quéré et al., *Earth Syst. Sci. Data*, **6**, 235 (2014)

Correction

Entre 1 et 2 milliard d'automobilistes, soit 2 à 4 Gt CO₂.

- v. Sachant que le transport individuel représente ~ 50 % des émissions du secteur du transport et que ce secteur représente lui-même environ 20 % du total des émissions, vérifier la cohérence de votre calcul précédent.

Correction

Le transport individuel représente 50 % de 20 %, soit 10 % du total des émissions. D'après notre estimation précédente, le total se situe entre 20 et 40 Gt CO₂, ce qui est à peu près le cas.

Sources :

- les transports représentent 20 % des émissions mondiales de CO₂ [Source : [OurWorldinData](#), qui renvoie vers la base de données [Climate Watch | Data Explorer](#). En 2020 : 35 Gt CO₂ tous secteurs confondus ; 7 Gt CO₂ pour le transport]. Rq : en France, la part du transport est 30 % [Source : [Ministère](#)];
- la part des déplacements individuels sur route dans les transports est 45 % [Source : [OurWorldinData](#), qui renvoie vers IEA + ICCT].

11. Travail humain / énergies fossiles

- (a) On cherche une estimation de la puissance mécanique qu'un humain peut fournir en une journée de (dur) travail. On considérera par exemple une ascension régulière correspondant à un dénivelé de 1700 m, effectuée en 10h par une personne de 74 kg et portant un bagage de 10 kg. Exprimer l'énergie mécanique fournie en MJ ainsi que la puissance correspondante.

Correction

$$E = mgh = 84 \times 9.81 \times 1700 \sim 1.4 \text{ MJ d'où } P = 40 \text{ W.}$$

(74 kg est la masse moyenne d'un individu de la population française)

Cette puissance est bien du même ordre que celle fournie par notre alimentation - de l'ordre de 100 W correspondant aux besoins physiologiques de base, une personne qui fournit quotidiennement un effort physique intense doit s'alimenter davantage.

La puissance que nous consommons, avec notre mode de vie actuel, est beaucoup plus élevée. Même en considérant que les procédés impliquant le travail humain ont un meilleur rendement que les procédés industriels, nous ne pourrions pas soutenir notre niveau de vie actuel uniquement par le travail manuel. Autrement dit, l'équivalent de 50 personnes "travaillent" pour nous par le biais de l'énergie principalement fossile que nous consommons.

Remarques enseignants

Ce sont les "esclaves énergétiques" dont parlent Jancovici et d'autres (R. Buckminster Fuller), mais peut-être éviter ce terme : 1) c'est un peu "abrupt" et chargé de connotations, 2) ça suggère que notre mode de vie actuel serait soutenable sans énergies fossiles à condition d'avoir 50 esclaves chacun : peut-être mais il faudrait encore trouver l'énergie pour les nourrir, et le calcul ne convergerait pas puisqu'il n'inclut pas la source d'énergie de base qui ferait fonctionner tout ça, notamment le soleil nécessaire à l'agriculture.

- (b) **Question complémentaire** : On peut, de manière alternative, estimer la puissance mécanique fournie par une personne ayant excavé de la terre pendant 10 h, en faisant un trou d'une surface de 20 m² sur une hauteur de 1 m. Exprimer l'énergie mécanique mise en jeu en MJ puis en Wh ainsi que la puissance correspondante (on donne $\rho_{\text{terre}} \sim 5,5 \text{ g/cm}^3$).

Correction

$$E = mgh = \rho Vgh = 5500 \times 20 \times 9.8 \times 1 \sim 1,1 \text{ MJ} \sim 300 \text{ Wh d'où } P_{\text{bras}} = (300 \text{ Wh})/(10\text{h}) = 30 \text{ W (on suppose que l'énergie à fournir est celle nécessaire pour soulever la terre de 1 m, il y en a peut-être davantage si le sol est très dur).}$$

- (c) La combustion d'un litre d'essence génère environ 10 kWh de chaleur, qui est utilisée par un moteur automobile avec un rendement de l'ordre de 25 %. Comparer l'énergie fournie par un litre d'essence à celle fournie par une journée de travail humain.

Correction

$0,25 \times 10^4 \times 3600 / (1,4 \times 10^6) \approx 6$. Le litre d'essence contient ainsi environ 6 journées de travail humain.

- (d) **Question complémentaire** Le cheval-vapeur (ch) est une unité de puissance introduite lors de l'apparition des machines à vapeur, afin d'exprimer leur puissance par rapport à celle fournie par un cheval. Il est défini comme la puissance à fournir pour élever une masse de 75 kg sur une hauteur de 1 mètre en 1 seconde. Calculer la valeur de 1 ch dans l'unité SI.

Correction

$P = mgv = 75 \times 9.8 \times 1 = 735 \text{ W}$. Remarque : le cheval-vapeur n'est pas la même chose que le "cheval-fiscal" par lequel on caractérise la puissance des moteurs automobiles. Par exemple, un moteur 4 CV de Twingo fournit 90 ch.

12. **Exercice complémentaire : Feux de forêts.** Lors de l'été 2023, les incendies au Canada ont brûlé près de 18,5 millions d'hectares de forêt ([wikipedia, chiffre au 06/10/2023](#)). Estimer la masse de carbone émise dans l'atmosphère par cette combustion (on considérera que le carbone représente la moitié de la masse totale du bois). La comparer aux émissions de gaz à effet de serre du Canada et aux émissions annuelles mondiales :

- Canada (en 2021) : émissions territoriales annuelles (hors émissions induites par les importations) : 550 Mt CO₂-eq, empreinte totale annuelle (incluant les importations) : 670 Mt CO₂-eq (soit 17,5 t CO₂-eq par habitant),
- Monde (actuellement) : émissions annuelles : ~ 50 Gt CO₂-eq (dont 40 Gt de CO₂), soit ~ 6 t CO₂-eq par habitant.

Correction

1 ha = 100 m × 100 m = 10 000 m². En attribuant une surface de ~ 10 m² par arbre, on aboutit à une densité de 1000 arbres/ha (ce qui correspond bien à une forêt de sapins *basse densité*). En supposant que chaque arbre correspond à ~ 50 kg de bois (valeur assez faible pour tenir compte de l'hétérogénéité de la biomasse sur l'ensemble de la surface brûlée), on obtient une masse totale de bois brûlé $M = 18,5 \times 10^6 \text{ ha} \times 1000 \text{ arbres/ha} \times 50 \text{ kg} = 9,25 \times 10^{11} \text{ kg} = 9,25 \times 10^8 \text{ tonnes de bois}$. Compte-tenu que 1 tonne de bois ~ 0,5 tonne carbone, les émissions carbone dues aux incendies représentent $4,6 \times 10^8 \text{ tC}$. Cela correspond bien aux valeurs que l'on peut trouver dans la littérature (480 Mt C, d'après l'institut [Copernicus](#), 570-727 Mt C selon une [étude récente \(Nature, 2024\)](#)).

On convertit en émissions CO₂ : le rapport des masses molaires étant $M_{\text{CO}_2}/M_{\text{C}} = (12 + 2 \times 16)/12 = 44/12 = 3.67$, on obtient une émission totale de CO₂ due aux incendies $3,67 \times 0,46 \times 10^9 \sim 1,7 \text{ Gt CO}_2$.

C'est du même ordre de grandeur (et même trois fois plus élevé) que les émissions territoriales annuelles du Canada, et pas du tout négligeable par rapport aux émissions mondiales !

Remarques :

- justification des 50 kg de bois (25 kg de carbone) par arbre : un *gros* arbre, c'est 500 kg de carbone, alors qu'un acacia (2 mètres de hauteur avec un tronc de 5 centimètres), c'est ~ 0,2 kg (il y a beaucoup d'eau dedans). On prend la moyenne entre 1 et 500 kg et on tient compte que 10 à 15 % seulement de la biomasse aérienne d'une forêt brûle,
- les hautes latitudes connaissent le réchauffement le plus fort (vu en cours), c'est une des raisons pour lesquelles le Canada est très touché par ces incendies,
- l'impact net des incendies de forêts sur le climat n'est pas simple. Généralement cet impact est considéré comme nul, la reconstitution ultérieure de la biomasse captant, par photosynthèse, le carbone libéré lors de la combustion. En fait cela dépend de la nature de la végétation qui a brûlée, de ce qui repoussera à la place et du temps de cette repousse. Il faut aussi considérer l'impact sur le carbone stocké dans les sols (notamment dans le cas des forêts boréales et des tourbières). Dans le cas des mégafeux de 2019-2020, en Australie, la végétation aurait déjà plus que récupérée, grâce à des pluies abondantes ([source: INRAE](#)). Dans le cas des forêts boréales, d'un côté le remplacement des conifères par des feuillus à la repousse tend à augmenter la captation ([Science 2021](#)), d'un autre côté les temps de repousse sont longs (plusieurs décennies). Le bilan (carbone) dépendra de la récurrence et de l'intensité des sécheresses et des feux sur cette période de reconstitution. Récurrence et intensité qui sont malheureusement en hausse : elles ont doublé en vingt ans ([Nature Ecology & Evolution 2024](#)). En corollaire, l'impact sur la qualité de l'air est très négatif, avec l'émission de particules fines (notamment les PM_{2.5}) : celles-ci sont responsables de 50 000 morts sur la décennie 2008-2018 du fait des feux de forêts en Californie ([Science 2024](#)). En terme de biodiversité, les mégafeux de 2019-2020, en Australie ont tué environ 2,8 milliards de vertébrés et brûlé l'ensemble de l'aire de répartition géographique de 116 espèces végétales. À noter cependant que de façon plus générale, l'impact des incendies sur la biodiversité est contrasté et peut même être globalement positif ([The Conversation 2018](#)). Les premières études dédiées au bilan des incendies du Canada sont apparues récemment ([Nature, \(2024\)](#) et [Nature Communications, \(2024\)](#)),
- les émissions CO₂ du Canada sont énormes, à relier avec leur consommation énergétique très élevée (14,14 exajoules en 2022 [[World Statistical Review of Energy](#)], soit 103 MWh/hab, encore plus que les États-Unis) et très supérieures à celles de la France (empreinte carbone autour de 10 t CO₂-eq/hab. en 2022, valeur vue en cours, contre 17 pour le Canada),

Remarques enseignants

Exercices d'examen possibles en lien avec ce TD :

Ordres de grandeur de la vie quotidienne

Pic de Hubbert : exploitation d'autres données, sur d'autres matériaux etc

Recyclage, ressources : pour d'autres types de matériaux que l'aluminium

TD n° 2

Consommation automobile et économies d'énergie

Objectifs

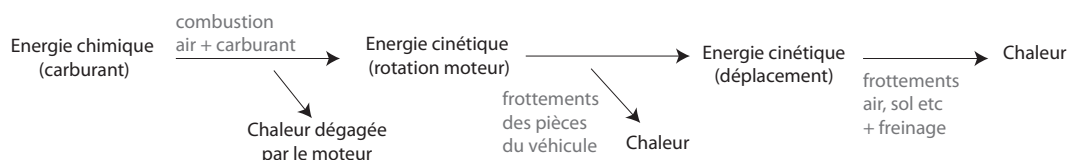
Le transport automobile est un exemple majeur de consommation d'énergie. Ce TD vise à

- identifier les transformations énergétiques impliquées dans le fonctionnement d'un véhicule,
- quantifier l'énergie mécanique à fournir par le moteur pour assurer un déplacement donné,
- chiffrer les économies d'énergie réalisables en jouant sur les paramètres pertinents (vitesse, masse etc),
- traduire ces données en termes d'émission de CO₂.

La façon dont le moteur produit cette énergie mécanique, son optimisation et sa décarbonation, sont naturellement des enjeux majeurs mais ne seront pas abordées dans ce TD.

1. De quelle nature est l'énergie fournie au moteur d'une voiture thermique ? Quelles sont les transformations énergétiques successives et les sources de pertes associées ?

Correction



Energie mécanique à fournir pour un déplacement : Une voiture de masse m effectue, sur terrain plat, un "déplacement" comprenant tout d'abord le démarrage, puis le mouvement sur une distance d à une vitesse v supposée constante, et enfin l'arrêt pour lequel on suppose qu'aucune énergie n'est à fournir. Afin de simplifier la discussion, on décrira cette voiture comme un objet ponctuel, subissant 3 forces : la force de traction du moteur \vec{F}_{mot} , la force de traînée (frottements de l'air) \vec{F}_{air} et la force de roulement \vec{F}_{roul} associée aux différents frottements solides entre les pièces de la voiture et entre les roues et le sol.

2. **Rappel :** un objet ponctuel se déplace d'un point A à un point B et subit un ensemble de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$. Exprimer la différence d'énergie mécanique $E_m(B) - E_m(A)$ en fonction du travail de ces forces.

Correction

$$E_m(B) - E_m(A) = \Sigma W_i = \Sigma \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

3. **Démarrage :** la voiture part d'une vitesse nulle et accélère jusqu'à une vitesse v . Quel est le travail (qui sera noté W_1) du moteur pendant cette phase d'accélération, supposant que durant cette phase $F_{mot} \gg F_{air}, F_{roul}$? Sur quels paramètres peut-on jouer pour le réduire ?

Correction

On roule sur terrain plat donc l'énergie potentielle reste constante (disons $E_p = 0$) si bien que $E_m = E_c$. La différence d'énergie mécanique entre le début et la fin de la phase d'accélération est donc $mv^2/2 - m0^2/2$. Si on néglige les autres forces, cette différence est égale au travail de la force de traction, si bien que $W_1 = mv^2/2$. Pour réduire le travail à fournir par le moteur à cette étape, on peut diminuer m ou v .

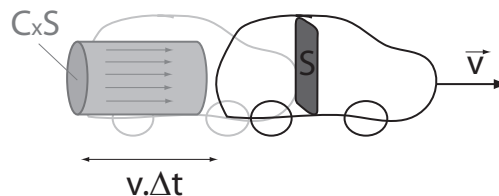
4. Pendant toute la suite du déplacement, la vitesse est supposée constante. Quelle est la relation entre W_{mot} , W_{air} et W_{roul} pendant cette période ?

Correction

L'énergie mécanique reste constante puisque v est constante. Il faut donc que $W_{mot} = -W_{air} - W_{roul}$, c'est-à-dire que le travail de traction du moteur compense le travail des deux forces de frottement.

Remarque : autrement dit, pour avoir v constante, d'après le principe fondamental de la dynamique, il faut que la somme des forces subies soit nulle et donc $\vec{F}_{mot} = -\vec{F}_{air} - \vec{F}_{roul}$.

5. **Frottements de l'air** : nous allons développer une modélisation de la force de traînée, extrêmement approximative mais qui aboutit à une expression correcte dans le régime d'écoulement considéré. Admettons que, sous l'effet du passage de la voiture, un tube d'air derrière elle est mis en mouvement à la vitesse v . Pour rendre compte du caractère plus ou moins aérodynamique du véhicule, on introduit un coefficient de traînée C_x (sans dimension) : la section du tube d'air mis en mouvement est supposée égale à $C_x S$, où S est l'aire de la section de la voiture.



Exprimer le volume \mathcal{V} du tube d'air traversé pendant un déplacement de longueur d , puis sa masse (on note ρ_a la masse volumique de l'air). En déduire le travail W_{air} , supposant que c'est l'opposé de l'énergie cinétique reçue par le tube d'air.

Correction

Le tube d'air traversé est de volume $\mathcal{V} = C_x S \times d$ et de masse $\rho_a \mathcal{V} = \rho_a C_x S d$.

Ce tube d'air, initialement immobile, a gagné la vitesse v et donc l'énergie cinétique $\rho_a \mathcal{V} v^2 / 2$. Le travail de la force de traînée (énergie - négative - reçue par la voiture de la part de l'air) est supposé l'opposé de l'énergie gagnée par l'air sous l'effet de la voiture : on a donc

$$W_{air} = -\frac{1}{2} \rho_a C_x S d v^2$$

6. En déduire le travail $W_2 = -W_{air}$ que le moteur doit fournir pour compenser la force de traînée. Comment le réduire ? Montrer que l'on peut définir une "distance critique" d_c telle que $W_2/W_1 = d/d_c$.

Correction

Le moteur doit donc fournir le travail (positif) $W_2 = S \rho_a C_x v^2 d$ pour compenser ces pertes. On peut réduire ce travail en baissant v ou C_x principalement ; on peut aussi baisser S mais en général cette surface est déjà assez minimale. Par contre on ne peut pas jouer sur d (sauf si on décide qu'on va moins loin mais ce n'est pas l'objet de la discussion) ni ρ_a (il faudrait pour ça voyager dans un tunnel sous vide !).

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\rho_a S C_x v^2 d}{m_v v^2}$$

Le rapport W_2/W_1 est indépendant de v parce que les deux quantités W_1 et W_2 sont en v^2 . Ce rapport peut se réécrire

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{d}{d_c}$$

en introduisant

$$d_c = m_v / (\rho_a S C_x)$$

7. Calculer d_c pour $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $m = 1,4 \text{ t}$, $C_x = 0,33$ et $S = 2,7 \text{ m}^2$ (valeurs typiques pour une voiture). Qu'en conclure ?

Correction

On calcule $d_c = 1,3 \text{ km}$. Pour les déplacements plus courts (typiquement : en ville), la dépense d'énergie correspond principalement à mettre en mouvement le véhicule (W_1). Pour les déplacements plus longs, il s'agit surtout de vaincre les frottements de l'air (W_2).

8. **Force de roulement** : il faut aussi prendre en compte, malgré une contribution plus faible, la résistance au roulement qui intègre le frottement de la gomme des pneus sur la route, la dissipation de l'énergie par les suspensions de la voiture, etc. Le modèle le plus simple pour l'évaluation de ces pertes fait l'hypothèse que la résistance est simplement de la forme μmg , où μ est un coefficient de l'ordre de 0,01.

Exprimer le travail W_{roul} de la résistance au roulement pendant le déplacement et le travail $W_3 = -W_{roul}$ que le moteur doit fournir pour compenser cette force. Comment le diminuer ?

Correction

$W_{roul} = -\mu mg \times D$ et donc $W_3 = \mu mg D$.

C'est principalement en diminuant la masse de la voiture que l'on peut baisser W_3 , si on admet que la mécanique de la voiture est déjà suffisamment optimisée pour que μ ne puisse pas être diminué davantage.

Applications numériques : Nous allons considérer deux "trajets" typiques :

- (1) "sur autoroute" : un unique "déplacement" de 100 km effectué à vitesse constante ;
- (2) "en ville" : une succession de 10 "déplacements" de 500 m (i.e. on parcourt 5 km en s'arrêtant 9 fois à cause des feux, carrefours etc).

et 5 jeux de paramètres :

- (a) "conditions normales" : $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $m = 1,4 \text{ t}$, $C_x = 0,33$ et $S = 2,7 \text{ m}^2$; $v = 130 \text{ km/h}$ sur autoroute et 50 km/h en ville,
- (b) conditions normales sauf pour la vitesse : $v = 110 \text{ km/h}$ sur autoroute et 35 km/h en ville ;
- (c) conditions normales sauf pour la masse ¹ : $m = 1 \text{ t}$;
- (d) conditions normales sauf pour le coefficient de traînée ² : $C_x = 0,25$;
- (e) "conditions optimisées" : $m = 1 \text{ t}$, $C_x = 0,25$ et $S = 2,7 \text{ m}^2$; $v = 110 \text{ km/h}$ sur autoroute et 35 km/h en ville.

8. Calculer l'énergie totale \mathcal{E} à fournir pour les 2 types de trajet dans chacune des 5 conditions.

1. La masse à vide d'une voiture vendue en France est actuellement en moyenne de 1,25 t, alors qu'elle n'était que de 0,9-1,05 t en 1990. En France, un malus s'applique actuellement aux véhicules de plus de 1,6 t à vide.

2. On peut trouver un copieux tableau de valeurs de C_x dans l'article [Automobile drag coefficient](#) de Wikipedia. $C_x = 0,25$ est le coefficient de la Toyota Prius, par exemple. Globalement les véhicules commercialisés les plus efficaces descendent à 0,19-0,20, ce sont des modèles de luxe assez récents.

9. Supposant que le véhicule possède un moteur à essence, calculer sa consommation pour chacun des 10 cas ci-dessus. La teneur énergétique de l'essence est d'environ 10 kWh/litre. Le rendement du moteur essence³ est de l'ordre de 35 % au maximum (sur autoroute) et 15 % en ville (utilisations fréquentes mais courtes).

Correction

Remarques enseignants

Le calcul est fastidieux si on veut couvrir les 10 cas. En séance de TD, on pourra se répartir le travail entre les différent.es étudiant.es.

Trajet sur autoroute :

Conditions	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
W_1 (MJ)	0,9	0,7	0,7	0,9	0,6
W_2 (MJ)	139	100	139	106	76
W_3 (MJ)	14	14	10	14	10
\mathcal{E} (MJ)	154	114	150	120	86
essence (L)	12,2	9,1	11,9	9,5	6,8

On vérifie à chaque fois que W_1 et W_3 ne dépendent pas de C_x , que W_2 ne dépend pas de m etc. C'est le travail W_2 qui domine, ce qu'on pouvait anticiper puisque $d_c \ll 100$ km. Les ordres de grandeur de consommation d'essence pour 100 km sont raisonnables, quoiqu'un peu élevés : la consommation moyenne des voitures à essence en France est actuellement de l'ordre de 7 L/100 km.. On voit que la consommation d'essence peut être réduite de presque 50 % dans les conditions optimisées.

Trajet en ville :

Conditions	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
W_1 (kJ)	135	66	96	135	47
W_2 (kJ)	103	50	103	78	38
W_3 (kJ)	69	69	49	69	49
\mathcal{E} (MJ)	3,07	1,85	2,48	2,82	1,34
essence (L)	0,57	0,34	0,46	0,52	0,25

Il faut bien noter qu'ici \mathcal{E} est donnée par $10 \times (W_1 + W_2 + W_3)$ où W_2 et W_3 sont calculés pour $d = 500$ m. Comme $d < d_c$, on a bien $W_2 < W_1$. Par contre, comme d n'est pas négligeable par rapport à d_c , W_2 n'est pas négligeable par rapport à W_1 .

Empreinte carbone :

10. En posant des ordres de grandeur raisonnables sur le nombre de trajets "en ville" et "sur autoroute", estimer la consommation d'essence par personne et par an dans chacune des conditions (a) à (e).

Correction

En posant 4 trajets "en ville" par jour et 2000 km de trajet "sur autoroute" par an, on est sûrement assez proche de la vérité puisque (cf données sur le site Datalab du Ministère de la transition écologique)

- les "trajets longs" (> 100 km) étaient en moyenne de 5000 km par personne de plus de 15 ans en 2016, dont 40 % du kilométrage en voiture (et 43 % en avion, 13 % en train) et
- en 2019, 9300 km ont été parcourus en voiture au total par personne.

On trouve alors (a) 1074 L, (b) 682 L, (c) 908 L, (d) 953 L et (e) 498 L d'essence.

3. On rappelle que le rendement maximum théorique d'un cycle moteur idéal vaut : $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ avec T_f la température de la source froide et T_c la température de la source chaude.

On voit en faisant le détail du calcul que ce sont les trajets courts qui contribuent le plus, d'où l'importance de développer des alternatives sans voiture à ces déplacements.

Remarques :

On peut noter que la distance médiane domicile-travail était de 12,5 km en milieu rural et 6,1 km en milieu urbain en 2019, alors qu'elle était resp. de 8,1 et 4,8 km en 1999 : l'amélioration du rendement des moteurs est peut-être une cause de cette augmentation (effet rebond : on peut habiter plus loin de son travail si le coût du trajet baisse), mais les difficultés du marché du travail en sont sans doute un autre très important.

L'hypothèse que les 2000 km de trajets longs sont parcourus sur autoroute est sans doute un peu forte, une large partie est sans doute parcourue sur routes nationales, etc. à vitesse nettement plus faible.

À 1,9 euros/L d'essence, le budget par personne serait de 1000 à 2000 euros/an, ce qui est beaucoup par rapport à la dépense moyenne d'un foyer périurbain de 1400 euros/an.

11. On donne 1 litre d'essence \leftrightarrow 0,75 kgC. En déduire une estimation des émissions de gaz à effet de serre annuelles d'un automobiliste dans chacune des conditions (a) à (e).

Correction

Attention, la masse de carbone n'est pas la masse de CO₂ ! (cf TD 1) On calcule donc 1 litre d'essence \leftrightarrow 2,75 kgCO₂.

On trouve (a) 2,9 / (b) 1,9 / (c) 2,5 / (d) 2,6 / (e) 1,4 tCO₂e, ce qui est un peu élevé mais un assez bon ordre de grandeur.

12. Quelle baisse des émissions peut-on attendre en passant des conditions "normales" aux conditions "optimisées" ? Cette baisse est-elle significative ?

Correction

On peut réduire les émissions de moitié, soit éviter 1,5 tCO₂e, ce qui n'est pas du tout négligeable par rapport à l'empreinte totale d'une personne, qui était de 9 tCO₂e par personne en France en 2019.

13. Notre automobiliste achète maintenant une voiture électrique. En restant dans les conditions (e)⁴, sachant que l'énergie stockée dans une batterie de voiture est restituée avec environ 15 % de pertes, et qu'en France le facteur d'émission de la production électrique est de 75 gCO₂e/kWh, quelle est maintenant son empreinte carbone annuelle ?

Correction

Dans les conditions (e), sur une année, il faut fournir 3700 MJ d'énergie mécanique, ce qui nécessite d'avoir emmagasiné $3700/0,85 = 4300$ MJ = 1200 kWh d'énergie électrique. Ceci représente une empreinte carbone à l'usage de 90 kgCO₂e par an, ce qui est très négligeable par rapport à l'empreinte carbone d'une voiture à essence.

14. Il faut aussi prendre en compte l'énergie grise associée à la fabrication du véhicule⁵. Elle est de l'ordre de 8 tCO₂e pour une voiture à essence mais monte à 14 tCO₂e pour une voiture électrique à cause de la production des batteries. Au bout de combien de temps le choix d'une voiture électrique est-il avantageux du point de vue des émissions carbone ?

4. ceci afin de ne pas avoir à refaire de nouveaux calculs. En fait, pour bien faire, il faudrait prendre en compte que les voitures électriques sont plus lourdes à cause des batteries - c'est même un élément très limitant dans la conception de ces véhicules. Par exemple, le poids à vide de la Renault Zoé est de 1470 kg. Il existe de nombreux véhicules électriques beaucoup plus lourds car plus spacieux et haut de gamme - leur intérêt environnemental est plus limité car leur fabrication consomme davantage de ressources.

5. Les données utilisées ici sont issues de l'analyse du cabinet Carbone 4 (<https://www.carbone4.com/analyse-faq-voiture-electrique>) dans laquelle on peut aussi trouver des éléments de discussion sur les besoins en matières premières des batteries, l'impact environnemental et social de l'extraction, les véhicules hybrides etc.

Correction

Les 6 tCO₂e supplémentaires de la voiture électrique correspondent à environ 4 ans de l'empreinte carbone d'une voiture à essence, c'est-à-dire que le choix d'une voiture électrique est amorti au bout de 4 ans (d'un point de vue *impact en gaz à effet de serre*).

Conclusion : les calculs de ce TD donnent des valeurs assez réalistes de la consommation énergétique d'une voiture à essence (et pour une diesel les valeurs seraient proches). On voit que des baisses d'émissions significatives peuvent être réalisées sans développements technologiques nouveaux - de l'ordre d'une moitié pour les changements décrits ici, ce qui est important mais pas suffisant par rapport aux objectifs de la transition écologique. Quels moyens proposer pour aller au-delà ?

Pour s'entraîner :

Transports en commun : Un autocar de 2,5 m de largeur et 3,2 m de hauteur, de masse $m_{car,vide} = 12$ t, supposé de coefficient de traînée $C_{x,car} \simeq 1$ (son aérodynamisme est beaucoup moins bon que celui d'une voiture), transporte N passagers. Comparer l'énergie consommée \mathcal{E}_{car} avec l'énergie $N \times \mathcal{E}_{voit.}$ qui serait consommée si chaque passager roulait seul en voiture à la même vitesse (on prendra $m_{voit.,vide} = 1,2$ t). Pour simplifier, on traitera uniquement les deux cas limites $\mathcal{E} \simeq W_1$ et $\mathcal{E} \simeq W_2$. Dans chaque cas, à partir de quel nombre de passagers le car devient-il plus rentable, en termes d'empreinte carbone, que la voiture individuelle ?

Correction

Premier cas ($\mathcal{E} \simeq W_1$) :

$$\frac{\mathcal{E}_{car}}{N \times \mathcal{E}_{voit.}} = \frac{W_{1,car}}{N \times W_{1,voit.}} = \frac{(m_{car,vide} + N \times m_{passager})v^2/2}{N \times (m_{voit.,vide} + m_{passager})v^2/2}$$

donc le transport en car est plus rentable ($\frac{\mathcal{E}_{car}}{N \times \mathcal{E}_{voit.}} < 1$) si $m_{car,vide} < N \times m_{voit.,vide}$ soit $N > 10$.

Second cas ($\mathcal{E} \simeq W_2$) :

$$\frac{\mathcal{E}_{car}}{N \times \mathcal{E}_{voit.}} = \frac{W_{2,car}}{N \times W_{2,voit.}} = \frac{C_{x,car} S_{car}}{N \times C_{x,voit.} S_{voit.}}$$

donc le transport en car est plus rentable si $N > (C_{x,car} S_{car}) / (C_{x,voit.} S_{voit.})$ soit si $N > 9$.

Dans les deux cas, la limite fournie par ce calcul très grossier est de l'ordre d'une dizaine de passagers ; on trouve des valeurs très proches mais c'est un hasard car physiquement les deux calculs n'ont rien à voir.

Transport aérien : voir annales 2023-2024, contrôle 2, exercice II

TD n° 3

L'énergie éolienne

Objectifs

Dans ce TD, on s'intéresse à l'énergie éolienne, à savoir l'énergie disponible dans les courants d'air sur Terre.

- Manipuler les notions de débit et puissances. Utiliser les relations de Bernoulli et la seconde loi de Newton dans un contexte de système ouvert.
- Mettre à profit ses connaissances pour déterminer une limite fondamentale au fonctionnement d'une éolienne.

On considérera l'air comme un fluide parfait, incompressible, irrotationnel et on négligera les effets de turbulence. On se placera de plus en régime stationnaire, avec un écoulement unidirectionnel. On négligera les effets de variation d'altitude.

Rappels et définitions

- Le débit (volumique) d'un fluide est le volume de fluide passant à travers une surface S par unité de temps (unité : $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$). Pour un fluide à la vitesse v uniforme sur une surface S , on a $Q = Sv$.
- Relation de Bernoulli : en l'absence d'obstacle sur le chemin suivi par le fluide (supposé parfait et incompressible), la densité volumique d'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p$ est une grandeur qui se conserve dans l'écoulement.
- La puissance cinétique liée à un écoulement à la vitesse v s'écrit $\mathcal{P}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho v^3 S$ où v est la vitesse du fluide et S la section traversée par le fluide considérée.
- Si un système crée une différence de pression Δp dans le fluide au débit Q , ce système récupère une puissance mécanique $\mathcal{P} = \Delta p \times Q$.

3.1 Introduction

1. Vérifier l'homogénéité de \mathcal{E} et des expressions des puissances \mathcal{P}_{cin} et \mathcal{P} .
2. On hésite entre deux sites pour implanter un parc éolien : en (A) le vent souffle à 8 m s^{-1} approximativement 1/3 du temps et est calme le reste du temps ; en (B), il y a un vent très régulier de vitesse 5 m s^{-1} . Comparer les vitesses moyennes du vent sur les deux sites. Puis comparer les puissances surfaciques moyennes. Quel site choisir, toutes choses égales par ailleurs ?

Correction

- On a $\langle v \rangle_A = \frac{1}{3} \times 8 = 2,7 \text{ m s}^{-1}$ et $\langle v \rangle_B = 5 \text{ m s}^{-1}$. La vitesse moyenne du vent au site (A) est presque deux fois plus petite que celle au site (B).
- Dans le calcul de la puissance surfacique moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\rho \langle v^3 \rangle$, ce qui importe est la moyenne de v^3 . Or $\langle v^3 \rangle_A = \frac{1}{3} \times 8^3 = 171 \text{ m}^3 \text{s}^{-3}$ et $\langle v^3 \rangle_B = 5^3 = 125 \text{ m}^3 \text{s}^{-3}$. Le site (A) a une puissance potentielle 37% supérieure au site (B), malgré le vent qui ne souffle que 1/3 du temps. De façon contre-intuitive, le site (A) sera donc notre choix prioritaire.

3.2 Rendement d'une éolienne – Limite de Betz

On s'intéresse dans la suite au rendement d'une éolienne, système permettant de convertir de l'énergie cinétique du vent en énergie de rotation des pales, qui permet de produire de l'électricité grâce à un alternateur (exclu de l'étude). On considère le schéma sur la figure 3.1 : on suit l'évolution d'un tube d'air (un tube de champ de vitesse) lorsque celui-ci passe à travers la surface de l'éolienne. On néglige tout effet lié à l'altitude.

Loin en amont de l'éolienne, l'air est à la pression p_0 avec une vitesse v_1 , ça sera la situation de référence. La présence de l'éolienne va altérer l'écoulement : on note p_2 et v_2 (resp. p_3 et v_3) les pression et vitesse de l'écoulement juste avant (resp. après) l'éolienne. On s'attend à $\Delta p = p_2 - p_3 > 0$ puisque l'éolienne va provoquer une chute de pression en récupérant de l'énergie.

Loin en aval de l'éolienne, l'air a retrouvé sa pression p_0 pour être à l'équilibre mécanique avec son environnement, mais a une vitesse potentiellement différente v_4 .

On supposera que l'écoulement a une vitesse uniforme sur toute section du tube de champ et en particulier sur la surface de l'éolienne notée S . De même, on suppose que l'action des pales de l'éolienne est homogène sur toute la surface.

3. *A priori*, la vitesse v_4 est inconnue, et peut varier entre 0 et v_1 . On cherche à comprendre qualitativement l'existence d'un optimum de fonctionnement pour l'éolienne. Si la vitesse $v_4 = v_1$ quelle est la puissance récupérée par l'éolienne ? Et si $v_4 = 0$? Commenter.

Correction

Si $v_4 = v_1$, alors $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_4$, l'énergie volumique du tube d'air n'a pas variée, donc l'éolienne n'a récupéré aucune énergie.

À l'opposé, si $v_4 = 0$, toute l'énergie du tube a été récupérée précédemment. Mais alors le tube d'air est à l'arrêt. De proche en proche, on en déduit que $v_3 = 0$ puis $v_2 = 0$, l'air est arrêté au niveau de l'éolienne : comme il n'y a plus aucun débit, on a une puissance nulle récupérée par l'éolienne.

Conclusion, il faut récupérer de l'énergie de l'écoulement mais pas trop de façon à maintenir un bon débit : il existe un optimum qui permet de maximiser la puissance récupérée.

Détermination de la vitesse au niveau de l'éolienne

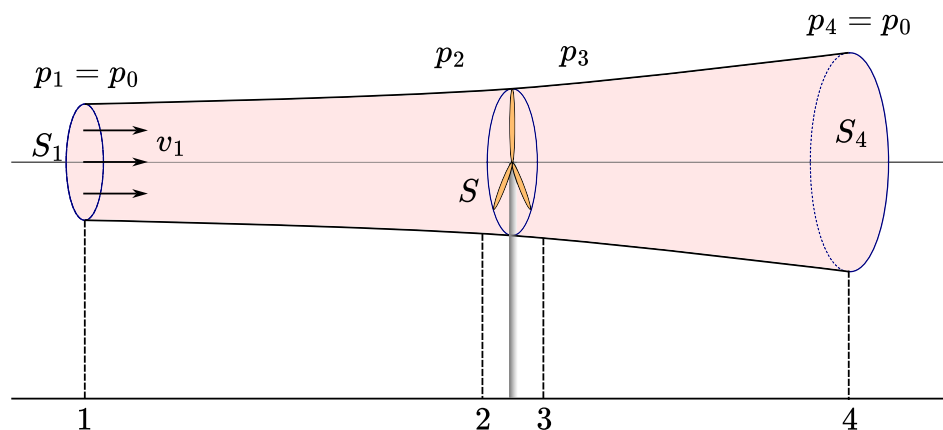


FIGURE 3.1 – Position du problème : flux d'air traversant une éolienne

On cherche ici à déterminer la vitesse v_2 de l'écoulement en fonction de v_1 et v_4 les vitesses loin de l'éolienne.

4. Énoncer la conservation du débit le long de l'écoulement. En déduire en particulier une relation entre v_2 et v_3 .

Correction

Conservation du débit : $Q = S_1 v_1 = S v_2 = S v_3 = S_4 v_4$. On en déduit la continuité de la vitesse au niveau de l'éolienne : $v_2 = v_3$.

5. On suppose qu'entre 1 et 2 d'une part et entre 3 et 4 d'autre part, l'énergie volumique du fluide est conservée. Exprimer $p_2 - p_3$ en fonction des vitesses v_1 et v_4 loin de celle-ci.

Correction

On peut utiliser la relation de Bernoulli deux fois : avant et après l'éolienne. On élimine l'énergie potentielle de pesanteur puisqu'elle est constante :

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\rho v_3^2 + p_3 = \frac{1}{2}\rho v_4^2 + p_4.$$

En utilisant $p_4 = p_1 = p_0$ et $v_2 = v_3$, retrancher les deux relations donne

$$p_2 - p_3 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_4^2).$$

6. En déduire l'expression de la puissance récupérée \mathcal{P} par l'éolienne en fonction de v_1 et v_4 .

Correction

D'après le rappel, pour une chute de pression $\Delta p = p_2 - p_3$ avec un débit $Q = S v_2$, on a

$$\mathcal{P} = \Delta p Q = \frac{1}{2} S \rho (v_1^2 - v_4^2) v_2.$$

Afin de déterminer une autre relation entre v_1 et v_4 , on cherche à exprimer la puissance récupérée d'une autre façon. Pour cela, nous allons déterminer la force exercée par l'éolienne grâce à un bilan de quantité de mouvement. Comme la seconde loi de Newton ne s'applique que sur un système fermé, il va falloir porter un soin particulier au choix du système.

On appelle Σ le fluide que l'on va suivre entre deux instants t et $t + dt$. À l'instant t , $\Sigma(t)$ est présenté sur la figure 3.2(a) : il s'agit de l'air entre les surfaces S_1 et S_2 ainsi que l'air en amont de S_1 qui va passer à travers S_1 pendant dt . À l'instant $t + dt$, le fluide a bougé, en particulier une partie est passée à travers la surface S_4 comme décrit sur la figure 3.2(b).

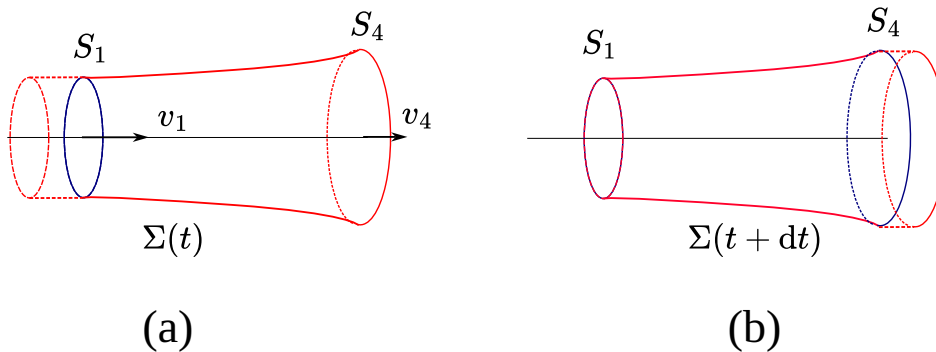


FIGURE 3.2 – Évolution du système entre les instants t et $t + dt$

7. Calculer la variation de quantité de mouvement dp selon l'axe du problème que subit le système Σ entre les instants t et $t + dt$ en fonction de ρ , Q , v_1 , v_4 et dt .

Correction

À travers une surface donnée, on peut exprimer la masse de fluide dm qui passe à travers la surface en fonction du débit. En effet :

$$dm = \frac{dm}{dt} dt = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} dt = \rho Q dt$$

Entre S_1 et S_4 , par conservation du débit, on a forcément la même masse de fluide qui entre et sort du système. Cependant, cela ne se fait pas à la même vitesse. On a donc une variante de quantité de

mouvement :

$$dp = p(\Sigma(t + dt)) - p(\Sigma(t)) = \rho Q v_4 dt - \rho Q v_1 dt = \rho Q (v_4 - v_1) dt.$$

8. En utilisant la seconde loi de Newton, en déduire la force exercée par l'éolienne, et ainsi une autre expression de la puissance \mathcal{P} récupérée par celle-ci en fonction de ρ , S , v_1 , v_2 et v_4 .

Correction

La seconde loi de Newton indique que la variation temporelle de quantité de mouvement est exactement la force qui s'applique sur le système. Donc la force $F = \frac{dp}{dt}$ vaut $F = \rho Q (v_4 - v_1)$.

Si on veut connaître la puissance de cette force, il suffit de multiplier par la vitesse où cette force s'applique :

$$\mathcal{P} = F v_2 = \rho (S v_2) (v_1 - v_4) v_2.$$

9. À l'aide des deux expressions de la puissance récupérée par l'éolienne obtenues aux questions 6 et 8, en déduire l'expression de la vitesse v_2 en fonction de v_1 et v_4 .

Correction

On a donc

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} S \rho (v_1^2 - v_4^2) v_2 = \rho (S v_2) (v_1 - v_4) v_2$$

soit $v_1 + v_4 = 2v_2$. La vitesse au niveau de l'éolienne est simplement la moyenne des deux vitesses loin de l'éolienne :

$$v_2 = \frac{v_1 + v_4}{2}.$$

Calcul du rendement maximal d'une éolienne

L'étude physique d'une éolienne —quel que soit son fonctionnement— nous a donc permis de trouver l'expression de la vitesse de l'écoulement au niveau de l'éolienne en fonction des conditions aux limites. Cette vitesse v_2 peut varier entre 0 et v_1 , selon le fonctionnement de l'éolienne. On définit :

$$a = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \quad (3.1)$$

le facteur qui quantifie la diminution de cette vitesse.

10. Exprimer v_2 et v_4 en fonction de a et v_1 .

Correction

On retourne la définition de a pour trouver $v_2 = v_1(1 - a)$. Puis avec l'expression de v_2 trouvée précédemment, on obtient $v_4 = v_1(1 - 2a)$.

11. On définit le rendement de l'éolienne C_p , ou coefficient de puissance, comme la puissance récupérée sur la puissance qui aurait traversé la même surface sans l'éolienne. Exprimer C_p comme un rapport de puissances et en déduire son expression en fonction de a .

Correction

On définit donc

$$C_p = \frac{\mathcal{P}}{\frac{1}{2} \rho v_1^3 S} = \frac{\frac{1}{2} S \rho (v_1^2 - v_4^2) v_2}{\frac{1}{2} \rho v_1^3 S} = \frac{(v_1^2 - v_4^2) v_2}{v_1^3} = [1 - (1 - 2a)^2](1 - a) = 4a(1 - a)^2.$$

Remarque : cas limites

- Si $v_4 = v_1$ (donc $v_2 = v_1$), on trouve $a = 0$ qui correspond bien au cas où l'éolienne ne récupère aucune puissance : $C_p = 0$.
- Si $v_4 = 0$, l'application des formules obtenues donne $a = 1/2$ et donc $C_p = 1/2$, ce qui n'est pas cohérent avec l'analyse qualitative précédente qui prévoyait qu'aucune puissance n'était récupérée car l'air était totalement bloqué au niveau de l'éolienne soit $v_2 = 0$. Dans ce cas, la formule $v_2 = (v_1 + v_4)/2$ qui donne $v_2 = v_1/2$ est fausse, car la simplification par v_2 opérée à la question 9 en divisant l'égalité par v_2 suppose que $v_2 \neq 0$. Si au contraire on pose $v_2 = 0$ dans ces expressions de \mathcal{P} , on retrouve bien $\mathcal{P} = 0$.

12. Pour quelle valeur de a le coefficient C_p est-il maximal ? Déterminer le maximum de rendement d'une éolienne, qu'on notera C_{Betz} .

Correction

Il s'agit d'une fonction de a . Calculons sa dérivée pour trouver son extremum :

$$\frac{dC_p}{da} = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 4(1-a)(1-3a).$$

La dérivée s'annule en $a = 1$ et $a = 1/3$. Le cas $a = 1$ correspond à l'absence d'éolienne (aucun changement de vitesse), donc l'annulation de la dérivée pertinente est $a = 1/3$, pour laquelle le rendement vaut :

$$C_{\text{Betz}} = \frac{16}{27} \approx 0,59.$$

13. Une éolienne de pales de longueur $L = 60$ m est placée dans une zone où le vent, quand il est fort, a la puissance cinétique surfacique $\mathcal{P}_{\text{cin}}/S = 1500 \text{ W m}^{-2}$. Quelle est sa puissance maximale d'après la limite de Betz ?

Correction

Calculons la puissance totale avec $S = \pi L^2$:

$$\mathcal{P}_{\text{cin}} = 1500 \times \pi 60^2 = 17 \text{ MW},$$

donc la puissance maximale imposée par la limite de Betz est $\mathcal{P}_{\text{cin}} C_{\text{Betz}} = 10 \text{ MW}$.

Remarques enseignants

Remarque : on donne dans les transparents de cours la figure 30.3 du Jaffe et Taylor, qui indique, pour une éolienne commerciale de diamètre des pales 126 m, une puissance de 7,5 MW donc c'est assez cohérent, même si ça dépend fortement du choix de \mathcal{P}_{cin} . La puissance typique dans le nord de la France est 300 W/m^2 à hauteur 50 m, et donc 470 W/m^2 à la hauteur 140 m de notre éolienne (cf fig. 30.3) en supposant $v \propto 1/z^7$ (cf p 542). Cette valeur étant une moyenne annuelle, on prend 1500 W/m^2 comme valeur maximale afin de rendre compte d'un facteur de charge de l'ordre de 0,30.

Performances des éoliennes

On a déterminé le rendement maximal d'une éolienne, qui constitue la limite de Betz. Ce rendement reste théorique et ne peut être atteint avec les éoliennes réelles.

14. Proposer des raisons pour lesquelles le rendement réel C_p d'une éolienne n'atteint pas C_{Betz} .

Correction

De nombreuses limitations :

- le fluide n'est pas parfait, la distribution des vitesses n'est pas uniforme ;
- la perte de pression due à l'éolienne n'est pas uniforme ;
- le sillage en aval est perturbé par la présence des pales et leur rotation et n'est pas laminaire ;
- le rotor a un rendement propre, et possède une traînée qui perturbe l'écoulement en aval.

15. Afin de pouvoir comparer différents types d'éoliennes, on définit un nombre sans dimension λ appelé *paramètre de rapidité*, qui est le rapport entre la vitesse d'un point à l'extrémité d'une pale et la vitesse du vent. Exprimer λ avec les paramètres pertinents du problème.

Correction

Avec R le rayon des pales, Ω la vitesse de rotation angulaire et v_0 la vitesse du vent, on peut construire le paramètre

$$\lambda = \frac{R\Omega}{v_0}.$$

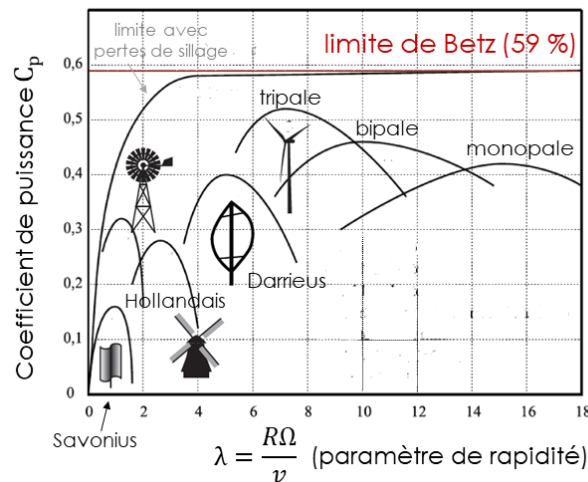


FIGURE 3.3 – Représentation des performances des différents types d'éoliennes. Adapté de Thomas W. Jr Murphy, *Energy and Human Ambitions on a Finite Planet*, UC San Diego (2021).

16. Le graphique 3.3 présente des rendements réels d'éoliennes, selon leur type, en particulier les éoliennes mono-bi- tripales, les moulins (américains et hollandais), le Savonius et le Darrieus qui sont des éoliennes à axe vertical. Quels commentaires peut-on faire ?

Correction

- Le rendement dépend en réalité de la vitesse du vent, résultat qui n'était pas prévu par la limite de Betz.
- Les éoliennes sont nettement plus efficaces que les moulins, et leur optimum n'est pas au même paramètre de rapidité.
- Les éoliennes tripales ont un optimum légèrement supérieur aux éoliennes bipales et monopales
- Pour les éoliennes tripales, l'optimum est à $\lambda = 7$, ce qui signifie que la pale a une vitesse 7 fois supérieure au vent ! C'est très différent des moulins où les pales tournent essentiellement à la vitesse du vent ($1 < \lambda < 3$).
- Le Savonius est une éolienne à axe vertical contrairement aux éoliennes à axe horizontal plus

classiques. Son rendement est nettement en dessous, mais aussi dans un régime très différent de vitesse.