TD12 : Condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique

LU3PY403 Thermostatistique - Sorbonne Université

January 24, 2026

1 Condensation de Bose pour le gaz parfait piégé

Les progrès importants réalisés dans les techniques de refroidissement de gaz atomiques dans les années 80-90 ont permis en 1995 d'obtenir des condensats de Bose-Einstein atomiques gazeux piégés dans des potentiels harmoniques.

On considère un gaz parfait de particules matérielles bosoniques indiscernables non relativistes dans un potentiel de piégeage. Le mouvement de chaque particule dans le piège est traité quantiquement. Chaque état propre à une particule dans le piège est repéré par un ensemble de nombres quantiques α et l'on dénote son énergie propre par ϵ_α. On supposera que l'état fondamental à une particule, d'énergie ϵ_0, est non dégénéré et repéré par $\alpha = 0$.

Le gaz est à l'équilibre thermodynamique dans l'ensemble grand canonique, paramétré par la température T et le potentiel chimique μ. On rappelle l'expression du nombre d'occupation moyen de l'état propre à une particule de nombre quantique α en fonction de ϵ_α, μ et $\beta = 1/(k_B T)$:

$$\boxed{\langle n_\alpha \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1}} \tag{1}$$

1. Sachant qu'on doit avoir $\langle n_\alpha \rangle \geq 0 \ \forall \alpha$, et que $\epsilon_{\alpha \neq 0} > \epsilon_0$, préciser le domaine de variation de μ dans la loi de Bose (1). Donner sa valeur maximale accessible μ_0 en fonction de ϵ_0.

2. On note N' le nombre moyen de particules dans les états excités, c'est-à-dire en dehors de l'état fondamental du piège. Montrer que $\langle n_\alpha \rangle$ est une fonction croissante de μ, puis que N' est majoré par
$$N'_{\max} = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \epsilon_0)} - 1} \, . \tag{2}$$

3. Dans une expérience de pensée, on augmente le nombre moyen *total* de particules N dans le gaz à température fixée.

   (a) Que se passe-t-il lorsque N devient plus grand que $N'_{\max}$? En déduire que le nombre d'occupation de l'état fontamental $\langle n_0 \rangle$ diverge lorsque $N \to \infty$.

   (b) Montrer à l'aide de la question (a) précédente que le potentiel chimique μ, qui s'adapte au nombre de particules, admet lorsque $N \to \infty$ une limite finie que l'on précisera, correspondant à $N' \to N'_{\max}$.

   (c) En déduire que dans la limite $N \gg N'_{\max}$ on a
   $$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} \simeq 1 - \frac{N'_{\max}}{N} \tag{3}$$

4. Le piège est un potentiel harmonique à trois dimensions si bien que $\alpha = (n_1, n_2, n_3)$, avec $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, et on notera ω_i la pulsation propre du mouvement des atomes dans le piège selon l'axe r_i, pour $i = 1, 2, 3$.

   (a) Donner l'expression des énergies propres ϵ_α en fonction des ω_i et des n_i, avec $i = 1, 2, 3$.

   (b) Dans la limite $k_B T \gg \hbar\omega_i$ où $\hbar = h/(2\pi)$, on peut calculer $N'_{\max}$ approximativement en remplaçant la somme sur les nombres quantiques α par une intégrale. En utilisant la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty du_1 \int_0^\infty du_2 \int_0^\infty du_3 \, \frac{1}{e^{u_1+u_2+u_3} - 1} \equiv \zeta(3) = 1{,}202... \tag{4}$$

   montrer que

$$N'_{\max} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \zeta(3) \tag{5}$$

   où $\bar{\omega}$ est la moyenne géométrique des trois pulsations.

   (c) La température critique $T_c(N)$ de la formation d'un condensat, lorsqu'on baisse la température à nombre moyen N de particules fixé, est donnée par l'égalité $N = N'_{\max}(T_c)$. Estimez T_c pour un gaz de 10^6 atomes de ^{23}Na avec des pulsations $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi \times 100$Hz et $\omega_3 = 2\pi \times 20$Hz.

   (d) On se place à une température T inférieure à la température critique. À l'aide de l'équation (3), donner la fraction d'atomes dans le condensat en fonction de $T/T_c(N)$. Le résultat est représenté par la ligne rouge sur la figure 1, avec des données expérimentales.

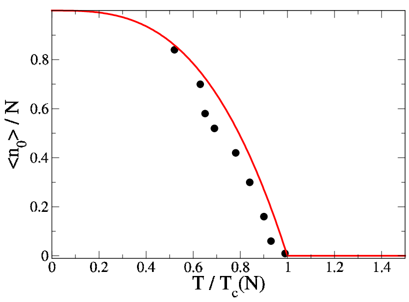

Figure 1: *Fraction d'atomes dans le condensat en fonction de la température mesurée au JILA (disques noirs) avec la prédiction du gaz parfait (trait plein en rouge).*