

 : Exercices de cours à faire avant le TD et qui ne seront pas corrigés en séances

 : Exercices à préparer avant le TD et qui seront corrigés en séance

 : Exercices non corrigés en TD (plus difficiles), pour réviser & s'entraîner

N'hésitez pas à demander des éclaircissements auprès de vos enseignant.e.s.

## 1 Gaz de fermions à deux dimensions

On étudie un gaz parfait constitué de  $N$  fermions indépendants de masse  $m$  et de spin  $\frac{1}{2}$ , libres mais astreints à se déplacer sur une surface d'aire  $S$  et à l'équilibre à la température  $T$ .

- 1 – Déterminer la densité d'état en énergie  $\rho_{2D}(\epsilon)$  (en appliquant des conditions aux limites périodiques pour le vecteur d'onde).
- 2 – Rappeler quel est le nombre moyen d'occupation  $n(\epsilon)$  d'un état quantique d'énergie  $\epsilon$  lorsque le potentiel chimique du gaz est égal à  $\mu$ .
- 3 – En déduire la relation implicite qui détermine le potentiel chimique  $\mu$  en fonction de  $N$ ,  $S$  et  $T$ .

On se place dans l'approximation de la température nulle.

- 4 – Calculer le niveau de Fermi  $\epsilon_F = \mu(T = 0)$  et la température de Fermi  $T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B}$ .
- 5 – Application numérique : le graphite peut être considéré comme étant formé d'un empilement de plans parallèles. Chaque plan est constitué d'un réseau hexagonal à chaque noeud duquel se trouve un carbone ayant un électron de conduction. Le côté de l'hexagone mesure 0,142 nm. Calculer la densité  $\frac{N}{S}$  et la position du niveau de Fermi du graphite à température nulle en eV.

On se place maintenant à température non nulle.

- 6 – Calculer l'expression exacte du potentiel chimique à une température quelconque. On remarquera que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + Ae^x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + A}$$

- 7 – Tracer la courbe  $\mu(T)$  et préciser le comportement de  $\mu$  dans la limite des basses températures.
- 8 – Application numérique : calculer le potentiel chimique pour le graphite lorsque  $T = 1000$  K. Conclusion ?
- 9 – Démontrer les relations

$$J = -E, C = \frac{2E}{T} - Nk_B \frac{T_F/T}{1 - \exp(-T_F/T)}$$

où  $J$  et  $E$  sont respectivement le grand potentiel et l'énergie du gaz, et  $C$  sa capacité calorifique (à surface constante et, hélas à nombre de particules constant). La deuxième relation ne peut être obtenue qu'après des calculs assez laborieux.. Qu'on se le dise !