: Exercices de cours à faire avant le TD et qui ne seront pas corrigés en séances

: Exercices à préparer avant le TD et qui seront corrigés en séance

: Exercices non corrigés en TD (plus difficiles), pour réviser & s'entraîner

N'hésitez pas à demander des éclaircissements auprès de vos enseignant·e·s.

1 Décroissance radioactive

On considère la désintégration d'une source radioactive. On observe que pendant une durée T courte devant la demi-vie de la source, le nombre *moyen* de désintégrations est $\langle k \rangle = \alpha T$. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que pendant un temps T il y ait k désintégrations. Pour modéliser la désintégration, on découpe la durée T en $N \gg 1$ intervalles de très courte durée $\Delta t = \frac{T}{N}$. Pendant chacun des N intervalles Δt, il y a donc 0 ou 1 désintégration. On suppose que les événements sont indépendants d'un intervalle à l'autre. Soit $p \ll 1$ la probabilité qu'une désintégration se produise pendant un intervalle Δt

1 – Quel est le nombre moyen de désintégrations dans un intervalle Δt donné ? Quel est le nombre moyen de désintégrations pendant la durée T ? En relisant l'introduction, en déduire une expression de p en fonction de α, N et T.

On veut maintenant calculer la distribution de probabilité du nombre de désintégrations. On commence par supposer N fini, et, à la toute fin du calcul, on prendra la limite $N \to \infty$.

2 – Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration pendant un intervalle Δt donné (par exemple le 17$^{\text{e}}$) et aucune pendant tous les autres intervalles ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement une désintégration pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quel instant elle a eu lieu.

3 – Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégrations pendant le temps T, l'une à l'intervalle 17 et l'autre à l'intervalle 71 par exemple ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement deux désintégrations pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quels instants elles ont eu lieu.

4 – De même, déterminer la probabilité $P(k)$ d'avoir exactement k désintégrations pendant la durée T à des instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution de probabilité est normalisée.

5 – Prendre la limite $N \to \infty$ (après avoir remplacé p par son expression en fonction de N bien sûr) pour obtenir $P(k)$ en fonction de α et de T (on rappelle que $\lim\limits_{N\to\infty} \left[1 + \dfrac{a}{N}\right]^N = \mathrm{e}^a$).
Indice : en cas de doute, commencer par calculer la limite pour $k = 1$ ou $k = 2$.

6 – Comment s'appelle cette distribution de probabilité ? Vérifier qu'elle est bien normalisée. Calculer explicitement la valeur moyenne $\langle k \rangle$ et la variance $\mathrm{Var}(k)$.
Indice : écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

Eléments de réponses :

1 : $p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$, $\langle k \rangle = Np$ (car N intervalles indépendants) et $p = \alpha \frac{T}{N} = \alpha \Delta t$;

2 : $p(1-p)^{N-1}$, puis $Np(1-p)^{N-1}$ (car $\binom{N}{1} = N$ possibilités pour l'unique désintégration) ;

3 : $p^2(1-p)^{N-2}$, puis $\binom{N}{2} \times p^2(1-p)^{N-2}$ (car $\binom{N}{2}$ possibilités pour deux désintégrations parmi N intervalles) ;

4 : $P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ (car $\binom{N}{k}$ possibilités pour k désintégrations parmi N intervalles) et $\sum_{k=0}^{N} P(k) = 1$ par la formule du binôme de Newton ;

5 : $P(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} (\frac{\alpha T}{N})^k (1 - \frac{\alpha T}{N})^{N-k} = \frac{N.(N-1)...(N-(k-1))}{k!} (\frac{\alpha T}{N})^k (1 - \frac{\alpha T}{N})^{N-k} \simeq \frac{N^k}{k!} (\frac{\alpha T}{N})^k \mathrm{e}^{-\alpha T} = \frac{1}{k!} (\alpha T)^k \mathrm{e}^{-\alpha T}$

6 : Loi de Poisson : $\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \mathrm{e}^{-\alpha T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha T)^k}{k!} = 1$; $\langle k \rangle = \mathrm{e}^{-\alpha T} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\alpha T)^k}{k!} = (\alpha T) \mathrm{e}^{-\alpha T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha T)^{k-1}}{(k-1)!} =$

αT et $\langle k(k-1)\rangle = \mathrm{e}^{-\alpha T}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{(\alpha T)^k}{k!} = (\alpha T)^2 \mathrm{e}^{-\alpha T}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\alpha T)^{k-2}}{(k-2)!} = (\alpha T)^2$ donc $\mathrm{Var}(k) = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2 = \langle k(k-1)\rangle + \langle k\rangle - \langle k\rangle^2 = \alpha T = \langle k\rangle$.

2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de N molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume V. Soit k le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume v du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k\rangle$ de k ?

2 – Quel est l'écart-type σ_k de k ?
Indice : on peut écrire la variable k comme une somme de N variables aléatoires indépendantes.
Données : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{10}$ et $N = \mathcal{N}_A$.

3 – Faire l'application numérique

4 – Pour N très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de k ?

5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume v ?
On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait k molécules dans le volume v.

6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les k molécules parmi N qui sont dans le volume v ?

7 – Quelle est la probabilité de *l'un* de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume v ?)

8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?

9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \tag{1}$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.

10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à x, *puis* remplacer y par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de k.

11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k\rangle$ (on posera $k = \langle k\rangle + s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

3 Distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses

On rappelle que la densité de probabilité qu'une molécule de masse m d'un système à l'équilibre à la température T ait une vitesse $\vec{v}$ à $\mathrm{d}\vec{v}$ près est donnée, selon Maxwell, par :

$$\mathrm{P}(\vec{v}) = C\,\mathrm{e}^{-\beta\frac{m\vec{v}^2}{2}} \quad ,$$

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et où C est une constante.

1 – Déterminer C (la distribution de probabilité doit être normalisée).

2 – En déduire la densité de probabilité $F(v_x)$ que la projection selon l'axe Ox du vecteur vitesse d'une molécule soit égale à v_x à $\mathrm{d}v_x$ près.

3 – Calculer la vitesse moyenne $\langle\vec{v}\rangle$ d'une molécule.

4 – Calculer la vitesse quadratique moyenne v_q d'une molécule, définie par $v_q^2 = \langle\vec{v}^2\rangle$.

5 – Montrer que l'énergie cinétique de translation moyenne d'une molécule est $\langle e\rangle = \frac{3}{2}k_BT$.

Eléments de réponses :

1 : $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_z P(\vec{v}) = C\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_x \mathrm{e}^{-\beta\frac{mv_x^2}{2}}\right]^3 = C\left[\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}\right]^3 = 1$ (normalisation de P) voir exercice **??** sur l'intégrale gaussienne, donc $C = \left[\frac{\beta m}{2\pi}\right]^{\frac{3}{2}}$.

2 : Par symétrie : $F(v_x) = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\beta\frac{mv_x^2}{2}}$.

3 : $\langle\vec{v}\rangle = \vec{0}$ car $\langle v_x\rangle = \langle v_y\rangle = \langle v_z\rangle = 0$ (isotropie de l'espace, F est une fonction paire).

4 : $v_q = \langle v^2\rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle = 3\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_x\, v_x^2 F(v_x) = \frac{3}{\beta m}$.

5 : $\langle e\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2}k_BT$.

4 Manipulation mathématiques

L'intégrale Gaussienne

Soit l'intégrale gaussienne $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$, où $\alpha > 0$.

1 – Montrer que $I_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$.

2 – Exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-2}(\alpha)$.

3 – On admet en sus que $I_0(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. En déduire que $I_2(\alpha) = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ et que $I_3(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

La fonction Gamma et la factorielle

On définit la fonction Gamma, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.

4 – Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.

5 – Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(N+1)$ en fonction de $N!$, où N est un entier positif.

Les factorielles des grands nombres et la formule de Stirling

On montre que la factorielle $n!$ d'un nombre n entier peut s'approcher par le développement suivant :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\left[1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} + O(\frac{1}{n^3})\right]$$

où $O(\frac{1}{n^3})$ représente les termes d'ordre supérieur ou égal à trois en $\frac{1}{n}$.

6 – Rappeler la définition de $n!$ où n est un nombre entier positif.

7 – Calculer à l'aide d'une calculatrice de poche (ou de tout autre moyen dont vous disposez) 2!, 8!, 16! et 64!.

8 – Jusqu'à quelle valeur de n peut-on calculer $n!$ sur une calculatrice de poche standard ?

9 – Calculer de nouveau 2!, 8!, 16! et 64! en utilisant l'approximation suivante (dite d'ordre zéro) pour la factorielle

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.$$

10 – Calculer numériquement l'erreur relative $r(n)$ (c'est-à-dire le quotient $r(n) = \frac{n! - \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}}{n!}$) pour $n = 2, 8, 16$ et 64.

11 – Montrer que les résultats numériques sont compatibles avec $r(n) \sim \dfrac{1}{12\,n}$.

12 – On utilise la première expression de $n!$ pour calculer $\ln(n!)$. En déduire une expression de $\ln(n!)$ sous la forme d'une somme.

13 – Jusqu'à quelle valeur de n peut-on calculer $\ln(n!)$ sur une calculatrice de poche standard ?

14 – Calculer numériquement l'erreur relative sur $\ln(n!)$ faite en utilisant l'approximation d'ordre zéro pour $n!$ pour les valeurs suivantes de n : 2, 8, 16, 64 , 1024, 10^{10} et le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$.

15 – Dans la question précédente, quelle est la contribution du terme $\ln(\sqrt{2\pi n})$? Est-il raisonnable pour n grand d'approcher $\ln(n!)$ par $n\ \ln(n) - n$? On pourra estimer à partir de quelle valeur de n cette approximation est bonne à 0,1% près.

16 – L'approximation $\ln(n!) \sim n\ \ln(n) - n$ est connue par les physiciens sous le nom de *formule de Stirling*. En prenant l'exponentielle de cette formule, peut-on affirmer qu'il est raisonnable d'approcher $n!$ par $n^n\ e^{-n}$?