: Exercices de cours à faire avant le TD et qui ne seront pas corrigés en séances

: Exercices à préparer avant le TD et qui seront corrigés en séance

: Exercices non corrigés en TD (plus difficiles), pour réviser & s'entraîner

N'hésitez pas à demander des éclaircissements auprès de vos enseignant·e·s.

1 Le modèle d'Einstein en micro-canonique

On considère un solide formé de N ions ou atomes vibrant autour de leurs positions d'équilibre avec la même fréquence ν. On suppose que ce solide est isolé thermiquement et que son énergie est E avec une incertitude que l'on négligera. On rappelle que l'énergie de vibration d'un oscillateur harmonique de fréquence ν suivant un axe est :

$$\epsilon_k = (k + \frac{1}{2})h\nu$$

où k est un entier naturel. Soit $E \gg \frac{3N}{2}h\nu$, l'énergie associée aux vibrations du solide.

1 – Calculer le nombre de micro-états $\Omega(E, N)$ du système.

2 – En déduire l'expression de l'entropie $S(E, N)$.

3 – Déterminer la température T du solide à l'équilibre.

4 – Inverser la relation précédente et montrer que l'énergie E s'exprime en fonction de $\beta = \frac{1}{k_B T}$ comme

$$E = \frac{3}{2}Nh\nu + \frac{3Nh\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}.$$

5 – Comment varie l'énergie à haute température ? En déduire la capacité calorifique du solide dans cette limite. Quelle loi bien connue retrouve-t-on ?

2 Systèmes d'oscillateurs harmoniques classiques

On considère un système constitué de $N \gg 1$ oscillateurs harmoniques *classiques*, de masse m, de pulsation propre ω, localisés sur un axe à une dimension et *indépendants*.

On rappelle que l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est :

$$\epsilon = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{p_x^2}{2m},$$

où x est l'abscisse de l'écart à la position d'équilibre et p_x la quantité de mouvement associée.

1 – Calculer le volume dans l'espace des phases des états d'énergie inférieure ou égale à E. Par des changements de variables appropriés, on fera apparaître le volume V_{2N} de la boule de dimension $2N$ de rayon $R = 1$, $V_{2N} = \frac{\pi^N}{\Gamma(N+1)}$.

2 – En déduire le nombre de micro-états $\Phi(E, N)$ d'énergie inférieure ou égale à E, puis l'entropie $S(E, N)$ du système. L'entropie est-elle bien extensive ?

3 – Calculer la température de ce système, puis sa capacité calorifique. Comparer aux résultats de l'exercice précédent.

4 – Comment généraliser ce résultat pour une collection d'OH 3D ?