: Exercices de cours à faire avant le TD et qui ne seront pas corrigés en séances

: Exercices à préparer avant le TD et qui seront corrigés en séance

: Exercices non corrigés en TD (plus difficiles), pour réviser & s'entraîner

N'hésitez pas à demander des éclaircissements auprès de vos enseignant·e·s.

1 Systèmes d'oscillateurs harmoniques quantiques

Un système constitué de N oscillateurs harmoniques *quantiques* de pulsation ω à une dimension, discernables et indépendants, est isolé, son énergie étant égale à E. Pour rappel, l'énergie de l'oscillateur $i = 1, \ldots, N$ est donnée par $e_i = (n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega$, où n_i est le nombre quantique d'excitation de l'oscillateur.

1 – Donner l'expression de l'énergie du système en fonction des nombres quantiques d'excitation n_i, où $i = 1 \ldots N$.

D'après ce qui précède fixer l'énergie E revient à fixer la valeur de la somme des nombres quantiques n_i à une valeur M :

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = M$$

Soit $\Omega(N, E)$ le nombre de micro-états du système de N oscillateurs dont l'énergie vaut E.

2 – Commencer par calculer $\Omega(N, E)$ pour N quelconque et pour $M = 0, 1$ puis 2.

3 – Calculer à présent $\Omega(N, E)$ pour $N = 2$ et $M = 3$.

4 – Calculer $\Omega(N, E)$ dans le cas général.
Indice : ce problème est équivalent à trouver le nombre de façons de répartir M objets dans N boîtes distinctes.

5 – Vérifier l'expression en calculant par une sommation directe la dégénérescence des niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique tridimensionnel ($N = 3$), c'est-à-dire le nombre de possibilités d'avoir $n_x + n_y + n_z = M$.

6 – Dans la limite des hautes énergies (N étant fixé et $M \gg N$), montrer que l'on a :

$$\Omega(N, E) \simeq \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{N-1}$$

7 – En déduire l'entropie micro-canonique dans la limite des hautes énergies, puis la température. Inverser cette relation pour obtenir $E(T)$.

2 L'OHQ dans tout ses micro-états

On considère dans un premier temps une collection de N oscillateurs harmoniques quantiques 1D identiques, faiblement couplés entre eux et isolés du reste de l'univers. Le nombre de quanta d'énergie qu'ils se partagent est égal à M. Dans toute la suite, on considérera que $N \gg 1$ et $M \gg 1$.

1 – Calculer l'énergie totale $E(N, M)$ et le nombre de micro-états $\Omega(N, M)$ du système, puis $\ln \Omega(N, M)$.

2 – Soit un OHQ particulier. Calculer le nombre de micro-états $\Omega(N, M|m)$ du système pour lequel cet OHQ possède exactement m quanta d'énergie. En déduire la probabilité $p(m)$ qu'un OHQ contienne exactement m quanta d'énergie.

3 – On introduit $\overline{m} = \frac{M}{N}$. Quelle est l'interprétation de $\overline{m}$? Montrer que dans l'hypothèse où $M \gg m$, $p(m)$ peut être approché par

$$p(m) \sim \frac{1}{1+\overline{m}} \left(\frac{\overline{m}}{1+\overline{m}}\right)^m$$

Tracer $p(m)$. Montrer que même dans l'approximation précédente $\sum_{m=0}^{m=M} p(m) = 1$.

On considère désormais deux collections d'OHQ, appelées 1 et 2, comportant N_1 et N_2 OHQ respectivement et M_{1i} (resp. M_{2i}) quanta d'énergie. Initialement isolées, elles sont mises en contact thermique à l'instant initial pour former une collection unique de $N = N_1 + N_2$ OHQ faiblement couplés avec $M = M_{1i} + M_{2i}$ quantas. Tous ces nombres sont $\gg 1$.

4 – Calculer le nombre de micro-états du système réuni juste avant le contact Ω_i puis juste après Ω_f. Comparer Ω_i et Ω_f.

5 – Grâce au contact et au faible couplage, le nombre de quanta de 1 est désormais libre de fluctuer par échange d'énergie avec 2. Exprimer littéralement la probabilité $P(M_1)$ pour que la collection 1 possède M_1 quantas exactement.

6 – En vous aidant de la formule de Stirling pour écrire $\ln P(M_1)$, calculer la valeur $\overline{M_1}$ de M_1 qui rend $P(M_1)$ maximum. Interpréter le résultat obtenu.

7 – Calculer le nombre Ω_e de micro-états du système correspondant à $\overline{M_1}$ quanta dans 1. Comparer Ω_e à Ω_i et Ω_f , puis $\ln \Omega_e$ à $\ln \Omega_i$ et $\ln \Omega_f$. Que constate-t-on avec bonheur ?

8 – Expliquer (avec des mots) ce qu'il advient quand on met en contact thermique deux systèmes.