: `Exercices de cours à faire avant le TD et qui ne seront pas corrigés en séances`

: `Exercices à préparer avant le TD et qui seront corrigés en séance`

: `Exercices non corrigés en TD (plus difficiles), pour réviser & s'entraîner`

`N'hésitez pas à demander des éclaircissements auprès de vos enseignant·e·s.`

1 Le modèle d'Ising en champ moyen

Le modèle d'Ising est le cadre le plus simple pour étudier la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique. Le système est formé de $N \gg 1$ atomes localisés aux nœuds d'un réseau cristallin de coordinence q (le nombre de plus proches voisins). Chaque atome i porte un moment magnétique μ_i ne pouvant prendre que deux valeurs $\mu_i = \pm\mu$ (spin $\frac{1}{2}$). Le système est plongé dans un champ magnétique extérieur B et est en contact avec un thermostat à la température T. L'hamiltonien du modèle d'Ising, suggéré par Wilhelm Lenz vers 1924 à son étudiant en thèse Ernst Ising, s'écrit

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mu_i \mu_j - B \sum_{i=1}^{N} \mu_i \quad \text{avec} \quad J > 0 \tag{1}$$

où $\langle i, j \rangle$ indique que la somme est prise sur toutes les paires de sites plus proches voisins.

1 – Dans quel micro-état l'énergie du système est-elle minimale ? Que vaut alors dans cette configuration le moment magnétique moyen $m = \langle \mu_i \rangle$?

2 – Exprimer la fonction de partition Z du système à l'équilibre avec un thermostat à la température T. On note $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Pourquoi ne peut-on pas la calculer en général ?

3 – Dans le cas de l'hamiltonien ci-dessus, l'approximation de champ moyen s'obtient à partir de l'identité

$$\mu_i \mu_j = (\mu_i - m)(\mu_j - m) + m(\mu_i + \mu_j) - m^2 \tag{2}$$

où $m = \langle \mu_i \rangle$ est la valeur moyenne du moment magnétique, que l'on cherche à déterminer dans la suite. Montrer qu'en négligeant le terme $(\mu_i - m)(\mu_j - m)$, l'hamiltonien se réécrit

$$H \simeq \sum_{i=1}^{N} h_i \quad \text{avec} \quad h_i = -(Jqm + B)\mu_i + J\frac{q}{2}m^2$$

4 – Calculer alors la fonction de partition Z_{cm} et l'énergie libre F_{cm}.

5 – Exprimer le moment magnétique moyen m comme une dérivée partielle de F et en déduire l'équation auto-cohérente :

$$m = \mu \tanh\left[\beta\mu(Jqm + B)\right] \tag{3}$$

6 – Pour résoudre graphiquement l'équation auto-cohérente (3) en *champ nul* (pour $B = 0$), introduire la variable $x = \beta J q \mu m$ et tracer $y_1(x) = \frac{x}{\beta J q \mu^2}$ et $y_2(x) = \tanh(x)$. Montrer que résoudre (3) revient à chercher l'intersection des courbes $y_1(x)$ et $y_2(x)$. Montrer que pour $T > T_c = \frac{Jq\mu^2}{k_B}$ il n'y a qu'une solution $m = 0$ et que pour $T < T_c$ il y a trois solutions, $m = 0$ et $m = \pm m_s(T)$, que l'on ne cherchera pas à calculer. Pourquoi parle-t-on de brisure de symétrie ?

7 – Tracer $F_{\rm cm}(m)$, dont l'expression a été obtenue à la question précédente, et montrer que les seules solutions stables pour $T < T_c$ sont $m = \pm m_s(T)$. La courbe de $\frac{m(T)}{\mu}$ est représentée sur la figure ci-dessous. Commenter l'accord avec les données expérimentales présentées.

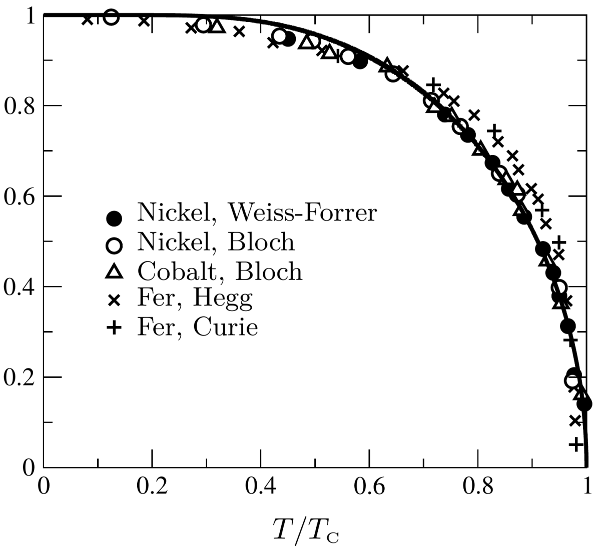

Figure 1 – Aimantation spontanée $\frac{m(T)}{\mu}$ de plusieurs substances ferromagnétiques en fonction de la température $\frac{T}{T_c}$, où $T_c = 1043$ K pour le fer, $T_c = 650$ K pour le nickel, $T_c = 1415$ K pour le cobalt. Le trait plein correspond à la solution numérique, $m_s(T)$, de l'équation (3). Les points sont les résultats expérimentaux obtenus par les auteurs mentionnés dans la légende (d'après Sator&Pavloff (Vuibert, 2016)).

8 – Écrire un développement limité de l'équation auto-cohérente (3) au voisinage du point critique (où $m \simeq 0$) et montrer que $m \sim (T_c - T)^\beta$ pour $T < T_c$, où β (et oui... terrible comme notation n'est-ce pas ?) est un exposant critique dont on déterminera la valeur. Dépend-elle du matériau considéré ?

9 – Calculer la dérivée partielle $\left.\frac{\partial m}{\partial B}\right|_T$ en fonction de m, T et B à l'aide de l'équation (3) et en déduire la susceptibilité magnétique en champ nul (pour $B = 0$), $\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial B}\right|_T$, en fonction de T. Montrer qu'au voisinage du point critique $\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$, où γ est un exposant critique dont on déterminera la valeur (on distinguera les cas $T > T_c$ et $T < T_c$).

10 – Amorcer l'étude en champ magnétique non nul (pour $B \neq 0$). Montrer notamment qu'il existe toujours une unique solution d'aimantation non nulle dans le sens du champ, quelle que soit la température, et justifier que la variation de cette aimantation ne présente pas de singularité en fonction de la température.