TD12 (bis) : Le condensat de Bose-Einstein, une évidence ?

Roch Smets, Sorbonne Université

January 15, 2026

1 Le condensat de Bose-Einstein : une évidence ?

Les bosons n'étant pas soumis au principe d'exclusion de Pauli, rien ne les empêche de se retrouver tous (ou presque) dans leur état fondamental. A priori rien de quantique ici... oui mais cela suggérerais que cela s'observe pour un système à $\beta\varepsilon_0 \sim 1$ ou ε_0 est l'énergie de l'état fondamental. L'objet de cet exercice est de montrer que ce raisonnement tient pour un système obéissant à la statistique de Maxwell-Boltzmann, mais qu'il en va différemment pour la statistique de Bose-Einstein : le condensat de Bose-Einstein s'observe pour $\beta\varepsilon_0 \ll 1$.
Pour l'illustrer, on s'intéresse d'abord à un système à 2 niveaux d'énergie $\varepsilon_0 = 0$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

1.1 Système à 2 niveaux dans l'ensemble canonique

1. Ecrire la fonction de partition Z_1 à $N = 1$ particule. En déduire la probabilité p_1^0 que la particule soit dans le fondamental.

2. En déduire l'expression du nombre moyen de particule dans le fondamental $\langle N_0 \rangle$. Pourquoi la forme de cette expression ne dépend pas de la statistique ?

3. On considère désormais pour ce système N particules **indépendantes** et **indiscernables** obéissant à la statistique de Maxwell-Boltzmann. Calculer la fonction de partition associée Z_N^{MB} puis en déduire p_N^0 que les N particules soient toutes dans le fondamental.

4. En déduire p_N^k, la probabilité pour que le système de N particules ait une énergie $k\varepsilon_1$. Vous pourrez vérifier la condition de normalisation de cette probabilité.

5. En introduisant le taux d'occupation pour chaque état d'énergie $k\varepsilon_1$ en déduire le nombre moyen de particules dans le fondamental $\langle N_0^{\mathrm{MB}} \rangle$. Indice : Si l'on note $I_n(q) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k p^k q^{N-k}$ alors, $I_n'(q) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k p^k (N-k) q^{N-k+1} = N(p+q)^{N-1}$.

6. Refaire le calcul de Z_N^{BE} et $\langle N_0^{\mathrm{BE}} \rangle$ en utilisant cette fois la statistique de Bose-Einstein. La différence des résultats ne vous apparaît peut-être pas de manière flagrante, mais les courbes associées (voir le notebook) souligne l'importance de la statistique.

Ces formes analytiques sont accessibles pour un système simplifié à 2 niveaux. Dans un cas plus réalistes avec un grand nombre de niveaux d'énergie, la somme discrète devrait se faire sur tout ces états, en dénombrant l'ensemble des configurations possibles, N étant fixé. Cela étant compliqué dans l'ensemble canonique, on va le faire dans l'ensemble grand-canonique où l'on fixe μ plutôt que N.

1.2 Système à $m \gg 1$ niveaux dans l'ensemble grand canonique

1. Rappeler la forme de $\langle n_i \rangle$ du nombre de particules dans l'état d'énergie ε_i pour des particules obéissant à la statistique de Bose-Einstein en équilibre avec un thermostat à la température T et un réservoir de particules dont le potentiel chimique est μ. En déduire $\langle N_0 \rangle$, le nombre de particules dans l'état fondamental. Dans notre système, μ peut-il prendre n'importe quelle valeur ?

2. A partir de la relation précédente entre μ et $\langle N_0 \rangle$, expliciter la forme du nombre N de particules en fonction de $\langle N_0 \rangle$.

3. Pour pouvoir expliciter le rapport $\frac{\langle N_0 \rangle}{N}$, il faut avoir accès à l'ensemble des niveaux d'énergie ε_i afin de pouvoir calculer la somme qui les contient. Les condensats s'obervant à basse température, on considère un gaz monoatomique de bosons non-relativistes dans une boîte cubique de côté L. En introduisant le triplet $\mathbf{n}$ qui permet de définir les vecteurs d'onde accessibles $\mathbf{k}_n = \frac{\pi}{L}\mathbf{n}$, expliciter la forme du niveau d'énergie ε_n. Explicitez la forme de ε_1 associé à l'écart en énergie entre le fondamental et le premier état excité.

4. Reformuler le résultat précédent pour exprimer N en fonction de $\langle N_0 \rangle$ et $\beta\epsilon$.

5. A titre de comparaison, comment s'écrie l'expression précédente de N pour un gaz classique suivant la statistique de Maxwell-Boltzmann

1.3 Solution (numérique) exacte par sommation

1. Comme pour le système à 2 niveaux, tracer $\langle N_0 \rangle / N$ en fonction de $\frac{1}{\beta\epsilon}$ pour les 2 statistiques. A quelle température le condensat de Bose-Einstein commence-t'il à s'observer ?

1.4 Solution (analytique) approchée par intégration

1. Justifier que dans la limite continue, on puisse remplacer $\sum_{\mathbf{n}}$ par $\frac{1}{8}\int_0^\infty 4\pi n^2\,\mathrm{d}n$.

2. Rappeler la forme de l'équation de dispersion $\varepsilon(n)$. En déduire la forme de l'intégrale de la question précédente pour la variable d'intégration ε.

3. Est-il raisonnable d'en déduire l'expression de N par l'intégrale

$$N = \frac{\pi}{4\epsilon^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

4. Montrer alors que le nombre moyen de particules dans un état excité (ie non dans l'état fondamental) s'écrit

$$\langle N_{\mathrm{exc}} \rangle = \frac{\pi}{4\epsilon^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

   Exprimer ce résultat en fonction de la fonction ζ de Riemann.

5. On va enfin chercher la limite en température T_C (température critique) pour laquelle $\langle N_{\mathrm{exc}} \rangle$ devient grand, ie $\langle N_{\mathrm{exc}} \rangle > N$. Donner l'expression de T_C. En déduire une expression de $\frac{\langle N_{\mathrm{exc}} \rangle}{N}$ (et donc aussi celle de $\frac{\langle N_0 \rangle}{N}$) en fonction de T pour $T < T_C$. Tracer les courbes de $\frac{\langle N_0 \rangle}{N}$ pour les 3 cas : numérique exact et analytique approché. Commenter.