

# TD11 : Introduction à la physique statistique quantique

Alice Sinatra, Fabio Pietrucci, Sorbonne Université

23 avril 2024

## 1 Système à trois états : classique ou quantique

Nous considérons un système de particules identiques sans interactions qui peuvent se trouver dans trois états distincts d'énergie  $\epsilon_n = n\epsilon$ , avec  $\epsilon > 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Le système est en équilibre thermique avec un thermostat à la température  $T$ .

### 1.1

Pour commencer, considérons le cas d'une seule particule. Exprimez la fonction de partition canonique  $Z_1(\rho)$  en fonction de  $\rho \equiv e^{-\beta\epsilon}$ . Quelle est la probabilité  $q_1(\rho)$  que l'état  $n = 2$  soit vide? Tracez  $q_1(\rho)$  en fonction de  $\rho$  et donnez des expressions explicites dans les régimes de haute et basse température. Donnez une interprétation physique de vos résultats.

### 1.2

Nous avons maintenant deux particules. Énumérez les états possibles du système à deux particules et leurs énergies dans le cas bosonique puis fermionique. Exprimez les fonctions de partition  $Z_2^B(\rho)$  et  $Z_2^F(\rho)$  correspondantes et les probabilités  $q_2^B(\rho)$  et  $q_2^F(\rho)$  que l'état  $n = 2$  soit vide dans les deux cas.

### 1.3

Tracez  $q_2^B(\rho)$  et  $q_2^F(\rho)$  en fonction de  $\rho$  et donnez des expressions explicites dans les régimes de haute et basse température. Donnez une interprétation physique de vos résultats. En particulier, commentez les différences entre les bosons et les fermions à haute et basse température.

## 2 Calcul des nombres d'occupation des fermions et des bosons

### 2.1

Démontrez que, dans le cas de photons dans un mode d'énergie  $\epsilon_s$ , la moyenne thermique de  $n_s$  (nombre de photons dans le mode) est donnée par  $(e^{\beta\epsilon_s} - 1)^{-1}$  (distribution de Planck).

### 2.2

En partant de la fonction de partition dans l'ensemble grand-canonique de potentiel chimique  $\mu$ , et en introduisant les nombres d'occupation  $n_s$  des états à une particule d'énergie  $\epsilon_s$ , démontrer les expressions  $[e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} \pm 1]^{-1}$  des nombres d'occupation moyens  $\langle n_s \rangle$  pour des fermions ou des bosons. Calculer aussi la variance  $\text{Var } n_s$  à l'équilibre thermique et comparer au cas d'une loi de Poisson.