Projet De Groupe - Amoura, Jail

Modélisation des flux d'air autour d'une aile d'avion et calcul de la portance

Problématique :

Est-il possible de modéliser l'écoulement d'air autour d'un profil d'aile d'avion et de calculer la portance de cette aile ?

Hypothèse

Afin de répondre à notre problématique, nous nous placerons dans un modéle reposant sur plusieurs hypothèses fausses en pratiques, mais qui permettrons de simplifier drastiquement décompléxifier l'approche physique du problème. Ces hypothèses sont les suivantes :

- Fluide Parfait : On néglige les effets de viscocité et de conduction thermique.
- Ecoulement incompressible : c'est un déplacement d'une quantité de fluide dont la masse volumique est constante.
- flux stationnaire $2D$: Ecoulement où les vecteurs vitesses restent constant au cours du temps.

Etude sur un volume Ω limité par 3 surface. La surface S_1 situé en amont, la surface S_2 situé en aval et une surface S_{lat}. On suppose que la vitesse moyenne du fluide en S_1 est V_1 et est perpendiculaire à S_1

De plus on considère S_1 et S_2 sont assez loin de l'aile pour que la pression situé à ces surfaces sont égales : $p_1 = p_2 = p_0$

Le phénomène de portance : deux théories concurante

Théorème de Bernoulli

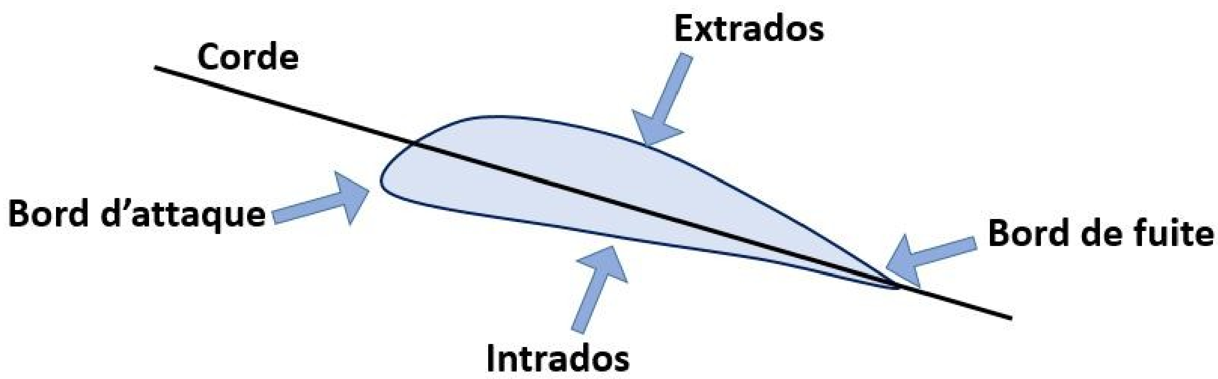
Pour un écoulement de fluide parfait incomprésible. La quantité de Bernoulli est conservé le long d'une ligne courant

$$\large {\frac{v^{2}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = constante}$$

Avec :

- v : vitesse en $m.s^{-1}$
- g : pesenteur en $m.s^{-2}$
- z : altitude en m
- p : pression en Pa

- ρ : masse volumique du fluide en $kg.m^{-3}



La forme profil de l'aile crée une circulation de vitesse autour de cette dernière. Cela accelère la vitesse sur l'extrados et ralenti la vitesse au niveau de l'intrados

D'apres Bernoulli, il a donc une surpression sur l'intrados et une dépression sur l'extrados. Cela génère une force perpendiculaire à la direction de la vitesse incidente appelé Portance et noté F_p

Lorsque l'angle d'incidence de l'aile par rapport au champ de vitesse est trop grand, la couche limite se décolle de l'extrados et crée des turbulances. Cela engendre une soudaine perte de portance (on parle alors de décrochage). On limitera donc notre étude à des angles d'incidence entre $20\,°$ et $-20\,°$

(attachment:abb525f4-ae73-4cb9-b67f-607083b65a6e.jpg)

Théorie simplifiée de la portance "à la Newton".

Une manière différente d'appréhender le phénomène existe, permettant de l'aborder simplement par le prisme de la mécanique classique, vie les équations de la Dynamique.

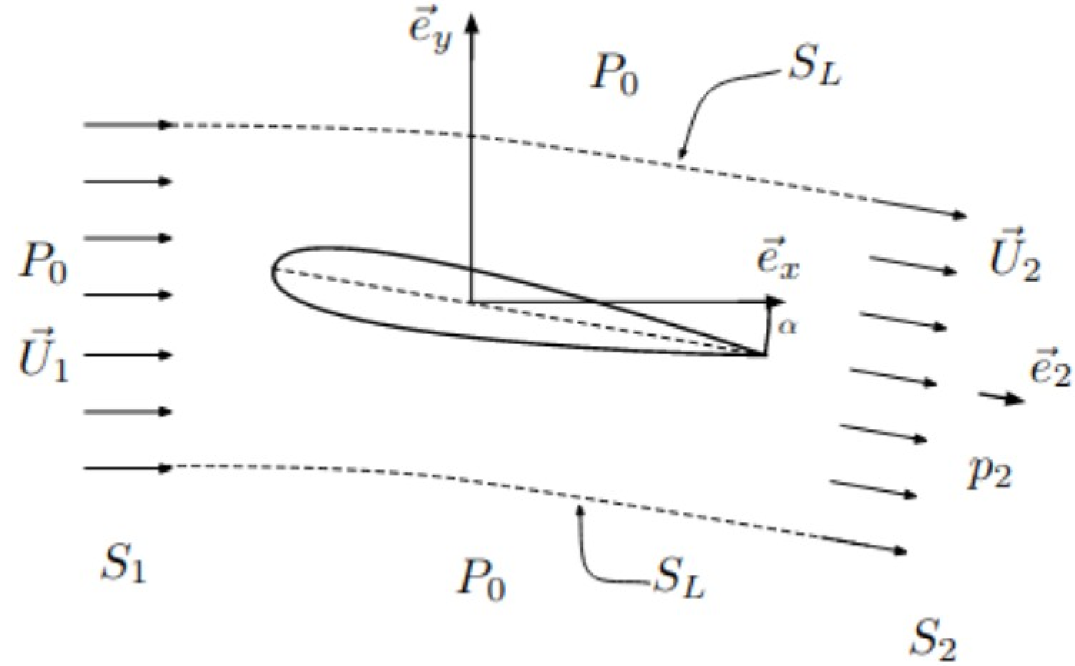
Quand on observe le fux d'air autours de l'aile, on voit que la direction de l'air avant et apres l'aile est différente. L'air est dévié, et sa vitesse, vectoriellement parallèle au sol avant q'il arrive sur l'aile, acquiert une composante selon $-\vec{e_y}$. Ce changement de vitesse (vectoriellement parlant) met en evidence que l'aile à applique une force sur le flux d'air, dirigée vers $-\vec{e_y}$. Le principe d'action/réaction nous affirme donc que l'air subit une force égale et de direction opposée. Qu'on peut appeler portance.

$$\large {\vec{F} = F_{x} \vec{e_{x}} + F_{y} \vec{e_{y}}}$$

Avec :

- F_x la composante parralèle à l'écoulement de l'air. C'est la force de trainée qui s'oppose au déplacement de l'aile.
- F_y la composante perpendiculaire à la direction de l'écoulement de l'air. C'est la force de portance qui permet à l'avion de voler.

On étudie le flux de masse à travers Ω. En S_1 sa vitesse vaut V_1 et est perpendiculaire à S_1 comme suposé précédament. En S_2 l'écoulement à été dévié par l'aile donc sa vitesse V_2 est inclinée d'un angle α et est perpendiculaire à S_2. Le flux de masse à travers la surface S_{lat} est nul car la surface est parralèle aux lignes de courants.



Le bilan des flux de masse est nul à traver Ω car l'écoulement des fluides est considéré incomprésible. On a donc:

$$\large {\rho V_{1} S_{1} - \rho V_{2} S_{2} = 0} $$

$$\large {\Rightarrow   V_{1}S_{1} = V_{2}S_{2}}$$

Théorème de Bernouilli entre l'entré et la sortie de Ω :

$$\large {\frac{1}{2}V_{1}^{2} + \frac{p_{1}}{\rho} = \frac{1}{2}V_{2}^{2} + \frac{p_{2}}{\rho}}$$

$$\large {\frac{1}{2}\rho V_{1}^{2} + p_{1} = \frac{1}{2}\rho V_{2}^{2} + p_{2}}$$

Or $\large {p_{1} = p_{2} = p_{0}}$:

$$\large {\frac{1}{2}\rho V_{1}^{2} = \frac{1}{2}\rho V_{2}^{2}}$$

On a donc :

$$\large {V_{1} = V_{2}}$$

Or :

$$\large {V_{1}S_{1}=V_{2}S_{2} \, \Rightarrow \, S_{1}=S_{2}}$$

Bilan de quantité de mouvement :

- La pression est constante au bord de Ω, la résultante des forces de pression sur les frontières de Ω est donc nulle
- flux de quantité de mouvement à travers S_1 : $-\rho V_1^2 S_1 \vec{e_x}$
- flux de quantité de mouvement à travers S_2 : $\rho V_2^2 S_2 (\cos(\alpha)\vec{e_x} - \sin(\alpha)\vec{e_y})$

$$\large {-\rho V_{1}^{2} S_{1} \vec{e_{x}} + \rho V_{2}^{2} S_{2}(\cos{(\alpha)} \vec{e_{x}} - \sin{(\alpha)} \vec{e_{y}}) = -F_{x}\vec{e_{x}} - F_{y}\vec{e_{y}}}$$

On a donc :

$$\large {F_{x} = \rho V_{1}^{2} S_{1} - \rho V_{2}^{2} S_{2} \cos{(\alpha)}}$$

$$\large {\Rightarrow F_{x} = \rho V_{1}^{2} S_{1} - \rho V_{1}{2} S_{1} \cos{(\alpha)}}$$

$$\large {\Rightarrow   F_{x} = \rho V_{1}^{2} S_{1} (1 - \cos{(\alpha)})}$$

$$\large {F_{y} = \rho V_{1}^{2} S_{1} \sin{(\alpha)}}$$

On constate expérimentalment que la zone de déflection de l'écoulment d'air à l'arrière de l'aile est de l'ordre de grandeur de la longueur de la corde du profil de l'aile L_c. De plus on note W l'envergure de l'aile. On estime donc la surface de S_2 tel que $S_2 = L_c W$

On a donc :

$$\large {F_{x} = \rho V_{1}^{2} L_{c}W (1 - \cos{(\alpha)})}$$

$$\large {F_{y} = \rho V_{1}^{2} L_{c}W \sin{(\alpha)}}$$

On considère que l'angle α est très petit. Par approximation des petits angles on a : $\cos(\alpha) = 1$ et $\sin(\alpha) = \alpha$

On a donc : $\Rightarrow F_x \approx 0$ et $F_y \approx \rho \alpha V_1^2 L_c W$

La force de trainée est donc négligeable devant la portance lorsque l'angle d'incidence est faible.

Coefficient de portance simplifié :

On peut donc calculer le coefficient de portance simplifié C_p :

$$\large {C_{p} = \frac{F_{y}}{\frac{1}{2}\rho V_{1}^{2} L_{c}W}}$$

La théorie simplifié de la portance nous permet donc de bel et bien montrer que le coefficient de portance dépend de l'angle d'incidence de l'aile ainsi que l'envergure et la longueur de la corde de l'aile. Néanmoins, la forme du profil n'est pas prit est compte ce qui est portant une variable très importante. D'après la théorie simplifié une aile ayant pour forme de profil un rectangle permettrais aux avions de voler.

Notre première difficulté a donc été de trouver un moyen de faire dépendre la portance du profil de l'aile. Pour obtenir un résultat dépendant de la forme du profil nous allons utiliser la théorie des potentielles complexes ainsi que la transformation de Joukovski.

Nous allons utiliser la théorie des potentielles complexes pour calculer et visualiser les écoulements d'air autour d'un cylindre. Ensuite nous allons appliquer la transformation de Joukovski à ce cylindre pour le transformer en un profil d'aile d'avion. Il reste à calculer l'écoulement par la transformation de Joukovski et en déduire le coefficient de portance.

Potentiel complexe :

Difficulté : comprendre un ensemble de cours sur le potentiel complexe.

Le potentiel complexe est utilisé pour étudier des écoulements plans qui sont incomprésibles, parfaits, stationnaires et irrotationnels. Le potentiel complexe est définit par une fonction $\Phi(z)$ qui a pour partie réelle le potentiel des vitesses $\phi(x,y)$ et pour partie imaginaire la fonction de courant $\psi(x,y)$

On définie le champ de vitesse:

$$\large {\vec{V} = u \, \vec{e_{x}} + v \, \vec{e_{y}}} $$

Conséquence de nos hypothèses :

- Incomprésibile : $\rho = cst$, on a donc l'équation du bilan des masses qui s'écrit $\large {div \, (\vec{V}) = 0\, \Rightarrow \, \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0}$
- Stationnaire : $\large{\frac{\partial}{\partial t} = 0}$
- Irrotationnel : $\large {\vec{rot}(\vec{V}) = 0}$

$$\large {\vec{rot}(\vec{V}) = \begin {bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end {bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = 0}$$

$$ \large \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array} \right. $$

Fonction de courant :

D'après l'incomprésibilité on a $div(\vec{V})=0$ Il existe donc un vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\large \vec{V} = \vec{rot}(\vec{A})$$

$$\large \vec{V} = \begin {bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end {bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_{x} \\ A_{y} \\ A_{z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{ll} u(x,y) = \frac{\partial A_{z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} \\ v(x,y) = \frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} \end{array} \right.$$

Il existe fonction $\psi(x,y)$ tel que le vecteur :

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(x,y) \end{bmatrix}$$

vérifie les conditions :

$$\large \vec{V} = \begin{bmatrix} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\large div (\vec{V})= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \psi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial \psi}{\partial x})$$

or on pose $\psi(x, y)$ comme étant continue on a donc :

$$\large \frac{\partial ^{2} \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial ^{2} \psi}{\partial y \partial x}$$

La fonction $\psi(x, y)$ vérifie donc $div(\vec{V})=0$

On appelle donc $\psi(x, y)$ la fonction de courant telle que :

$$\large \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \end{array} \right.$$

Fonction potentiel :

Comme le champ est irrotationnel on a $\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\vec{0}$ il existe donc une fonction $\phi(x, y)$ tel que : $\vec{V}=\overrightarrow{grad}(\phi)$

Comme montré précédament :

$$ \large \vec{rot}(\vec{V}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array} \right. $$

$$\large \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial \phi}{\partial x})$$

On pose $\phi(x, y)$ comme étant continue on a donc :

$$\large \frac{\partial ^{2} \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial ^{2} \phi}{\partial y \partial x}$$

On a donc : $\large \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \vec{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$ qui est vérifié

On appelle donc $\phi(x, y)$ la fonction potentiel telle que :

$$ \large \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \end{array} \right. $$

Potentiel complexe :

On définit donc le potentielle complexe $\Phi(z)$ telle que :

$$\large \Phi(z) = \phi(x,y) + i \psi(x,y)$$

Avec le champs de vitesse :

$$ \large \vec{V} = \left\{   \begin{array}{ll}   u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\   v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\   \end{array} \right. $$

de plus on a :

$$\large \begin{eqnarray} \frac{d \Phi}{d z} &=& \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}\\ &=& -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\\ &=& u - iv \\ \end{eqnarray}$$

On définit le module du champ de vitesse :

$$\large \| V \| = \sqrt{u^2+v^2} = \left|\frac{d \Phi}{d z}\right|$$

On défini l'angle du champ de vitesse :

$$\large \theta = - arg \left(\frac{d \Phi}{dz} \right)$$

Potentielle complexe en coordonnées polaires :

Champ de vitesse en coordonnées polaires :

$$\large {\vec{V} = V_{r} \, \vec{e_{r}} + V_{\theta} \, \vec{e_{\theta}}}$$

$$ \large \vec{V} = \left\{   \begin{array}{ll}   V_{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\   V_{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\   \end{array} \right. $$

Projection en coordonnées cartéseinnes : $\large u = V_{r} \cos{(\theta)} - V_{\theta}\sin{(\theta)}$ et $\large v = V_{r}\sin{(\theta)} + V_{\theta}\cos{(\theta)}$

comme on a $\large z = re^{i\theta}$ on a donc :

$$\large \begin{eqnarray} \frac{d \Phi}{d z} &=& \frac{\partial \phi}{\partial r} e^{-i\theta} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} e^{-i\theta}\\ &=& -\frac{i}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}e^{-i\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}e^{-i\theta}\\ &=& u -i v = (V_r - i V_\theta) e^{-i\theta} \\ \end{eqnarray}$$

Ecoulement autour d'un cylindre :

L'écoulement potentiel autour d'un cylindre de rayon R en rotation est la somme d'un écoulement uniforme, d'un doublet et d'un vortex de ciculation Γ

Pour un champ de vitesse $\vec{V}$, Γ est sa circulation le long d'un contour fermé C :

$$\large \Gamma=\oint_{c}\overrightarrow{V}.\overrightarrow{dl}$$

Γ peut aussi être exprimé en fonction du flux du rotationnel à travers une surface S limité par le contour C grâce au théorème du rotationnel :

$$\large \Gamma = \iint_{S}rot\overrightarrow{V}.\overrightarrow{n}\,ds$$

Dans notre cas avec un champ de vitesse V_1 et d'angle d'incidence α l'écoulement potentiel est:

$$\large \Phi(z) = V_1 z e^{-i\alpha} + V_1 e^{i\alpha} \frac{R^2}{z} - i \frac{\Gamma}{2\pi}\log\left(\frac{z e^{-i\alpha}}{R}\right)$$

Difficulté : on a pas réussit à trouver comment obtenir cette expression de Φ et on a trouvé aucunne démonstration en ligne.

On définit aussi la vitesse complexe : $W = U - iV$

```
#importation des bibiliothèques nécessaires
import numpy as np
import sympy as sp
from sympy import re,im,I
import matplotlib.pyplot as plt
```

On utilise la bibliothèque SymPy pour facile manipuler nos formules. Cela permet par exemple de calculer une dérivé et de l'afficher pour pouvoir la récupérer. De plus la bibliothèque SymPy nous permet de remplacer les variables d'une fonction ce qui est utilie pour exprimer nos variable complexe en fonction d'une partie réelle et une partie imaginaire.

```
#création des paramètres en tant que symboles
R = sp.symbols('R',real=True, positive=True)
V_1 = sp.symbols('V_1',real=True, positive=True)
Gamma = sp.symbols('Gamma',real=True)
alpha = sp.symbols('alpha',real=True)

#création des variables en tant que symboles
x = sp.symbols('x ',real=True)
y = sp.symbols('y',real=True)
theta = sp.symbols('theta',real=True)
r = sp.symbols('r',real=True,Positive=True)
z = sp.symbols('z')

#définition du potnetiel complexe Phi(z)
Phi = V_1*z*sp.exp(-I*alpha) + (V_1*sp.exp(I*alpha)*R**2)/z -
((I*Gamma)/(2*sp.pi))*sp.log(z*sp.exp(-I*alpha)/R)

#vérification de la formule
display("Phi(z)=",Phi)
```

```
'Phi(z)='

-I*Gamma*log(z*exp(-I*alpha)/R)/(2*pi) + R**2*V_1*exp(I*alpha)/z +
V_1*z*exp(-I*alpha)
```

Comme on a montré précédemment on a :

$$\large W = \frac{d\Phi}{dz}$$

```
#Calcul de W grâce à la fonction de dérivation diff de SymPy
W = sp.diff(Phi,z)

display("W(z)=",W)
```

```
'W(z)='

-I*Gamma/(2*pi*z) - R**2*V_1*exp(I*alpha)/z**2 + V_1*exp(-I*alpha)
```

On a donc :

$$\large W = V_{1}e^{-i\alpha} - i\frac{\Gamma}{2\pi z} - R^{2}\frac{V_{1}e^{i\alpha}}{z^{2}}$$

Pour retrouver la fonction de courant en cherche la partie imaginaire de la fonction potentiel $\Phi(z)$, de plus on remplace la variable z par les coordonnées (x, y)

```
#on selectionne la partie imaginaire puis on change les variables
grâce à la fonction subs de SymPy
psi = im(Phi.subs(z, x+sp.I*y))

display("psi(x,y)=",psi)
```

```
'psi(x,y)='

-Gamma*log(sqrt(x**2/R**2 + y**2/R**2))/(2*pi) +
R**2*V_1*im(exp(I*alpha)/(x + I*y)) - V_1*x*sin(alpha) +
V_1*y*cos(alpha)
```

On a donc :

$$\large \psi(x,y) = R^{2}V_{1}im(\frac{e^{i\alpha}}{x+iy}) - \frac{\Gamma}{2\pi}\log{\left(\sqrt{\frac{x^{2}}{R^{2}}+\frac{y^{2}}{R^{2}}}\right)} - V_{1}x\sin{(\alpha)} + V_{1}y\cos{(\alpha)}$$

Pour retrouver les composants de la vitesse en utilise :

$$\large \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \end{array} \right.$$

```
#vitesse porté par le vecteur unitaire x
V_x = sp.diff(psi,y)

display("V_x=",V_x)
```

```
'V_x='

-Gamma*y/(2*pi*R**2*(x**2/R**2 + y**2/R**2)) -
R**2*V_1*re(exp(I*alpha)/(x + I*y)**2) + V_1*cos(alpha)
```

```
#vitesse porté par le vecteur unitaire y
V_y = -sp.diff(psi,x)

display("V_y=",V_y)
```

```
'V_y='

Gamma*x/(2*pi*R**2*(x**2/R**2 + y**2/R**2)) +
R**2*V_1*im(exp(I*alpha)/(x + I*y)**2) + V_1*sin(alpha)
```

On a donc :

$$\large V_{x} = - \frac{\Gamma y}{2\pi(x^{2}+y^{2})} - R^{2}V_{1}re\left(\frac{e^{i\alpha}}{(x+iy)^{2}}\right) + V_{1}\cos{(\alpha)}$$

$$\large V_{y} = \frac{\Gamma x}{2\pi(x^{2}+y^{2})} + R^{2}V_{1}im\left(\frac{e^{i\alpha}}{(x+iy)^{2}}\right) + V_{1}\sin{(\alpha)}$$

Représentation graphique de l'écoulement autour d'un cylindre :

On choisit arbitrairement des valeur de Gamma et de alpha pour notre représentation graphique

```python
# parametres de la représentation graphique
R_cylindre   = 0.5
V_inf = 1.0
valeurs = [(Gamma,-2*np.pi*R*V_1),(alpha,np.deg2rad(12)),
(R,R_cylindre),(V_1,V_inf)]
```

Pour représenté graphiquement un champ de vecteur on doit d'abord créer une grilles de points sur lesquels on calcule leur valeurs.

On doit aussi masquer le champs de vecteur la où ce situe le cylindre.

Difficulté : il a fallue trouvé comment on fabrique une grille et la fonction pour masquer une zone

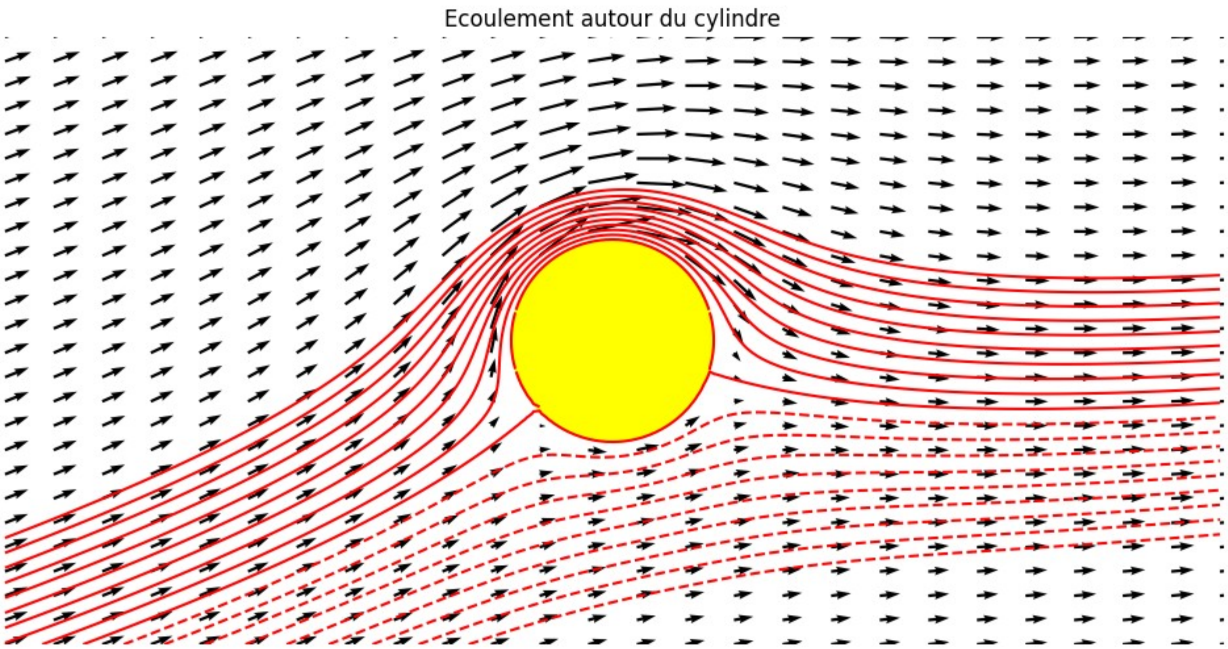
```python
#définition de la grille pour les calcules
L = 3
N = 201
pas = 8 # pour calculer les vitesses

#points de calcul
x_grille = np.linspace(-L,L,N)
y_grille = np.linspace(-L/2,L/2,N)

#lignes de courant pour psi
X, Y = np.meshgrid(x_grille, y_grille)

# masquage du champ au niveau du cylindre
Z = X + 1j*Y
Z = np.ma.masked_where(np.absolute(Z)<0.95*R_cylindre,Z)
X = Z.real
Y = Z.imag

# et le champ de vitesse U
```

```python
XX = X[::pas,::pas]
YY = Y[::pas,::pas]

#difficulté si on masque après les vitesses sont calculer à l'intérieur du cylindre

# calcul des valeurs des vecteurs aux points de la grille. lambdify permet de calculer rapidement des fonctions en les passant en fonction python
psi_cylindre = sp.lambdify([x,y],psi.subs(valeurs),'numpy')
u_cylindre   = sp.lambdify([x,y],V_x.subs(valeurs),'numpy')
v_cylindre   = sp.lambdify([x,y],V_y.subs(valeurs),'numpy')

with np.errstate(divide='ignore'):   #errstate sert à gérer les erreurs sur les virgules
    Psi_0 = psi_cylindre(0.5,0)
    Psi_cylindre = psi_cylindre(X,Y)
    Levs = np.linspace(Psi_0-L/5,Psi_0+L/5,19) #détermine le nombre et la position des lignes de contours
    U_cylindre   = u_cylindre(XX,YY)
    V_cylindre   = v_cylindre(XX,YY)
```

```
<lambdifygenerated-1>:2: RuntimeWarning: invalid value encountered in sqrt
  return -0.207911690817759*x + 0.978147600733806*y + 1.5707963267949*log(2.0*sqrt(x**2 + y**2))/pi + 0.25*imag(exp(0.20943951023932*1j)/(x + 1j*y))
```

```python
# tracer
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12,6))

#traçage de la fonction de courant
ax.contour(X,Y, Psi_cylindre,levels=Levs,colors='r')

#traçage du champ de vitesses
ax.quiver(XX,YY,U_cylindre,V_cylindre)

#trçage du cylindre
cercle = plt.Circle((0.,0.),R_cylindre,color='yellow')
ax.add_artist(cercle)
plt.axis('equal')
plt.axis('off')
plt.title("Ecoulement autour du cylindre")
```

```
Text(0.5, 1.0, 'Ecoulement autour du cylindre')
```



Transformation de Joukovski :

La transformation de Joukovski est une transformation conforme du plan qui permet de transformer un cercle en une figure plus complexe. Une transformation conforme est une bijection qui conserve localement les angles entre deux courbes orientées. Cela signifie que si deux courbes C_1 et C_2 se coupent en A, leurs vecteurs tangents en A forment un angle α. Après transformation les vecteurs tangents en $f(A)$ aux deux courbes $f(C_1)$ et $f(C_2)$ forment également l'angle α.

la transformation de Joukovski est donné par la formule :

$$\large Z = z + \frac{C^{2}}{z}$$

- Avec z le plan d'origine : $z=x+i\,y$
- Z le plan transformé : $Z=X+i\,Y$
- C le paramètre de la transformation

équation d'un cercle de rayon R et de centre (x_c, y_c) dans le plan z :

$$\large z = x_{c} + R\cos{(\theta)} + i(y_{c} + R\sin{(\theta)})$$

En remplaçant dans la transformation de Joukovski et en identifiant :

$$\large Z = x_{c} + R\cos{(\theta)} + i(y_{c} + R\sin{(\theta)}) + C^{2}\frac{x_{c} + R\cos{(\theta)} - i(y_{c} + R\sin{(\theta)})}{(x_{c}+R\cos{(\theta)})^{2} + (y_{c}+R\sin{(\theta)})^{2}}$$

On pose :

$$\large \left\{   \begin{array}{ll}   x = x_{c} + R\cos{(\theta)} \\   y = y_{c} + R\sin{(\theta)} \\   \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\large Z = x + iy + C^{2}\frac{x-iy}{R^{2}}$$

On en déduit :

$$\large \left\{   \begin{array}{ll}   X = x + C^{2}\frac{x}{R^{2}} \\   Y = y - C^{2}\frac{y}{R^{2}} \\   \end{array} \right.$$

C est l'abscisse de l'intersection du cercle avec Ox. Lors de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre c'est l'abscisse de l'un des points d'arrêt.

De plus on pose : $\large \beta = \arcsin{(\frac{-y_{c}}{R})}$

$$\large \left\{   \begin{array}{ll}   x_{c} = C - R\cos{(\beta)} \\   y_{c} = - R\sin{(\beta)} \\   \end{array} \right.$$

Difficulté : commprendre comment x_c et y_c sont trouvés

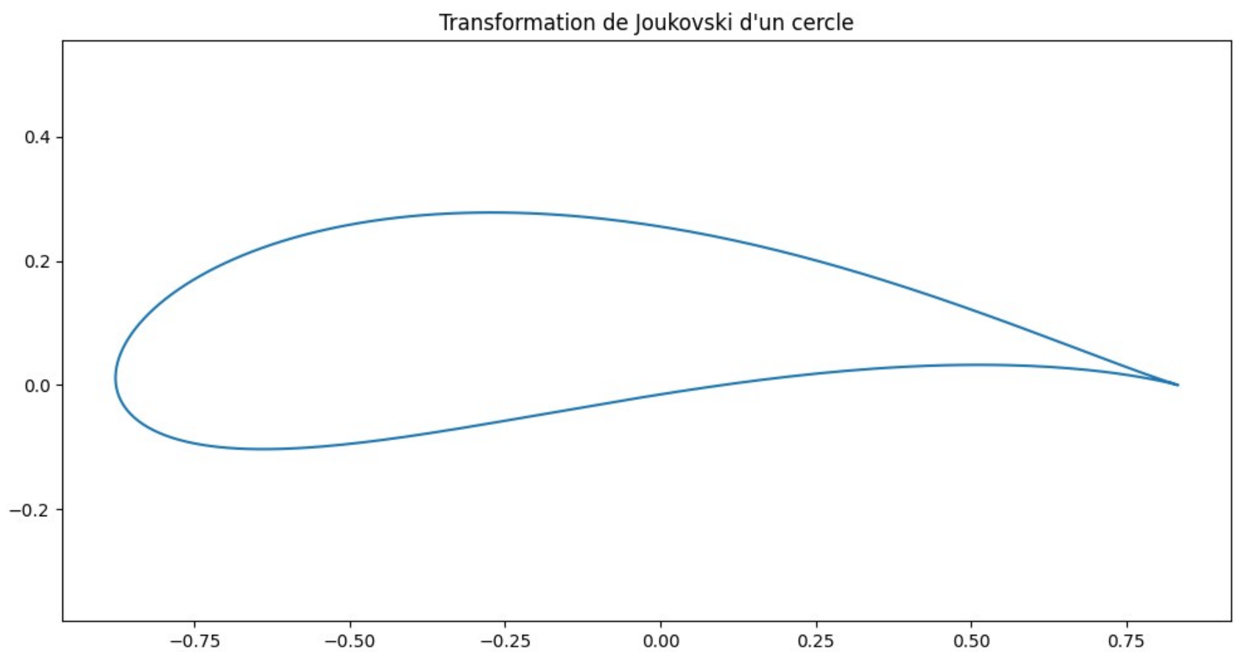
Pour se rapproché le plus possible d'une aile d'avion on vas cherché à obtenir un profil cambre après la transformation de Joukovski

On définit la transformation de Joukovski :

```
C = sp.symbols('C',real=True,positive=True)
F = lambda z:z + C**2/z

# parametres pour un profil cambre
R_cercle = float(R.subs(valeurs))
c   = float(R.subs(valeurs)/1.2)
beta = np.deg2rad(8)
x_centre = c - R_cercle*np.cos(beta)
y_centre = R_cercle*np.sin(beta)

#passage de la transformation en coordonnées cartésiennes
x_cart = re(F(x + sp.I*y))
y_cart = im(F(x + sp.I*y))

display("x_cart", x_cart)

'x_cart'

C**2*x/(x**2 + y**2) + x

display("y_cart", y_cart)

'y_cart'

-C**2*y/(x**2 + y**2) + y
```

```
# aplication de la transformation au cercle
X_cart = sp.lambdify([x,y],x_cart.subs(C,c),'numpy')
Y_cart = sp.lambdify([x,y],y_cart.subs(C,c),'numpy')

#défnition du nombre de points de la transformation
Theta = np.linspace(0,2*np.pi,410)

X_C =
X_cart(x_centre+R_cercle*np.cos(Theta),y_centre+R_cercle*np.sin(Theta)
)
Y_C =
Y_cart(x_centre+R_cercle*np.cos(Theta),y_centre+R_cercle*np.sin(Theta)
)

#traçage de la transformation
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(X_C,Y_C)
plt.title("Transformation de Joukovski d'un cercle")
plt.axis('equal')
```

```
(-0.9625763676098142,
 0.9188517165526187,
 -0.12219855888730449,
 0.29688682276663186)
```




```
#les axes doivent êtres égaux sinon on ne voit pas visuellement le
profil cambré
```

Ecoulement autour du profil de l'aile :

création de la fonction du cercle et de la transformation de Joukovski :

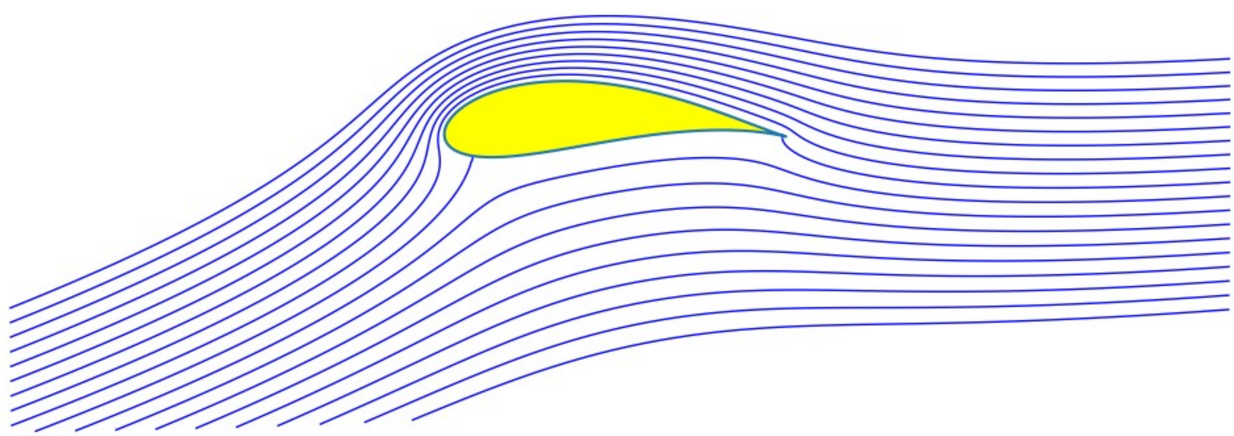
```
def Joukovski (Z, C):
    return Z + (c**2)/Z

def Cercle (c_centre, R):
    Theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
    return c_centre + R*np.exp(1j*Theta)  #j rend le nombre avant
imagianire en python sans SymPy

def pot_complexe_transforme(PHI,C,c_centre,R,xg,yg):
    #création de la grille de calcul et passage dans un rpère complexe
    X,Y  = np.meshgrid(xg,yg)
    Z    = X+1j*Y

    #masquage derrière le profil
    Z    = np.ma.masked_where(np.absolute(Z-c_centre)<=R,Z)
    Z_centre   = Z - c_centre

    #application de la fonction Phi à la grille complexe
    Phiz = Z_centre.copy()
    with np.errstate(divide='ignore'):
        for m in range(Z_centre.shape[0]):
            for n in range(Z_centre.shape[1]):
                Phiz[m,n] = PHI(Z_centre[m,n])

    # Joukovski transformation
    J  = Joukovski(Z, C)
    cercle = Cercle(c_centre, R)
    profil= Joukovski(cercle, C)
    return J, Phiz.imag, profil
```

Pour calculer la transformation de la circulation dans le cas d'un profil cambré on utilise les mêmes paramètres que pour transformer un cercle en un profil cambré.

```
# calcul du potentiel complexe avec nos paramètres
PhiJ = Phi.subs(valeurs)

# conversion de Phi en fonction python gâce à la fonction lambdify
PHI  = sp.lambdify(z,PhiJ)

# calcul de l'écoulement
J, Psi, profil =
pot_complexe_transforme(PHI,c,x_centre+1j*y_centre,R_cercle,x_grille,y
_grille)

# tracer
fig=plt.figure(figsize=(12,8))
```

```
ax=fig.add_subplot(111)

#traçage de l'écoulement
cp=ax.contour(J.real, J.imag, Psi,levels=Levs, colors='blue',
linewidths=1, linestyles='solid')

#traçage et remplissage du profil cambré
ax.plot(profil.real, profil.imag)
ax.fill(profil.real, profil.imag,color='yellow')

plt.axis('off')
plt.title("Ecoulement autour d'un profil cambré")
ax.set_aspect('equal');
```

Ecoulement autour d'un profil cambré



On remarque que l'écoulement modélisé possède un problème. L'écoulement au bord de fuit est incorrect. Cela est du à une erreur dans l'expression de la circulation Γ.

Correction de l'écoulement :

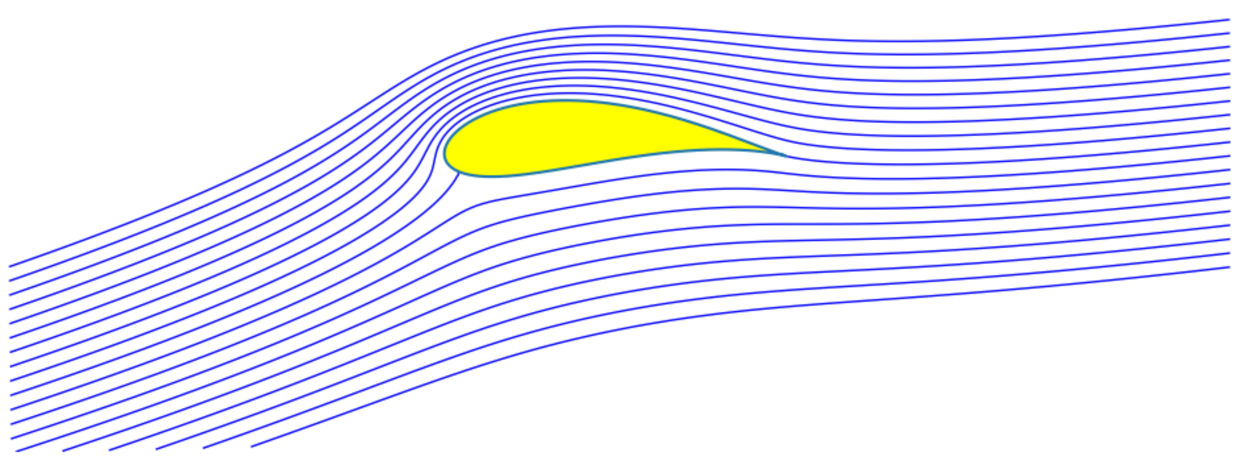
On peut corriger cela en utilisant la condition de bord de fuite de Kutta :

$$\large \Gamma = -4\pi V_{1} R \sin{(\alpha + \beta)}$$

```
# Circulation de Kutta-Joukovski
Gamma_KJ = -4*sp.pi*V_1*R*sp.sin(alpha+beta)

# on remplace les circulation pour obtenir le potentiel complexe de
Kutta-Joukovsky
Phi_KJ = Phi.subs(Gamma,Gamma_KJ).subs(valeurs)
```

```
# conversion fonction python pour les calculs
PHI_KJ  = sp.lambdify(z,Phi_KJ)

# calcul de l'écoulement corrigé
J_corrige, Psi_corrige, profil_corrige =
pot_complexe_transforme(PHI_KJ,c,x_centre+1j*y_centre,R_cercle,x_grill
e,y_grille)

# tracer
fig=plt.figure(figsize=(12,8))
ax=fig.add_subplot(111)

#traçage de l'écoulement corrigé
cp=ax.contour(J_corrige.real, J_corrige.imag, Psi_corrige,levels=Levs,
colors='blue', linewidths=1, linestyles='solid')

#traçage du profil cambré
ax.plot(profil_corrige.real, profil_corrige.imag)
ax.fill(profil_corrige.real, profil_corrige.imag,color='yellow')

plt.title("Ecoulement corrigé autour d'un profil cambré")
plt.axis('off')
ax.set_aspect('equal');
```

Ecoulement corrigé autour d'un profil cambré



Calul de la portance :

D'après les condition de kutta-Joukovski on a :

- La circulation :

$$\large \Gamma = 4\pi V_{1} R \sin{(\alpha + \beta)}$$

- La portance :

$$\large F_{p} = \rho \Gamma V_{1}$$

On a donc :

$$\large F_{p} = 4\pi\rho V_{1}^{2}R\sin{(\alpha +\beta)} $$

```
def portance_KJ(V_1, R, alpha, beta):
    return 1.2*V_1*4*np.pi*V_1*R*np.sin(alpha +beta)

print (f"{portance_KJ(1, 0.5, 12, 8)} N par unité d'envergure")

6.8834450227574555 N par unité d'envergure
```

On obtient bien une portance qui dépend du profil de l'aile via β.

Conclusion

Il est donc possible de modéliser l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Pour cela il est nécessaire d'établir un plan complexe pour obtenir le potentiel complexe. Ensuite on transforme un cercle en aile à l'aide de la transformation de Joukovski. On appique cette même transformation à l'écoulement de l'air autour d'un cynlindre et on obtient l'écoulement de l'air autour de l'aile. On peut ensuite corrigé cette écoulement grâce aux conditions de Kutta-Joukovski et ainsi obtenir la portance.

Bibliographie

- Cours effet magnus : https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/MECAFLU_HTML/EffetMagnus.html

- Cours et code de la transformation de Joukovski en Ruby : https://fr.wikibooks.org/wiki/Math%C3%A9matiques_avec_Python_et_Ruby/Joukovski_et_Ruby

- Cours transformation de Joukovski : https://maths-au-quotidien.fr/lycee/docs/Transformation_de_Joukovski.pdf

- Cours mécanique des fluides approfondie : https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/BOOK_MECAFLU_HTML/MECAFLU/Notebook/Theorie_aile.html

- Explication transformation conforme : https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_conforme

- Cours potentiel complexe : https://perso.limsi.fr/jebali/2A108/Cin%C3%83%C2%A9matique_Potentiel_Complexe.pdf

- Cours transformation de Joukovski : https://melusine.eu.org/syracuse/G/pstricks/Transformation_de_Joukowski/psJoukowskiTransform.pdf