

MASTER “PLASMAS : DE L’ESPACE AU LABORATOIRE”

# MODÉLISATIONS FLUIDES DES PLASMAS

Jean-Luc RAIMBAULT, Roch SMETS

*Année 2011-2012*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Notion de moments dans l'espace des vitesses . . . . .	8
1.2	Variables macroscopiques du plasma . . . . .	11
1.2.1	Moments non centrés . . . . .	12
1.2.2	Moments centrés . . . . .	12
1.2.3	Pression et température cinétique . . . . .	14
1.2.4	Vecteur flux de chaleur . . . . .	16
1.3	Description cinétique ou fluide d'un plasma . . . . .	17
1.3.1	Approches fluide et cinétique : dualité? . . . . .	17
1.3.2	Les limites de l'approche fluide . . . . .	17
1.4	Exercices . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Equations macroscopiques de transport</b>	<b>21</b>
2.1	Rappels sur les équations de Maxwell . . . . .	22
2.2	Equations de transport obtenues par bilans macroscopiques . . .	24
2.2.1	Equations de transport de la masse . . . . .	26
2.2.2	Equations de transport de la quantité de mouvement . . .	28
2.2.3	Equations de transport de l'énergie . . . . .	30
2.3	Equations de transport obtenues à partir de l'équation de Boltzmann . . . . .	32
2.3.1	Equation cinétique de Boltzmann . . . . .	32
2.3.2	Equation générale de transport . . . . .	34
2.3.3	Equations macroscopiques de transport . . . . .	35
2.4	Résumé . . . . .	38
2.5	Exercices . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Rôle des collisions dans les modélisations fluides</b>	<b>43</b>
3.1	Rappels sur les collisions dans un plasma . . . . .	43
3.1.1	Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires . . . . .	46

---

3.2	Contributions des collisions élastiques aux équations de bilan . .	48
3.2.1	Rappels sur l'intégrale de collision de Maxwell-Boltzmann	49
3.2.2	Contributions des collisions élastiques aux équations de bilan . . . . .	51
3.2.3	Cas des fréquences de collisions constantes . . . . .	53
3.3	Contributions des collisions inélastiques aux équations de bilan .	55
3.4	Diffusion et mobilité dans les plasmas collisionnels . . . . .	59
3.4.1	Plasmas collisionnels non-magnétisés : diffusion et mobilité	60
3.4.2	Plasmas collisionnels magnétisés . . . . .	61
3.4.3	Diffusion ambipolaire et non ambipolaire . . . . .	65
3.5	Exercices . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Fermeture des équations fluides</b>	<b>79</b>
4.1	Troncatures sur les moments . . . . .	81
4.1.1	Troncatures sur la pression . . . . .	82
4.1.2	Troncatures sur le flux de chaleur . . . . .	85
4.2	Fermetures sur la fonction de distribution . . . . .	86
4.2.1	Approximation à 5 moments . . . . .	87
4.2.2	Approximation à 8 moments . . . . .	89
4.2.3	Généralisations à un nombre de moments plus élevé . . .	90
4.3	Exercices . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Ondes et instabilités dans les plasmas</b>	<b>95</b>
5.1	Les ondes dans un plasma . . . . .	95
5.1.1	Rappel sur les ondes dans un plasma . . . . .	95
5.1.2	Modes linéaires et non-linéaires . . . . .	98
5.1.3	Relation de dispersion dans un plasma . . . . .	99
5.2	Les plasmas : conducteurs ou diélectriques ? . . . . .	101
5.2.1	Tenseur de conductivité et tenseur diélectrique . . . . .	101
5.2.2	Dispersion spatiale et temporelle . . . . .	102
5.2.3	Dissipation . . . . .	105
5.2.4	Tenseur diélectrique en plasma froid . . . . .	107
5.3	Exemples de modes linéaires . . . . .	109

---

5.3.1	L'onde helicon (ou siffleur) . . . . .	109
5.3.2	L'onde acoustique-ionique . . . . .	110
5.4	Exemples de modes non-linéaires . . . . .	112
5.4.1	Les équations de Zakharov . . . . .	112
5.5	Exemples d'instabilités macroscopiques . . . . .	119
5.5.1	Le mode interchange . . . . .	120
5.5.2	L'instabilité de dérive hybride basse . . . . .	125
5.6	Exercices . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Réduction fluide</b>	<b>129</b>
6.1	Réduction Magnéto-Hydro-Dynamique . . . . .	130
6.1.1	Les variables MHD . . . . .	130
6.1.2	L'hypothèse des variations lentes . . . . .	131
6.1.3	Les équations MHD . . . . .	132
6.1.4	Le courant de déplacement . . . . .	133
6.1.5	La loi d'Ohm . . . . .	134
6.2	Réduction Electro-Hydro-Dynamique . . . . .	135
6.3	Exercices . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Problèmes</b>	<b>143</b>
7.1	Diagramme CMA (Clemmow - Mullaly - Allis) . . . . .	143
7.2	Post-décharge et maintien d'un plasma confiné . . . . .	147
7.3	Relaxation et maintien d'un plasma collisionnel confiné . . . . .	148
7.3.1	Relaxation d'un plasma confiné sans source d'ionisation .	148
7.3.2	Maintien d'un plasma confiné . . . . .	150
7.4	Modes anisotropes en bi-fluides . . . . .	153
7.5	Critère de Bohm dans les plasmas faiblement ionisés . . . . .	155
7.5.1	Critère de Bohm dans un plasma électropositif . . . . .	155
7.5.2	Vitesse de Bohm dans un plasma électronégatif . . . . .	157



# Introduction

Un plasma est un gaz pour lequel au moins une partie des électrons des atomes ou molécules qui le constituent sont libres (en général en conséquence d'un apport d'énergie). Pour décrire un plasma, il faut donc décrire la dynamique de ces particules chargées (ainsi que celle des particules neutres si elles existent), et le couplage avec les champs électromagnétiques associés. Le très grand nombre de ces particules suggère l'utilisation de grandeurs statistiques et/ou probabilistes. On range souvent les modèles qui le permettent en 2 grandes classes : les modèles cinétiques et les modèles fluides.

Dans les modèles cinétiques, la grandeur de base est la fonction de distribution des particules. C'est la densité de particules dans l'espace des phases, i.e. l'espace des positions et des vitesses. C'est une grandeur probabiliste, définie sur  $\mathbb{R}^6$ . Cette fonction fournit les informations sur l'état dynamique du système de particule (d'un point de vue probabiliste) dans tout l'espace des phases. L'évolution de la fonction de distribution  $f$  dans cet espace nécessite l'intégration d'une équation aux dérivées partielles (souvent non-linéaire), ainsi qu'un couplage avec les équations de Maxwell (souvent intégro-différentiel). C'est un formalisme souvent lourd, mais indispensable lorsque la fonction de distribution devient singulière<sup>1</sup>.

Dans les modèles fluides, la forme de la fonction de distribution  $f$  permet de décrire son évolution avec un nombre limité de grandeurs. Il s'agit des moments de  $f$ , résultant de l'intégration sur l'espace des vitesses, de  $f$  multipliée par une puissance donnée de la vitesse. Pour des formes particulières de  $f$ , la donnée d'un nombre fini de ses premiers moments permet de décrire la structure du plasma. Le système qui associe les équations d'évolution de ces moments avec les équations de Maxwell est souvent bien plus simple d'un point

---

1. Cette idée sera développée dans le corps de ce cours.

de vue mathématique. Pour cette raison, ce formalisme est préférentiellement utilisé lorsque cela est légitime.

## 1.1 Notion de moments dans l'espace des vitesses

Soit  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  la fonction de distribution d'une des composantes. Rappelons que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v}$  comptabilise le nombre de particules comprises, à l'instant  $t$ , dans le domaine  $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}] \times [\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$  de l'espace des phases. En intégrant sur l'ensemble des vitesses accessibles, on obtient donc la densité,  $n(\mathbf{r}, t)$  :

$$\iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = n(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

Le domaine d'intégration correspond aux domaines de vitesses microscopiques accessibles et dépend des conditions particulières du problème étudié. En absence de restrictions, le domaine d'intégration est  $\mathbb{R}^3$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on utilisera une intégrale simple au lieu d'une intégrale triple pour alléger l'écriture. La relation précédente montre que  $f/n$  définit une densité de probabilité normalisée<sup>2</sup>, que nous noterons dans la suite  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  :

$$\int \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{n(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{v} \equiv \int F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 1 \quad (1.2)$$

En tant que densité de probabilité,  $F$  ne peut être quelconque puisque outre cette propriété de normalisation, elle doit également être définie positive.

La densité de probabilité  $F$  peut naturellement être utilisée pour intégrer les degrés de libertés de vitesses, et ainsi effectuer des moyennes dans l'ensemble des vitesses microscopiques accessibles. Considérons une fonction quelconque, scalaire, vectorielle ou tensorielle, que nous noterons  $a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Sa *valeur moyenne*  $\langle a \rangle$ , lorsqu'elle existe, est la fonction des variables  $\mathbf{r}$  et  $t$  :

$$\langle a \rangle \equiv \int a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (1.3)$$

Insistons sur le fait que  $\langle a \rangle$  est en général une fonction de  $\mathbf{r}$  et  $t$  : l'intégration des degrés de libertés des vitesses permet donc de définir des grandeurs dans

---

2. En anglais, on parle de "Probability Distribution Function" (PDF).



l'espace physique des positions et du temps. Il s'agit ici d'une moyenne d'ensemble, ou moyenne canonique. On notera également l'identité triviale  $\langle 1 \rangle = 1$ .

La fonction caractéristique d'une densité de probabilité est sa transformée de Fourier :

$$\hat{F}(\mathbf{k}) \equiv \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \equiv \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \rangle \quad (1.4)$$

En développant en série l'exponentielle :

$$\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \rangle = 1 + i \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle + \frac{i^2}{2} \langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle + \dots \quad (1.5)$$

on voit que des produits comme par exemple  $\langle v_x v_y \dots v_x v_z \rangle$  interviennent dans ce développement. Ces termes sont associés à la notion de moment d'une loi de probabilité. Plus précisément, le k-ième moment de la fonction de distribution  $F$  (s'il existe) est défini par le tenseur d'ordre  $k$  :

$$M_k(\mathbf{r}, t) = \int \underbrace{\mathbf{v} \mathbf{v} \dots \mathbf{v}}_{k \text{ fois}} F d\mathbf{v} \equiv \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \dots \mathbf{v} \rangle \quad (1.6)$$

où on a effectué  $k$  produits des composantes du vecteur  $\mathbf{v}$ . Notez qu'il s'agit ici d'un produit tensoriel (parfois noté sous la forme plus explicite  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \dots \otimes \mathbf{v}$ ) où l'opérateur  $\otimes$  est le produit dyadique. L'information contenue dans la transformée de Fourier étant équivalente à l'information contenue dans la fonction elle-même (à la seule condition que la TF existe), l'équation (1.5) montre que la connaissance de *tous* les moments de la fonction de distribution est équivalent à la connaissance de la fonction de distribution elle-même.

Tous les moments d'une loi de probabilité peuvent être obtenus par simples dérivations de  $\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \rangle$  calculés en  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  :

$$\langle v_{a_1} v_{a_2} \dots v_{a_p} \rangle = i^{-p} \frac{\partial^p}{\partial k_{a_1} \partial k_{a_2} \dots \partial k_{a_p}} \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \rangle \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \quad (1.7)$$

où  $\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \rangle$  est appelée la fonction génératrice des moments.

Il est également utile de définir des moments centrés définis par la relation suivante :

$$\mu_k(\mathbf{r}, t) \equiv \langle (\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \dots (\mathbf{v} - \mathbf{V}) \rangle \quad (1.8)$$

avec  $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle$ . Les moments centrés sont associés en statistique à la notion de cumulants qui sont des polynômes des moments non-centrés générés par la

fonction génératrice  $\ln\langle e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\rangle$ . Les premiers moments ou moments centrés donnent des informations essentielles sur la loi de distribution, parfois suffisantes pour la caractériser. Ainsi :

- le moment d’ordre 1,  $M_1 = \langle \mathbf{v} \rangle$  (que l’on notera  $\mathbf{V}$  par la suite), s’identifie avec la *moyenne* (ou l’espérance) de la variable aléatoire “vitesse”. Bien évidemment, le moment centré d’ordre 1,  $\mu_1 = \langle \mathbf{v} - \mathbf{V} \rangle$  est nul.
- le moment centré d’ordre 2,  $\langle (\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \rangle$  s’identifie avec la *matrice de variance*. Les coefficients de la matrice de variance mesure les écarts quadratiques moyens de la variable aléatoire par rapport à sa valeur moyenne. C’est une mesure de la “largeur” de la loi de probabilité.
- le moment centré d’ordre 3 est relié au *tenseur d’asymétrie* dont les coefficients mesurent le degré d’asymétrie de la loi de probabilité dans les différentes directions.

A noter que l’on aurait aussi pu définir le moment d’ordre 0 ( $M_0$ ), qui compte tenu de la propriété de normalisation de  $F$  vaut trivialement 1. De même, le moment centré d’ordre 0 n’existe pas.

Les propriétés de symétrie de la fonction de distribution ont des conséquences importantes sur la valeur des moments. Ainsi, une fonction de distribution paire a par définition tous ses moments impairs nuls, et réciproquement, tous les moments pairs d’une distribution impaire sont nuls. Certaines fonctions de distribution sont caractérisées de façon exacte par un nombre fini de moments. Ainsi, une gaussienne de paramètre  $(\mathbf{v}_0, v_t)$ , c’est-à-dire une Maxwellienne dans l’espace des vitesses :

$$F_{\mathbf{v}_0, v_t}(\mathbf{v}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}v_t)^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2v_t^2}\right) \quad (1.9)$$

ne dépend que des 2 moments : le vecteur  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_0$  et le scalaire  $\langle v^2 \rangle = v_0^2 + v_t^2$  obtenu par contraction<sup>3</sup> du tenseur d’ordre 2,  $\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle$ . Dans le cas présent, tous les moments impairs sont nuls et les moments pairs d’ordre plus élevés s’expriment tous en fonction de ces 2 seuls moments. La fonction de distribution de

---

3. On rappelle que la contraction d’un tenseur est obtenu en égalant deux des indices du tenseur et en sommant sur cet indice commun. Ainsi les composantes du tenseur d’ordre 2,  $\mathbf{v}\mathbf{v}$ , qui s’écrivent  $v_i v_j$  conduisent, après contraction, au scalaire (tenseur d’ordre 0) :  $\sum_i v_i v_i = \sum_i v_i^2 \equiv v^2$ .

Maxwell joue un rôle important en Physique puisqu'elle correspond à la fonction de distribution en vitesses des systèmes à l'équilibre thermodynamique.

Il faut prendre garde qu'une fonction de distribution peut exister sans que ses moments existent. Par exemple la distribution de Cauchy à 1D (on parle plutôt de distribution de Lorentz en Physique) :

$$F(v) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + v^2} \quad (1.10)$$

est bien définie positive et normée, mais aucun de ses moments n'est défini. Mathématiquement, cette particularité est associée au fait que sa fonction caractéristique n'est pas analytique à l'origine. Cette distribution fait partie d'une classe plus large de fonctions appelées fonctions de Lévy, qui jouent un rôle important dans certains processus stochastiques caractérisés par des comportements très lentement décroissants à l'infini (décroissance algébrique à comparer avec la décroissance exponentielle des gaussiennes).

Il faut néanmoins noter qu'une fonction de distribution qui n'est pas tempérée (et dont certains moments ne seront donc pas définis) n'est pas forcément un problème. Le fait que certains moments divergent est une conséquence de la forme de la fonction de distribution, mais aussi du fait que son support ne soit pas borné. Or au delà de  $N$  fois la vitesse thermique, pour  $N$  suffisamment grand, le concept de fonction de distribution n'est plus adapté, car le faible nombre de particules supra-thermiques rend caduque la définition statistique d'une fonction de distribution.

## 1.2 Variables macroscopiques du plasma

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, les variables macroscopiques sont obtenues en intégrant les degrés de libertés microscopiques de vitesses. Les premiers moments associés, qui sont donc des fonctions de  $\mathbf{r}$  et  $t$ , correspondent à des grandeurs physiques accessibles expérimentalement que nous présentons dans cette section.

### 1.2.1 Moments non centrés

Commençons par les moments non centrés qui s'écrivent <sup>4</sup>

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv nm \langle 1 \rangle = m \int f d\mathbf{v} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, t) \equiv nm \langle \mathbf{v} \rangle = m \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{r}, t) \equiv nm \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle = m \int f \mathbf{v}\mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv nm \langle \mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v} \rangle = m \int f \mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (1.14)$$

Ces tenseurs d'ordre 0, 1, 2 et 3, correspondent respectivement à la masse volumique (en  $\text{kg m}^{-3}$ ), le flux de masse (en  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ), le tenseur de pression totale <sup>5</sup> (en  $\text{J m}^{-3}$ ) et le tenseur flux d'énergie totale (en  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ).

Alternativement, à partir des 2 premiers moments, il est commode d'introduire de façon équivalente la densité de particules et le vitesse fluide moyenne par les relations :

$$n(\mathbf{r}, t) \equiv n \langle 1 \rangle = \int f d\mathbf{v} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (1.16)$$

### 1.2.2 Moments centrés

Une fois la vitesse moyenne,  $\mathbf{V}$  définie, il est intéressant d'introduire la fluctuation  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{V}$  de la vitesse microscopique  $\mathbf{v}$ , par rapport à cette valeur moyenne  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{V}$$

Cette fluctuation de vitesse nous conduit à définir des moments centrés (par rapport à la vitesse fluide moyenne). Clairement, par définition même de  $\mathbf{V}$ ,

---

4. Attention aux moyennes. On rappelle que, dans les notations définies dans la section précédente :  $\langle \dots \rangle \equiv \int \dots F d\mathbf{v}$  et donc  $n \langle \dots \rangle \equiv \int \dots f d\mathbf{v}$  puisque  $F \equiv f/n$ .

5. ou tenseur d'énergie volumique totale, puisque une pression est homogène à une densité d'énergie.

le moment centré d'ordre 1 est nul :

$$\langle \mathbf{w} \rangle \equiv \langle \mathbf{v} - \mathbf{V} \rangle = 0$$

En revanche les moments centrés d'ordre 2 et 3 ne sont pas nécessairement nuls et sont reliés à des grandeurs physiques :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \equiv nm \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle = m \int f \mathbf{w} \mathbf{w} d\mathbf{w} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \equiv nm \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle = m \int f \mathbf{w} \mathbf{w} \mathbf{w} d\mathbf{w} \quad (1.18)$$

Ces 2 tenseurs s'appellent respectivement le tenseur de pression cinétique et le tenseur de flux d'énergie thermique. Par opposition avec les tenseurs  $\Sigma$  et  $\mathbf{E}$ , construits en moyennant les vitesses microscopiques totales  $\mathbf{v}$ , ces tenseurs sont construits à partir des moyennes des fluctuations de vitesses  $\mathbf{w}$ , et ne comprennent donc que la partie fluctuante, désordonnée —on dit aussi souvent thermique—, des contributions aux tenseurs de pression et d'énergie.

Quelques remarques importantes :

- Ces 2 tenseurs sont symétriques dans tout échange 2 à 2 de leurs indices (par exemple  $P_{ij} \equiv nm \langle w_i w_j \rangle = nm \langle w_j w_i \rangle = P_{ji}$  ou  $Q_{ijk} = Q_{ikj}$ ). On en déduit donc que  $\mathbf{P}$  a 6 composantes indépendantes sur 9, tandis que  $\mathbf{Q}$  en a 10 sur 27.
- Si la fonction de distribution  $f$  possède des propriétés de symétrie, certains coefficients de ces tenseurs peuvent être nuls. En particulier, les moments impairs sont identiquement nuls si la fonction de distribution est paire. C'est le cas, par exemple, lorsque la fonction de distribution est une maxwellienne centrée (cf. section suivante). Lorsqu'ils ne sont pas nuls, ces moments quantifient donc l'asymétrie de la fonction de distribution.
- On pourra noter que les moments d'ordre élevés donnent une plus grande importance aux queues de distributions que les moments d'ordre plus faible. Cela explique que les tentatives pour reconstruire la fonction de distribution à partir de données expérimentales ou de simulations numériques sur les moments est d'autant plus sensible que l'ordre des moments considérés est élevé.

- Un peu d’algèbre (cf. Exercice 1) permet d’établir le lien entre les moments centrés et non centrés. En composantes, on a :

$$\Sigma_{ij} = P_{ij} + nmV_iV_j, \quad (1.19)$$

$$E_{ijk} = Q_{ijk} + V_iP_{jk} + V_jP_{ki} + V_kP_{ij} + nmV_iV_jV_k \quad (1.20)$$

### 1.2.3 Pression et température cinétique

Dans un plasma isotrope<sup>6</sup>, les anisotropies sont faibles de sorte que le tenseur de pression est diagonal. Les 3 directions de l’espace étant équivalentes, les termes diagonaux de  $\mathbf{P}$  sont tous égaux entre eux. Le tenseur de pression s’écrit alors :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t)\mathbf{1} \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{1}$  est le tenseur identité. Dans cette expression,  $p$  désigne la pression ordinaire (on dit parfois scalaire), définie par la relation

$$p = \frac{1}{3}nm\langle w^2 \rangle \quad (1.22)$$

En particulier, le tenseur de pression est diagonal lorsque la distribution des vitesses est maxwellienne (le vérifier par le calcul) :

$$f(\mathbf{w}) \equiv \frac{n}{(\sqrt{2\pi}v_T)^3} \exp\left(-\frac{w^2}{2v_T^2}\right) \quad (1.23)$$

Dans un plasma magnétisé, la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}$  est une direction privilégiée. Dans un repère aligné avec le champ magnétique (qui sera éventuellement un repère local), le tenseur de pression peut être diagonal mais avec des pressions scalaires différentes dans les directions parallèle et orthogonales à  $\mathbf{B}$ . Le tenseur de pression s’écrit alors :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix} = p_{\perp} \mathbf{1} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{b} \quad (1.24)$$

---

6. c’est une situation qui ne peut se rencontrer bien souvent que dans un plasma non-magnétisé ou suffisamment collisionnel.

avec  $p_{\perp} = nm\langle w_x^2 \rangle / 2 = nm\langle w_y^2 \rangle / 2$ ,  $p_{\parallel} = nm\langle w_z^2 \rangle$  et où  $\mathbf{b}$  est le vecteur unitaire défini par  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$ .

Les bi-maxwelliennes possédant une fonction de distribution du type

$$f(\mathbf{w}_{\perp}, w_{\parallel}) \equiv \frac{n}{(\sqrt{2\pi}v_{T\perp})^2(\sqrt{2\pi}v_{T\parallel})} \exp\left(-\frac{w_{\perp}^2}{2v_{T\perp}^2}\right) \exp\left(-\frac{w_{\parallel}^2}{2v_{T\parallel}^2}\right) \quad (1.25)$$

constituent un cas particulier conduisant à la situation gyrotropique.

Dans la situation la plus générale, le tenseur de pression cinétique s'écrit sous la forme

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \pi_{ij} \quad (1.26)$$

avec

$$p \equiv \frac{1}{3} \text{Tr } \mathbf{P}, \quad (1.27)$$

$$\pi_{ij} \equiv nm\langle w_i w_j - \frac{1}{3} w^2 \delta_{ij} \rangle \quad (1.28)$$

$\boldsymbol{\pi}$  est appelé tenseur de viscosité. On notera que ce tenseur est symétrique par définition et contient 5 éléments indépendants puisque sa trace est nulle.  $\pi_{ij}$  correspond au flux de quantité de mouvement  $mw_i$  traversant la surface orthogonale à la direction  $j$ . Il faut noter que si la pression est anisotrope,  $\boldsymbol{\pi}$  aura des termes diagonaux non-nuls.

Dans le cas des distributions maxwelliennes, un calcul immédiat conduit à 3 dimensions dans l'espace des vitesses au résultat :

$$\langle w^2 \rangle = 3v_T^2 \equiv \frac{3k_B T}{m} \quad (1.29)$$

Comme  $\langle w^2 \rangle$  est proportionnel à la pression scalaire, il est équivalent dans ce cas de parler de pression scalaire ou de température et l'on en déduit bien sûr la loi des gaz parfaits :

$$p \equiv \frac{nm}{3} \langle w^2 \rangle = nk_B T \quad (1.30)$$

Dans les cas plus généraux, même si la distribution des vitesses n'est plus maxwellienne, on utilise encore cette relation entre  $\langle w^2 \rangle$  et  $p$  pour définir la température que l'on qualifie de température cinétique,  $T(\mathbf{r}, t)$  :

$$k_B T(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{m}{3} \langle w^2 \rangle \quad (1.31)$$

la température cinétique s'identifie avec la température définie en thermodynamique, *seulement* lorsque la fonction de distribution est maxwellienne, c'est-à-dire lorsqu'on est à l'équilibre thermodynamique. Dans le cas contraire la température définie par la relation précédente *n'est pas* la température définie en thermodynamique<sup>7</sup>.

#### 1.2.4 Vecteur flux de chaleur

Bien que le tenseur flux de chaleur  $\mathbf{Q}$  comprenne 10 composantes indépendantes, la plupart des modélisations fluides ne tiennent pas compte de toutes les composantes de ce tenseur. Comme nous le verrons dans la suite, le plus souvent on néglige le tenseur flux de chaleur ou on n'en retient que les 3 composantes principales. On parle alors de vecteur flux de chaleur, que nous noterons avec un  $\mathbf{q}$  minuscule pour le différencier du tenseur  $\mathbf{Q}$ .

On passe de  $\mathbf{Q}$  à  $\mathbf{q}$  par contraction sur deux indices, ce qui conduit à la définition<sup>8</sup> :

$$\mathbf{q} \equiv \frac{1}{2}nm\langle w^2 \mathbf{w} \rangle \quad (1.32)$$

Notez qu'il s'agit bien d'un flux d'énergie  $mw^2/2$  puisque  $\mathbf{q} = \langle (mw^2/2) n\mathbf{w} \rangle$ . Une dernière fois, nous insistons sur le fait que le flux de chaleur est construit à partir des moments centrés  $\mathbf{w}$ , et ne retient donc que la partie désordonnée, non-dirigée, de ce flux d'énergie. Par contraction du tenseur  $\mathbf{E}$  définie plus haut, on peut bien sûr introduire le vecteur flux d'énergie qui contient l'intégralité du contenu physique du transport de l'énergie, à la fois convectif et diffusif. Notons  $\mathbf{e}$  ce vecteur. On a, par définition :

$$\mathbf{e} \equiv \frac{1}{2}nm\langle v^2 \mathbf{v} \rangle \quad (1.33)$$

Un peu d'algèbre (cf. Exercice 2) permet de montrer que les 2 vecteurs sont reliés par la relation :

$$e_i = q_i + P_{ij}V_j + \left( \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}nmV^2 \right) V_i \quad (1.34)$$

---

7. De ce point de vue, il serait logique d'introduire une notation différente pour désigner cette température cinétique, ce qui est rarement fait.

8. Le facteur  $1/2$  est conventionnel. Il provient de la définition de l'énergie cinétique.



## 1.3 Description cinétique ou fluide d'un plasma

### 1.3.1 Approches fluide et cinétique : dualité ?

Dans ces 2 approches, il est clair que tout ce qui peut être traité en fluide peut l'être en cinétique... mais souvent au prix d'une certaine complexité mathématique. Il n'en est pas moins intéressant de présenter ces calculs, qui permettent de faire la jonction lorsque le formalisme fluide peut-être utilisé. Les limites de l'approche fluide seront donc soulevées dans la section suivante, et toujours évoquées dans la suite de ce cours.

En ce sens, il n'y a pas de dualité entre ces 2 approches. Pour peu que les échelles spatiales et temporelles le permettent, dès lors que la définition d'une fonction de distribution est possible, le formalisme cinétique peut-être utilisé. Si la forme de la fonction de distribution  $f$  est suffisamment "régulière", on peut utiliser le formalisme fluide qui ne nécessite que les premiers moments de  $f$ .

Avec l'utilisation intensive de la simulation numérique, on peut aussi faire quelques remarques. La connaissance d'une fonction de distribution dans un espace à 6 dimensions implique d'un point de vue numérique de grandes ressources. Si l'on discrétise l'espace des position ainsi que l'espace des vitesses avec 100 points, la connaissance de  $f$  nécessite  $10^{12}$  points, i.e. de l'ordre du Tera-octet en mémoire vive... ce qui est beaucoup. Une alternative est d'utiliser des "macro-particules" pour décrire numériquement l'évolution du plasma. Mais là aussi, les ressources des machines actuelles ne permettent pas l'étude de grands domaines. Dans tous les problèmes pour lesquels des couplages entre les petites et les grandes échelles sont importants, le formalisme fluide est souvent indispensable.

### 1.3.2 Les limites de l'approche fluide

L'approche fluide ne devient plus pertinente pour certaines classes de problème. Par exemple, l'évolution dans le temps d'une fonction de distribution "singulière" à l'instant origine  $t = 0$ , nécessiterait la connaissance d'un très grand nombre de moments, ce qui ne rend pas pertinent l'utilisation d'une méthode

fluide.

Le formalisme fluide ne permet pas non plus de décrire correctement tout les phénomènes de dissipation. Ils sont associés à des mécanismes d'interaction onde-particule (ou résonnance) pour lesquels toutes les particules d'une même distribution n'ont pas le même comportement. En l'occurrence, les particules dont la vitesse est proche de la vitesse de phase  $\omega/k$  des ondes présente dans le plasma vont pouvoir échanger significativement de l'énergie avec celles-ci, et donc modifier la forme de la fonction de distribution. Le formalisme cinétique est alors indispensable.

Il existe des situations pour lesquelles on peut utiliser le formalisme fluide mais avec certaines précautions. Il peut exister des formes particulières de fonctions de distribution dont les quelques premiers moments ne reflètent pas la vraie structure. Considérons par exemple 2 faisceaux de protons avec une vitesse dirigée opposée et chacun une température nulle. La vitesse moyenne de l'ensemble sera alors nulle et la température non-nulle. Il est clair que dans ce genre de situations, il faut prendre en compte le caractère “multi-population” du plasma.

Cette distinction entre différentes “populations” (en raison de leurs propriétés cinétiques plus que de leurs natures chimiques) peut devenir moins évidente, comme par exemple dans le cas de l'existence d'un déchirement de vitesse ou plus généralement d'une interface ou d'une couche de courant. Cette discussion sur la “structure” cinétique du plasma suggère ici les limites d'une approche fluide.

De manière générale, dès que la forme de la fonction de distribution est un peu singulière, et que la manière de fermer la hiérarchie des équations fluides n'est plus évidente, les modèles fluides peuvent présenter des limites. Nous verrons par la suite que dans la réduction à la magnéto-hydrodynamique, la disparition du champ électrique dans les équations implique une autre limitation : le choix d'une loi d'Ohm.

## 1.4 Exercices

### Exercice 1

Démontrez les relations (1.19) et (1.20).

### Exercice 2

Démontrez la relation (1.34).

### Exercice 3

En utilisant les formules

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad , \quad I_1 = \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \quad , \quad I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2}$$

Calculez les moments d'ordre 0, 1 et 2 d'une distribution Maxwellienne de densité  $n$ , de vitesse dirigée  $\mathbf{v}_0$  et de vitesse thermique  $v_T$ .

### Exercice 4

On cherche à calculer la forme de l'équation de dispersion des ondes de Langmuir (ou Bohm & Gross).

1. Ecrivez pour cela les 2 premières équations fluides, ainsi que l'équation de Maxwell-Poisson (et justifiez que l'on ait besoin que de ces équations).
2. Linéarisez-les à l'ordre 1.
3. Passez dans l'espace de Fourier et en déduire l'équation de dispersion.



## — 2 —

# Equations macroscopiques de transport

La forme des champs électriques et magnétiques est naturellement gouvernée par les équations de Maxwell. Le couplage entre les équations de Maxwell et le plasma se fait au travers des termes sources de densité de charges  $\rho$  et de densité de courants  $\mathbf{J}$ . Pour les déterminer, et dans le cadre d'une théorie fluide, il faut écrire les équations macroscopiques du transport. On peut dériver ces équations de 2 manières différentes, ce que l'on va détailler dans ce chapitre. Mais on peut déjà discuter leur forme d'un point de vue qualitatif pour expliquer le problème de la fermeture de tout système fluide.

Considérons pour cela une grandeur  $A(\mathbf{v})$  (qui pourra être scalaire, vectorielle ou tensorielle) dont on définit la valeur moyenne  $\langle A \rangle$ . Son flux sera alors de la forme  $\langle A\mathbf{v} \rangle$ , où l'opérateur (implicite) entre  $A$  et  $\mathbf{v}$  est un produit dyadique. Donc toujours d'un point de vue qualitatif, il apparaît que si  $\langle A \rangle$  est un moment d'ordre  $n$  de la fonction de distribution, alors son flux  $\langle A\mathbf{v} \rangle$  est un moment d'ordre  $n + 1$ . Or dans l'équation d'évolution de  $\langle A \rangle$  :

$$\partial_t \langle A \rangle + \nabla \cdot \langle A\mathbf{v} \rangle = \dots$$

le terme  $\langle A\mathbf{v} \rangle$  associé au flux de la grandeur  $A$  apparaît. En d'autres termes, l'équation d'évolution d'un moment d'ordre  $n$  de la fonction de distribution fera toujours intervenir le moment d'ordre  $n + 1$ . Le système d'équations fluides sera donc toujours un système pour lequel il existe une inconnue de plus que d'équation, ce qui devrait en principe nécessiter d'écrire une infinité d'équations.

Ainsi présenté, le problème peut sembler décourageant. Ce résultat n'est d'ailleurs pas surprenant. Pour décrire un plasma d'un point de vue cinétique, il faut définir sa fonction de distribution  $f$ . Celle-ci est définie par une infinité

de points, et contient donc une infinité d'information. Pour décrire un système d'un point de vue fluide, il faudra donc aussi une infinité d'informations, qui dans ce cas seront les moments de  $f$ , et donc une infinité d'équations pour décrire leur évolution. Ce point a déjà été évoqué au chapitre précédent avec un formalisme plus rigoureux faisant intervenir la fonction caractéristique d'une densité de probabilité.

Mais il faut se souvenir de ce qui a été dit sur les moments de  $f$ . Pour pouvoir les définir quel que soit leur ordre, il faut que  $f$  soit une fonction tempérée, i.e. elle doit décroître à l'infini plus vite que n'importe quel polynôme. Par ailleurs, plus l'ordre d'un moment est élevé, plus la "queue" de la fonction de distribution va "peser lourd". Cela a 2 conséquences : la première est que les moments d'ordre élevé sont souvent plus sensibles au bruit (d'un point de vue expérimental ou numérique), la seconde est que ces moments contiennent d'autant moins d'information que l'ordre du moment est élevé. On peut donc bien parler de "hiérarchie" d'équations, dans la mesure où une équation contient d'autant moins d'information qu'elle régit l'évolution d'un moment d'ordre élevé.

Dans ce chapitre, nous allons détailler la forme de ces équations. On traitera les manières de fermer cette hiérarchie dans un chapitre ultérieur.

## 2.1 Rappels sur les équations de Maxwell

On rappelle les 4 équations de Maxwell dans le vide.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + 1/c^2 \partial_t \mathbf{E} \quad (2.4)$$

La structure du plasma intervient dans ces équations via les termes  $\rho$  et  $\mathbf{J}$ , densité de charge et densité de courant, respectivement. Le grand malheur étant que pour déterminer ces termes, on va devoir utiliser des équations dans lesquelles interviennent les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Une grande part de la complexité

de la physique des plasmas en résulte. On l'appelle l'auto-cohérence ou la self-consistence.

Les deux premières équations de Maxwell (Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson) ne sont en fait que des conditions initiales des 2 dernières (Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère). En effet, si  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  à un instant  $t = 0$ , alors l'intégration de la divergence de Maxwell-Faraday nous donne que cette divergence du champ magnétique est conservée, et donc toujours nulle. On peut faire le même raisonnement sur l'équation de Maxwell-Gauss (en s'aidant de l'équation de continuité) avec Maxwell-Ampère (cf. Exercice 1).

Une analyse dimensionnelle des 2 équations en rotationnel montre que le courant de déplacement (dernier terme dans Maxwell-Ampère) sera négligeable lorsque les vitesses de phases ( $\omega/k$ ) seront négligeables devant la vitesse de la lumière. Cela sera très souvent le cas en théorie multifluide.

A partir de ces équations, on peut retrouver un résultat classique d'électromagnétisme qui est l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (cf. Exercice 2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (2.5)$$

où l'on reconnaît dans le membre de gauche la densité d'énergie magnétique et électrique ainsi que le flux du vecteur de Poynting. Le membre de droite qui apparaît dans cette équation est l'effet Joule. C'est au travers de ce terme que les particules du plasma (à l'origine du vecteur densité de courant) vont pouvoir échanger de l'énergie avec les champ électromagnétiques auto-consistants qui y règnent.

Les termes sources  $\rho$  et  $\mathbf{J}$  intervenant dans les équations de Maxwell dépendent de la nature du plasma. Tels quels, ce sont des grandeurs macroscopiques. Mais on peut les lier à la structure cinétique du plasma via sa fonction de distribution

$$\rho_s = q_s \int f_s d\mathbf{v}_s \quad , \quad \mathbf{J}_s = q_s \int f_s \mathbf{v}_s d\mathbf{v}_s \quad (2.6)$$

où  $f_s$  est la fonction de distribution de l'espèce  $s$ ,  $q_s$  sa charge et  $\mathbf{v}_s$  la vitesse

cinétique des particules (qui est une des variables de  $f_s$ ). Alors

$$\rho = \sum_s \rho_s \quad , \quad \mathbf{J} = \sum_s \mathbf{J}_s \quad (2.7)$$

On a donc besoin des équations qui gouvernent la structure du plasma pour déterminer  $\rho$  et  $\mathbf{J}$ . On pourra alors utiliser le formalisme fluide ou cinétique.

## 2.2 Equations de transport obtenues par bilans macroscopiques

Commençons par rappeler comment on dérive une équation de bilan dans le cas simple d'une grandeur scalaire unidimensionnelle. La généralisation aux grandeurs vectorielles et à plusieurs dimensions d'espace ne pose pas de difficultés et sera appliquée dans les sections suivantes aux bilans de particules, de quantité de mouvement et d'énergie.

Pour fixer les idées, considérons comme grandeur scalaire, le nombre  $N(t)$  de particules contenues dans un intervalle  $[a(t), b(t)]$ , dont la longueur  $b(t) - a(t)$  peut varier avec le temps. Dans cette approche unidimensionnelle, les particules peuvent s'écouler le long de l'axe  $0x$  avec une vitesse fluide  $\mathbf{V}(x, t)$ . Introduisons la densité de particules  $n(x, t)$  qui comptabilise le nombre de particules par unité de longueur. Alors,

$$N(t) \equiv \int_{a(t)}^{b(t)} n(x, t) dx \quad (2.8)$$

Si le nombre de particules  $N$  se conserve au cours du temps, l'équation de bilan sur  $N$  s'écrit simplement :

$$\frac{dN}{dt} = 0 \quad (2.9)$$

S'il y a création de particules à l'intérieur de  $[a(t), b(t)]$  (par ionisation, réaction chimique ...), l'équation de bilan dans ce cas plus général s'écrit :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_{\pm}}{dt} \quad (2.10)$$



où  $dN_{\pm}$  est le nombre de particules apparaissant ou disparaissant dans l'intervalle pendant le temps  $dt$ .

Explicitons  $dN/dt$ . Par application du théorème de Leibnitz, on trouve aussitôt :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} n(x, t) dx \quad (2.11)$$

$$= n(b(t), t) \frac{db}{dt} - n(a(t), t) \frac{da}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} dx \quad (2.12)$$

Les 2 premières contributions correspondent aux particules qui sortent ou entrent par *les extrémités de l'intervalle*  $[a(t), b(t)]$  pendant le temps  $dt$ , tandis que la dernière contribution est due aux variations temporelles de la densité à *l'intérieur de l'intervalle*.

Introduisons le flux<sup>1</sup> de particules

$$\Gamma(x, t) \equiv n(x, t)V(x, t) \quad (2.13)$$

Lorsque  $\Gamma$  a des dérivées partielles continues,

$$\int_a^b \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx = \Gamma(b, t) - \Gamma(a, t) \quad (2.14)$$

et on peut donc écrire :

$$\frac{dN}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \left[ \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} \right] dx, \quad (2.15)$$

où on a supposé que les vitesses de déplacement des extrémités de l'intervalle  $da/dt$  et  $db/dt$  sont égales aux vitesses des particules  $V(a(t), t)$  et  $V(b(t), t)$  en ces points.

On introduit la densité de particules créées ou perdues par unité de temps,  $S(x, t)$ . Alors,

$$\frac{dN_{\pm}(t)}{dt} \equiv \int_{a(t)}^{b(t)} S(x, t) dx \quad (2.16)$$

---

1. A 1D, le flux est un débit !

$S(x, t)$  est positif si les particules sont créées, négatif dans le cas contraire. L'équation de bilan peut donc s'écrire sous forme intégrale :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \left[ \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} - S(x, t) \right] dx = 0 \quad (2.17)$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout  $a(t) < b(t)$ , si  $S$  est également continue, on obtient l'équation de bilan de  $N$  (ou la loi de conservation associée à  $N$ ), sous la forme (locale) de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} = S(x, t) \quad (2.18)$$

Le même type de raisonnement appliqué à un volume fermé  $\Omega(t)$ , conduit à la généralisation :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial (n(\mathbf{r}, t))}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, t) \right] d\mathbf{r} \quad (2.19)$$

et donc,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, t) \equiv n(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  est le flux de particules.

L'ensemble des équations que l'on va écrire peut s'établir pour chaque espèce  $s$  du fluide. Pour alléger les notations, l'indice  $s$  sera omis.

### 2.2.1 Equations de transport de la masse

On peut directement appliquer les résultats de la section précédente au nombre de particules  $N$  d'une espèce donnée. On en déduit aussitôt la forme correspondante de l'équation de bilan :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = S, \quad (2.21)$$

où  $S$  est la densité de particules créées ( $S > 0$ ) ou détruites ( $S < 0$ ) par unité de temps dont la forme sera discutée plus loin.

On notera qu'en régime stationnaire ( $\partial_t n = 0$ ), la conservation du nombre de particules d'une espèce donnée dans un volume quelconque du plasma,

implique que la création en volume des particules est compensée par un flux de particules sortant par les surfaces limitant ce volume :

$$\int_V \nabla \cdot (n\mathbf{V}) d\mathbf{r} = \oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_V S d\mathbf{r} \quad (2.22)$$

En utilisant la relation vectorielle

$$\nabla \cdot (n\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) n + n (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (2.23)$$

on peut obtenir la forme équivalente :

$$\frac{Dn}{Dt} = -n(\nabla \cdot \mathbf{V}) + S, \quad (2.24)$$

où on a introduit l'opérateur de dérivée particulière  $D/Dt$  :

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \quad (2.25)$$

Dans cette expression, il est important de noter que la vitesse fluide  $\mathbf{V}$  de l'espèce considérée intervient. Pour souligner cette dépendance, on ajoute souvent dans les notations l'indice de l'espèce  $s$  :  $D_s/Dt$ . Sous certaines hypothèses, à partir de l'équation (2.24), on peut dériver une condition d'incompressibilité (cf. Exercice 3).

Le bilan des espèces s'accompagne bien sûr d'un bilan de masses des espèces ainsi que d'un bilan de charges dans le cas des composantes du plasmas qui sont chargées :

$$\frac{\partial(nm)}{\partial t} + \nabla \cdot (nm\mathbf{V}) = mS \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial(nq)}{\partial t} + \nabla \cdot (nq\mathbf{V}) = qS \quad (2.27)$$

L'équation de bilan de masses est l'équation usuellement utilisée pour les fluides neutres (avec  $S \equiv 0$ ). On remarquera également que le bilan de charges met en jeu la densité de courant  $\mathbf{J} \equiv nq\mathbf{V}$ .

### 2.2.2 Equations de transport de la quantité de mouvement

L'équation de bilan de la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  repose sur l'application du principe fondamental de la dynamique à un volume de contrôle  $\Omega(t)$  :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbb{F} + \mathbf{A}, \quad (2.28)$$

où  $\mathbb{F}$  est l'ensemble des forces extérieures s'appliquant au volume considéré et sur la surface de celui-ci<sup>2</sup>, et où le second terme correspond à la quantité de mouvement créée ou détruite par unité de temps due aux collisions.

Introduisons la densité volumique de quantité de mouvement,  $n(\mathbf{r}, t) m \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  de sorte que :

$$\mathbf{p}(t) \equiv \int_{\Omega(t)} n(\mathbf{r}, t) m \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (2.29)$$

Chacune des coordonnées du vecteur  $n(\mathbf{r}, t) m \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  est une grandeur scalaire pour laquelle on peut appliquer les résultats de la section précédente. La dérivée explicite de sa coordonnée  $i$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (nmV_i) d\mathbf{r} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial (nmV_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (nmV_i \mathbf{V}) \right] d\mathbf{r}, \quad (2.30)$$

dont on déduit la relation vectorielle associée<sup>3</sup> :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (nm \mathbf{V}) d\mathbf{r} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial (nm \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (nm \mathbf{V} \mathbf{V}) \right] d\mathbf{r} \quad (2.31)$$

---

2. Ces forces de contact sont spécifiques aux milieux continus

3. On rappelle que  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  représente le produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  (on dit aussi produit dyadique).  $\mathbf{c}$  est un tenseur d'ordre 2, dont les composantes sont définies par la relation :

$$c_{ij} \equiv a_i b_j$$

Pour cette raison la, le produit dyadique peut aussi se noter  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \mathbf{b}$ . La divergence d'un tenseur  $\mathbf{t}$  quelconque est un vecteur, dont les composantes sont définies par la relation :

$$(\nabla \cdot \mathbf{t})_j \equiv \sum_i \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}$$

ou de façon équivalente<sup>4</sup> :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (nm\mathbf{V}) d\mathbf{r} = \int_{\Omega(t)} \left[ nm \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + Sm\mathbf{V} \right] d\mathbf{r} \quad (2.32)$$

Les forces extérieures à considérer dans un milieu continu sont de deux types : les forces de volume (comme la force de pesanteur, les forces électromagnétiques...) et les forces de contact (comme la pression). La force totale qui en résulte, s'exerçant sur l'espèce considérée du fluide s'écrit :

$$\mathbb{F} = \int_{\Omega(t)} [n\mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{P}] d\mathbf{r} \quad (2.33)$$

où  $\mathbf{F}$  est la force volumique et  $\mathbf{P}$  le tenseur de pression cinétique (également appelé tenseur des contraintes). La divergence du tenseur de pression de cette espèce peut se récrire

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} \quad (2.34)$$

où la pression scalaire,  $p$ , et le tenseur de viscosité,  $\boldsymbol{\pi}$ , ont été définis respectivement par les équations (1.27) et (1.28) du chapitre précédent.

Dans le cadre des plasmas, les forces extérieures dominantes comprennent la force électromagnétique de Laplace et éventuellement les forces gravitationnelles. En utilisant les équations (2.31) et (2.33), l'équation locale de bilan de quantité de mouvement peut s'écrire

$$\frac{\partial (nm\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot [n(m\mathbf{V})\mathbf{V} + \mathbf{P}] = n\mathbf{F} + \mathbf{A} \quad (2.35)$$

En utilisant la forme (2.32), cette équation peut se réécrire

$$mn \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P} = n\mathbf{F} + \mathbf{A} - m\mathbf{V} S \quad (2.36)$$

On verra dans la suite que  $\mathbf{A}$  s'identifie, dans le cas des collisions élastiques, avec une densité de force de friction de la composante étudiée en interaction avec les autres composantes du plasma.

---

4. En utilisant l'identité :

$$\nabla \cdot [n\mathbf{V}\mathbf{V}] = n(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla \cdot (n\mathbf{V})$$

et l'équation de bilan de particules.

### 2.2.3 Equations de transport de l'énergie

Cette équation peut avoir plusieurs formes. Ce peut être l'équation de conservation du tenseur de pression, de l'énergie totale, de la pression (composante thermique de l'énergie uniquement) ou de la température (avec une loi du type gaz parfait reliant la pression et la température). Dans cette partie, nous allons commencer par l'équation d'évolution de l'énergie totale du plasma, que l'on appelle aussi souvent équation d'énergie.

L'énergie totale d'une particule du fluide considéré est la somme de son énergie interne  $E_{th}$  (qui n'est que de nature thermique puisqu'on assimile le plasma à un gaz parfait) et de son énergie cinétique dirigée  $E_B$ , avec

$$E_{th} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \frac{p}{n} \quad (2.37)$$

$$E_B = \frac{1}{2} m V^2 \quad (2.38)$$

Dans un premier temps, en multipliant scalairement l'équation (2.35) par  $\mathbf{V}$ , on obtient l'équation de conservation de l'énergie dirigée  $E_B$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{nmV^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{nmV^2}{2} \mathbf{V} \right) = -\mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + n\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{2} m V^2 S \quad (2.39)$$

Dans laquelle on a utilisé la relation

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{V^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \quad (2.40)$$

dont on a déduit

$$n\mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = n\mathbf{V} \cdot \nabla \frac{V^2}{2} = \nabla \cdot \left( n\mathbf{V} \frac{V^2}{2} \right) - \frac{V^2}{2} \nabla \cdot (n\mathbf{V}). \quad (2.41)$$

Nous verrons dans la suite de ce chapitre la manière d'établir l'équation d'évolution du tenseur de pression à partir de l'équation de Boltzmann. Il s'agit d'une équation tensorielle d'ordre 2, dont la demi-trace donne l'équation de conservation de l'énergie thermique  $E_{th}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{q} \right) = +\mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \left. \frac{\delta p'}{\delta t} \right|_c \quad (2.42)$$

Dans cette équation, le deuxième terme du membre de droite (dû aux collisions) n'est pas explicité, et est primé pour souligner la différence avec celui qui apparaîtra dans l'équation de conservation de l'énergie totale. En l'absence de forces de viscosité, le terme  $-\mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P})$  de cette équation se simplifie alors en  $-\mathbf{V} \cdot \nabla p$ . On notera en outre que ce terme s'écrit encore  $\nabla \cdot (p\mathbf{V}) - p(\nabla \cdot \mathbf{V})$  qui s'interprètent respectivement comme le travail des forces de pression et comme le taux de conversion réversible de l'énergie dirigée en énergie thermique (cf. Exercice 4).

On obtient l'équation de conservation de l'énergie totale en faisant la somme des équations de conservation de l'énergie dirigée et de l'énergie thermique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}p + \frac{nmV^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2}p\mathbf{V} + \frac{nmV^2}{2}\mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{q} \right) = n\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \left. \frac{\delta p}{\delta t} \right|_c \quad (2.43)$$

Dans cette équation, le terme dû aux collisions n'est pas explicité, et s'écrit pudiquement  $\delta p / \delta t|_c$ . Les deux premiers termes correspondent à la variation temporelle (explicite) de l'énergie totale (dirigée plus thermique) du plasma, les 2 termes suivant correspondent aux flux de l'énergie totale, celui d'après est le travail des forces de pression, et le dernier terme du membre de gauche est le flux de chaleur (réduit). Le premier terme du membre de droite est la travail des forces extérieures, et le second est la contribution des collisions au bilan d'énergie.

On peut conclure cette partie par une discussion sur le bilan d'énergie. Dans le cas isotrope et en l'absence de collisions, l'équation (2.39) se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{nmV^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{nmV^2}{2}\mathbf{V} \right) = -\mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + nq\mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \quad (2.44)$$

où seul le terme électrique de la force de Laplace travaille. La forme des deux termes du membre de droite est intéressante : le premier terme est l'opposé du terme du membre de droite de l'équation de conservation de l'énergie thermique (2.42) dans le cas isotrope et adiabatique, et le second (que l'on peut aussi noter  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  où  $\mathbf{J}$  est la densité de courant — l'effet Joule) est aussi l'opposé du membre de droite de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (2.45)$$

où l'on reconnaît dans le membre de gauche la densité d'énergie magnétique et électrique ainsi que le flux du vecteur de Poynting. Cette remarque souligne simplement le fait que dans les équations de conservation de l'énergie dirigée, thermique et électromagnétique, les termes de source de l'une des équations, se retrouvent comme termes de perte dans une autre par conservation de l'énergie totale.

## 2.3 Equations de transport obtenues à partir de l'équation de Boltzmann

Dans cette section nous montrons comment obtenir les équations macroscopiques de transport à partir de l'équation de Boltzmann. Les équations macroscopiques de transport, c'est-à-dire les relations entre les variables macroscopiques du plasma (densité, vitesse fluide, pression cinétique ...) définies dans le chapitre précédent apparaissent alors de façon naturelle et contrôlée, sans hypothèses ad hoc.

### 2.3.1 Equation cinétique de Boltzmann

Rappelons rapidement que l'équation cinétique de Boltzmann est l'équation d'évolution de la fonction de distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , qui admet la forme générale :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c \quad (2.46)$$

Bien que cette équation soit formellement exacte et suffisante pour déterminer les équations de bilans macroscopiques qui nous intéressent dans ce chapitre, il va de soi que tout calcul effectif nécessite la définition précise de  $\boldsymbol{\gamma}$  (clairement homogène à une accélération, mais laquelle?), ainsi que le second membre généralement appelé "terme de collisions".

Pour procéder à cette identification, le plus simple est de partir de la



première équation (exacte!) de la hiérarchie BBGKY<sup>5</sup> qui s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \gamma_{\text{ext}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = - \int \gamma_{\text{int}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \frac{\partial f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', t)}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \quad (2.47)$$

où :

- $\gamma_{\text{ext}} \equiv \mathbf{F}_{\text{ext}}/m$  est l'accélération due aux force extérieures.
- $\gamma_{\text{int}} \equiv \mathbf{F}_{\text{int}}/m$  est l'accélération due aux forces d'interaction entre les particules situées en  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ .
- $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', t)$  est la fonction de distribution double associée à la probabilité de trouver une particule à l'instant  $t$  en  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  sachant qu'il y en a une autre en  $\mathbf{r}', \mathbf{v}'$ .

Il est alors utile d'introduire la fonction de corrélation à 2 particules définie par la relation :

$$g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', t) \equiv f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \quad (2.48)$$

L'intégration du terme sans corrélation s'effectue sans peine. Dans le cas où  $\gamma_{\text{int}}$  est une fonction de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , on trouve :

$$\int \gamma_{\text{int}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)]}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} \int n(\mathbf{r}', t) \gamma_{\text{int}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (2.49)$$

On notera que l'intégrale s'écrit comme un produit de convolution

$$\int n(\mathbf{r}', t) \gamma_{\text{int}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \equiv (n \star \gamma_{\text{int}})(\mathbf{r}) \quad (2.50)$$

qui représente le champ moyen créé par toutes les particules en  $\mathbf{r}$ .

En regroupant cette contribution de champ moyen avec celle due au champ extérieur et en identifiant les second membres, on obtient les définitions de  $\gamma$  et du terme de collisions de l'équation de Boltzmann :

$$\gamma(\mathbf{r}) \equiv \gamma_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + (n \star \gamma_{\text{int}})(\mathbf{r}), \quad (2.51)$$

$$\left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv - \int \gamma_{\text{int}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \frac{\partial g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', t)}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \quad (2.52)$$

---

5. Il s'agit de la hiérarchie d'équations Born-Bogoliubov-Green-Kirkwood-Yvon (cf. cours de l'UE 1).

Puisque l'accélération prend en compte les champs moyens, il est clair que l'équation de Boltzmann s'identifie avec l'équation de Vlasov si l'on néglige le terme de collisions. Diverses approximations de ce terme conduisent aux autres équations cinétiques, comme celles de Boltzmann, Landau ou Fokker-Planck.

### 2.3.2 Equation générale de transport

Nous avons montré au premier chapitre que les variables macroscopiques étaient proportionnelles aux moments, dans l'espace des vitesses, de la fonction de distribution. Pour obtenir les équations de bilans macroscopiques qui relient entre elles ces quantités, il faut multiplier l'équation de Boltzmann par une certaine puissance de  $\mathbf{v}$  et intégrer.

D'une façon plus générale, soit  $a(\mathbf{v})$  une fonction quelconque<sup>6</sup> du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  qui ne dépende pas de  $\mathbf{r}$  et  $t$ . Considérons l'équation :

$$\int a(\mathbf{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \gamma_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) d\mathbf{v} = \int a(\mathbf{v}) \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d\mathbf{v} \quad (2.53)$$

où la sommation sur l'indice répété  $i$  est sous-entendu (convention d'Einstein).

Comme  $\mathbf{r}$  et  $t$  sont des variables indépendantes de la variable  $\mathbf{v}$ , le calcul des 2 premiers termes du membre de gauche est immédiat :

$$\int a(\mathbf{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) d\mathbf{v} = \frac{\partial \langle na(\mathbf{v}) \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle na(\mathbf{v}) v_i \rangle}{\partial x_i} \quad (2.54)$$

où on a utilisé la définition des moyennes dans l'espace des vitesses définies au chapitre 1,  $n\langle \dots \rangle = \int \dots f d\mathbf{v}$  (on peut éventuellement sortir  $n$  des crochets (mais pas des dérivées) puisqu'il ne dépend pas de  $\mathbf{v}$ ).

Pour calculer le troisième terme du membre de droite, dans le cas des forces électromagnétiques, on a  $\boldsymbol{\gamma} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})/m$ . En remarquant que les forces électromagnétiques sont de divergence nulle dans l'espace des vitesses ( $\gamma_x$  par

---

6. On peut toujours se ramener à une fonction scalaire. Si la fonction est un tenseur, on considère chacune de ses composantes qui est un scalaire.

exemple dépend de  $v_y$  et  $v_z$ , pas de  $v_x$ ), on peut écrire :

$$\int a(\mathbf{v}) \gamma_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = \int a(\mathbf{v}) \frac{\partial(\gamma_i f)}{\partial v_i} d\mathbf{v} = - \int \frac{\partial a(\mathbf{v})}{\partial v_i} \gamma_i f d\mathbf{v} \quad (2.55)$$

$$\equiv - \langle n \gamma_i \frac{\partial a(\mathbf{v})}{\partial v_i} \rangle \quad (2.56)$$

où on a utilisé une intégration par parties (le terme tout intégré est nul si  $f$  décroît suffisamment vite à l'infini, ce qui est raisonnable physiquement).

Enfin, il est commode d'introduire la notation suivante pour le terme issu des collisions :

$$\left( \frac{\delta \langle na(\mathbf{v}) \rangle}{\delta t} \right)_c \equiv \int a(\mathbf{v}) \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d\mathbf{v}, \quad (2.57)$$

de sorte qu'en regroupant les différentes contributions, on obtient l'équation générale de transport :

$$\frac{\partial \langle na(\mathbf{v}) \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle na(\mathbf{v}) \mathbf{v} \rangle) = \langle \gamma \cdot \frac{\partial na(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \rangle + \left( \frac{\delta \langle na(\mathbf{v}) \rangle}{\delta t} \right)_c \quad (2.58)$$

Sous cette forme, cette équation apparaît comme une loi de conservation dont les termes sources sont les 2 termes du membre de droite qui prennent en compte les forces extérieures et les collisions.

Une équation équivalente de transport peut être obtenue en appliquant la même démarche à une fonction  $a$  qui ne dépendrait pas seulement de  $\mathbf{v}$  mais également de  $\mathbf{r}$  et  $t$  (cf. Exercice 5) :

$$\frac{\partial \langle na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \mathbf{v} \rangle) = n \left\langle \frac{D}{Dt} a(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \right\rangle + \langle \gamma \cdot \frac{\partial na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{v}} \rangle + \left( \frac{\delta \langle na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle}{\delta t} \right)_c \quad (2.59)$$

où  $D/Dt \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  est la dérivée convective.

### 2.3.3 Equations macroscopiques de transport

Pour obtenir les équations macroscopiques de transport, il suffit maintenant d'utiliser l'équation générale de transport (2.58) dans les cas particuliers où  $a \equiv m, m\mathbf{v}, m\mathbf{v}\mathbf{v} \dots$

Les équations correspondantes s'écrivent donc (pour les 3 premières)<sup>7</sup> :

$$\frac{\partial(nm)}{\partial t} + \nabla \cdot (nm \langle \mathbf{v} \rangle) = \left( \frac{\delta \langle nm \rangle}{\delta t} \right)_c \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial(nm \langle \mathbf{v} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (nm \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle) = n \langle \mathbf{F} \rangle + \left( \frac{\delta(nm \langle \mathbf{v} \rangle)}{\delta t} \right)_c \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial(nm \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (nm \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle) = n \langle \mathbf{F} \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{F} \rangle + \left( \frac{\delta(nm \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle)}{\delta t} \right)_c \quad (2.62)$$

...

En utilisant la définition des variables macroscopiques définies dans le premier chapitre, ces équations s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \left. \frac{\delta \rho}{\delta t} \right|_c \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Sigma} = n \langle \mathbf{F} \rangle + \left. \frac{\delta \mathbf{\Gamma}}{\delta t} \right|_c \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E} = n \langle \mathbf{F} \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{F} \rangle + \left. \frac{\delta \mathbf{\Sigma}}{\delta t} \right|_c \quad (2.65)$$

...

Dans le cas particulièrement important en physique des plasmas où la force est la force de Laplace,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , sa valeur moyenne s'écrit  $\langle \mathbf{F} \rangle = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$  et met donc en jeu le champ électrique et le champ magnétique.

Sous cette forme, c'est-à-dire à partir des moments non centrés, ces équations ne sont pas très utilisées en physique des plasmas. On préfère en général écrire les équations équivalentes formulées à l'aide des moments centrés. Les équations correspondantes peuvent être obtenues à partir des équations précédentes en y substituant les relations (1.19) et (1.20) du chapitre précédent qui permettent de passer des variables macroscopiques non centrées aux variables macroscopiques centrées. Alternativement, on peut partir directement de l'équation générale de transport (2.59) dans les cas particuliers où  $a \equiv m$  ou  $1, m\mathbf{w}, m\mathbf{w}\mathbf{w}$ , ...

---

7. Une seule petite difficulté, le calcul de  $\mathbf{F} \cdot \partial_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}\mathbf{v})$ . Faites le !

On trouve alors presque aussitôt pour les bilans de matière ( $a = 1$ ), d'impulsion ( $\mathbf{a} = m\mathbf{w}$ ) et d'énergie ( $\mathbf{a} = m\mathbf{w}^2/2$ )(cf. Exercice 6)<sup>8</sup>

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c \quad (2.66)$$

$$nm \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P} - n\langle \mathbf{F} \rangle = \left. \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta t} \right|_c \quad (2.67)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{3p}{2} \right) + \frac{3p}{2} \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{P} : \nabla \mathbf{V} = \left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c \quad (2.68)$$

où nous avons regroupé les contributions des collisions dans le terme de droite :

$$\left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c = S \quad (2.69)$$

$$\left. \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta t} \right|_c = \mathbf{A} - S m \mathbf{V}, \quad (2.70)$$

$$\left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c = K - \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} m V^2 S \quad (2.71)$$

avec les définitions :

$$S \equiv \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d\mathbf{v}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{A} \equiv \int m\mathbf{v} \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d\mathbf{v}, \quad (2.73)$$

$$K \equiv \int \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d\mathbf{v} \quad (2.74)$$

Ces trois équations sont les plus simples et les plus couramment utilisées dans les modélisations fluides. Il est bien entendu possible d'obtenir des équations introduisant des moments d'ordre supérieur comme l'équation de bilan du tenseur de pression et de bilan du vecteur flux de chaleur que nous donnons ici sans démonstration (en faisant respectivement  $a = m\mathbf{w}\mathbf{w}$  et  $a = m\mathbf{w}^2\mathbf{w}$  et

---

8. Le produit  $\mathbf{P} : \nabla \mathbf{V}$  correspond à la double contraction des tenseurs  $\mathbf{P}$  et  $\nabla \mathbf{V}$ , également noté,  $(\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V}$ . Les composantes de ce tenseur s'écrivent  $\sum_{i,j} P_{ij} \partial_j V_i$ .

en intégrant sur les vitesses) :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{V} + (\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{V})^T - n \langle \mathbf{F} \mathbf{w} + (\mathbf{F} \mathbf{w})^T \rangle &= \left. \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D\mathbf{q}}{Dt} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{q}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{V} + \nabla \mu + \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \mathbf{F} \right) \cdot \left( \boldsymbol{\pi} + \frac{5}{2} p \mathbf{I} \right) - \frac{q}{m} \mathbf{q} \times \mathbf{B} &= \left. \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta t} \right|_c \end{aligned} \quad (2.75)$$

Dans ces expressions<sup>9</sup>  $q$  représente la charge, à ne pas confondre avec le vecteur flux de chaleur,  $\mathbf{q}$ . On a également introduit le tenseur d'ordre 2  $\mu \equiv nm \langle \mathbf{w}^2 \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle / 2$  ainsi que le tenseur flux de chaleur  $\mathbf{Q} \equiv nm \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle$ .

## 2.4 Résumé

Pour résumer, la modélisation fluide utilisée en physique des plasmas considère, sur un pied d'égalité, un certain nombre d'équations de type hydrodynamique (au minimum les équations de bilans de masse et de quantité de mouvement) et les équations de Maxwell.

Lorsqu'on ne retient comme forces extérieures que la force de Laplace<sup>10</sup>, le système d'équations à considérer peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_s) = \left. \frac{\delta n_s}{\delta t} \right|_c \quad (2.76)$$

$$n_s m_s \frac{D\mathbf{V}_s}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_s - n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{V}_s \times \mathbf{B}) = \left. \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t} \right|_c \quad (2.77)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{3p_s}{2} \right) + \frac{3p_s}{2} \nabla \cdot \mathbf{V}_s + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \mathbf{P}_s : \nabla \mathbf{V}_s = \left. \frac{\delta E_s}{\delta t} \right|_c, \quad (2.78)$$

...

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.79)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.80)$$

Effectuons quelques commentaires sur ces équations :

---

9. Les moyennes de type  $\langle \mathbf{F} \mathbf{w} \rangle$  ne mettent en jeu que le champ magnétique puisque  $\langle \mathbf{E} \mathbf{w} \rangle = \mathbf{E} \langle \mathbf{w} \rangle = 0$ .

10. Les forces de friction sont comprises dans les termes de collisions (cf. chapitre suivant).

- 
1. Pour envisager une résolution effective, ce jeu d'équations aux dérivées partielles doit être complété par des conditions initiales et des conditions aux limites qui dépendent du problème étudié.
  2. Les équations hydrodynamiques doivent être écrites a priori - sauf approximations particulières - pour chaque composante  $s$  du plasma (électrons, ions et espèces neutres).
  3. A contrario, les équations de Maxwell sont valables pour tout le plasma, en particulier  $\mathbf{J} \equiv \sum_s J_s = \sum_s n_s q_s \mathbf{V}_s$ . Les champs électriques et magnétiques qui interviennent sont les champs totaux (extérieurs + ceux créés en réaction par le plasma).
  4. Si elles sont prises en compte dans les conditions initiales, il est inutile de rajouter les 2 équations de Maxwell manquantes (mais c'est parfois commode).
  5. En général, ce système comprend plus de champs inconnus que d'équations. C'est le problème général de la *fermeture des équations fluides*, sur lequel nous reviendrons dans un chapitre ultérieur.
  6. La forme des termes de collisions doit être précisée. Ceux-ci ne peuvent pas être calculés en général sans effectués des approximations qui seront discutées dans le chapitre suivant.

## 2.5 Exercices

### Exercice 1

Montrez que si les équations de (2.1) et (2.2) sont vérifiées à un instant  $t$ , alors, par intégration de (2.3) et (2.4), elles le sont pour tout  $t$ .

### Exercice 2

Montrez à partir des 4 équations de Maxwell (2.1) à (2.4) la forme de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (2.5).

### Exercice 3

En utilisant l'équation (2.21), montrez que pour un plasma (ou un fluide) sans collisions, la condition  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , implique que la densité est constante le long de la trajectoire du fluide. C'est l'hypothèse d'incompressibilité.

### Exercice 4

Dans le cas isotrope ( $\mathbf{P} = p\mathbf{1}$ ), adiabatique ( $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ ), et non-collisionnel, montrez que l'équation d'énergie thermique s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}p \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2}p\mathbf{V} \right) = \mathbf{V} \cdot \nabla(p) \quad (2.81)$$

et retrouvez le résultat bien connu en thermodynamique  $D_t(pn^{-5/3}) = 0$  pour une transformation adiabatique.

### Exercice 5

Partir de l'équation (2.42) obtenue dans l'approche macroscopique et montrer qu'elle est équivalente à l'équation (2.68) obtenue par intégration de l'équation de Boltzmann.

En comparant les 2 équations identifier le second membre de l'équation (2.42),  $\delta p' / \delta t|_c$ .

### Exercice 6

Soit  $a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  une fonction quelconque. Après avoir multiplié l'équation de Boltzmann par  $a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  et avoir intégré sur les vitesses, établir l'expression de



l'équation générale de transport :

$$\frac{\partial \langle na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \mathbf{v} \rangle) = n \left\langle \frac{D}{Dt} a(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \right\rangle + \left\langle \gamma \cdot \frac{\partial na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle + \left( \frac{\delta \langle na(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle}{\delta t} \right)_c$$

### Exercice 7

Utilisez l'équation générale de transport obtenue dans l'exercice 5 pour dériver les équations de bilan de matière, de quantité de mouvement et d'énergie.

### Exercice 8

Montrer qu'on obtient l'équation (2.68) en prenant la demi-trace de l'équation de bilan du tenseur de pression (2.75).

### Exercice 9 (partie de l'examen 2011)

On considère un magnétoplasma anisotrope dans le cadre de la MHD (approche à un fluide). On note  $\mathbf{B}$  le champ magnétique, et  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ . Le tenseur de pression  $\mathbf{P}$  ne fait intervenir que les termes  $P_\perp$  et  $P_\parallel$ .

1. Ecrire la forme du tenseur de pression  $\mathbf{P}$  en fonction des tenseurs  $\mathbf{1} - \mathbf{b}\mathbf{b}$  et  $\mathbf{b}\mathbf{b}$ .
2. On rappelle que pour un plasma sans collisions et sans forces extérieures, l'équation d'évolution du tenseur de pression s'écrit sous forme vectorielle

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P}(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{U} + (\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{U})^T = 0$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse MHD et  $\mathbf{Q}$  le tenseur flux de chaleur.

Réécrire cette équation sous forme indicelle :  $DP_{ij}/Dt + \dots$



## Rôle des collisions dans les modélisations fluides

### 3.1 Rappels sur les collisions dans un plasma

Dans cette section nous rappelons quelques généralités sur les sections efficaces de collisions dans les plasmas, et nous rappelons les mécanismes collisionnels les plus importants auxquels nous ferons référence dans la suite<sup>1</sup>.

On entend par collision entre particules tout mécanisme d'interaction, de contact ou à distance, qui modifie les trajectoires initiales des particules. La quantité de mouvement totale et l'énergie totale sont des invariants dans les collisions, mais les déviations de trajectoires s'accompagnent d'un transfert de quantité de mouvement et d'énergie cinétique d'une des particules vers l'autre. Bien que certaines collisions puissent, a priori, mettre en jeu plusieurs particules, celles-ci sont rares dans les milieux dilués que sont les plasmas, et nous nous limiterons donc dans la suite aux collisions binaires.

Notons génériquement 1 et 2 les 2 particules (éventuellement identiques) entrant en collisions selon un schéma de réaction bien défini :

$$1 + 2 \longrightarrow \dots$$

Le nombre de particules de type 1 entrant en collisions avec les particules de type 2, par unité de temps et de volume doit être proportionnel au flux relatif des particules de type 1,  $n_1|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ , et à la densité des particules de type 2,  $n_2$ . Le coefficient de proportionnalité (homogène à une surface) est, par

---

1. Pour des détails sur la physique des collisions, se rapporter à la 2ème partie de l'UE 2 "Théorie cinétique".

définition, la *section efficace totale*  $\sigma_{12}$  de la réaction 1-2 :

$$\frac{dn_1}{dt} = \sigma_{12} n_2 n_1 v_{12}$$

où on a noté par commodité  $v_{12} \equiv |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  le module de la vitesse relative des particules<sup>2</sup>. On notera qu'en général, la section efficace dépend de cette vitesse relative :  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(v_{12})$ .

Trois quantités importantes qui dépendent de la section efficace sont le taux de collision (en  $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ), noté  $K_{12}$ , la fréquence de collision (en  $\text{s}^{-1}$ ), noté  $\nu_{12}$ , et le libre parcours moyen (en m), noté  $\lambda_{12}$  :

$$\begin{aligned} K_{12}(v_{12}) &\equiv \sigma_{12} v_{12}, \\ \lambda_{12}(v_{12}) &\equiv \frac{1}{n_2 \sigma_{12}}, \\ \nu_{12}(v_{12}) &\equiv n_2 K_{12} = n_2 \sigma_{12} v_{12} = \frac{v_{12}}{\lambda_{12}}, \end{aligned}$$

Comme il existe une distribution des vitesses des particules au sein d'un plasma, on peut définir des grandeurs macroscopiques correspondantes en effectuant une moyenne avec les fonctions de distribution.

Une section efficace peut être associée à chaque type de collision, dépendant des particules impliquées (atomes, molécules, ions, électrons ...), de leur loi d'interaction (de contact, de polarisation, coulombienne ...), des processus de conservation d'énergie considérés (élastiques, inélastiques). Le calcul effectif de ces sections efficaces est en général très difficile et nécessite parfois un calcul quantique. Un grand nombre de sections efficaces de collisions sont cependant connues au moins expérimentalement.

Quelques unes des interactions importantes entre les particules d'un plasma peuvent être analysées en considérant une loi de force (centrale) de la forme<sup>3</sup> :

$$F_{12}(r_{12}) = \frac{C_{12}}{r_{12}^a}$$

---

2. On peut éventuellement introduire un signe moins si l'on considère que les particules 1 sont détruites dans la réaction.

3. Les forces d'interactions magnétiques entre particules chargées ne relèvent pas de cette forme, mais sont généralement négligeables au niveau microscopique, sauf dans le cas des plasmas relativistes.

où  $r_{12}$  est la distance entre les particules, et où  $C_{12}$  et  $a$  sont des constantes qui dépendent de l'interaction considérée. Les cas les plus importants correspondent aux valeurs  $a = 2$ ,  $a = 5$  et  $a \rightarrow \infty$ . Dans ce qui suit, on rappelle<sup>4</sup> la dépendance fonctionnelle en la vitesse relative  $v_{12}$  dans chacun de ces cas, et on décrit sommairement les principaux mécanismes collisionnels relevant de ces interactions.

1.  $a = 2$  : interaction coulombienne.

Ce cas convient donc pour décrire les interactions entre particules chargées : électron-électron, électron-ion ou ion-ion dans un plasma. Le calcul des sections efficaces totales nécessite une régularisation du potentiel coulombien.

$$F_{12}(r_{12}) \propto \frac{1}{r_{12}^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12}(v_{12}) \propto \frac{1}{v_{12}^4} \quad \Rightarrow \quad K_{12}, \nu_{12} \propto \frac{1}{v_{12}^3}$$

2.  $a = 5$  : interaction charge-dipôle.

Ce cas correspond à l'interaction d'une charge (électron ou ion) avec un atome polarisable. La polarisation n'est effective (i.e. n'a le temps de se réaliser) que si la vitesse relative des particules n'est pas trop importante, faute de quoi, on a une interaction de types sphères dures. Cette interaction peut également être utilisée pour décrire le cas des collisions ion-atome avec transfert de charge résonnant (interaction d'un ion avec son atome parent).

$$F_{12}(r_{12}) \propto \frac{1}{r_{12}^5} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12}(v_{12}) \propto \frac{1}{v_{12}} \quad \Rightarrow \quad K_{12}, \nu_{12} = \text{Cte}$$

3.  $a \rightarrow \infty$  : interaction de sphères dures.

Cette interaction peut être utilisée dans le cas des interactions d'une charge avec un atome non polarisable ou d'une charge avec un atome polarisable à haute énergie. Cette interaction permet également de décrire les interactions atome-atome à courte portée (à plus longue portée, il faut utiliser le potentiel de van der Waals).

$$F_{12}(r_{12}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r_{12}^\nu} \right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12}(v_{12}) = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad K_{12}, \nu_{12} \propto v_{12}$$

---

4. Le détail des calculs peut être trouvés, par exemple, dans le livre de Delcroix

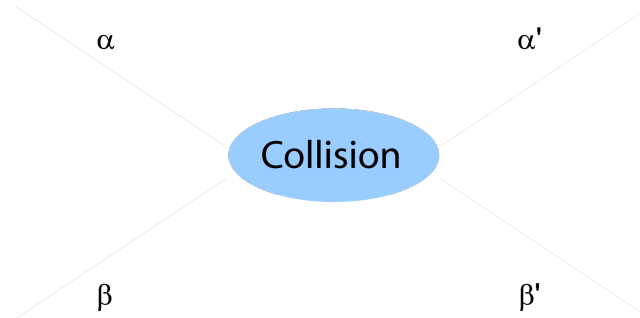
Ces interactions sont aussi bien à l'origine des collisions élastiques qu'inélastiques. Dans ce dernier cas, un effet de seuil est observé : les sections efficaces sont nulles en deçà d'une certaine énergie minimale.

### 3.1.1 Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires

Considérons une collision binaire, élastique ou inélastique, entre une particule de masse  $m_\alpha$ , de vitesse  $\mathbf{v}_\alpha$ , et une particule de masse  $m_\beta$ , de vitesse  $\mathbf{v}_\beta$ . On se limite au cas où les particules créées sont elles-mêmes des particules de type  $\alpha$  ou  $\beta$ , seules leurs vitesses et leurs énergies sont modifiées.

$$\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \beta(\mathbf{v}_\beta) \xrightarrow{\Delta E} \alpha(\mathbf{v}'_\alpha) + \beta(\mathbf{v}'_\beta)$$

Les bilans qui suivent ne s'appliquent donc pas aux réactions dites réactives où la nature des particules est modifiée (c'est le cas par exemple pour les réactions d'ionisation).  $\mathbf{v}'_\alpha$  et  $\mathbf{v}'_\beta$  désignent les vitesses des particules après la collision.



La quantité de mouvement totale et l'énergie totale sont identiques avant et après la collision (ainsi que la masse totale, bien sûr). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta &= m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + m_\beta \mathbf{v}'_\beta, \\ \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}_\beta^2 &= \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}'_\beta^2 + \Delta E, \end{aligned}$$

où  $\Delta E$  est la variation d'énergie interne de la réaction. Dans le cas des collisions élastiques,  $\Delta E = 0$ , et la deuxième relation s'identifie alors avec la conservation de l'énergie cinétique totale.

Une conséquence immédiate de la conservation de la quantité de mouvement est la conservation de la vitesse du centre de gravité :

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}'_G,$$

valable aussi bien pour les collisions élastiques que pour les collisions inélastiques.

### Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires élastiques (cf. Exercice 1)

Dans le cas des collisions élastiques, on montre facilement que le module de la vitesse relative des particules,  $v_{\alpha\beta} \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$ , est un invariant collisionnel :

$$v_{\alpha\beta} = v'_{\alpha\beta}$$

Le vecteur vitesse relative ne change donc pas de module mais seulement de direction. La rotation du vecteur dans l'espace est décrite par 2 angles résumés dans l'angle solide  $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$  (cf. figure 3.1).

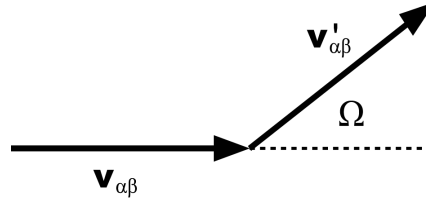


FIGURE 3.1 – Rotation de la vitesse relative dans les collisions élastiques.

Nous serons particulièrement intéressés dans la suite par le transfert de quantité de mouvement et d'énergie cinétique à une des composantes - disons  $\alpha$  - au cours d'une collision. On peut établir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_\alpha &\equiv m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mu_{\alpha\beta} (\mathbf{v}'_{\alpha\beta} - \mathbf{v}_{\alpha\beta}), \\ \Delta E_{c\alpha} &\equiv \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 - \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha^2 = \mathbf{v}_G \cdot \Delta \mathbf{p}_\alpha \end{aligned}$$

où nous avons introduit la masse réduite  $\mu_{\alpha\beta}$  définie par la relation :

$$\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$$

En moyennant sur l'angle  $\varphi$ , on trouve finalement :

$$\langle \Delta \mathbf{p}_\alpha \rangle_\varphi = -\mu_{\alpha\beta} (1 - \cos \theta) \mathbf{v}_{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

$$\langle \Delta E_{c\alpha} \rangle_\varphi = -\kappa_{\alpha\beta} (1 - \cos \theta) \left[ E_{c\alpha} - E_{c\beta} + (m_\beta - m_\alpha) \frac{\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta}{2} \right] \quad (3.2)$$

où on a introduit le coefficient de transfert en énergie :

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{2\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}$$

Il est facile de voir à partir des expressions de  $\mu_{\alpha\beta}$  et  $\kappa_{\alpha\beta}$  que les transferts d'impulsion et d'énergie cinétique sont très faibles entre particules de masses différentes (collisions électron-neutre ou ion-neutre) ( $\mu_{en} \sim m_e$  et  $\kappa_{en} \sim 2m_e/M$ ) et plus importante entre les particules massives (collisions ion-neutre ou neutre-neutre) ( $\mu_{in} \sim M/2$  et  $\kappa_{en} \sim 1/2$ ).

### Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires inélastiques

Dans le cas des collisions inélastiques, le transfert d'impulsion et d'énergie cinétique à la particule  $\alpha$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{p}_\alpha \rangle_\varphi &= -\mu_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{v'_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}} \cos \theta \right) \mathbf{v}_{\alpha\beta}, \\ \langle \Delta E_{c\alpha} \rangle_\varphi &= -\kappa_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{v'_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}} \cos \theta \right) [E_{c\alpha} - E_{c\beta} + (m_\beta - m_\alpha) \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta] + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta E \end{aligned}$$

avec

$$\frac{v'_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}} = \left( 1 - 2 \frac{\Delta E}{\mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^2} \right)^{1/2}$$

## 3.2 Contributions des collisions élastiques aux équations de bilan

Dans cette section, après avoir rappelé quelques résultats élémentaires sur les intégrales de collisions, nous nous proposons d'obtenir les contributions



collisionnelles aux équations de transport obtenues dans le chapitre précédent, c'est-à-dire calculer les expressions du type :

$$\int g(\mathbf{v}_\alpha) \left( \frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c d\mathbf{v}_\alpha$$

avec  $g(\mathbf{v}_\alpha) = m_\alpha, m_\alpha \mathbf{v}_\alpha, m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \dots$ .

### 3.2.1 Rappels sur l'intégrale de collision de Maxwell-Boltzmann

Nous rappelons maintenant l'approximation due à Maxwell-Boltzmann (MB) pour le calcul des intégrales de collisions dans le cas élastique. Cette expression nous sera utile pour calculer explicitement les contributions collisionnelles aux équations macroscopiques de transport. Une forme simplifiée de cette intégrale de collision, due à Bhatnagar, Gross et Krook (approximation dite BGK) sera également étudiée en Td (cf. Exercice 2).

Ces approximations ne sont pas les seules utilisées en physique des plasmas, celle de Fokker-Planck en particulier joue un rôle important pour les collisions élastiques entre particules chargées. Après régularisation du potentiel coulombien, l'approximation de Fokker-Planck peut cependant être obtenue comme un cas particulier de l'approximation de Maxwell-Boltzmann et ne conduit pas, pour les calculs qui nous intéressent ici, à des calculs plus simples que ceux effectués avec l'approximation MB<sup>5</sup>. L'intégrale de collision de Maxwell-Boltzmann pour les particules de la composante  $\alpha$  relative aux collisions avec les particules de la composante  $\beta$  (éventuellement  $\beta = \alpha$ ) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^{MB}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) \\ &= \iint [f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\beta, t) - f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t)] v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d\mathbf{v}_\beta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans cette expression,  $\mathbf{v}'_\alpha$  (respectivement  $\mathbf{v}_\alpha$ ) et  $\mathbf{v}'_\beta$  (respectivement  $\mathbf{v}_\beta$ ) représentent les vitesses des composantes  $\alpha$  et  $\beta$  après la collision (respectivement avant la collision), et  $v_{\alpha\beta} \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$  la vitesse relative des deux

---

5. Nous renvoyons pour les détails à la 2ème partie du cours de l'UE 2, "Théorie cinétique".

particules. Comme on l'a vu précédemment, la rotation du vecteur  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$  est décrite par les 2 angles résumés dans l'angle solide  $\Omega$ .  $\sigma_{\alpha\beta}$  est la section efficace *différentielle* de collision, qui dépend généralement de la vitesse relative et de l'angle solide  $\Omega$  :  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega)$ .

Rappelons que cette expression de l'intégrale de collision n'est pas universelle mais suppose i) que la fonction de distribution varie lentement à l'échelle de la portée et de la durée de l'interaction considérée ii) que les effets des forces extérieures soient négligés, iii) que seules les collisions binaires soient prises en compte iv) que les vitesses des particules avant le choc ne soient pas corrélés.

On notera que le premier morceau de l'intégrale correspond aux nombre de particules de type  $\alpha$  qui, par suite des collisions, entrent par seconde dans le volume de l'espace des phases  $d\mathbf{r}d\mathbf{v}_\alpha$ , tandis que la deuxième partie de l'intégrale correspond aux particules qui en sortent.

Il est commode de récrire l'intégrale de collision de Maxwell-Boltzmann sous une forme équivalente qui ne mettent plus en jeu les fonctions de distributions après collisions. En effet, les collisions élastiques étant réversibles, on peut échanger dans les sommes les variables avant collision  $(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta)$  avec celles après collision  $(\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta)$  de sorte que :

$$\begin{aligned} & \iiint g(\mathbf{v}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\beta, t) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) d\Omega d\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\alpha \\ &= \iiint g(\mathbf{v}'_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) v'_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v'_{\alpha\beta}) d\Omega d\mathbf{v}'_\beta d\mathbf{v}'_\alpha \\ &= \iiint g(\mathbf{v}'_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) d\Omega d\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\alpha \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant le fait que  $v'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}$  pour les collisions élastiques, et que le Jacobien de la transformation est égal à l'unité.

On en déduit l'égalité suivante qui sera utilisée dans la suite :

$$\int g(\mathbf{v}_\alpha) \left( \frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^{MB} d\mathbf{v}_\alpha = \iiint [g(\mathbf{v}'_\alpha) - g(\mathbf{v}_\alpha)] f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) d\Omega d\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\alpha \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Contributions des collisions élastiques aux équations de bilan

A titre d'illustration, nous présentons dans cette section, le calcul de la contribution des collisions élastiques aux équations de transport en utilisant l'intégrale de collision de Maxwell-Boltzmann. Un calcul identique sera fait en TD dans le cadre de l'approximation de Bhatnagar-Gross-Krook (cf. Exercice 3).

Compte tenu des résultats obtenus dans la section précédente, l'objectif est donc de calculer les expressions suivantes :

$$C_\ell^{\text{el}} \equiv \iiint [g_\ell(\mathbf{v}'_\alpha) - g_\ell(\mathbf{v}_\alpha)] f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) d\Omega d\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\alpha \quad (3.5)$$

où  $\ell$  est l'ordre du moment associé. Ainsi,  $g_0(\mathbf{v}_\alpha) = m_\alpha$ ,  $g_1(\mathbf{v}_\alpha) = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  et  $g_2(\mathbf{v}_\alpha) = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2$ .

Rappelons les expressions des transferts de quantité de mouvement et d'énergie cinétique des particules de la composante  $\alpha$  lors des collisions élastiques avec les particules de la composante  $\beta$  obtenues plus haut :

$$\langle \Delta \mathbf{p}_\alpha \rangle_\varphi = -\mu_{\alpha\beta} (1 - \cos \theta) \mathbf{v}_{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

$$\langle \Delta E_{c\alpha} \rangle_\varphi = -\kappa_{\alpha\beta} \left[ E_{c\alpha} - E_{c\beta} + (m_\beta - m_\alpha) \frac{\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta}{2} \right] \quad (3.7)$$

#### 1. Contribution au bilan de masse

La contribution au bilan de masse est obtenue à l'aide de  $g_0(\mathbf{v}_\alpha) \equiv m_\alpha$ . L'équation (3.5) donne clairement une contribution nulle, ce qui traduit le fait que le nombre de particules n'est pas modifié lors des collisions élastiques :

$$C_0^{\text{el}} \equiv m_\alpha S_\alpha^{\text{el}} = 0$$

où nous avons réintroduit les notations du 2ème chapitre.

#### 2. Contribution au bilan de quantité de mouvement

Pour le bilan de quantité de mouvement, nous considérons  $g_1(\mathbf{v}_\alpha) \equiv m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ . Il est utile d'introduire la section efficace de transfert d'impulsion

$\sigma_{\alpha\beta}^t$ , la fréquence de collision,  $\nu_{\alpha\beta}$  et le taux de réaction,  $K_{\alpha\beta}$ , définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^t(v_{\alpha\beta}) &\equiv \int (1 - \cos \theta) \sigma_{\alpha\beta} d\Omega, \\ \nu_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) &\equiv n_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}^t v_{\alpha\beta}, \\ K_{\alpha\beta} &\equiv \sigma_{\alpha\beta}^t v_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\mathbf{C}_1^{\text{el}} = -\mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \iint \mathbf{v}_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \frac{f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\alpha}, t)}{n_{\alpha}} \frac{f_{\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\beta}, t)}{n_{\beta}} d\mathbf{v}_{\alpha} d\mathbf{v}_{\beta}$$

De façon plus compacte, on posera :

$$\boxed{\mathbf{C}_1^{\text{el}} \equiv \mathbf{A}_{\alpha}^{\text{el}} = -\mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \langle \mathbf{v}_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \rangle}$$

où la moyenne doit être effectuée avec les 2 fonctions de distributions normalisées.

### 3. Contribution au bilan d'énergie

En effectuant le calcul avec  $g_2(\mathbf{v}_{\alpha}) \equiv m_{\alpha} v_{\alpha}^2$ , et en utilisant les mêmes notations que ci-dessus, on trouve aussitôt :

$$\boxed{C_2^{\text{el}} \equiv 2K_{\alpha} = -\kappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \langle (m_{\alpha} v_{\alpha}^2 - m_{\beta} v_{\beta}^2 + (m_{\beta} - m_{\alpha}) \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\beta}) K_{\alpha\beta} \rangle}$$

Pour aller plus loin dans le calcul il faut préciser la dépendance fonctionnelle du taux de collisions  $K_{\alpha\beta}$  en fonction de la vitesse relative  $v_{\alpha\beta}$ . Cela revient à préciser la section efficace de collision et donc la nature des forces d'interaction entre les particules considérées. Ce calcul ne peut donc être effectué qu'au cas par cas, et suppose en outre de préciser la forme des fonctions de distributions pour être mener à son terme.

Il existe cependant un cas particulier qui permet un calcul sans hypothèse sur les fonctions de distributions. Il s'agit du cas où la section efficace est inversement proportionnelle à la vitesse relative  $\sigma_{\alpha\beta}^t \sim 1/v_{\alpha\beta}$ , de sorte que le taux de réaction et la fréquence de collision sont constants. Comme nous l'avons vu plus haut, ce cas correspond à une interaction du type charge-dipôle induit et constitue une approximation raisonnable pour traiter le cas des collisions élastiques de type charge-neutre dans un régime de pression plutôt élevé.

### 3.2.3 Cas des fréquences de collisions constantes

Nous supposons donc désormais que  $K_{\alpha\beta}$  (et donc également  $\nu_{\alpha\beta}$ ) sont indépendants des vitesses des composantes. Alors,

$$\langle \mathbf{v}_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \rangle = K_{\alpha\beta} \langle \mathbf{v}_{\alpha\beta} \rangle = K_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta),$$

où nous avons introduit les vitesses (moyennes) fluides.  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  s'écrit simplement :

$$\mathbf{A}_\alpha^{\text{el}} = -\mu_{\alpha\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \quad (\nu_{\alpha\beta} \text{ indépendant de } \mathbf{v}_{\alpha\beta})$$

De même, pour le calcul de  $C_2$ , en introduisant la décomposition  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$  et  $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{V}_\beta + \mathbf{w}_\beta$ , on trouve aussitôt<sup>6</sup> :

$$K_\alpha^{\text{el}} = -\kappa_{\alpha\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta} \left[ \frac{3k_B (T_\alpha - T_\beta)}{2} + \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} - \frac{m_\beta V_\beta^2}{2} + (m_\beta - m_\alpha) \frac{\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{V}_\beta}{2} \right]$$

où on a utilisé la relation de définition de la température  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  des composantes :  $m_\alpha \langle u_\alpha^2 \rangle = 3k_B T_\alpha$  et  $m_\beta \langle u_\beta^2 \rangle = 3k_B T_\beta$ .

L'identification des différentes contributions correspond respectivement au transfert d'énergie thermique non dirigée (1er terme), et aux transferts d'énergie cinétique dirigée (3 derniers termes), entre les 2 composantes  $\alpha$  et  $\beta$ .

On remarquera que les contributions,  $S_1^{\text{el}}$  et  $S_2^{\text{el}}$  que l'on vient d'obtenir peuvent s'écrire sous la forme synthétique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha^{\text{el}} / m_\alpha &= -\delta m_{\alpha\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta}, \\ K_\alpha^{\text{el}} &= -\delta m_{\alpha\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}} \mathcal{E}_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

où  $\delta m_{\alpha\beta} = m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ , et où la fréquence de collisions,  $\nu_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$ , associée aux transferts d'énergie est telle que,  $\nu_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}} = 4m_\alpha / (m_\alpha + m_\beta) \nu_{\alpha\beta}$ .

Cette dernière remarque montre que les transferts d'énergie entre électrons et neutres sont plus faibles de plusieurs ordres de grandeurs que les transferts d'impulsion entre les mêmes particules (cf. figure 3.2).

$C_0$ ,  $\mathbf{C}_1$  et  $C_2$  peuvent être directement reliés aux termes de collisions introduits dans les différentes équations de bilan dérivées à la fin du chapitre 2.

---

6. En remarquant que  $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = \langle \mathbf{w}_\beta \rangle = 0$  et  $\langle \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{w}_\beta \rangle = \sum_i \langle w_{\alpha,i} \rangle \langle w_{\beta,i} \rangle = 0$ .

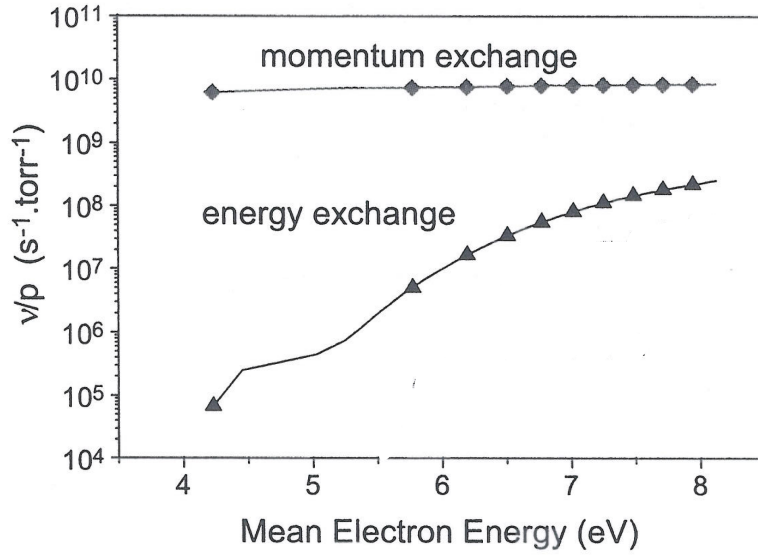


FIGURE 3.2 – Fréquences de transfert d'impulsion, d'énergie et d'ionisation pour des électrons dans l'argon, obtenues par résolution de l'équation de Boltzmann (tiré de [2]).

Après un peu d'algèbre, on obtient les expressions suivantes :

$$\left. \frac{\delta n_\alpha}{\delta t} \right|_c^{el} = 0, \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\delta \mathbf{M}_\alpha}{\delta t} \right|_c^{el} = -n_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta), \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\delta E_\alpha}{\delta t} \right|_c^{el} = -n_\alpha \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} \left[ \frac{3k_B (T_\alpha - T_\beta)}{2} - \frac{m_\beta (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)^2}{2} \right] \quad (3.10)$$

où on a rajouté une somme sur  $\beta$  pour prendre en compte la possibilité de collisions élastiques avec différentes composantes.

### 3.3 Contributions des collisions inélastiques aux équations de bilan

Pour les collisions inélastiques, les calculs sont difficiles, souvent approchés et à faire au cas par cas. Nous nous contenterons dans cette section de donner une forme effective phénoménologique pour les contributions des collisions inélastiques aux équations de bilans que nous illustrerons dans le cas des réactions d'ionisation et de recombinaison électron-ion.

Pour fixer les idées, considérons une réaction inélastique du type suivant :

$$s + t \rightarrow a + b$$

et attachons-nous à considérer la contribution de ces collisions inélastiques sur la composante  $s$ . Les particules de type  $s$  étant détruites dans les collisions “s-t”, une forme phénoménologique acceptable est la suivante :

$$\left( \frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_c^{s+t \rightarrow a+b} = -K_{st} n_s n_t X_s$$

où  $X_s$  représente la fonction de distribution des particules de type  $s$  qui disparaissent dans les collisions entre  $s$  et  $t$ . Puisque seulement une partie des particules de type  $s$  sont impliquées dans les collisions inélastiques (ce sont des réactions à seuil), la fonction de distribution  $X_s$  est a priori *différente* de la fonction de distribution  $f_s$  qui elle représente toutes les particules de type  $s$ . Remarquons en outre que  $X_s$  est normalisée à l'unité.

Il va de soi que si l'on considère une réaction qui produit des particules de types  $s$ , comme par exemple la réaction inverse :

$$a + b \rightarrow s + t$$

il faut compter positivement les particules produites. On écrirait donc dans ce dernier cas :

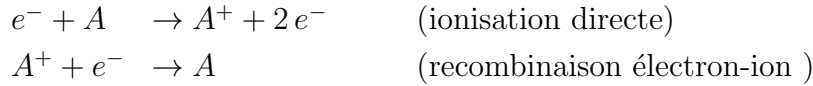
$$\left( \frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_c^{a+b \rightarrow s+t} = +K_{ab} n_a n_b Y_s$$

où  $Y_s$  est maintenant la fonction de distribution des particule de type  $s$  qui apparaissent dans les collisions “a-b”.

La forme proposée étant largement phénoménologique, on se contente en général, pour  $X_s$  et  $Y_s$ , d'une forme maxwellienne, dont les valeurs des vitesses moyennes et températures effectives, sont choisies en fonction de la réaction considérée.

### Exemple

Considérons par exemple le cas d'un plasma comprenant des électrons,  $e^-$ , des atomes,  $A$ , et des ions positifs,  $A^+$ . On suppose que les processus dominants sont tels que les électrons sont produits par ionisation et perdus aux parois, et que les ions positifs sont produits par ionisation et perdus par recombinaison avec les électrons. Les réactions correspondantes s'écrivent donc :



Si on ne distingue pas les différents électrons, on pourra remarquer que la réaction d'ionisation est équivalente à la réaction plus simple  $A \rightarrow A^+ + e^-$  du point de vue de la production et de la disparition des espèces.

Pour les ions positifs par exemple, on obtiendrait donc :

$$\left( \frac{\delta f_{A^+}}{\delta t} \right)_c = +K_I n_e n_A Y_I - K_r n_{A^+} n_e X_r$$

où les indices  $I$  et  $r$  font référence aux réactions d'ionisation et de recombinaison. Rappelons que le taux de réaction  $K_I$  dépend très fortement de la température électronique  $T_e$  :  $K_I \approx K_{I0} \exp -E_I/(k_B T_e)$ . A titre d'exemple, l'énergie d'ionisation  $E_I$  et la constante  $K_{I0}$  valent respectivement 15.7 eV et  $5 \cdot 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}$  pour l'argon.

Les ions positifs sont créés par ionisation suite à la collision d'électrons énergétiques sur les atomes neutres. Les transferts de quantité de mouvement et d'énergie étant faibles entre électrons et neutres, une approximation acceptable pour la fonction de distribution des ions après collisions consiste à l'identifier avec la fonction de distribution des neutres avant collisions (vitesse moyenne négligeable et température  $T_n$ ) :

$$Y_I = \left( \frac{m_i}{2\pi k_B T_n} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_i \mathbf{v}^2}{2k_B T_n} \right]$$



Dans le cas de la recombinaison électron-ion, on considère généralement que les ions disparaissent avec une vitesse moyenne correspondant à leur vitesse fluide et que les électrons ne produisent qu'un échauffement négligeable :

$$X_r = \left( \frac{m_i}{2\pi k_B T_i} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_i}{2k_B T_i} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_i)^2 \right]$$

Sous ces hypothèses simplifiées, on montre facilement que les contributions des collisions inélastiques aux bilans macroscopiques mettront en jeu les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} S^{\text{inel.}} &= +K_I n_e n_A - K_r n_{A^+} n_e, \\ \mathbf{A}^{\text{inel.}} &= -K_r n_{A^+} n_e m_i \mathbf{V}_i, \\ K^{\text{inel.}} &= +\frac{3}{2} K_I n_e n_A k_B T_n - K_r n_{A^+} n_e \left( \frac{3}{2} k_B T_i + \frac{1}{2} m_i V_i^2 \right) \end{aligned}$$

### Remarques

1. Dans le cas de l'exemple qui vient d'être traité revenons sur l'équation de bilan de quantité de mouvement. Comme on l'a vu au chapitre précédent, celle-ci s'écrirait pour les ions :

$$n_i m_i \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_i - n_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}_i - S_i m_i \mathbf{V}_i$$

Dans cette expression,  $S_i$  et  $\mathbf{A}_i$  comptabilisent les contributions en nombre et en transferts de quantité de mouvement aux ions dues aux collisions élastiques et inélastiques. En utilisant les expressions trouvées plus haut, on a :

$$\begin{aligned} S_i &= S_i^{\text{el.}} + S_i^{\text{inel.}} = +K_I n_e n_A - K_r n_{A^+} n_e, \\ \mathbf{A}_i &= \mathbf{A}_i^{\text{el.}} + \mathbf{A}_i^{\text{inel.}} = - \sum_{\beta} \mu_{i\beta} n_i \nu_{i\beta} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{\beta}) - K_r n_{A^+} n_e m_i \mathbf{V}_i, \end{aligned}$$

puis  $S_i^{\text{el.}} \equiv 0$ . En remplaçant dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, on obtient donc :

$$n_i m_i \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_i - n_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) = - \sum_{\beta} \mu_{i\beta} n_i \nu_{i\beta} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{\beta}) - K_I n_e n_A m_i \mathbf{V}_i$$

On remarquera qu'il ne reste que la contribution due aux collisions ionisantes, les contributions par recombinaisons ayant disparues. Cela traduit le fait que, dans ce bilan écrit en suivant le flot des ions, les ions ont été supposés créés avec la vitesse des neutres, c'est-à-dire à une vitesse quasi-nulle : cette création des ions par ionisation ralentit donc l'écoulement ionique d'où le signe moins devant le terme correspondant. A contrario, pour les ions créés par recombinaisons, on a supposé que les ions disparaissaient avec leur vitesse fluide : ils ne rajoutent ni n'enlèvent de quantité de mouvement et disparaissent donc du bilan effectué lorsqu'on suit le flot.

2. L'importance relative des contributions élastiques et inélastiques dépend du gaz considéré. A titre d'exemple simple, la figure suivante présente les taux de réaction des collisions les plus importantes pour l'argon en fonction de la température électronique. On notera que pour ce gaz, les collisions élastiques sont dominantes dans le domaine de température pertinent (quelques eV).

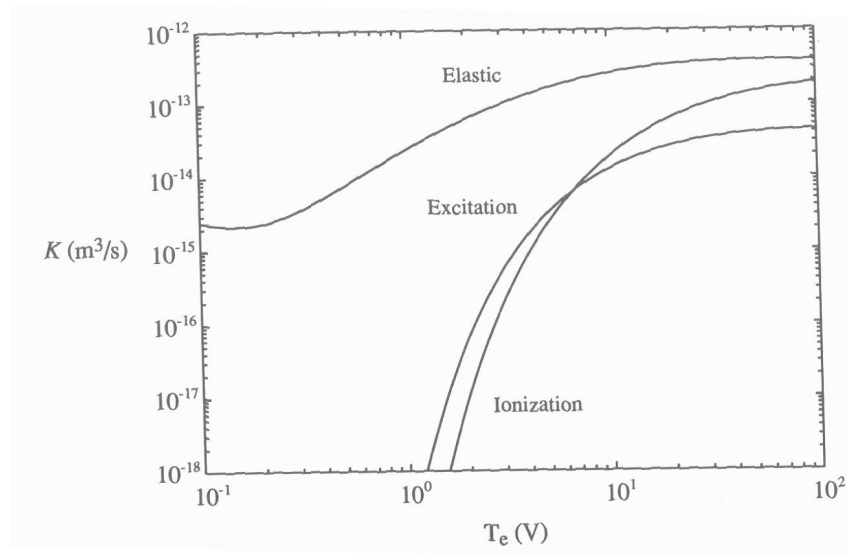


FIGURE 3.3 – Taux des réactions de collisions élastiques, d'excitations et d'ionisations pour l'argon en fonction de la température électronique (tiré de [3]).

### 3.4 Diffusion et mobilité dans les plasmas collisionnels

Lorsque le libre parcours moyen des particules chargées (électrons ou ions) est faible devant les dimensions caractéristiques du plasmas, les espèces subissent de nombreuses collisions avant de ressentir toute accélération significative. Dans ces conditions, on peut raisonnablement négliger les forces d'inertie devant les autres forces (friction, électromagnétiques et de pression), de sorte que l'équation de bilan de quantité de mouvement de l'espèce  $\alpha$  s'écrit <sup>7</sup> :

$$-\nabla p_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - m_\alpha n_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) = 0 \quad (3.11)$$

Pour fixer les idées, limitons-nous aux cas des plasmas faiblement ionisés pour lesquels les collisions dominantes sont les collisions ions-neutres et électrons-neutres. La composante  $\alpha$  représentant, soit les électrons, soit les ions, la seule composante  $\beta$  à retenir est celle représentant les espèces neutres. Du fait que ces dernières ne sont pas sensibles aux champs électromagnétiques, on pourra en général considérer que la vitesse fluide des neutres est négligeable devant celles des espèces chargées. Ici, on aura donc  $\mathbf{V}_\beta \ll \mathbf{V}_\alpha$  de sorte que la force de friction, pour les plasmas faiblement ionisés, s'écrit :

$$-m_\alpha n_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \approx -m_\alpha n_\alpha \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha$$

où on a posé  $\nu_{\alpha n} \equiv \nu_\alpha$  puisque les seules collisions retenues sont avec les neutres.

L'équation (3.11) s'écrit donc :

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) \quad (3.12)$$

---

7. Rigoureusement, le terme de friction est proportionnel à la masse réduite  $\mu_{\alpha\beta}$  et non à  $m_\alpha$ . Cet abus de notation (qui peut être admis en renormalisant la fréquence de collision) est très fréquent et sera donc utilisé dans la suite.

### 3.4.1 Plasmas collisionnels non-magnétisés : diffusion et mobilité

Considérons d'abord la situation sans champ magnétique :  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{0}$ . Les plasmas étant des milieux dilués pour lesquels l'équation d'état  $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha$  s'applique, l'équation de bilan de quantité de mouvement prend la forme dite de *mobilité-diffusion* :

$$\mathbf{V}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{E} - D_\alpha \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} \quad (3.13)$$

où  $\mu_\alpha$  et  $D_\alpha$  sont des coefficients de transports, respectivement appelés *mobilité* et *coefficient de diffusion* :

$$\boxed{\mu_\alpha \equiv \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \quad D_\alpha \equiv \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \quad (3.14)}$$

Ces 2 coefficients ne sont pas indépendants mais reliés par *la relation d'Einstein* :

$$\boxed{\frac{D_\alpha}{\mu_\alpha} = \frac{k_B T_\alpha}{q_\alpha}}$$

qui est une des formes du théorème de fluctuation-dissipation.

L'équation de diffusion-mobilité montre explicitement que la vitesse fluide des électrons ou des ions au sein d'un plasma collisionnel a pour origine commune l'existence de gradients. Chacun des gradients éventuellement présents dans le plasma : gradients de densité, de température ou de potentiel électrostatique contribue à la vitesse fluide totale. On notera en outre que la direction de la vitesse est celle des gradients (le sens dépend du signe de la charge pour les termes de mobilité).

On remarquera également que le gradient de pression contient, a priori, une contribution due au gradient de température et une due au gradient de densité :

$$\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha} + \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha}$$

### 3.4.2 Plasmas collisionnels magnétisés

Lorsque le champ magnétique n'est pas nul, l'équation (3.12) ne donne plus explicitement la vitesse qui apparaît également dans la force de Laplace :

$$\mathbf{V}_\alpha = \mu_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - D_\alpha \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} \quad (3.15)$$

Néanmoins, on remarquera que cette équation est une équation vectorielle *algébrique* et *linéaire* pour la vitesse (et pas différentielle non-linéaire comme dans sa forme sans approximations). Elle peut donc être explicitement résolue. Pour cela, on peut soit projeter cette équation sur 3 directions orthogonales et exprimer les différentes composantes (cf. exercices), ou procéder directement sur l'équation vectorielle.

On part de l'expression donnée ci-dessus (sans les  $\alpha$ ) :

$$\mathbf{V} = \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla p}{p} + \mu \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

or,

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{E} \times \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \times \mathbf{B} - \mu (B^2 \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B})$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \cdot \mathbf{B}$$

En substituant cette expression dans la précédente, on obtient une nouvelle expression pour  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  et de là pour  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla p}{p} \\ &+ \mu^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mu D \frac{\nabla p}{p} \times \mathbf{B} \\ &- \mu^2 B^2 \mathbf{V} + \mu^2 \left[ \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \cdot \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \end{aligned}$$

Or,  $\mu B = \omega_c / \nu$ .

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\nu} \right)^2 \right] \mathbf{V} &= \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla p}{p} + \mu^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mu D \frac{\nabla p}{p} \times \mathbf{B} \\ &+ \mu^2 \left[ \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \cdot \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \end{aligned}$$

Dans cette expression, les 2 derniers termes sont dans la direction de  $\mathbf{B}$  (notée  $\parallel$ ).

A priori, les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\nabla p$  ont chacun 3 composantes : une parallèle à  $\mathbf{B}$  et 2 dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ , ce qu'on notera :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, \\ \nabla p &= \nabla_{\parallel} p + \nabla_{\perp} p\end{aligned}$$

Il en résulte aussitôt que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B} & \nabla p \times \mathbf{B} &= \nabla p_{\perp} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= E_{\parallel} B & \nabla p \cdot \mathbf{B} &= B \nabla_{\parallel} p\end{aligned}$$

On peut alors regrouper à part les termes dans la direction du champ magnétique de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\nu}\right)^2\right] \mathbf{V} &= \mu \mathbf{E}_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} + \mu^2 \left[ \mu B E_{\parallel} - D B \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \right] \mathbf{B} \\ &+ \mu^2 \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B} - \mu D \frac{\nabla_{\perp} p}{p} \times \mathbf{B} + \mu \mathbf{E}_{\perp} - D \frac{\nabla_{\perp} p}{p}\end{aligned}$$

En introduisant le vecteur unitaire  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$ , et en utilisant à nouveau la relation  $\mu B = \omega_c/\nu$ , on obtient :

$$\mu \mathbf{E}_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} + \mu^2 \left[ \mu B E_{\parallel} - D B \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \right] \mathbf{B} = \left[ 1 + \left(\frac{\omega_c}{\nu}\right)^2 \right] \left( \mu E_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \right) \mathbf{b}$$

de sorte que  $\mathbf{V}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mu \mathbf{E}_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \\ &+ \mu_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} - D_{\perp} \frac{\nabla_{\perp} p}{p} \\ &+ \mu_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} - D_{\times} \frac{\nabla_{\perp} p}{p} \times \mathbf{b}\end{aligned}$$

avec  $\mu_{\perp} = \mu/(1 + (\omega_c/\nu)^2)$  et  $\mu_{\times} = \mu(\omega_c/\nu)(1 + (\omega_c/\nu)^2)$ .

Lorsque  $\mathbf{E}$  et  $\nabla p$  sont dans le même plan, on peut associer 3 directions orthogonales aux 3 lignes précédentes.

#### Remarque

Certains auteurs utilisent les notations  $\nabla_{\parallel} \equiv \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$  et  $\nabla_{\perp} \equiv -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$ , ce qui se justifie à partir de la relation vectorielle :

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla) = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla) - b^2 \nabla \quad \Rightarrow \quad \nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$$

D'après ce qui précède, en ignorant l'indice  $\alpha$  pour simplifier l'écriture, le vecteur vitesse peut donc être décomposé en 3 vecteurs :

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp} + \mathbf{V}_{\times}$$

avec :

$$\mathbf{V}_{\parallel} = \mu_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} - D_{\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} p_{\alpha}}{p_{\alpha}} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{V}_{\perp} = \mu_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} - D_{\perp} \frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha}}{p_{\alpha}} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{V}_{\times} = \mu_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} - D_{\times} \frac{\nabla_{\times} p_{\alpha}}{p_{\alpha}} \times \mathbf{b} \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{b}$  est le vecteur normalisé donnant la direction du champ magnétique :  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B} / \|\mathbf{B}\|$ . Dans ces expressions les coefficients de transport sont définis par les relations suivantes :

$$\frac{\mu_{\parallel}}{\mu} = \frac{D_{\parallel}}{D} = 1, \quad \frac{\mu_{\perp}}{\mu} = \frac{D_{\perp}}{D} = \frac{1}{1 + (\omega_c/\nu)^2}, \quad \frac{\mu_{\times}}{\mu} = \frac{D_{\times}}{D} = \frac{\omega_c/\nu}{1 + (\omega_c/\nu)^2}.$$

où  $\omega_c \equiv qB/m$  est la fréquence cyclotron. Dans les directions  $\parallel$  et  $\perp$ , les solutions en présence de champ magnétique sont formellement analogues à celle sans champ magnétique, mais avec des coefficients de transport qui dépendent de la direction considérée.

Plusieurs remarques découlent de ces expressions :

1. Le mouvement dans la direction du champ magnétique n'est pas modifié par la présence du champ magnétique.
2. L'expression des coefficients de transport montre que l'importance des contributions dans les directions  $\perp$  et  $\times$  dépend du rapport  $\omega_c/\nu$ , c'est-à-dire de l'importance relative de la force magnétique et de la force de friction.

A collisionnalité fixée (i.e. à  $\nu$  fixé) :

- La mobilité et la diffusion transverse  $\perp$  ont un comportement monotone décroissant en fonction du champ magnétique : ce dernier a donc un effet qui confine le plasma.

- Au contraire, la mobilité et la diffusion  $\text{Hall} \times$  varient de façon non monotone, croissant puis décroissant lorsque le champ magnétique augmente.

A fort champ magnétique :

- Les coefficients  $\perp$  sont proportionnels à  $\nu$  (contrairement à  $D$  et  $\mu$  qui varient en  $\nu^{-1}$ ).
  - Les coefficients de Hall sont quant à eux indépendants de la fréquence de collision.
3. Les termes proportionnels à  $\mu_{\parallel}, \mu_{\perp}$  et  $D_{\times}$  dépendent du signe de la charge électrique des particules étudiées, les autres contributions ont même sens pour les électrons et pour les ions.
  4. Le terme proportionnel à  $\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b}$  s'appelle *la vitesse de dérive de champs croisés* (même sens de dérive pour les électrons et les ions), les termes proportionnels à  $\nabla_{\perp} n \times \mathbf{b}$  et  $\nabla_{\perp} T \times \mathbf{b}$  sont appelés *vitesse diamagnétiques* (sens opposé de mouvement pour les électrons et les ions).

### Exemple : colonne cylindrique magnétisée

Pour illustrer ces résultats, considérons le cas d'une longue colonne cylindrique de plasma soumis à un champ magnétique axial. Soit  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_z)$  le système de coordonnées cylindriques associé. Le système étant invariant par translation le long de  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$ , tous les gradients sont nécessairement radiaux. C'est le cas du champ électrique (gradient de potentiel) généralement dirigé vers la périphérie du cylindre. Au contraire, la densité du plasma est maximale au centre, le gradient correspondant étant donc dirigé vers l'axe du cylindre. Tant qu'on reste assez loin de la surface latérale qui confine le plasma, les gradients de température sont généralement faibles et on les négligera par la suite. La situation est donc la suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\parallel} = B \mathbf{e}_z, \\
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\perp} = E \mathbf{e}_r, \\
 \nabla n_{\alpha} &= \nabla_{\perp} n_{\alpha} = - \|\nabla n_{\alpha}\| \mathbf{e}_r, \\
 \nabla T_{\alpha} &\approx 0
 \end{aligned}$$



Les sens des différentes contributions des vitesses fluides, radiales et orthoradiales, sont représentées sur la Figure 3.4.

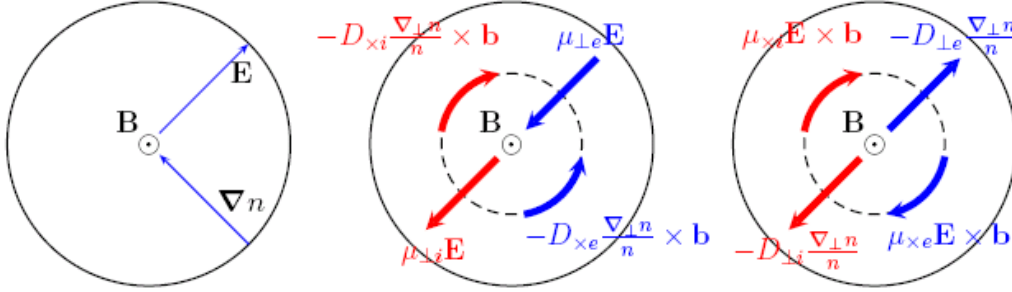


FIGURE 3.4 – La figure de gauche représente la configuration des champs et gradients étudiée. La figure centrale représente les contributions de sens opposé pour les ions et les électrons (radiales dues aux termes de mobilités  $\perp$  et azimuthales dues aux contributions diamagnétiques). La figure de droite représente les contributions de même sens pour les ions et les électrons (radiales dues aux termes de diffusion  $\perp$  et azimuthales dues aux dérives de champ croisés).

### 3.4.3 Diffusion ambipolaire et non ambipolaire

Dans un plasma collisionnel, du fait des rapport de masses, les électrons diffusent plus rapidement que les ions. La densité de charges qui apparaît au cours du mouvement, crée en réaction un champ électrique qui tend à ralentir les électrons et à accélérer les ions. Les charges ont donc tendance à diffuser ensemble, les flux ionique et électronique sont sensiblement égaux :  $\Gamma_e \approx \Gamma_i$ , on parle, dans cette situation, de *diffusion ambipolaire*. Bien que cet effet semble vraisemblable, nous montrerons dans la suite que cette situation n'est en rien générique et que les plasmas collisionnels ont un comportement non-ambipolaire dans de nombreuses situations expérimentales.

Dans une première partie nous traiterons en détail le cas d'un plasma collisionnel électron-ion quasi-neutre ( $n_e = n_i \equiv n$ ) non magnétisé. Certains des effets dus à la présence d'un champ magnétique seront étudiés dans une

deuxième partie sous la forme d'un problème.

### Cas d'un plasma non magnétisé

#### *Généralités*

Pour chacune des espèces  $\alpha$  du plasma (électrons et ions), l'équation de bilan de particules et l'équation de mobilité-diffusion (c'est-à-dire l'équation de bilan de quantité de mouvement lorsqu'on néglige les termes d'inertie) s'écrivent :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha = S, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = -\nabla (D_\alpha n_\alpha) + \mu_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \quad (3.20)$$

où nous avons supposé que les termes sources (notés  $S$ ) des équations de bilan de masse sont identiques pour les électrons et pour les ions (c'est le cas par exemple dans le cas de l'ionisation) ; la fréquence de collision  $\nu_\alpha$  est également supposée uniforme.

En utilisant la relation de quasineutralité  $\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \equiv 0$ , en multipliant l'équation de bilan de particules par  $q_\alpha$  et en sommant sur  $\alpha$ , on trouve l'équation de continuité du courant  $\mathbf{J} \equiv \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha$  sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Dans une situation unidimensionnelle, cette relation implique une densité de courant constante (éventuellement nulle si aucun courant ne traverse le plasma). Il n'en est évidemment pas de même en général dans les situations à 2D ou 3D.

La relation entre  $\mathbf{J}$  et le champ électrique peut être obtenue à partir de l'équation de mobilité diffusion :

$$\mathbf{J} = -\nabla \left[ n \sum_\alpha (D_\alpha q_\alpha) \right] + n \mathbf{E} \sum_\alpha \mu_\alpha q_\alpha,$$

soit encore :

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla [n \sum_\alpha (D_\alpha q_\alpha)]}{n \sum_\alpha \mu_\alpha q_\alpha} + \frac{\mathbf{J}}{n \sum_\alpha \mu_\alpha q_\alpha} \equiv \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_c, \quad (3.21)$$

Ainsi, dans le cas le plus général, le champ électrique a donc 2 contributions, une première  $\mathbf{E}_a$ , dite *ambipolaire*, déterminée par les gradients de densités et de températures, et une autre, le champ de conduction,  $\mathbf{E}_c$ , du au courant électrique circulant dans le plasma.

#### *Non-ambipolarité dans le cas 2D*

Pour montrer que la condition d'ambipolarité n'est en général pas satisfaite dans les plasmas réels, et qu'il existe en conséquence des courants (vortex) circulant dans le plasma, nous nous plaçons dans la situation la plus simple, à savoir un plasma 2D limité par des parois isolantes (tout autre complication comme la présence d'un champ magnétique ou la présence de parois conductrices devraient a fortiori faciliter l'établissement d'un courant dans le plasma). Cette preuve de la non ambipolarité a été donnée récemment par Bogdanov, Chirtsov et Kudryavtsev (Physical Review Letters, **106**, 195001, 2011). Pour fixer les idées supposons que les seuls gradients non nuls dans le plasma sont les gradients de densité, de température électronique et de champ électrique, respectivement,  $\nabla T_e, \nabla n, \nabla \varphi$  où  $\varphi$  est le potentiel électrostatique<sup>8</sup>.

Nous allons montrer dans un premier temps que si le gradient de température électronique et le gradient de densité sont non nuls et non parallèles en un point, i.e. si  $\nabla T_e \times \nabla n \neq \mathbf{0}$ , alors la densité de courant est elle-même non nulle en ce même point (et donc le champ n'est pas strictement ambipolaire). Pour ce faire, établissons la contraposée : si  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  en tout point du plasma, alors  $\nabla T_e \times \nabla n = \mathbf{0}$  en tout point du plasma.

En effet, si  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  en tout point du plasma, l'équation (3.21) s'écrit :

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla \varphi = \frac{\nabla [n \sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha})]}{n \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} q_{\alpha}} = \frac{\nabla [\sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha})]}{\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} q_{\alpha}} + \frac{\sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha})}{\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} q_{\alpha}} \nabla \ln n$$

Le rotationnel d'un gradient étant nul, on obtient aussitôt l'égalité :

$$\nabla \left[ \sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha}) \right] \times \nabla \ln n = \mathbf{0}$$

---

8. Rappelons qu'on a déjà considéré les fréquences  $\nu_{\alpha}$  uniformes, ce qui implique des mobilités  $\mu_{\alpha}$  également uniformes. Les gradients de température ioniques,  $\nabla T_i$  pourraient être pris en compte, mais ils sont généralement faibles.

Or  $\sum_{\alpha} D_{\alpha} = k_B T_e / m_e \nu_e + \sum_i D_i$ . Comme  $T_i$  est supposé uniforme, on en déduit donc que :

$$\nabla T_e \times \nabla n = \mathbf{0}$$

est vérifiée en tout point du plasma si  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Nous venons donc de démontrer (par contraposition) que s'il existe un point où  $\nabla T_e \times \nabla n \neq \mathbf{0}$ , alors, en ce point,  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ , et le champ n'est donc pas ambipolaire en tout point.

De plus, s'il existe des points où  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ , on peut également montrer qu'il existe également des points où  $\nabla \times \mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ . Autrement dit, les lignes de courant ont la forme de tourbillons (vortex). Raisonnons encore une fois par contraposition en montrant que si  $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$  en tout point du plasma, il en résulte nécessairement que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . En effet, si  $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$ , il existe une fonction scalaire  $\psi$  telle que  $\mathbf{J} = \nabla \psi$ . Or, la divergence de  $\mathbf{J}$  est identiquement nulle. Il en résulte que  $\psi$  est solution de l'équation de Laplace,  $\Delta \psi = 0$ , dans tout le plasma. Les parois du plasma étant isolantes, la densité de courant normale aux parois y est nulle :  $J_n = \nabla \psi \cdot \mathbf{k} = 0$  où  $\mathbf{k}$  est un vecteur normal aux parois. Cette condition constitue donc une condition aux limites de Neumann pour le problème de Laplace. La seule solution de ce problème est une constante,  $\psi = \text{Cte}$ , ce qui implique que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  dans tout le plasma.

La Figure 3.5 présente des simulations numériques qui illustrent ces résultats dans le cas d'un plasma d'argon à 200 mTorr chauffé par induction (en  $z = 0$  sur les figures). On notera en particulier que les lignes de courant sont bien refermées sur elles-mêmes et que les lignes de gradients de densité et température électronique ne sont en général pas parallèles.

#### *Cas particuliers d'ambipolarité*

Enfin, toujours dans le cas 2D, en utilisant le même genre d'arguments que développés ci-dessus, on peut montrer que si  $\nabla T_e = \mathbf{0}$  dans tout le plasma, alors la densité de courant y est également nulle en tout point,  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , lorsque le plasma est limité par des parois isolantes. Dans ces conditions particulières, la condition dite d'ambipolarité  $\Gamma_e = \Gamma_i \equiv \Gamma_a$  est satisfaite, et il est facile de montrer que les expressions du champs électrique et du flux ambipolaires

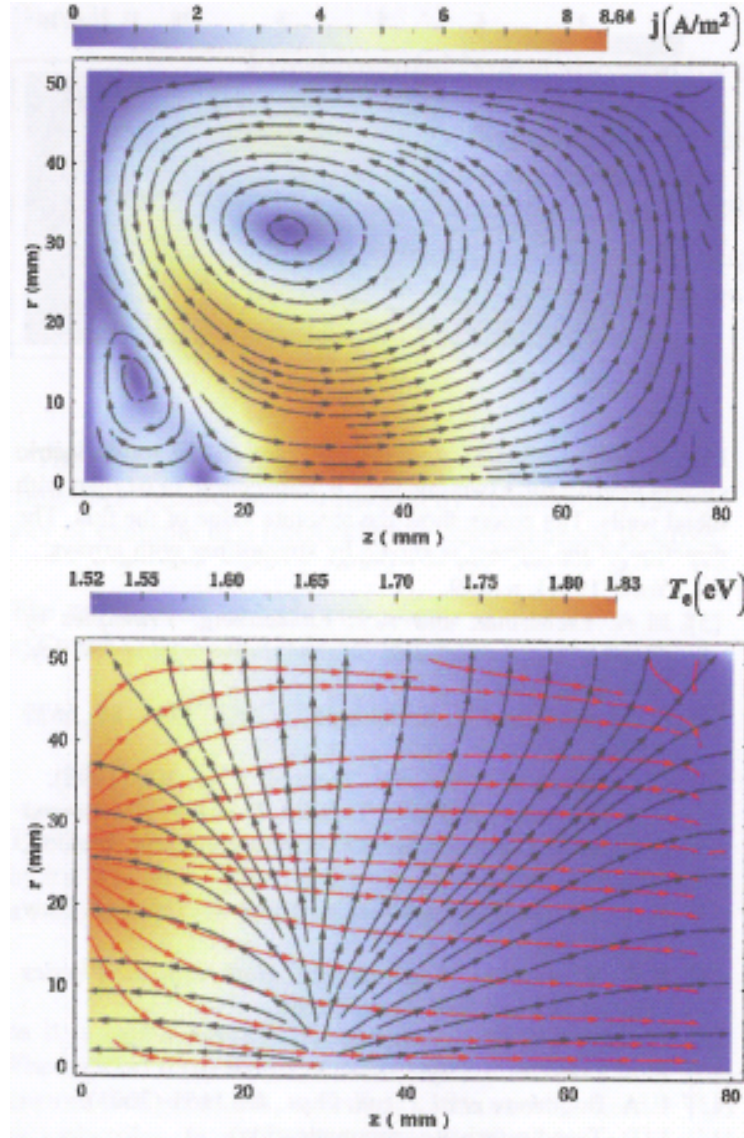


FIGURE 3.5 – Densité de courant (figure du haut) et directions de  $\nabla T_e$  (gris) et  $\nabla n$  (noir) (figure du bas) dans une décharge d'argon limitée par des parois isolantes. La pression est de 200 mTorr, la puissance déposée est de 1 W (tiré de Bogdanov et al., Physical Review Letters, 106, 195001, 2011)

s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= \frac{D_e - D_i}{\mu_e - \mu_i} \nabla \ln n, \\ \mathbf{\Gamma}_a &= -D_a \nabla n \end{aligned}$$

où  $D_a$  est le coefficient de diffusion ambipolaire défini par la relation :

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e}, \quad (3.22)$$

A 1D, la condition d'ambipolarité est satisfaite aux bords d'un plasma lorsque celui-ci est limité par des parois isolantes (des parois isolantes ne tirent aucun courant, et donc,  $\Gamma_e = \Gamma_i$ , *sur les parois*). Dans ce cas unidimensionnel, la conservation générale du courant,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  assure la propagation de la condition d'ambipolarité de la surface vers le cœur, et donc en tout point du plasma.

#### *Equation de diffusion*

Cherchons maintenant à déterminer l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit la densité du plasma. Pour ce faire, il suffit d'éliminer  $\Gamma_\alpha$  entre les équations (3.19) et (3.20) et d'utiliser l'expression du champ électrique donnée par l'équation (3.21). Après un peu d'algèbre, on trouve l'expression suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \Delta (D_a n) = S, \quad (3.23)$$

où  $D_a$  est le *coefficient de diffusion ambipolaire* défini plus haut. L'équation (3.23) a la structure d'une équation de diffusion. La densité évolue par une compétition entre un terme de production de charges : le terme source (due à l'ionisation en volume au sein du plasma) et un terme de perte de charges (la diffusion ambipolaire des charges électriques perdues au parois).

Il est remarquable que la densité de courant  $\mathbf{J}$  n'apparaisse pas explicitement dans cette expression. Notez qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'égalité  $\Gamma_i = \Gamma_e$  pour établir cette équation, qui est donc valable même s'il existe des courants au sein du plasma. Quelques solutions particulières de cette équation seront étudiées en problème.

#### **Cas d'un plasma magnétisé**

Une première approche de la diffusion dans un plasma collisionnel magnétisé sera présenté en TD. Il s'agit d'une situation idéalisée où le plasma remplit une

colonne cylindrique supposée infiniment longue dans la direction du champ électrique et où la température électronique est supposée uniforme.

*Sous ces hypothèses simplificatrices*, on montre que le flux ambipolaire du plasma dans la direction parallèle au champ magnétique n'est pas modifié par la présence du champ, tandis que dans la direction perpendiculaire au champ magnétique, le flux reste proportionnel au gradient de densité mais avec un coefficient de diffusion renormalisé :

$$\begin{aligned}\Gamma_{a\parallel} &= -D_{a\parallel} \nabla n, \\ \Gamma_{a\perp} &= -D_{a\perp} \nabla n,\end{aligned}$$

avec,

$$D_{a\parallel} = D_a \quad \text{et} \quad D_{a\perp} = \frac{\mu_{i\perp} D_{e\perp} - \mu_{e\perp} D_{i\perp}}{\mu_{i\perp} - \mu_{e\perp}}$$

A la différence du cas non magnétisé présenté dans la section précédente, il n'existe pas de discussion systématique du caractère ambipolaire ou non ambipolaire de la diffusion dans un plasma collisionnel en présence de champ magnétique.

### 3.5 Exercices

#### Exercice 1 : Transferts d'impulsion et d'énergie cinétique dans les collisions élastiques

On considère une collision élastique entre une particule  $\alpha$  et une particule  $\beta$ . Les notations sont celles du cours.

1. Montrer que la conservation de la vitesse du centre de gravité :  $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}'_G$  est une conséquence directe de la conservation de l'impulsion dans la collision.
2. Exprimer les vitesses initiales des particules en fonction de  $\mathbf{v}_G$  et de la vitesse relative  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ , et les vitesses finales en fonction de  $\mathbf{v}_G$  et de la vitesse relative  $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$ .
3. Utiliser les expressions précédentes et la conservation de l'énergie cinétique pour montrer que le module de la vitesse relative est un invariant dans la collision :  $v_{\alpha\beta} = v'_{\alpha\beta}$ .
4. Etablir les expressions du cours donnant les transferts d'impulsion  $\Delta\mathbf{p}_\alpha$  et d'énergie cinétique  $\Delta E_{c\alpha}$ .
5. En utilisant un repère orthonormé  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  avec  $\mathbf{k}$  dans la direction de  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ , montrer que :

$$\mathbf{v}'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta} (\cos \theta \mathbf{k} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j})$$

En déduire les expressions des transferts d'impulsion et d'énergie cinétique moyennés sur  $\varphi$ .

#### Exercice 2 : Approximation BGK

Dans le cadre de l'approximation BGK, les particules  $\alpha$  émises après les collisions sont supposées redistribuées de façon isotrope et sans corrélation avec les particules  $\beta$ .



Les intégrales de collisions sont alors calculées en utilisant l'approximation suivante :

$$\int g(\mathbf{v}_\alpha) \left( \frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^{BGK} d\mathbf{v}_\alpha = - \int g(\mathbf{v}_\alpha) \nu_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) (f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) - f_\alpha^{MB}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)) d\mathbf{v}_\alpha$$

où

$$f_\alpha^{MB}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) \equiv n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k_B T'_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2k_B T'_\alpha} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}'_\alpha)^2 \right]$$

Dans cette expression, les paramètres  $T'_\alpha$  et  $\mathbf{V}'_\alpha$  représentent la température et la vitesse fluide des particules  $\alpha$  après les collisions.

1. Dans le cas des collisions élastiques, en utilisant les relations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, montrer que ces paramètres s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_\alpha &= \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{V}_\alpha + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{V}_\beta, \\ \frac{3}{2} k_B T'_\alpha &= \frac{3}{2} k_B T_\alpha + \kappa_{\alpha\beta} \frac{3}{2} k_B (T_\beta - T_\alpha) + \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{2} \frac{1}{2} m_\beta V_{\alpha\beta}^2 \end{aligned}$$

2. Utilisez les résultats précédents avec  $\nu_\alpha$  supposé indépendant de  $\mathbf{v}_\alpha$  pour déterminer les expressions de  $C_0^{\text{el}}$ ,  $\mathbf{C}_1^{\text{el}}$  et  $C_2^{\text{el}}$ .

Comparer ces expressions avec celles obtenues dans le cours dans le cadre de l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

### Exercice 3 : Collisions inélastiques

Calculer les intégrales :

$$\iiint g_\ell(\mathbf{v}) X d\mathbf{v} \quad (3.24)$$

pour  $g_0(\mathbf{v}) = m$ ,  $g_1(\mathbf{v}) = m\mathbf{v}$  et  $g_2(\mathbf{v}) = m\mathbf{v}^2$ , et où  $X$  est une Maxwellienne translatée :

$$X \equiv \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 \right]$$

### Exercice 4 : Diffusion et mobilité

On étudie la diffusion d'un plasma quasi-neutre ( $n_e \approx n_i \equiv n$ ) en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  et d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . On utilise une description fluide en régime collisionnel.

On considère d'abord une des composantes du fluide (ions ou électrons), dont on notera les charges et masses par  $q$  et  $m$ .  $\mathbf{u}$  représente la vitesse d'entraînement et  $n$  la densité.

L'équation d'équilibre des forces s'écrit :

$$k_B T \nabla n + mn\nu \mathbf{u} = nq (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.25)$$

Dans cette expression  $T$  désigne la température (supposée uniforme) du fluide et  $\nu$  représente une fréquence de collisions.

1. Préciser succinctement quelle est l'origine physique de chacun de ces termes.
2. Montrer que cette relation d'équilibre peut être obtenue à partir de l'équation du bilan de quantité de mouvement du fluide lorsqu'on fait une approximation que l'on précisera.
3. On utilise un système d'axe cartésien orthonormal  $Oxyz$ , et on choisit la direction de l'axe  $Oz$  dans la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}$  supposé uniforme.

Projeter l'équation (3.25) sur chacun des axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ .

4. Montrer que les composantes de la vitesse ( $u_x, u_y, u_z$ ) peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_x = F E_x - G \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + H u_y, \quad (3.26)$$

$$u_y = F E_y - G \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - H u_x, \quad (3.27)$$

$$u_z = F E_z - G \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (3.28)$$

On donnera l'expression des constantes  $F$ ,  $G$  et  $H$  en fonction des coefficients de mobilité  $\mu$  et de diffusion  $D$  introduits dans le cours, ainsi qu'en

fonction du coefficient  $\omega_c \tau$ , où  $\tau \equiv \nu^{-1}$  et  $\omega_c$  est la fréquence cyclotron des particules.

5. Quel est l'effet du champ magnétique dans la direction parallèle au champ  $\mathbf{B}$  ?
6. Combiner les équations précédentes, et montrer qu'en définissant

$$\mathbf{u}_\perp \equiv u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{E}_\perp \equiv E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$$

on trouve :

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4, \quad (3.29)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\equiv +\mu_\perp \mathbf{E}_\perp, \\ \mathbf{u}_2 &\equiv -D_\perp \frac{\nabla n}{n}, \\ \mathbf{u}_3 &\equiv +\frac{(\omega_c \tau)^2}{1 + (\omega_c \tau)^2} \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{B^2}, \\ \mathbf{u}_4 &\equiv -\frac{(\omega_c \tau)^2}{1 + (\omega_c \tau)^2} \frac{D}{\mu} \frac{\nabla n \times \mathbf{B}}{nB^2} \end{aligned}$$

avec  $\mu_\perp \equiv \alpha\mu$ ,  $D_\perp \equiv \alpha D$  où  $\alpha \equiv (1 + (\omega_c \tau)^2)^{-1}$  (on utilisera éventuellement la relation  $\omega_c \tau = \mu B$ ).

7. Parmi les 4 composantes de  $\mathbf{u}_\perp$ , quelles sont celles qui dépendent du signe de la charge  $q$  ?
8. On considère la limite  $\omega_c \tau \rightarrow 0$ .
  - (a) A quelle situation physique cette limite correspond-elle ?
  - (b) Discuter le comportement de  $\mu_\perp$ ,  $D_\perp$  et  $u_\perp$  dans cette limite.
9. On considère la limite  $\omega_c \tau \rightarrow \infty$ .
  - (a) A quelle situation physique cette limite correspond-elle ?
  - (b) Discuter le comportement de  $\mu_\perp$ ,  $D_\perp$  et  $u_\perp$  dans cette limite.

### Exercice 5 : Colonne cylindrique en régime ambipolaire

On considère une colonne cylindrique de *plasma quasi-neutre*, faiblement ionisé, comprenant des ions positifs, de masses  $m_i$ , de charges  $+e$ , des électrons de masses  $m_e$  et de charges  $-e$ , et des neutres. *Dans tout le problème on ne retiendra que les collisions élastiques électron-neutre ou ion-neutre, et on négligera la vitesse fluide des neutres par rapport à la vitesse fluide des ions ou des électrons :  $v_n/v_e \ll 1, v_n/v_i \ll 1$ .*

On étudie cette colonne de plasma successivement sans champ magnétique (partie 1) et en présence d'un champ magnétique extérieur (partie 2).

#### Colonne non magnétisée

1. Qu'entend-on par "plasma quasi-neutre" et par "plasma faiblement ionisé" ?
2. La forme de l'équation de bilan de quantité de mouvement retenue pour la modélisation de chaque composante du plasma est la suivante :

$$\Gamma_\alpha = -D_\alpha \nabla n - \mu_\alpha n \nabla \phi \quad (3.30)$$

où  $n$  désigne les espèces neutres,  $\alpha = e$  (électrons) ou  $\alpha = i$  (ions), et où les notations utilisées sont celles du cours.

- (a) Quelle est la grandeur physique représentée par  $\Gamma_\alpha$  ?  
Quelle est sa dimension ?
- (b) Rappelez la définition des coefficients  $D_\alpha$  et  $\mu_\alpha$  et leurs unités.
- (c) Expliquer succinctement quelle est l'origine physique de chacun des termes de l'équation (3.30).
- (d) Y-a-t'il des termes négligés dans l'équation de bilan telle qu'elle est écrite en (3.30) ?  
Commentez.

3. En géométrie cylindrique, on peut poser :

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha r} \mathbf{e}_r + \Gamma_{\alpha \theta} \mathbf{e}_\theta + \Gamma_{\alpha z} \mathbf{e}_z$$

où  $\Gamma_{\alpha r}$ ,  $\Gamma_{\alpha\theta}$  et  $\Gamma_{\alpha z}$  sont respectivement les composantes radiales, orthoradiale (ou azimuthale) et axiale de  $\mathbf{\Gamma}_\alpha$ .

Le cylindre est supposé *infinitement long*, et on choisit l'axe  $Oz$  selon l'axe du cylindre.

- (a) Pour quelle(s) raison(s) les composantes axiale,  $\Gamma_{\alpha z}$ , et orthoradiale,  $\Gamma_{\alpha\theta}$  sont-elles nulles ?

- (b) On suppose que les flux radiaux électronique,  $\Gamma_{er}$  et ionique  $\Gamma_{ir}$  sont égaux en tout point :  $\Gamma_{er} = \Gamma_{ir} \equiv \Gamma_r$ ,  $\forall r$ .

Utilisez cette égalité et l'équation (3.30) projetée dans la direction radiale, et montrez, en éliminant le champ électrique, que le flux radial peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma_r &= -D_a \frac{dn}{dr} \\ \text{avec } D_a &= \frac{D_e \mu_i - D_i \mu_e}{\mu_i - \mu_e} \end{aligned} \quad (3.31)$$

- (c) On suppose que les température ionique,  $T_i$  et électronique,  $T_e$  sont égales :  $T_i = T_e \equiv T$ .

Établir l'expression :

$$D_a = \frac{2D_e D_i}{D_i + D_e}$$

- (d) Les libre parcours moyens de collisions ion-neutre et électron-neutre sont comparables.

Montrer par une estimation des ordres de grandeurs que  $D_e/D_i \gg 1$ .

En déduire, dans ces conditions, que  $D_a \approx 2D_i$ .

4. En régime stationnaire, l'équation de bilan de particules s'écrit pour ce système :

$$\operatorname{div} \mathbf{\Gamma}_\alpha = \nu_I n \quad (3.32)$$

où  $\nu_I$  est la fréquence d'ionisation.

Montrez que la densité vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} + \frac{\nu_I}{D_a} n = 0 \quad (3.33)$$

On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques :  
pour tout vecteur  $\mathbf{A}(A_r, A_\theta, A_z)$  :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### Colonne magnétisée

La colonne cylindrique précédente (toujours considérée comme infiniment longue selon  $Oz$ ) est maintenant placée dans un champ magnétique extérieur uniforme tel que  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ .

1. Quelle est l'effet du champ magnétique sur les trajectoires des ions et des électrons du plasma ?
2. L'équation de bilan de quantité de mouvement s'écrit maintenant sous la forme :

$$\Gamma_\alpha = -D_\alpha \nabla n - \mu_\alpha n \nabla \phi + \mu_\alpha \Gamma_\alpha \times \mathbf{B} \quad (3.34)$$

Montrer que les flux vérifient les relations suivantes en présence du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha z} &= 0, \\ \Gamma_{\alpha \theta} &= -(\mu_\alpha B_0) \Gamma_{\alpha r}, \\ \Gamma_{\alpha r} &= -D_\alpha^\perp \frac{dn}{dr} - \mu_\alpha^\perp n \frac{d\phi}{dr}, \end{aligned}$$

où  $D_\alpha^\perp$  et  $\mu_\alpha^\perp$  sont des coefficients que l'on exprimera en fonction de  $D_\alpha$ ,  $\mu_\alpha$  et  $B_0$ .

3. Montrer que le produit  $\mu_\alpha B_0$  peut s'écrire comme le rapport de 2 fréquences que l'on définira.
4. Dans la limite  $\mu_\alpha B_0 \gg 1$ , montrer que  $D_\alpha^\perp = L^2 f$  où  $L$  et  $f$  sont respectivement une longueur et une fréquence caractéristiques du système que l'on précisera.  
Commentez.
5. Sous l'hypothèse d'égalité des flux radiaux ( $\Gamma_{er} = \Gamma_{ir} \equiv \Gamma_r, \forall r$ ), à quelle équation différentielle la densité obéit-elle en présence de champ magnétique (on ne demande pas de résoudre cette équation différentielle) ?

## Fermeture des équations fluides

Ecrivons à nouveau les différentes équations de bilan obtenues dans le chapitre 2 que nous écrivons ici en coordonnées :

$$\begin{aligned}\frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{DV_i}{Dt} + \frac{1}{nm} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} - \frac{F_i}{m} &= \left. \frac{1}{nm} \frac{\delta M_i}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{3p}{2} \right) + \frac{3p}{2} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + P_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c\end{aligned}$$

Ainsi, même en absence de collisions, chacune des équations de bilan introduit une nouvelle inconnue. L'équation de bilan de particules, que l'on peut interpréter comme une équation d'évolution de la densité, introduit la vitesse fluide (ou le flux) des particules. De même, l'équation de bilan de quantité de mouvement, que l'on peut interpréter comme une équation d'évolution de la vitesse introduit le tenseur de pression. Il en va de même pour le bilan d'énergie qui introduit le tenseur flux de chaleur.

On notera également que l'équation d'évolution d'une grandeur physique représentée par un tenseur d'ordre  $n$  introduit une nouvelle grandeur physique représentée par un tenseur d'ordre  $n + 1$  (la densité est un scalaire, la vitesse fluide est un vecteur, les tenseurs de pression et de flux de chaleur sont respectivement des tenseurs d'ordre 2 et 3)<sup>1</sup>.

*Cette situation introduit donc nécessairement plus de variables que d'équations et ne peut conduire à un problème soluble que s'il existe d'autres relations entre les grandeurs physiques. Ces relations ne peuvent pas être données par l'approche fluide qui ne constitue donc pas une théorie "fermée".*

---

1. Rappelons que l'équation de bilan d'énergie est la contraction de l'équation de bilan du tenseur de pression  $P_{ij}$  qui introduit elle-même le tenseur de flux de chaleur  $Q_{ijk}$ .

On peut classer les solutions apportées à ce problème de la fermeture en 2 catégories bien distinctes :

- les fermetures par troncatures sur les moments qui consistent à annuler certains moments d'ordres supérieurs ou à les prescrire en fonction des moments d'ordre moins élevés. Ce type de fermeture est simple à mettre à œuvre mais ressort largement d'une approche phénoménologique qu'il est souvent difficile de justifier précisément.
- les fermetures par approximation des fonctions de distribution qui consistent à développer la fonction de distribution sur une base de polynômes orthogonaux et à retenir un nombre plus ou moins important de termes. Dans cette approche, le choix de la fonction de distribution autour de laquelle s'effectue ce développement est bien entendu capital. Sur la base de ces développements, on peut en outre tirer avantage de l'éventuel existence de petits paramètres  $(\lambda/l, \rho/L, \dots)$  qui conduisent à des expressions encore simplifiées. Bien que mieux contrôlées, ces fermetures sont beaucoup plus difficiles à mettre en place et n'ont été développées que dans un nombre limité de situations.

Les termes de collisions déjà traités dans le précédent chapitre sont soumis aux mêmes contraintes de fermetures : à un ordre donné, les termes de collisions ne doivent pas rajouter d'inconnues, mais s'exprimer en fonction des moments d'ordres inférieurs.

Notons pour finir que ce problème de fermeture n'est pas spécifique à la modélisation fluide, mais qu'il apparaît de façon similaire dans le cadre cinétique de la hiérarchie BBGKY. Les termes en cause sont toutefois différents.



Au niveau cinétique<sup>2</sup>, ce sont les termes de collisions qui couplent les fonctions de distribution d'ordre  $n$  avec celles d'ordre  $n + 1$ . Il n'y a donc pas de problème de fermeture dans le cadre de l'équation de Vlasov où les collisions sont négligées. A contrario, dans le cadre fluide, on a vu que le problème de la fermeture demeure même en absence de collisions. Le terme responsable est cette fois le terme d'évolution spatiale  $\mathbf{v} \cdot \partial f / \partial \mathbf{r}$  qui génère par intégration un moment d'ordre supérieur.

## 4.1 Troncatures sur les moments

Pour ce qui est des troncatures sur les moments, nous nous limiterons aux cas des troncatures effectuées au niveau des modélisations fluides dans le cas des plasmas non-magnétisés, et nous supposons le tenseur de pression diagonal et isotropes :

$$P_{ij} \equiv p \delta_{ij}$$

Le cas des plasmas magnétisés, donc anisotropes, sera discuté sommairement dans le cadre des fermetures par approximation des fonctions de distribution.

Le système d'équations à considérer se simplifie donc sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{DV_i}{Dt} + \frac{1}{nm} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{F_i}{m} &= \left. \frac{1}{nm} \frac{\delta M_i}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{3p}{2} \right) + \frac{5p}{2} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c \end{aligned}$$

---

2. Ainsi, rappelons que l'équation *exacte* de la hiérarchie BBGKY relative à la fonction de distribution  $f^{(n)}$  à  $n$  particules s'écrit [13] :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{1}{m} \left( \mathbf{X}_i + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \right] \right\} f^{(n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, t) \\ &= - \sum_{i=1}^n \int \frac{\mathbf{F}_{in+1}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} f^{(n+1)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n+1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}, t) d\mathbf{r}_{n+1} d\mathbf{v}_{n+1} \end{aligned}$$

Si l'on ne retient que les 2 premières équations, on dispose de 4 équations scalaires pour 5 variables,  $n, V_i, p$ . Il faut donc fixer une des variables, ce qui peut-être réalisé en prescrivant une relation entre  $p$  et les moments d'ordres inférieurs,  $n$  et  $\mathbf{V}$ . Il s'agit dans ce cas d'une troncature sur la pression (on verra plus loin que la pression n'est reliée qu'à la densité  $n$ , pas à la vitesse fluide).

De même, si on retient l'ensemble des équations, on dispose de 5 équations scalaires pour 8 variables,  $n, V_i, p, q_i$ . Il faut donc fixer 3 variables qui seront les 3 composantes du flux de chaleur  $\mathbf{q}$  qu'une prescription reliera aux moments d'ordre inférieur. Dans cette situation, on parle de troncature sur le flux de chaleur.

Comme on le verra dans la suite, ces différentes troncatures traduisent physiquement une hypothèse thermodynamique sur la nature du processus de diffusion de chaleur pour chacune des composantes du plasma.

### 4.1.1 Troncatures sur la pression

#### Approximation des plasmas froids

Dans les situations où la pression au sein du fluide peut être négligée par rapport aux autres contributions, on pose

$$p \equiv 0$$

Les 2 équations de conservation de la charge et de l'impulsion suffisent alors à déterminer les champs de densités et de vitesses :

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{DV_i}{Dt} - \frac{qE_i}{m} &= \left. \frac{1}{nm} \frac{\delta M_i}{\delta t} \right|_c, \end{aligned}$$

Cette approximation est connue sous le nom d'*approximation des plasmas froids* (la densité n'étant pas supposée nulle, l'équation d'état  $p = nk_B T$  avec  $p = 0$  est équivalente à  $T = 0$ , d'où le nom donné à cette approximation).

### Approximation des plasmas isothermes

Rappelons que chaque composante du plasma vérifie l'équation d'état des gaz parfaits

$$p(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) k_B T(\mathbf{r}, t)$$

Notez que cette relation ne peut être une relation de fermeture pour la pression que si la température est une fonction supposée connue. Faute de quoi, cette relation n'est qu'une relation de définition d'une nouvelle variable, la température, à partir de la pression et de la densité.

Un cas simple correspond au cas où les conditions physiques sont telles que la température est uniforme. Le gradient de pression ne met alors en jeu que les gradients de densités, de sorte que l'approximation :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = k_B T \frac{\partial n}{\partial x_i}$$

permet également de fermer le système d'équations pour  $T$ , constante et donnée.

Cette situation correspond physiquement au cas où les gradients de température relaxent rapidement sur l'échelle de temps étudiée. La valeur de la température n'est donc pas fixée par les équations mais soit par une considération physique extérieure, soit indirectement par les conditions aux limites imposées au système (cas des plasmas confinés par exemple).

Le système d'équations à considérer s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{DV_i}{Dt} + \frac{k_B T}{nm} \frac{\partial n}{\partial x_i} - \frac{qE_i}{m} &= \left. \frac{1}{nm} \frac{\delta M_i}{\delta t} \right|_c, \end{aligned}$$

Cette approximation est appelée *approximation isotherme*. Dans un cadre cinétique, on peut justifier que cette approximation est pertinente dans la limite où la vitesse de phase des perturbations est faible devant la vitesse thermique :  $\omega/k \ll v_T$ .

### Approximation des plasmas adiabatiques

L'approximation des plasmas isothermes suppose implicitement une conductivité thermique très élevée pour la composante considérée. L'hypothèse

extrême opposée correspond à une conductivité thermique faible et donc à un flux de chaleur quasi nul.

Pour déterminer la contrainte sur la pression qui correspond à cette approximation, considérons l'équation d'évolution de la pression, soit :

$$\frac{Dp}{Dt} + \frac{5}{3} p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \frac{2}{3} \frac{\delta E}{\delta t} \Big|_c$$

En absence de collisions, l'équation de bilan de particules montre que la divergence du vecteur vitesse s'exprime très simplement en fonction de la dérivée totale de la densité :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt}$$

ce qui conduit après substitution dans l'expression précédente à la forme simplifiée :

$$\frac{Dp}{Dt} - \frac{5}{3} \frac{p}{n} \frac{Dn}{Dt} = -\frac{2}{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

L'expression se simplifie encore si l'on suppose l'évolution adiabatique et donc le flux de chaleur nul. On trouve alors :

$$\frac{D}{Dt} (pn^{-5/3}) = 0$$

ce qui montre que *le produit  $pn^{-5/3}$  est invariant dans le repère lié au fluide en mouvement lorsque, viscosité, collisions et flux de chaleur sont négligés.*

Le système d'équations suivant est donc fermé pour les variables  $n, V_i$  et  $p$  :

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{DV_i}{Dt} + \frac{1}{nm} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{qE_i}{m} &= 0, \\ \frac{D}{Dt} (pn^{-5/3}) &= 0 \end{aligned}$$

Cette approximation est connue sous le nom d'*approximation adiabatique*. Dans un cadre cinétique, on peut justifier que cette approximation est pertinente dans la limite où la vitesse de phase des perturbations est grande devant la vitesse thermique :  $\omega/k \gg v_T$ .

Le coefficient  $5/3$  est caractéristique d'une situation à 3 dimensions d'espace. Dans le cas d'un espace de dimension  $d$ , on montre que ce coefficient, noté  $\gamma$  est tel que  $\gamma = (d+2)/d$ . Puisque la pression scalaire  $p$  vérifie en général l'équation des gaz parfaits :  $p = nk_B T$ ,  $\gamma$  est également le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants :  $\gamma = c_p/c_v$ .

### Résumé des troncatures sur la pression

En résumé, pour chaque composante du plasma, il y a donc (au moins) 3 situations limites pour lesquelles on peut fermer les équations de bilan de particules et de quantité de mouvement en imposant une des relations algébriques suivantes :

Approximation des plasmas froids	:	$p = 0$ ,
Approximation isotherme	:	$pn^{-1} = k_B T = \text{Cte}$ ,
Approximation adiabatique	:	$pn^{-\gamma} = \text{Cte}$ .

Le choix de la troncature dépend en général de la composante du plasma considérée. Ainsi, dans le cas des plasmas froids hors-équilibre par exemple, les électrons sont presque toujours considérés isothermes, tandis que les ions sont pris froids ou isothermes avec une température très inférieure à celle des électrons. Dans le cas des plasmas thermiques, ou des plasmas chaud fortement ionisés, une approximation isotherme avec la même température pour les ions et les électrons est souvent retenue.

#### 4.1.2 Troncatures sur le flux de chaleur

Comme on l'a expliqué plus haut, un système fermé d'équations pour les grandeurs physiques densité, vitesse et température (ou pression scalaire)<sup>3</sup> peut être obtenu en effectuant une troncature sur le vecteur flux de chaleur.

Par rapport aux troncatures au niveau de la pression, les troncatures au niveau du flux de chaleur permettent essentiellement d'obtenir une équation

---

3. Rappelons que l'on considère un plasma non magnétisé et que l'on a supposé le tenseur de pression diagonal et isotrope. Faute de quoi, il y a 6 composantes indépendantes du tenseur de pression.

d'évolution de la température à laquelle les troncatures au niveau de la pression ne donnait pas accès (sauf de façon indirecte dans le cas adiabatique).

Le système à considérer est donc le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{DV_i}{Dt} + \frac{1}{nm} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{F_i}{m} &= \left. \frac{1}{nm} \frac{\delta M_i}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{3p}{2} \right) + \frac{5p}{2} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} &= \left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c \end{aligned}$$

Les 2 hypothèses le plus couramment effectuées sur le flux de chaleur sont :

- soit, celle d'un flux de chaleur négligeable  $\mathbf{q} \approx 0$ . Notez qu'à la différence de l'approximation adiabatique présentée dans la section précédente où la température était contrainte par la relation  $pn^{-5/3} = \text{Cte}$ , celle-ci évolue également du fait de la prise en compte des collisions.

- soit, celle d'un flux de chaleur obéissant à une loi de Fourier  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , où la conductivité thermique est un coefficient phénoménologique à préciser. Une forme couramment retenue est celle valable pour les gaz où  $\kappa \propto p/m\nu$  où  $\nu$  est une fréquence de collisions.

## 4.2 Fermetures sur la fonction de distribution

Les fermetures par troncatures présentées dans la section précédente sont un peu arbitraires et leurs validités reposent largement sur la qualité du sens physique de celui qui les utilisent.

Les fermetures sur la fonction de distribution que nous présentons maintenant suivent une démarche plus systématique. Un de leurs avantages est de garantir, par construction, un traitement des termes collisionnels et non collisionnels au même niveau d'approximation.

Il est toujours possible, au moins formellement, de développer la fonction de distribution de la composante étudiée sur une base de polynômes orthogonaux. La fonction de distribution s'écrit alors comme une série sous la forme :

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_s^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{r}, t) M_{\alpha}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$$

Dans cette expression,  $f_s^{(0)}$  est une fonction de distribution d'ordre 0 autour de laquelle s'effectue le développement,  $a_\alpha$  représentent les coefficients du développement et  $M_\alpha$  une famille de polynômes orthogonaux.

Le choix de la fonction de distribution de référence,  $f_s^{(0)}$ , autour de laquelle s'effectue le développement est crucial. Un choix souvent utilisé est une maxwellienne, ce qui suppose qu'on considère des situations pas trop éloignées de l'équilibre thermodynamique. D'autres choix sont possibles, en particulier pour les plasmas faiblement collisionnels. Les termes suivants de la série mesurent les écarts à la fonction de référence. La nature des polynômes orthogonaux dépend à la fois du système de coordonnées retenu et de la fonction de distribution de référence. Par exemple, dans le cas d'une fonction de référence maxwellienne, les polynômes impliqués sont les polynômes d'Hermite en coordonnées cartésiennes  $(v_x, v_y, v_z)$ . En coordonnées sphériques  $(v, \theta, \varphi)$ , les polynômes impliqués sont les polynômes de Laguerre pour la partie radiale et les harmoniques sphériques pour les parties angulaires. Le nombre de termes à retenir dans le développement dépend de la rapidité de convergence de la série (pas connue a priori!), et de la précision escomptée.

#### 4.2.1 Approximation à 5 moments

Dans l'approximation à 5 moments, on retient l'approximation à l'ordre le plus bas :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) \approx f^{(0)}(\mathbf{r}, w, t) = n_s(\mathbf{r}, t) \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m\mathbf{w}^2}{2k_B T} \right]$$

où on rappelle que  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{V}$ . A ce niveau d'approximation,  $f$  n'est donc exprimé qu'à partir des 5 premiers moments, à savoir,  $n$ ,  $\mathbf{V}$  et  $T$ .

En utilisant cette approximation pour  $f$ , il est évident, par construction, que l'on a bien comme il se doit :

$$\langle f \rangle = n, \quad \langle \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle w^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$$

De plus, il est facile de montrer à partir de leurs définitions (cf. Exercice

1) que le tenseur de viscosité et le flux de chaleur sont identiquement nuls :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &\equiv nm \langle \mathbf{w} \mathbf{w} - \frac{1}{3} w^2 \mathbf{1} \rangle = \mathbf{0}, \\ \mathbf{q} &\equiv \frac{1}{2} nm \langle w^2 \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0}\end{aligned}$$

En conséquence, puisque  $\mathbf{P} = p \mathbf{1}$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , les équations de transport de la matière, de la quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent aux expressions :

$$\frac{Dn}{Dt} + n (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) = \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \quad (4.1)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{nm} \boldsymbol{\nabla} p - \frac{\mathbf{F}}{m} = \left. \frac{1}{nm} \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta t} \right|_c, \quad (4.2)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{3p}{2} \right) + \frac{5p}{2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) = \left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c \quad (4.3)$$

Les termes de collisions du second membre comprennent des contributions dues aux collisions élastiques et aux collisions inélastiques. Les termes de collisions inélastiques sont à traiter au cas par cas. Pour ce qui est des collisions élastiques, compte tenu de la forme maxwellienne de la fonction de distribution, les calculs peuvent être effectués, *quelle que soit la loi de force supposée entre les particules*.

On peut montrer que l'on retrouve (comme il se doit !) les résultats obtenus dans le chapitre précédent dans le cas des fréquences de collisions indépendantes des vitesses des particules (cas des molécules de Maxwell). En notant  $s$  la composante étudiée en interaction avec d'autres composantes que l'on notera génériquement  $t$ , on trouve :

$$\left. \frac{\delta n_s}{\delta t} \right|_c^{el} = 0, \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t} \right|_c^{el} = -n_s \sum_t \mu_{st} \nu_{st} (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_t), \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\delta p_s}{\delta t} \right|_c^{el} = -n_s \sum_t \kappa_{st} \nu_{st} \left[ \frac{3k_B (T_s - T_t)}{2} - \frac{m_t (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_t)^2}{2} \right] \quad (4.6)$$



Lorsque les termes de collisions sont négligés, ou lorsqu'on considère un système à une seule composante, ce système d'équations s'identifie avec les équations d'Euler de l'hydrodynamique, l'équation d'énergie correspondant pour ce qui la concerne avec l'approximation adiabatique avec  $\gamma = 5/3$ .

### 4.2.2 Approximation à 8 moments

Comme on vient de le voir, l'approximation à 5 moments ne permet pas d'inclure les effets de la viscosité et la diffusion de la chaleur. L'inclusion de ces 2 effets nécessite l'approximation à 13 moments que nous évoquerons dans la section suivante.

Dans l'approximation à 8 moments, on souhaite décrire une situation où les effets d'anisotropie sur la pression sont négligeables, mais où les effets dus à la diffusion de chaleur sont pris en compte. Dans ce cas, la forme approchée de la fonction de distribution utilisée est la suivante :

$$f(\mathbf{w}) = f^{(0)}(w) [1 + (\alpha + \beta w^2) \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}]$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients à déterminer qui peuvent dépendre des premiers moments,  $n, \mathbf{V}, T$ . Cette forme particulière est compatible avec un développement à l'ordre le plus bas en  $\mathbf{w}$ , et le fait que  $f$  est une grandeur scalaire telle que  $\langle f \rangle = n$ .

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés par les 2 contraintes :

$$\langle \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{nm}{2} \langle w^2 \mathbf{w} \rangle = \mathbf{q}$$

Le calcul fait en exercice (Exercice 3) montre que  $f$  prend alors la forme explicite :

$$f(\mathbf{w}) = f^{(0)}(w) \left[ 1 - \frac{m}{k_B T p} \left( 1 - \frac{m}{5k_B T} w^2 \right) \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} \right]$$

Cette expression peut être utilisée pour calculer les 3 moments  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}$  et  $\mathbf{Q}$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= 0, \\ \mu_{ij} &= \frac{5k_B T}{2m} p \delta_{ij}, \\ Q_{jkl} &= \frac{2}{5} (q_l \delta_{jk} + q_k \delta_{lj} + q_l \delta_{jk}) \end{aligned}$$

Ces expressions permettent d'obtenir les équations de transport simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} + n (\nabla \cdot \mathbf{V}) &= \left. \frac{\delta n}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{mn} \nabla p - \frac{\mathbf{F}}{m} &= \left. \frac{1}{mn} \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{3p}{2} \right) + \frac{5p}{2} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= \left. \frac{\delta E}{\delta t} \right|_c, \\ \frac{D\mathbf{q}}{Dt} + \frac{7}{5} \mathbf{q} \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \frac{7}{5} \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \frac{2}{5} (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{q} + \frac{5p}{m} \nabla k_B T - \frac{q}{m} \mathbf{q} \times \mathbf{B} &= \left. \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta t} \right|_c \end{aligned}$$

La forme précise des termes de collisions dépend de la nature des interactions entre les constituants du plasma. Selon les hypothèses retenues, de nouveaux effets physiques comme des effets de diffusion thermique et/ou thermo-électrique peuvent apparaître et ainsi être pris en compte.

### 4.2.3 Généralisations à un nombre de moments plus élevé

Des approches similaires ont été développées en considérant un nombre de moments plus élevés comme les approximations à 13 moments (densité, vitesse, température (ou pression) + viscosité, et flux de chaleur), ou même à 20 moments lorsque le vecteur flux de chaleur est remplacé par le tenseur flux de chaleur.

En partant des équations à 13 moments dont on ne donnera pas les expressions ici, on peut montrer qu'un développement en fonction du libre parcours moyen, qui convient donc pour les plasmas collisionnels, conduit aux équations hydrodynamiques bien connues d'Euler et Navier-Stokes. Plus précisément, à l'ordre le plus bas en  $1/\nu$ , la viscosité et le flux de chaleur sont négligeables par rapport aux moments  $n$ ,  $\mathbf{V}$  et  $T$ , et on retrouve les équations d'Euler. Les équations de Navier-Stokes sont retrouvées à l'ordre suivant si l'on suppose que  $n$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$ ,  $\nu \boldsymbol{\pi}$  et  $\nu \mathbf{q}$  sont du même ordre et tous les autres termes négligeables.

Dans la limite opposée où l'on considère un plasma non collisionnel placé dans un fort champ magnétique, il est possible de montrer que l'on peut obtenir

---

les équations double adiabatiques, ou équations de Chew-Goldberger-Low, à partir des mêmes équations à 13 moments. Cette approximation correspond à un développement en fonction du rayon de Larmor.

### 4.3 Exercices

#### Exercice 1

Dans le cadre de l'approximation à 5 moments, où la fonction de distribution d'ordre 0 est une Maxwellienne, montrer que le tenseur de viscosité et le flux de chaleur sont nuls.

#### Exercice 2

Dans une approche à 8 moments, on considère une fonction de distribution approchée avec la forme suivante :

$$f(\mathbf{w}) = f^0(\mathbf{w}) [1 + (\alpha + \beta w^2) \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}]$$

avec  $f^0(\mathbf{w}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\mathbf{w}^2}{2k_B T}\right]$ , et où on rappelle que  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ .

1. Justifiez la forme proposée pour  $f$  dans le cadre d'une approximation à 8 moments.
2. Rappelez la valeur de  $\langle 1 \rangle_0, \langle \mathbf{w} \rangle_0, \langle w^2 \rangle_0$  où  $\langle \dots \rangle_0$  représente une moyenne calculée avec  $f^0$  :  $\langle \dots \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \dots f^0 d\mathbf{w}$ .
3. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés par les 2 contraintes :

$$\langle \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{nm}{2} \langle w^2 \mathbf{w} \rangle = \mathbf{q}$$

où  $\langle \dots \rangle$  représente une moyenne calculée avec  $f$ .

Déterminer les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

4. En déduire que  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(\mathbf{w}) = f^0(\mathbf{w}) \left[ 1 - \frac{m}{k_B T p} \left( 1 - \frac{m}{5k_B T} w^2 \right) \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} \right]$$

5. Utilisez  $f$  pour montrer, dans le cadre de cette approximation, que les 2 moments d'ordre supérieurs  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\mathbf{Q}$  s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \frac{5k_B T}{2m} p \mathbf{I}, \\ Q_{jkl} &= \frac{2}{5} (q_l \delta_{jk} + q_k \delta_{lj} + q_j \delta_{kl}) \end{aligned}$$

6. Utilisez les expressions précédentes pour écrire les expressions des équations de transport de matière, de quantité de mouvement, d'énergie et de flux de chaleur dans le cadre de cette approximation à 8 moments.

Rappel :

$$\int_{\mathbb{R}} f(c) dc = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} c^2 f(c) dc = \frac{1}{2\pi a}, \quad \int_{\mathbb{R}} c^4 f(c) dc = \frac{3}{(2\pi a)^2}, \quad \int_{\mathbb{R}} c^6 f(c) dc = \frac{15}{(2\pi a)^3},$$

avec  $f(c) \equiv \sqrt{a} \exp[-\pi a c^2]$ .

### Exercice 3 : La loi “double-adiabatique” CGL (Chew - Goldberger - Law) (partie de l'examen 2011)

On considère un magnétoplasma anisotrope. On note  $\mathbf{B}$  le champ magnétique, et  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ . On se place dans le contexte de la MHD. Le tenseur de pression  $\mathbf{P}$  ne fait intervenir que les termes  $P_{\perp}$  et  $P_{\parallel}$ .

1. Ecrire la forme du tenseur de pression  $\mathbf{P}$  en fonction des tenseurs  $\mathbf{1} - \mathbf{b}\mathbf{b}$  et  $\mathbf{b}\mathbf{b}$ .
2. On rappelle que pour un plasma sans collisions et sans forces extérieures, l'équation d'évolution du tenseur de pression s'écrit sous forme vectorielle

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P}(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{U} + (\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{U})^T = 0$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse MHD et  $\mathbf{Q}$  le tenseur flux de chaleur.

Réécrire cette équation sous forme indicelle :  $DP_{ij}/Dt + \dots$

3. En quoi consiste l'hypothèse adiabatique ?  
Dans quelle situation physique cette hypothèse est-elle adaptée ?
4. Montrez que le produit doublement contracté de l'équation précédente avec les tenseurs  $\mathbf{1} - \mathbf{b}\mathbf{b}$  et  $\mathbf{b}\mathbf{b}$  donne

$$\begin{aligned} \frac{DP_{\perp}}{Dt} - P_{\perp} \frac{\partial}{\partial z} U_z + 2P_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{DP_{\parallel}}{Dt} + P_{\parallel} \nabla \cdot \mathbf{U} + 2P_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} U_z &= 0 \end{aligned}$$

où l'on note  $z$  la direction locale du champ magnétique.

5. Avec l'équation de Maxwell-Faraday ainsi que la loi d'Ohm idéale, établir la forme analytique de  $D\mathbf{B}/Dt$ .

On rappelle pour cela la formule d'analyse vectorielle :

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

6. Ecrire l'équation de continuité pour expliciter la forme de  $\nabla \cdot \mathbf{U}$  en fonction de  $\rho^{-1} \frac{D\rho}{Dt}$ .
7. Avec les résultats de la question 5, explicitez la forme de  $\partial_z U_z$  en fonction de  $\rho^{-1} \frac{D\rho}{Dt}$  et  $B^{-1} \frac{DB}{Dt}$ .
8. A l'aide des expressions obtenues dans les questions 6 et 7, réécrire les 2 équations de la question 4 et montrez que l'on obtient les 2 équations CGL

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{P_\perp}{B\rho} \right) &= 0 \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{P_\parallel B^2}{\rho^3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

9. Quelle est l'expression du moment magnétique ?

Comment pouvez-vous alors interpréter la seconde équation ?

## Ondes et instabilités dans les plasmas

### 5.1 Les ondes dans un plasma

#### 5.1.1 Rappel sur les ondes dans un plasma

##### Vitesse de phase et vitesse de groupe

Une onde peut se caractériser par sa vitesse de phase  $V_\phi$ . C'est une grandeur vectorielle définie par

$$\mathbf{V}_\phi = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \quad (5.1)$$

C'est la vitesse à laquelle le front d'une onde se déplace. Faisant intervenir les valeurs  $\omega$  et  $\mathbf{k}$ , cette vitesse n'est donc définie que pour des ondes monochromatiques. Rien ne lui interdit d'être plus grande que la célérité de la lumière dans le vide. Mais en conséquence du principe d'Heisenberg, on a toujours à faire à des paquets d'ondes de largeur finie. Un paquet d'ondes est la superposition d'un ensemble d'ondes monochromatiques dont la fréquence est comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$  et le nombre d'onde associé est compris entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ . L'amplitude de chacun de ces modes est bien entendu une fonction continue de  $\omega$  et  $\mathbf{k}$ .

La vitesse de groupe d'un paquet d'ondes est la vitesse à laquelle l'énergie de ce paquet se déplace. L'essentiel de cette énergie se trouve là où la superposition de ces ondes est la plus constructive. La vitesse de groupe sera donc la vitesse à laquelle le lieu de ces points se déplace. Soit le paquet d'ondes

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\omega d\mathbf{k} \quad (5.2)$$

On peut comparer la forme de ce paquet d'onde en  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$  avec la forme de ce même paquet à un instant ultérieur  $t'$  en  $\mathbf{r}'$ . Pour cela, on fait un

développement de Taylor, soit  $t' = t + \delta t$  et  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ .

$$\psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}', t') = \int \psi(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} [1 - e^{i(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{r} - \omega \delta t)}] d\omega d\mathbf{k} \quad (5.3)$$

Pour que l'interaction soit constructive, il faut que la phase relative entre toutes les composantes de Fourier de  $\psi$  reste constante, c'est-à-dire que sa dérivée soit nulle

$$d[\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{r} - \omega \delta t] = 0 \quad (5.4)$$

Etant dans l'espace de Fourier, les seules variables sont  $\omega$  et  $\mathbf{k}$ . Cette dérivée s'écrit alors

$$d\mathbf{k} \delta \mathbf{r} - d\omega \delta t = 0 \quad (5.5)$$

L'énergie de la perturbation va donc se déplacer à la vitesse de groupe

$$\mathbf{V}_g = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad (5.6)$$

La vitesse de groupe est un vecteur qui n'est pas forcément dans la même direction que  $\mathbf{k}$ .

### Propagation parallèle et perpendiculaire

La présence d'un champ magnétique est une source d'anisotropie. Le champ magnétique guide le mouvement de gyration des particules. Il joue aussi souvent un rôle dans la propagation des ondes. On parle de propagation parallèle (perpendiculaire) lorsque le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est parallèle (perpendiculaire) au champ magnétique. Entre les deux, on parle de propagation oblique (lorsque  $\Theta \neq 0$  et  $\Theta \neq \pi/2$ ). On parle aussi de propagation quasi-parallèle lorsque  $\Theta$  est proche (mais différent) de 0, et de propagation quasi-perpendiculaire lorsque  $\Theta$  est proche (mais différent) de  $\pi/2$ .

### Modes électrostatiques et électromagnétiques

Une onde électrostatique n'a qu'une composante électrique  $\mathbf{E}$  et pas de composante magnétique  $\mathbf{B}$ <sup>1</sup>. Pour les modes électrostatiques, au lieu de traiter l'ensemble des équations de Maxwell, la seule équation de Maxwell-Poisson

---

1. Attention de bien distinguer la composante statique du champ magnétique de la composante associée aux ondes. Une onde peut être électrostatique dans un plasma magnétisé, comme elle peut être électromagnétique dans un plasma non magnétisé.



est suffisante. A l'inverse, lorsque  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{E}$  sont orthogonaux, on parle d'ondes électromagnétiques.

### Modes longitudinal et transverse

Cette distinction fait référence à la direction relative du champ électrique de l'onde  $\mathbf{E}$  par rapport au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Lorsque  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$  on parle alors de mode longitudinal. Lorsque  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$  on parle de mode transverse. Dans l'espace de Fourier, l'équation de Maxwell-Faraday donne  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ . Un mode longitudinal est donc toujours électrostatique. De même,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}_T \quad (5.7)$$

Nous verrons que l'équation de dispersion s'écrit alors

$$\left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon} \right) \cdot \mathbf{E}_T = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_L \quad (5.8)$$

Ainsi, lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on a  $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \gg \boldsymbol{\varepsilon}$ , et  $E_T$  tend alors vers 0. Le terme longitudinal  $E_L$  domine donc. Au voisinage de la résonance, les ondes prennent un caractère électrostatique. De manière générale en plasma, les ondes peuvent avoir en même temps une composante longitudinale et une composante transverse. Elles ne sont alors ni purement électrostatique ni purement électromagnétique.

### Polarisation

La polarisation d'une onde est la direction de son champ électrique et de son champ magnétique. Ces 2 directions sont bien souvent différentes l'une de l'autre. Si les directions des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  de l'onde sont fixes, on parle alors de polarisation linéaire (ou rectiligne). Sinon, elles sont elliptiques ou circulaires. Les cas extrêmes des modes parallèles ou perpendiculaires appellent une nouvelle classification :

- En propagation parallèle, on parle de mode droit et gauche. Ce sont les 2 modes polarisés circulairement, tournant dans les 2 sens possibles (le mode droit est celui qui tourne avec les électrons). En utilisant les notations du Stix (qui seront détaillées dans le problème sur le diagramme CMA), On a  $N = R$  pour le mode droit et  $N = L$  pour le mode gauche, où  $N = kc/\omega$  est l'indice optique.

- En propagation perpendiculaire, on parle de mode ordinaire et extraordinaire. En utilisant les notations du Stix, on a  $N = P$  pour le mode ordinaire et  $N = RL/S$  pour le mode extraordinaire. L'oscillation plasma est un bel exemple de mode ordinaire.

### 5.1.2 Modes linéaires et non-linéaires

Le système d'équations (Maxwell + fluide) qui permet de décrire la réponse du plasma à des champs extérieurs est intrinsèquement non-linéaire, ce qui constitue une complication. En théorie, on ne peut donc pas étudier la réponse à une excitation sans prendre en compte l'amplitude de celle-ci.

En théorie linéaire, on fait l'hypothèse que les ondes sont de faible amplitude. La réponse à une superposition d'excitations sera la superposition des réponses aux excitations individuelles. Cette manière de procéder ne sera acceptable que si la densité d'énergie électromagnétique associée à l'onde est faible devant la densité d'énergie thermique du plasma non-perturbé :

$$n \frac{mv_T^2}{2} \gg \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (5.9)$$

On écrit pour cela les équations fluides ainsi que les équations de Maxwell. On linéarise ensuite ces équations à l'ordre 0, 1... Les équations d'ordre 0 seront de fait satisfaites, et décriront la situation d'équilibre. Les équations d'ordre 1 permettront de décrire les ondes. En raison du caractère temporellement et spatialement dispersif du plasma, ces calculs se feront dans l'espace de Fourier  $(\mathbf{k}, \omega)$ . Pour des raisons de causalité, la transformation à utiliser en temps devrait être en toute rigueur une transformée de Laplace. Lorsque l'on s'intéresse à un mode et non au processus de sa création et/ou destruction (en raison de son amortissement ou au contraire de son instabilité), on utilisera pour cela aussi une transformée de Fourier.

Dans le cas contraire, si les caractéristiques du mode dépendent de son amplitude, il faudra alors faire les calculs de manière non-linéaire en gardant explicitement l'amplitude de l'onde. Il existe une autre source possible de non-linéarité : l'inhomogénéité du milieu. En présence d'un gradient (de densité, de température...) on ne pourra pas faire une transformée de Fourier dans la

direction considérée, et il faudra alors conduire les calculs en gardant la forme explicite du gradient, ce qui conduira à résoudre une équation aux dérivées partielles.

### 5.1.3 Relation de dispersion dans un plasma

On ne s'intéresse pour le moment qu'aux équations de Maxwell, et non pas à la forme spécifique du tenseur de conductivité (ce que nous ferons plus tard évidemment). Pour cela, on ne va retenir que les 2 équations en rotationnel, les 2 équations en divergence ne donnant que des informations sur les conditions initiales.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (5.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (5.11)$$

On en déduit

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (5.12)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (5.13)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \quad (5.14)$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \quad (5.15)$$

En développant le double produit vectoriel, on a

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}, \quad (5.16)$$

ce qui s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$\left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbf{1} + \mathbf{k} \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = +i\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.17)$$

La densité de courant  $\mathbf{J}$  intervenant dans cette équation est totale, s'entendant qu'elle est la somme de la densité de courant extérieure  $\mathbf{J}_f$  et de la densité de courant induite dans le plasma  $\mathbf{J}_i$ . La densité de courant induite dans le plasma

est reliée au champ électrique par le tenseur de conductivité. Dans l'espace réel, on rappelle que la relation est de la forme

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}, t - \tau) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, t - \tau) d\boldsymbol{\rho} d\tau \quad (5.18)$$

En faisant sortir la partie induite de la densité de courant (en introduisant le tenseur de conductivité),

$$\left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbf{1} + \mathbf{k}\mathbf{k} - i\omega\mu_0\boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = +i\omega\mu_0\mathbf{J}_f(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.19)$$

On se place très souvent dans le cas où  $\mathbf{J}_f = 0$  (ce qui signifie que l'équation de dispersion des ondes que l'on obtient n'est valable que dans un milieu sans courant).

En multipliant cette équation par  $c^2/\omega^2$ , on peut faire apparaître l'indice optique vectoriel défini par

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{k}c}{\omega} \quad (5.20)$$

En utilisant la relation  $\boldsymbol{\sigma} = -i\omega\varepsilon_0(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{1})$ , l'équation précédente s'écrit alors

$$(\mathbf{N}\mathbf{N} - N^2\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (5.21)$$

Les modes propres sont ceux qui vont satisfaire l'équation précédente avec un second membre nul. Une solution non triviale ( $\mathbf{E} \neq 0$ ) existe si le déterminant du membre de gauche est nul.

On considère le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan  $xz$ ,  $\mathbf{k} = k \sin \Theta \hat{x} + k \cos \Theta \hat{z}$ . La condition pour annuler le déterminant associé à l'équation précédente s'écrit

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - N^2 \cos^2 \Theta & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} + N^2 \sin \Theta \cos \Theta \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - N^2 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} + N^2 \sin \Theta \cos \Theta & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - N^2 \sin^2 \Theta \end{vmatrix} = 0 \quad (5.22)$$

Pour finir le travail, il est donc nécessaire d'expliciter la forme du tenseur diélectrique. Cela peut se faire en utilisant le formalisme cinétique ou le formalisme fluide. En cinétique, il faut écrire et linéariser une équation cinétique. En fluide, on a besoin d'écrire les équations fluides (pour chaque fluide). Cela nécessite de linéariser les équations fluides, et ne permettra donc que l'étude des modes linéaires.

## 5.2 Les plasmas : conducteurs ou diélectriques ?

### 5.2.1 Tenseur de conductivité et tenseur diélectrique

Sous l'effet d'un champ électrique, une particule chargée va se déplacer. Ce déplacement peut être vu de 2 façons différentes :

- au mouvement de la particule est associé un courant  $\mathbf{J}$ . Le milieu est alors un conducteur, caractérisé par son tenseur de conductivité  $\boldsymbol{\sigma}$ . La densité de courant  $\mathbf{J}$  est donnée par la relation générale  $\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ . Dans les cas les plus simples,  $\boldsymbol{\sigma}$  est un tenseur diagonal dont les éléments (de la diagonale) sont tous égaux entre eux (et donc égaux au tiers de la trace).
- le mouvement de la particule peut être vu comme l'apparition — en plus de la charge initiale de la particule — d'un dipôle formé d'une charge égale à la charge initiale, placée à sa nouvelle position, et d'une charge de signe opposé à la charge initiale placée à son ancienne position. Le milieu est alors un diélectrique caractérisé par son tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ou par son tenseur de susceptibilité  $\boldsymbol{\chi}$ . Le vecteur déplacement électrique<sup>2</sup>  $\mathbf{D}$  est donné par la relation  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}) \cdot \mathbf{E}$ <sup>3</sup>.

De ce choix, purement formel, dépend l'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère. Cette équation fait intervenir la densité de courant  $\mathbf{J}$ . Pour un conducteur, cette densité est associée au courant résultant du déplacement des charges libres (il s'agit des électrons dans un métal, mais ce peut-être aussi les ions dans un plasma). Pour un matériau quelconque, cette densité de courant  $\mathbf{J}_T$  résulte de la somme de la densité de courant associée aux charges libres  $\mathbf{J}_f$  (associée aux porteurs de charge libre du matériau) et de la densité de courant  $\mathbf{J}_i$  induite par la polarisation et/ou la magnétisation du milieu. Ainsi,

- pour un conducteur,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (5.23)$$

2. on appelle aussi "induction électrique" le vecteur  $\mathbf{D}$

3. Dans l'ensemble de ce cours, on n'utilisera que le tenseur diélectrique *relatif*  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

– pour un diélectrique non-magnétique,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.24)$$

Pour des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ayant une dépendance temporelle en  $e^{i\omega t}$ , on montre la relation entre les deux tenseurs :

$$\boldsymbol{\sigma} = -i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{\chi} \quad (5.25)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}$ .

Parmi ces 2 formalismes, on utilise souvent la description diélectrique car elle permet de contenir toute la physique dans un seul tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Dans le formalisme diélectrique permettant de rendre compte de la physique des plasmas, ceux-ci seront toujours considérés comme des milieux non-magnétiques, pour lesquels  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Par ailleurs, le vecteur polarisation électrique  $\mathbf{P}$  permet de quantifier la réponse d'un milieu diélectrique à un champ électrique extérieur,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.26)$$

On se rappelle de ce résultat d'électromagnétisme qui permet de déduire la densité de charge et la densité de courant induite :

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{J}_i \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_i \quad (5.27)$$

dont la compatibilité est assurée par l'équation de continuité. Mais la relation entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  n'est pas toujours simple, et n'est pas non plus la même que celle que l'on a pu rencontrer dans l'étude des diélectriques.

### 5.2.2 Dispersion spatiale et temporelle

En optique, la relation entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  est souvent non-instantanée. Ainsi, la valeur de  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  dépend de la valeur des  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')$ , pour tout les  $t' \leq t$ . Il en va de même pour les plasmas. Mais le mouvement d'une particule chargée dépend de la valeur du champ qu'elle subit tout du long de sa trajectoire. La relation

entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  est donc de plus non-locale, et peut s'écrire (pour des raisons de causalité) sous la forme

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \quad (5.28)$$

On reconnaît le produit de convolution dans le dernier membre, qui nous suggère de passer dans l'espace de Fourier (en espace et en temps). En notant  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\tau = t - t'$ , et <sup>4</sup>

$$\chi(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{+\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi(\boldsymbol{\rho}, \tau) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho})} d\boldsymbol{\rho} d\tau \quad (5.29)$$

on obtient la relation

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.30)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} + \chi$  dans l'espace des  $(\mathbf{k}, \omega)$ . Dans un plasma, le tenseur diélectrique dépend du nombre d'onde et de la fréquence. C'est ce que l'on appelle la dispersion spatiale et la dispersion temporelle.

En fait, le mouvement d'une particule dépend bien de la valeur du champ électrique qu'elle a rencontré au cours de son histoire, i.e. le long de sa trajectoire. Néanmoins, il existe une distance  $l_{cor}$  au delà de laquelle la forme du champ électrique en  $r$  n'a que peu de conséquence sur le vecteur déplacement électrique en  $r + l_{cor}$ . Dit autrement, l'état de la particule en  $r + l_{cor}$  est peu corrélé avec celui qu'elle avait en  $r$ . Cette longueur caractéristique ne peut dépendre que de 2 processus : les collisions et les fluctuations de champs électrique et magnétique dues aux effets collectifs.

Dans un diélectrique solide, la localité des relation s'explique : les atomes ont une place dans le solide qui ne change pas au cours du temps. Si l'on applique un champ  $\mathbf{E}$  en un point  $\mathbf{r}$  où se situe un atome, il va se développer en  $\mathbf{r}$  un dipole. Celui-ci est attaché à son atome, et ne va donc pas voyager. Le champ  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{r}$  va induire un vecteur déplacement  $\mathbf{D}$  en  $\mathbf{r}$  et pas ailleurs. Dans ce

---

4. On utilise la même notation pour le tenseur de susceptibilité dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier. Il n'y a pas de confusion possible lorsque les variables de l'espace considéré sont indiquées

cas, les relations sont locales et ne nécessitent pas un produit de convolution comme dans l'équation (5.28).

Dans un plasma, les charges sont libres et se déplacent donc. Cela induit de la non-localité. Mais elle est limitée : dans l'équation (5.28), l'intégrale sur l'espace des positions peut se limiter à un volume centré sur  $\mathbf{r}$  car la fonction  $\chi$  est décroissante. On peut évaluer la distance caractéristique sur laquelle  $\chi$  va tendre vers 0. Pour le cas des collisions, on considère un champ électrique constant dans le temps (i.e. pour lequel  $\omega \rightarrow 0$ ). En  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ , un champ  $\mathbf{E}$  va induire une polarisation ainsi qu'un vecteur déplacement  $\mathbf{D}$ . La particule pouvant se déplacer librement, elle va pouvoir transporter ce moment dipolaire aussi longtemps qu'elle ne subira pas de collision (l'effet de celle-ci pourrait être de modifier le dipole). Elle pourra donc se déplacer sur un temps de l'ordre de  $\nu^{-1}$  où  $\nu$  est la fréquence de collision. La non-localité va donc être importante sur une distance  $l_c < v_T/\nu$  où  $v_T$  est la vitesse thermique.

Pour le cas des effets collectifs, le champ électrique subi par la particule n'est plus constant dans le temps. Il varie sur une échelle de temps de l'ordre de  $\omega^{-1}$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde. La particule polarisée pourra donc transporter son moment dipolaire sur un temps au plus de l'ordre de  $\omega^{-1}$ , soit sur une distance  $l_f = v_T/\omega$ . Au delà de cette distance, le dipole transporté sera modifié par la forme du champ électrique qui aura significativement évolué au cours du temps. Fort de ces 2 arguments, on peut définir une longueur de corrélation  $l_{cor} = \min(l_c, l_f)$  au delà de laquelle  $\chi$  devient négligeable.

La dispersion spatiale est importante lorsque  $kl_{cor} \geq 1$ . Dans le cas contraire, elle est négligeable : le terme en  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}$  est très proche de 1 dans la relation (5.29) et l'intégrale ne dépend plus de  $\mathbf{k}$ . Un milieu n'est donc plus spatialement dispersif lorsque  $\omega, \nu \gg kv_T$ . Dans l'équation (5.29),  $\chi(\boldsymbol{\rho}, \tau)$  est une fonction qui est maximum en  $\tau = 0$  et  $\boldsymbol{\rho} = 0$ . Cette fonction va ensuite décroître (en  $\tau$  et en  $\boldsymbol{\rho}$ ), et  $l_{cor}$  est la distance sur laquelle la valeur de  $\chi(\boldsymbol{\rho}, \tau)$  sera substantiellement diminuée.



### 5.2.3 Dissipation

La dissipation pour un mode particulier dans un plasma peut se calculer à partir de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique. C'est l'équation (2.5). Mais pour prendre en compte la présence du plasma, la densité de courant qui intervient doit contenir la densité de courant associé aux charges libres ainsi que la densité de courant de polarisation. Il est alors beaucoup simple d'écrire les équations de Maxwell dans un diélectrique

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (5.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{free} - \partial_t \mathbf{D} \quad (5.32)$$

ce qui permet de réécrire la forme de l'eq. (2.5) pour un diélectrique

$$\left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J}_{free} \cdot \mathbf{E} \quad (5.33)$$

qui fait apparaître la nouvelle forme du vecteur de Poynting que l'on note  $\mathbf{S}$ . En l'absence de densité de courant de charges libres, la variation de l'énergie électromagnétique est donnée par  $\nabla \cdot \mathbf{S}$ . De plus, la dissipation de l'énergie électromagnétique ne peut se faire qu'en échangeant de l'énergie avec le plasma. Hors,  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$  ne fait pas intervenir les propriétés du plasma. Donc seul le premier terme  $\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}$  contient le terme dissipatif. Son calcul nécessite de ne retenir que la partie réelle de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ , et de calculer une moyenne temporelle. La dissipation que l'on quantifie par le scalaire  $Q$  s'écrit donc

$$Q = \langle \mathbf{E}_r \cdot \dot{\mathbf{D}}_r \rangle \quad (5.34)$$

où les crochets indiquent une moyenne temporelle calculée sur  $\mathbf{E}_r$  et  $\mathbf{D}_r$  qui sont les expressions réelles<sup>5</sup> des vecteurs champ électrique et déplacement électrique. Avec un champ électrique en  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , on a  $\mathbf{E}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$  et<sup>6</sup>

5. On ne peut faire les calculs en complexe car les opérations multiplication et partie réelle ne commutent pas entre elles. Cette remarque devient importante pour les termes non-linéaires comme celui-ci.

6. cela est la conséquence de la définition de  $\epsilon$  par une transformée de Fourier, et de ce que  $\mathbf{D}_r = \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon \mathbf{E} + \epsilon^* \mathbf{E}^*)$ . De plus, par construction on a (pour le calcul de la dérivée)  $\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(-\mathbf{k}, -\omega)$

$\dot{\mathbf{D}}_r = \frac{1}{2}i\omega\epsilon_0[-\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega).\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \omega).\mathbf{E}^*]$ , d'où

$$Q = -\frac{i\omega\epsilon_0}{4}\mathbf{E}^T.(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{*T}).\mathbf{E}^* \quad (5.35)$$

En remarquant que le tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\epsilon}$  (complexe) peut se décomposer en une partie Hermitienne  $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^{*T})$  et une partie anti-Hermitienne  $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{*T})$  on note que la dissipation dans un plasma n'est due qu'à la partie anti-Hermitienne du tenseur diélectrique. C'est un point important qui amène plusieurs remarques :

- dans le cas des modes électrostatiques (ou longitudinaux), tout se passe à une seule dimension. Le tenseur diélectrique se réduit alors à un scalaire. Dans un tel cas, la dissipation ne peut apparaître que si  $\epsilon$  a une composante imaginaire. C'est le cas lorsque l'on étudie l'amortissement Landau.
- Pour les plasmas sans effet de température, on peut établir la forme du tenseur diélectrique (voir eq. 5.38, 5.39 et 5.40). Il n'y a qu'un seul terme complexe qui apparaît, de symétrie hermitienne. Donc tout les modes que l'on pourra étudier dans le cadre des plasmas froids magnétisés seront non-dissipatifs.
- Pour ces mêmes plasmas froids magnétisés, si l'on prend en compte un terme de collisions (par exemple un terme en  $-nm\nu\mathbf{V}$  où  $\nu$  est une fréquence de collision), on montre facilement que l'on modifie les termes du tenseur diélectrique en faisant apparaître une composante anti-hermitienne.

Ainsi, pour faire apparaître une composante anti-Hermitienne dans le tenseur diélectrique, il faut soit des collisions, soit des effets de température :

- Le cas des collisions est le plus intuitif. Lors des collisions (sans discuter leur nature) ont a un transfert d'impulsion et d'énergie qui permet donc de dissiper de l'énergie dirigée en énergie thermique.
- Dans le cas des effets dûs à la température, considérons une particule animée d'une vitesse  $v$  dans la même direction que le nombre d'onde  $k$  d'une onde de pulsation  $\omega$ . La pulsation de cette onde vue par la particule est, par effet Doppler,  $\omega - kv$ . Si cette pulsation est nulle, cela signifie que la particule voit une phase constante, et peut donc travailler avec

une valeur moyenne non-nulle. La particule va alors gagner ou perdre de l'énergie, ce qui signifie que l'onde va en perdre ou en gagner. C'est une autre forme de dissipation possible, qui se traite de manière correcte en théorie cinétique et s'appelle l'effet Landau.

Pour les plasmas magnétisés, les effets de température ont des conséquences un peu différentes. Les particules ont alors un mouvement de gyration autour des lignes de champ à la pulsation  $\omega_c$ . La condition ci-dessus se réécrit en plasma magnétisé  $\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} = \omega_c$ . Dans ce cas, l'effet Doppler à considérer est bien celui dans la direction parallèle au champ magnétique. Cette formule peut même s'étendre à toutes les harmoniques de la gyrofréquence, et l'on obtient pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} = n\omega_c$ . On parle alors d'effet Landau cyclotron. Lorsqu'il y a de l'effet Landau, on ne peut plus traiter le problème avec un formalisme fluide (la forme de la fonction de distribution devient importante), et le formalisme cinétique devient nécessaire.

#### 5.2.4 Tenseur diélectrique en plasma froid

Si l'on se place en plasma froid (la température de chaque espèce est nulle ou négligeable) et en l'absence de collisions, alors l'équation de conservation de l'impulsion linéarisée au premier ordre donne

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_1 = q \mathbf{E}_1 + q \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (5.36)$$

où l'indice indique l'ordre du terme ( $\mathbf{B}_0$  étant donc le champ magnétique statique). Dans l'espace de Fourier, on montre que la vitesse fluide à l'ordre 1,  $\mathbf{V}_1$  est donnée par

$$\mathbf{V}_1 = \frac{iq\omega}{m(\omega^2 + \omega_c^2)} \left[ \mathbf{E}_1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \mathbf{b}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{b}) + i \frac{\omega_c}{\omega} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{b} \right] \quad (5.37)$$

où  $\omega_c$  est la fréquence cyclotron de l'espèce considérée et  $\mathbf{b}$  le vecteur unitaire dans la direction  $\mathbf{B}_0$ . Les contributions des courants (de chaque espèce) étant additives dans les équations de Maxwell, on en déduit l'expression des 3 composantes indépendantes du tenseur diélectrique. Pour cela, on notera<sup>7</sup>

---

7. Nous avons adopté la même notation que Landau.

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = ig$ ,  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$  et  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$ . Alors, on montre facilement que

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \quad (5.38)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2} \quad (5.39)$$

$$g = \frac{\omega_{ce}\omega_{pe}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} - \frac{\omega_{ci}\omega_{pi}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{ci}^2)} \quad (5.40)$$

Cette forme n'est pas toujours celle que vous allez pouvoir trouver dans les différents ouvrages de physique des plasmas. Dans ce document, nous avons choisi de définir les pulsations cyclotroniques algébriquement. Si on définit les pulsations cyclotronique en valeurs absolues, alors, il faut remplacer  $\omega_{ce}$  par  $-\omega_{ce}$ . Par contre, le fait de choisir une onde en  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  ou en  $e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$  n'a aucune incidence sur l'équation de dispersion. Il n'en va pas de même pour la polarisation.

De ces 3 expressions, on peut déduire des relations d'ordre entre les 3 composantes  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  et  $g$  du tenseur diélectrique :

- dans  $\varepsilon_{\perp}$ , les 2 derniers termes sont du même ordre de grandeur si  $\omega \sim \omega_{ci}(M/m)^{1/2} \sim (\omega_{ci}\omega_{ce})^{1/2}$ . Ainsi, si  $\omega \gg (\omega_{ci}\omega_{ce})^{1/2}$ , on pourra négliger la contribution ionique, et si  $\omega \ll (\omega_{ci}\omega_{ce})^{1/2}$ , on pourra négliger la contribution électronique.
- dans  $\varepsilon_{\parallel}$ , la contribution ionique est toujours négligeable. On remarquera de plus que  $\varepsilon_{\parallel}$  ne dépend pas du champ magnétique statique : celui-ci n'a aucun effet dans la direction parallèle.
- dans l'expression de  $g$ , les 2 termes sont comparables au voisinage de  $\omega_{ci}$ . Pour  $\omega \gg \omega_{ci}$ , on pourra donc négliger la contribution ionique, et pour  $\omega \ll \omega_{ci}$ , on pourra négliger la contribution électronique.

Dans la forme de l'équation (5.36), nous n'avons pas considéré de termes de température, par hypothèse. Pour obtenir l'équation (5.37), nous sommes passés dans l'espace de Fourier en temps. Cela signifie que nous sommes toujours dans l'espace réel (et non l'espace des nombres d'onde  $\mathbf{k}$ ). Sans que ce soit dit explicitement, nous avons donc considéré que le champ électrique  $\mathbf{E}_1$  est constant. Les particules qui constituent le fluide se déplacent de  $v_T/\omega$  dans

la direction parallèle au champ magnétique pendant une période de l'onde, et de  $\rho_L = v_T/\omega_c$  dans la direction transverse (si  $\omega < \omega_c$ ). Pour pouvoir considérer que le champ électrique est constant sur ces trajectoires, il faut que ces distances soient petites devant les distances sur lesquels le champ électrique varie, i.e.

$$v_T|k_{\parallel}|/\omega \ll 1 \quad , \quad v_T|k_{\perp}|/\omega_c \ll 1 \quad (5.41)$$

Si ces 2 inégalités ne sont pas respectées, on ne peut pas utiliser la forme ci-dessus pour expliciter la relation entre  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{E}_1$ . On retrouve ici les hypothèses fluides que l'on a déjà formulées.

## 5.3 Exemples de modes linéaires

### 5.3.1 L'onde helicon (ou siffleur)

Pour cette onde, on se place dans le domaine de fréquence  $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$ . Au vu des remarques que nous avons faites à la fin de la section sur la forme du tenseur diélectrique en plasma froid magnétisé, la contribution ionique dans  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  et  $g$  est négligeable. Cela fait de cette onde une onde purement électronique. Dans le domaine  $\omega \ll \omega_{ce}$ , on a simplement les approximations

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \quad , \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad , \quad g = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ce}} \quad (5.42)$$

avec la relation d'ordre

$$\varepsilon_{\parallel} \gg g \gg \varepsilon_{\perp} \quad (5.43)$$

Dans l'expression du déterminant (5.22), le terme  $\varepsilon_{\parallel} - N^2 \sin^2 \Theta$  est très grand, et ne peut donc pas s'annuler. Compte tenu de la forme de ce déterminant, il se simplifie donc en

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} - N^2 \cos^2 \Theta & ig \\ -ig & \varepsilon_{\perp} - N^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.44)$$

pour lequel on peut négliger  $\varepsilon_{\perp}$ . On obtient alors simplement l'équation de dispersion

$$\omega = \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} k^2 c^2 |\cos \Theta| \quad (5.45)$$

Pour cette onde, l'équation (5.21) permet de déduire sa polarisation. En réduisant la matrice à sa sous-matrice  $2 \times 2$  dans le plan  $XY$ , il en résulte que cette onde est polarisée dans le plan  $XY$ . On montre alors facilement la relation

$$E_y = \imath |\cos \Theta| E_x \quad (5.46)$$

Cette onde est polarisée elliptiquement. Elle devient circulaire en propagation strictement parallèle, et devient linéaire en propagation strictement perpendiculaire. Les électrons mobiles vont créer un courant car les ions trop massifs ne pourront pas les suivre. Le courant de glissement associé est celui que l'on retrouve dans la terme de Hall de la loi d'Ohm. A plus basse fréquence, ce mode se raccorde à l'onde d'Alfvén compressionnelle<sup>8</sup>, alors qu'à plus haute fréquence, ce mode devient résonnant au voisinage de  $\omega_{ce}$ , et donc fortement amorti.

### 5.3.2 L'onde acoustique-ionique

Dans un plasma non-magnétisé, le tableau des ondes est assez limité, et donc simple. Seul 3 modes peuvent exister ; 2 électrostatiques et 1 électromagnétique. Le mode électromagnétique n'est autre que l'onde de lumière (dont l'équation de dispersion est modifiée par la présence du plasma). Le premier mode électrostatique est l'onde de Bohm & Gross (haute fréquence), et le second est l'onde acoustique-ionique (de plus basse fréquence).

Nous allons étudier cette onde dans un milieu non collisionnel. Le caractère acoustique de cette onde peut étonner dans un plasma sans collisions. mais les ions chargés peuvent transmettre leur vibration de proche en proche par l'intermédiaire du champ électrique associé à la création de charge d'espace. Cette onde sera alors de basse fréquence et l'on va considérer des électrons avec une distribution de Boltzmann. Il nous faut écrire les 2 premières équations fluides pour les ions, la fermeture appropriée, ainsi qu'une équation de Maxwell-Gauss pour relier la forme du champ électrique aux perturbations de densité.

---

8. qui est en fait une dégénérescence des modes magnétosoniques lents et rapides lorsque la température est nulle

L'onde acoustique-ionique étant électrostatique, le champ électrique dérive d'un potentiel. Les 2 premières équations fluide pour les ions linéarisées à l'ordre 1 sont donc

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_{i1} = 0 \quad (5.47)$$

$$M n_0 \frac{\partial \mathbf{V}_{i1}}{\partial t} = -e n_0 \nabla \phi_1 - 3 k_B T_i \nabla n_{i1} \quad (5.48)$$

Dans ces expressions, on a choisi des ions adiabatiques, ce qui correspond à une perturbation haute fréquence ( $\omega \gg \omega_{ci}$ ) que l'on vérifiera aussi a posteriori. L'équation de Maxwell-Gauss nécessite de connaître la perturbation de densité des électrons. On considère pour cela qu'ils sont de masse très faible. L'équation de conservation de l'impulsion donne alors simplement une distribution de Boltzmann

$$n = n_0 \exp \left( \frac{e\phi}{k_B T_e} \right) \quad (5.49)$$

qui au premier ordre donne

$$n_{e1} = n_0 \frac{e\phi_1}{k_B T_e} \quad (5.50)$$

Il ne manque plus que l'équation de Maxwell-Gauss pour assurer le couplage entre  $\phi_1$ ,  $n_{i1}$  et  $n_{e1}$ . En faisant l'approximation plasma, cette relation est simplement  $n_{i1} = n_{e1} = n_1$ . Il n'y a alors plus lieu de différencier  $n_{i1}$  et  $n_{e1}$ . Dans l'espace de Fourier, on obtient le système de 3 équations à 3 inconnues

$$i\omega n_1 = n_0 i k V_{i1} \quad (5.51)$$

$$-i\omega M n_0 V_{i1} = -e n_0 i k \phi_1 - 3 k_B T_i i k n_1 \quad (5.52)$$

$$n_1 = n_0 e \phi_1 / k_B T_e \quad (5.53)$$

Vous noterez que ces 3 équations sont scalaires. Pour un mode électrostatique, les 2 grandeurs vectorielles  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{V}_{i1}$  sont dans la même direction, et l'équation de conservation de l'impulsion n'a qu'une seule composante pertinente.

La solution de ce système est alors simplement

$$\omega = k c_s \quad (5.54)$$

pour laquelle  $c_s$  est la vitesse acoustique ionique définie comme

$$c_s^2 = \frac{k_B T_e + 3k_B T_i}{M} \quad (5.55)$$

Cette vitesse est très largement utilisée en plasma froid car c'est la vitesse à laquelle les ions pénètrent dans les gaines. Dans ce contexte, cette vitesse s'appelle souvent vitesse de Bohm. Par ailleurs, l'expression de  $c_s$  montre clairement que la vitesse de phase de cette onde est petite devant la vitesse thermique des électrons. Dans leur écoulement, les électrons ont tout le temps nécessaire pour se thermaliser avec la perturbation, ce qui justifie a posteriori l'hypothèse isotherme utilisée. Avec le même argument, on comprend que les ions sont adiabatiques.

Ce mode peut aussi se rencontrer dans sa forme instable (instabilité de courant) : s'il existe une vitesse de dérive des électrons, et donc un courant, il existe une zone de l'espace des phases dans laquelle la pente de la fonction de distribution des ions est négative, et celle de la fonction de distribution des électrons est positive. Ce mode devient alors instable par effet Landau, et est rencontré dans l'ionosphère terrestre, dans laquelle les précipitations d'électrons associées aux aurores boréales peuvent exciter des modes haute fréquence comme le mode de Langmuir, et se coupler à l'onde acoustique-ionique.

## 5.4 Exemples de modes non-linéaires

### 5.4.1 Les équations de Zakharov

Pour établir ces équations, on considère un plasma uniforme, non-collisionnel et non-magnétisé. Il existe alors 2 modes linéaires électrostatiques : l'onde de Langmuir<sup>9</sup> (ou de Bohm & Gross —BG— si l'on considère la température des électrons) et l'onde acoustique-ionique —AI—. La première, associée au mouvement des électrons, est de haute fréquence alors que la seconde, associée au

---

9. il s'agit plutôt d'une oscillation à la fréquence plasma des électrons, et qui n'est donc pas propagative



mouvement des ions, est de basse fréquence. Si ces 2 ondes coexistent dans un plasma, elles vont forcément interagir ; l'onde AI, de nature compressionnelle, va modifier la densité des ions et donc, par quasi-neutralité, celle des électrons. En conséquence, la fréquence plasma électronique sera modifiée, ainsi que les caractéristiques de l'onde BG. Ce problème est donc intrinsèquement non-linéaire.

Ces 2 modes vont faire intervenir 2 échelles de temps distinctes, associées aux 2 modes linéaires. On utilisera l'indice  $s$  pour les variations lentes ("slow") et l'indice  $f$  pour les variations rapides ("fast"). L'état perturbé (en raison des ondes) est associé à des perturbations de densité. Pour les ions,

$$n_i = n_0 + n_{is} \quad (5.56)$$

où il n'y a qu'une variation lente  $n_{is}$  (i.e. à l'échelle des ions). Pour les électrons, une composante rapide va apparaître

$$n_e = n_0 + n_{es} + n_{ef} \quad (5.57)$$

On a donc  $n_{is} \ll n_0$  et  $n_{es}, n_{ef} \ll n_0$ . Si l'on moyenne (5.57) sur l'échelle de temps rapide  $\tau_f$ , alors  $\langle n_e \rangle_f = n_0 + n_{es}$ . La très grande mobilité des électrons va permettre de neutraliser à cette échelle de temps les champs électriques associés à la séparation de charge. Alors,

$$n_{is} \sim n_{es} \equiv n_s \quad (5.58)$$

En décomposant de même les vitesses fluides de chaque espèces

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{is}, \quad \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{es} + \mathbf{V}_{ef}, \quad (5.59)$$

on déduit de ces expressions la forme du courant total

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e) = e[(n_0 + n_{is})(\mathbf{V}_{is}) - (n_0 + n_{es} + n_{ef})(\mathbf{V}_{es} + \mathbf{V}_{ef})] \quad (5.60)$$

dans laquelle on peut séparer les termes associés à  $\tau_s$  et ceux associé à  $\tau_f$ . A noter que dans l'équation (5.60) apparaît le terme  $-en_{ef}\mathbf{V}_{ef}$  associé à l'harmonique en  $2\omega_{pe}$ . A l'échelle  $\tau_s$ ,  $n_{es}$  et  $n_{is}$  sont peu différents. La séparation

de charge apparaît donc à l'échelle  $\tau_f$ , pour laquelle la force de Coulomb va limiter l'amplitude de  $n_{ef}$ . Ainsi,  $n_{es} \gg n_{ef}$  et l'on va donc négliger le terme  $-en_{ef}\mathbf{V}_{ef}$ . Les composantes lentes et rapides des densités de courant s'écrivent

$$\mathbf{J}_s = e(n_0 + n_s)(\mathbf{V}_{is} - \mathbf{V}_{es}) \quad (5.61)$$

$$\mathbf{J}_f = -e[(n_0 + n_s)\mathbf{V}_{ef} + n_{ef}\mathbf{V}_{es}] \quad (5.62)$$

Dans la deuxième équation, le terme  $n_{ef}\mathbf{V}_{es}$  est petit devant le terme  $n_{es}\mathbf{V}_{ef}$ . En effet, on peut écrire les 2 équations de continuité pour les électrons :

$$\partial_t n_{es} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_{es} = 0 \quad (5.63)$$

$$\partial_t n_{ef} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_{ef} = 0 \quad (5.64)$$

dont on peut déduire

$$\left| \frac{n_{ef}}{n_{es}} \right| \frac{|\mathbf{V}_{es}|}{|\mathbf{V}_{ef}|} = \frac{\omega_s}{\omega_f} \frac{k_f}{k_s} \quad (5.65)$$

Pour le mode AI,

$$\omega_s = k_s c_s \quad (5.66)$$

et pour le mode BG,

$$\omega_f^2 = \omega_p^2 + 3k_f^2 v_{Te}^2 \quad (5.67)$$

Alors,

$$\frac{\omega_s}{k_s} = c_s \quad , \quad \frac{\omega_f}{k_f} = \sqrt{3} \frac{v_{Te}}{\epsilon} \quad (5.68)$$

avec  $\epsilon^2 = \omega_f^2/\omega_p^2 - 1 \ll 1$ . L'équation (5.65) se réécrit donc

$$\left| \frac{n_{ef}}{n_{es}} \right| \frac{|\mathbf{V}_{es}|}{|\mathbf{V}_{ef}|} = \frac{c_s}{v_{Te}} \frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \quad (5.69)$$

Or

$$\frac{c_s}{v_{Te}} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1 \quad (5.70)$$

et l'on déduit donc que  $|n_{ef}\mathbf{V}_{es}| \ll |n_{es}\mathbf{V}_{ef}|$ . Ainsi,

$$\mathbf{J}_f = -e(n_0 + n_{es})\mathbf{V}_{ef} \quad (5.71)$$

L'expression de ces densités de courant va permettre d'explicitier la forme du terme source dans l'équation de Maxwell-Ampère. Pour cela, il faut écrire

les équations de Maxwell sur les 2 échelles de temps  $\tau_s$  et  $\tau_f$ . La première équation de Zakharov porte sur la forme de  $\mathbf{E}_f$  (et son couplage non-linéaire avec  $n_{es}$ ). La composante rapide de l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc

$$\nabla \times \mathbf{B}_f = -\mu_0 e (n_0 + n_{es}) \mathbf{V}_{ef} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_f}{\partial t} \quad (5.72)$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, elle se réécrit

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_f) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_f}{\partial t^2} = \mu_0 e \frac{\partial}{\partial t} [(n_0 + n_{es}) \mathbf{V}_{ef}] \quad (5.73)$$

Dans le membre de droite de (5.73),  $n_0$  est constant dans le temps,  $n_{es}$  varie avec un temps caractéristique en  $\tau_s$  et  $\mathbf{V}_{ef}$  varie avec un temps caractéristique en  $\tau_f$ . Ce dernier terme sera donc celui dont la dérivée temporelle sera dominante dans le membre de droite. Ainsi,

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_f) + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_f}{\partial t^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_0 + n_{es}) \frac{\partial \mathbf{V}_{ef}}{\partial t} \quad (5.74)$$

On peut aussi décomposer l'équation de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_{es} - n_{is}) \quad (5.75)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_f = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{ef} \quad (5.76)$$

Les 2 équations (5.74) et (5.76) permettent donc de décrire le couplage de  $\mathbf{E}_f$  avec  $n_{es}$ ,  $n_{ef}$  et  $\mathbf{V}_{ef}$ . Pour fermer le système, il faut écrire une équation fluide pour les électrons. La forme du membre de droite de (5.74) suggère naturellement que ce soit l'équation de conservation de l'impulsion

$$n_e m \left( \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \nabla \mathbf{V}_e \right) = -e n_e \mathbf{E} - \nabla P_e \quad (5.77)$$

Si l'on écrit cette équation à l'échelle  $\tau_f$ , le terme convectif disparaît. De plus, on peut faire l'hypothèse que les électrons sont adiabatiques car la perturbation est trop rapide pour pouvoir échanger de la chaleur avec ceux-ci. Enfin, les modes AI et BG étant essentiellement électrostatiques, on est dans un cas quasi-1D ( $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{V}_e$  sont tous alignés). Le coefficient adiabatique vaut alors 3 et l'on peut donc écrire

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{ef}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_f - \frac{3v_{Te}^2}{n_0} \nabla n_{ef} \quad (5.78)$$

où  $v_{Te}$  est la vitesse thermique des électrons. En substituant (5.76) dans le membre de droite de (5.78), on fait disparaître  $n_{ef}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{ef}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_f + \frac{3\varepsilon_0 v_{Te}^2}{en_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_f) \quad (5.79)$$

Alors, les 2 équations (5.74) et (5.79) permettent de réécrire une unique équation

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_f}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{n_{es}}{n_0}\right) \mathbf{E}_f - 3v_{Te}^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_f) + c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_f) = 0 \quad (5.80)$$

Pour faciliter la manipulation algébrique de cette équation, et sachant que  $\mathbf{E}_f$  évolue essentiellement sur une échelle de temps en  $\omega_{pe}^{-1}$ , on écrit

$$\mathbf{E}_f = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{s'} e^{-i\omega_{pe}t} + c.c. \quad (5.81)$$

où  $\mathbf{E}_{s'}$  est une amplitude complexe à ne pas confondre avec  $\mathbf{E}_s$ . Le terme complexe conjugué est nécessaire car  $\mathbf{E}_f$  est réel. On peut alors expliciter la dérivée seconde en temps apparaissant dans (5.80)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_f}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left( -\omega_{pe}^2 \mathbf{E}_{s'} - 2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathbf{E}_{s'}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{s'}}{\partial t^2} \right) e^{-i\omega_{pe}t} + c.c. \quad (5.82)$$

Or  $\mathbf{E}_{s'}$  est lentement variable, d'où la relation d'ordre

$$|\omega_{pe}^2 \mathbf{E}_{s'}| \gg \left| \omega_{pe} \frac{\partial \mathbf{E}_{s'}}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{s'}}{\partial t^2} \right| \quad (5.83)$$

On peut alors réécrire (5.80). Le mode étant quasi-électrostatique, le terme en  $\nabla \times \mathbf{E}_f$  s'annule et il vient

$$\frac{1}{2} \left( -2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathbf{E}_{s'}}{\partial t} + \omega_{pe}^2 \frac{n_{es}}{n_0} \mathbf{E}_{s'} - 3v_{Te}^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_{s'}) \right) e^{-i\omega_{pe}t} + c.c. = 0 \quad (5.84)$$

Il est clair que tous les termes de la première parenthèse de gauche varient sur une échelle de temps plus longue que  $\omega_{pe}^{-1}$ . Donc pour que l'expression précédente soit nulle, il faut que la première paranthèse soit nulle. On obtient alors la première équation de Zakharov pour laquelle on se rappelle que  $\mathbf{E}_{s'}$  est donné par (5.81)

$$-2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathbf{E}_{s'}}{\partial t} + \omega_{pe}^2 \frac{n_{es}}{n_0} \mathbf{E}_{s'} - 3v_{Te}^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_{s'}) = 0 \quad (5.85)$$

où l'on a utilisé  $n_s$  au lieu de  $n_{es}$ , en se rappelant que  $n_{es}$  et  $n_{is}$  sont très peu différent l'un de l'autre.

Dans la première équation de Zakharov, les 2 inconnues sont  $n_s$  et  $\mathbf{E}_{s'}$ . Pour les déterminer, il faut donc une seconde équation. Nous allons pour cela moyenner (5.77) sur un grand nombre de  $\tau_f$ . De fait, tous les termes linéaires avec des quantités variant en  $\tau_f$  vont avoir une moyenne nulle. On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_{es} + \langle (\mathbf{V}_{ef} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V}_{ef} \rangle = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_s - \frac{k_B T_e}{mn_0} \nabla n_{es} \quad (5.86)$$

A une échelle temporelle en  $\tau_s$ , les électrons sont isothermes ce qui explique la forme du dernier terme. Par ailleurs, le premier terme est une dérivée temporelle sur  $\tau_s$ , et  $|\mathbf{V}_{es}| \ll |\mathbf{V}_{ef}|$ . On peut donc raisonnablement négliger ce premier terme. Pour le terme advectif, on va utiliser la formule

$$(\mathbf{V}_{ef} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V}_{ef} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{V}_{ef} \cdot \mathbf{V}_{ef}) - \mathbf{V}_{ef} \times (\nabla \times \mathbf{V}_{ef}) \quad (5.87)$$

Le mode BG étant électrostatique,  $\mathbf{V}_{ef}$  est essentiellement dans la direction du nombre d'onde  $\mathbf{k}$  du mode. Alors, le terme  $\nabla \times \mathbf{V}_e$  (qui s'écrit  $i\mathbf{k} \times \mathbf{V}_e$  dans l'espace de Fourier) est très petit. On peut donc réécrire (5.86)

$$\frac{1}{2} \langle \nabla (\mathbf{V}_{ef} \cdot \mathbf{V}_{ef}) \rangle = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_s - \frac{k_B T_e}{mn_0} \nabla n_{es} \quad (5.88)$$

On se rappelle que dans la première équation de Zakharov, les variables sont  $n_s$  et  $\mathbf{E}_{s'}$ . On va donc naturellement essayer de se débarrasser de  $\mathbf{V}_{ef}$ . Dans l'équation de conservation de l'impulsion des électrons, en négligeant la correction thermique (on se rappelle que l'on se place dans le régime  $k\lambda_D \ll 1$ ), il reste

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_{ef} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_f \quad (5.89)$$

Cette équation portant sur le fluide électronique ressemble beaucoup à celle qui gouverne le mouvement d'un électron soumis à l'effet d'une onde  $\mathbf{E}_f$ . Nous verrons par la suite que sa contribution ressemble beaucoup à la force pondéromotrice. Etant au voisinage de  $\omega_{pe}$ , on a alors

$$\mathbf{V}_{ef} \cdot \mathbf{V}_{ef} = \left( \frac{e}{m\omega_{pe}} \right)^2 \mathbf{E}_f \cdot \mathbf{E}_f \quad (5.90)$$

Par ailleurs, on se rappelle de la décomposition (5.81). Dans le produit  $\mathbf{E}_f \cdot \mathbf{E}_f$ , les 2 harmoniques en  $2\omega_{pe}$  seront de moyenne temporelle nulle, et il restera donc

$$\langle \mathbf{E}_f \cdot \mathbf{E}_f \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_{s'}|^2 \quad (5.91)$$

On peut donc réécrire (5.86)

$$\frac{e^2}{4m^2\omega_{pe}^2} \nabla |\mathbf{E}_{s'}|^2 = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_s - \frac{k_B T_e}{mn_0} \nabla n_{es} \quad (5.92)$$

Dans cette équation, pour expliciter  $\mathbf{E}_s$ , on va écrire l'équation de conservation de l'impulsion pour les ions :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_{is} + (\mathbf{V}_{is} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{is} = \frac{e}{M} \mathbf{E}_s - 3 \frac{k_B T_i}{Mn_0} \nabla n_{is} \quad (5.93)$$

Dans cette équation, les ions sont naturellement adiabatiques. Nous allons négliger le terme advectif non-linéaire des ions : en effet, cette équation va servir à expliciter  $\mathbf{E}_s$  dans (5.86), dans laquelle le terme non-linéaire des électrons a déjà été considéré avec  $\mathbf{V}_{is} \ll \mathbf{V}_{es}$ . Avec (5.86), on obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_{is} = -\frac{e^2}{4mM\omega_{pe}^2} \nabla |\mathbf{E}_{s'}|^2 - \frac{k_B T_e}{Mn_0} \nabla n_{es} - 3 \frac{k_B T_i}{Mn_0} \nabla n_{is} \quad (5.94)$$

Le premier terme du membre de droite est une réécriture de la composante électrique de la force de Laplace en faisant intervenir la force pondéromotrice qui s'exerce sur les électrons plongés dans le mode haute fréquence (BG). Pour expliciter la dérivée temporelle de  $\mathbf{V}_{is}$ , on va utiliser l'équation de continuité des ions

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{is} + \nabla \cdot [(n_0 + n_{is}) \mathbf{V}_{is}] = 0 \quad (5.95)$$

En négligeant le terme non-linéaire ( $n_{is} \ll n_0$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{is} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_{is} = 0 \quad (5.96)$$

Dans la mesure où la non-neutralité à l'échelle  $\tau_s$  a déjà été prise en compte dans  $\mathbf{E}_s$ , il n'est plus nécessaire de distinguer entre  $n_{is}$  et  $n_{es}$ . Alors, en prenant la dérivée temporelle de l'équation précédente et avec (5.94)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n_s - \frac{k_B(T_e + 3T_i)}{M} \nabla^2 n_s - \frac{ne^2}{4mM\omega_{pe}^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_{s'}|^2 = 0 \quad (5.97)$$

On définit la vitesse acoustique ionique

$$c_s^2 = \frac{k_B(T_e + 3T_i)}{M} \quad (5.98)$$

On obtient ainsi la seconde équation de Zakharov :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \right) n_s = \frac{\varepsilon_0}{4M} \nabla^2 |\mathbf{E}_{S'}|^2 \quad (5.99)$$

Avec la première équation de Zakharov, on obtient ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues :  $n_s$  et  $\mathbf{E}_{S'}$ . Il apparaît que dans (5.92), le champ  $\mathbf{E}_s$  est dû au terme de pression des électrons et au terme non-linéaire (associé au tenseur de Reynolds) qui se cache dans la force pondéromotrice. Comme ce champ intervient dans l'équation d'impulsion des ions, on retrouve sans surprise la force pondéromotrice sur les ions dans la seconde équation de Zakharov.

## 5.5 Exemples d'instabilités macroscopiques

La linéarisation des équations fluides dans l'espace de Fourier permet de trouver les relations de dispersion des modes qui peuvent exister. Dans le cas d'une onde "classique",  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  sont des grandeurs réelles. On entend par "classique", le fait que ces ondes peuvent se propager sans altération de leur propriétés.

La forme de l'équation de dispersion peut donner une valeur imaginaire de  $\omega$  ou de  $\mathbf{k}$ . Si  $\omega$  est imaginaire, on aura un mode amorti ou amplifié (suivant le signe de la partie imaginaire de  $\omega$ ). Si  $\mathbf{k}$  est imaginaire, l'onde sera évanescence ou amplifiée. Dans le cas où l'amplitude de l'onde augmente, on parle d'instabilité. Vous noterez que nous mélangeons allégrement le terme d'onde et celui de mode. Les 2 peuvent être utilisés indifféremment, bien qu'onde fasse souvent référence à des  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  réel. Le terme de mode est plus souvent utilisé lorsque l'on traite le cas d'instabilité ou d'amortissement.

Si l'amplitude de l'onde augmente, l'énergie associée (donnée par le flux du vecteur de Poynting) augmente. Par conservation de l'énergie totale, cela se fait

au détriment des autres formes d'énergie contenues dans le système (énergie thermique du plasma par exemple). Toute instabilité conduira naturellement à une saturation de l'énergie associée au mode instable qui ne pourra être au plus égale qu'à l'énergie totale disponible dans le système.

Lorsque l'on étudie un mode instable par linéarisation des équations constitutives, on fait l'hypothèse des petites amplitudes. Le taux de croissance que l'on calcule n'est alors valable que dans la phase linéaire de l'instabilité (i.e. au début de sa croissance).

Comme on le fait en mécanique, 2 approches à l'étude de la stabilité sont possible :

- on calcule l'énergie potentielle du système dans sa configuration autour de l'état d'équilibre. Un minimum d'énergie potentielle assurera que l'équilibre est stable. Dans le cas contraire, il sera instable.
- on peut développer l'équation du mouvement autour de l'état d'équilibre en se limitant aux mouvements de faible amplitude (linéarisation des équations). Si tous les mouvements possibles sont amortis ou d'amplitude constante, l'équilibre est stable. S'il existe au moins un mouvement dont l'amplitude est croissante, l'équilibre est instable.

Pour les modes instables, le calcul de leur taux de croissance linéaire se fera en déterminant la partie imaginaire de leur fréquence  $\omega$ .

### 5.5.1 Le mode interchange

Ce mode porte plusieurs noms (interchange, cannelure<sup>10</sup>, ballooning) suivant les disciplines et ses variantes. C'est un mode que l'on retrouve notamment dans les machines à fusion, en présence d'une interface plasma-vide. Pour ce mode, une force extérieure est nécessaire. On considèrera pour cet exposé qu'il s'agit de la gravitation. Dans le cas des magnétosphères planétaires (mais aussi des tokamaks), cette force extérieure peut-être la force centrifuge due à la courbure des lignes de champ<sup>11</sup>.

On considère une interface plasma-vide associée à un gradient de densité,

---

10. "flute" en anglais

11. On parle alors de mode "ballooning".



un champ de gravitation de même direction et de sens opposé et un champ magnétique uniforme perpendiculaire à la direction de  $\mathbf{g}$  (et de  $\nabla n_0$ ) et de l'interface plasma-vide. Au champ de gravitation est alors associé une vitesse de dérive des ions d'ordre 0 :

$$\mathbf{V}_0 = \frac{M}{e} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (5.100)$$

La géométrie du problème est décrite par la figure ci-dessous.

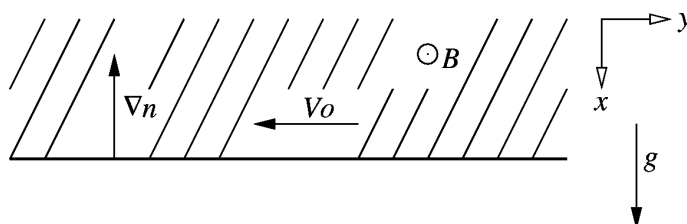


FIGURE 5.1 – Géométrie du mode d'interchange

On obtient l'expression de  $\mathbf{V}_0$  en écrivant l'équation de conservation de l'impulsion des ions dans laquelle on néglige les effets de température. Dans la limite  $m/M \rightarrow 0$ , on néglige la vitesse de dérive des électrons (dans la direction opposée). Cet état est donc associé à l'existence d'un courant. Par ailleurs, on ne considère pas d'effets de température. Il n'y a donc pas de dérive diamagnétique.

La physique de cette instabilité est assez simple ; c'est la même que l'instabilité gravitationnelle, ou le mode de Rayleigh-Taylor. Lorsque l'interface commence à se déformer, le courant associé à  $\mathbf{V}_0$  engendre une séparation de charge sur les flancs de l'interface déformée. Il se crée donc un champ électrique, essentiellement dans la direction  $Y$ , dont le sens est modulé par la déformation de l'interface. Le mouvement des ions associé à la dérive en champs croisés amplifie alors la déformation de l'interface, d'où l'instabilité.

Il reste à traduire cela en équations. L'instabilité étant intimement associée au mouvement des ions, il nous faudra écrire leurs 2 premières équations fluides. Comme il n'y a pas d'effets de température, le problème de la fermeture ne se pose pas. Cela permettra de coupler les perturbations de densité et de

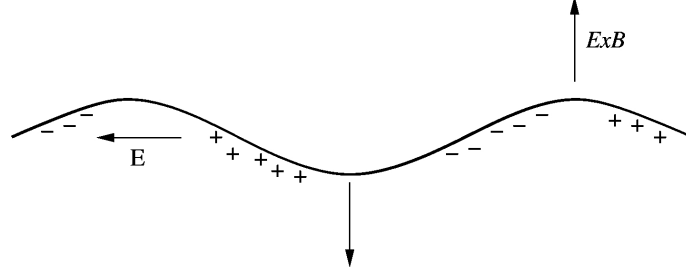


FIGURE 5.2 – Explication physique du mécanisme de l'instabilité d'interchange

vitesse des ions à celles du champ électrique. Dans la physique de cette instabilité, le champ électrique n'est pas associé à une séparation de charge, mais plutôt au différentiel de courant. Les 2 premières équations fluides des électrons permettront alors d'explicitier la forme du champ électrique.

Les forces extérieures qui vont agir sur les ions sont la force magnétique et la force de gravitation. Avec le champ électrique induit, l'équation de conservation de l'impulsion des ions s'écrit

$$Mn \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = ne(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + Mng \quad (5.101)$$

à l'ordre 0, cette équation permet de décrire la configuration d'équilibre

$$en_0 \mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0 + Mn_0 \mathbf{g} = 0 \quad (5.102)$$

qui permet de relier la vitesse de dérive d'ordre 0 à la force de gravité. Au premier ordre,

$$Mn_0 \left( \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_1 \right) = en_0 \mathbf{E}_1 + en_0 \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0 + en_1 \mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0 + Mn_1 \mathbf{g} \quad (5.103)$$

En utilisant l'équation d'ordre 0 pour explicitier  $\mathbf{V}_0$ ,

$$Mn_0 \left( \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_1 \right) = en_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (5.104)$$

Dans l'espace de Fourier,

$$M(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0) \mathbf{V}_1 = ie(\mathbf{E}_1 + \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (5.105)$$

La solution générale de cette équation est la même que celle de (5.36) en remplaçant  $\omega$  par  $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0$ . En ne considérant que la composante  $Y$  du champ électrique, il vient

$$V_{ix} = \frac{E_y}{B_0} \quad , \quad V_{iy} = -i \frac{\omega - kv_0}{\omega_{ci}} \frac{E_y}{B_0} \quad (5.106)$$

où l'on a considéré que la composante  $Y$  du vecteur nombre d'onde  $\mathbf{k}$ . Le même raisonnement sur les électrons dans la limite  $m/M \rightarrow 0$  donne

$$V_{ex} = \frac{E_y}{B_0} \quad , \quad V_{ey} = 0 \quad (5.107)$$

Ce résultat montre simplement que la dérive en champ croisés n'est pas associée à un courant, alors que la dérive due à la gravitation l'est. Pour assurer le couplage de ces équations, il faut faire intervenir l'équation de continuité. En considérant que  $\mathbf{V}_0$  et  $\nabla n_0$  sont perpendiculaires, et en linéarisant à l'ordre 2 dans l'espace de Fourier, il vient

$$-i\omega n_{i1} + kn_{i1}v_0 + V_{ix}n'_0 + kn_0V_{iy} = 0 \quad (5.108)$$

où l'on note  $n'_0 = \partial n_0 / \partial x$ . Pour les électrons, l'équation de continuité se simplifie avec  $V_{ey} = 0$  et  $\mathbf{V}_0 = 0$ . Ainsi,

$$-i\omega n_{e1} + V_{ex}n'_0 = 0 \quad (5.109)$$

On peut faire l'approximation plasma car la fréquence du mode que l'on va trouver est faible (ce que l'on vérifiera a posteriori). Pour les ions, les 2 équations fluides donnent

$$(\omega - kv_0)n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 + kn_0 \frac{\omega - kv_0}{\omega_{ci}} \frac{E_y}{B_0} = 0 \quad (5.110)$$

et pour les électrons,

$$\omega n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 = 0 \quad (5.111)$$

En substituant la seconde dans la première, on obtient

$$(\omega - kv_0)n_1 - \left( n'_0 + kn_0 \frac{\omega - kv_0}{\omega_{ci}} \right) \frac{\omega n_1}{n'_0} = 0 \quad (5.112)$$

Il apparaît donc bien clairement que le couplage ne se fait pas en utilisant une équation de Maxwell-Gauss, mais plutôt au travers du courant associé à la dérive différentielle entre les 2 espèces. Après simplification,

$$\omega(\omega - kv_0) + v_0\omega_{ci}\frac{n'_0}{n_0} = 0 \quad (5.113)$$

Avec  $v_0 = -g/\omega_{ci}$ , la solution de l'équation du second ordre admet comme solution

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \pm \left( \frac{k^2v_0^2}{4} + g\frac{n'_0}{n_0} \right)^{1/2} \quad (5.114)$$

La condition d'instabilité du mode interchange est donc

$$-g\frac{n'_0}{n_0} > \frac{k^2v_0^2}{4} \quad (5.115)$$

Pour que ce mode se déstabilise, il faut donc que  $g$  et  $n'_0$  soient de sens opposé. Aux faibles nombres d'onde, le taux de croissance du mode interchange est alors

$$\gamma = \left( -g\frac{n'_0}{n_0} \right)^{1/2} \quad (5.116)$$

et la pulsation (réelle) de ce mode est proche de  $kv_0/2$ . Ainsi,  $v_0$  étant la vitesse de dérive des ions, on obtient bien un mode d'oscillation basse fréquence.

La force centrifuge associée à la courbure des lignes de champ peut aussi jouer le rôle de la gravitation (voir Figure ci-dessous). Si l'interface plasma-vide est de forme concave, le mode est instable, s'il est de forme convexe, le mode est stabilisé.



FIGURE 5.3 – Plasma magnétiquement confiné dans une configuration stable (gauche) ou instable (droite) suivant le sens de courbure des lignes de champ magnétique.

### 5.5.2 L'instabilité de dérive hybride basse

Il existe une autre classe d'instabilité macroscopique : les instabilités de dérive. S'il existe une vitesse de dérive dans un plasma, les modes propres qui peuvent exister voient leurs propriétés modifiées. En l'occurrence, la pulsation  $\omega$  peut admettre une partie imaginaire ; si celle-ci est négative, le mode est instable. L'existence d'un gradient de pression (auquel est associé une dérive diamagnétique) est une possibilité que l'on peut rencontrer dans tout les milieux inhomogènes. On considère un gradient de densité dans la direction  $Y$ , le champ magnétique étant toujours dans la direction  $Z$  et l'onde considérée ayant toujours un indice de refraction dans le plan  $XZ$ .

On considère que les ions sont froids, et qu'il existe une température des électrons seulement dans la direction parallèle au champ magnétique. On se place de plus dans l'approximation électrostatique, ce que l'on vérifiera a posteriori car ce mode est proche d'une résonnance avec  $k \rightarrow \infty$ .

L'équation de conservation de l'impulsion des électrons s'écrit

$$n_{e0}m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_{e1} = -n_{e0}e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{V}_{e1} \times \mathbf{B}_0) - \nabla \cdot \mathbf{P}_{e1} \quad (5.117)$$

En projetant cette équation dans la direction  $Y$ , on peut négliger le premier terme dans le domaine  $\omega \ll \omega_{ce}$ . On obtient alors dans l'approximation électrostatique

$$V_{e1y} = i \frac{k_{\perp} \phi}{B_0} \quad (5.118)$$

On peut alors expliciter l'équation de continuité des électrons (dans l'espace de Fourier) qui fait intervenir explicitement le gradient de densité

$$-\omega n_{e1} + i \frac{k_{\perp} \phi}{B_0} \frac{dn_{e0}}{dy} + i k_{\parallel} n_{e0} V_{e1z} = 0 \quad (5.119)$$

La projection suivant  $Z$  de l'équation de conservation de l'impulsion donne

$$-i m \omega n_{e0} V_{e1z} = +i e n_{e0} k_{\parallel} \phi - i k_{\parallel} P_{e1} \quad (5.120)$$

Pour fermer les équations fluides des électrons, on va faire l'hypothèse que ces électrons sont adiabatiques. En notant  $\gamma_e$  l'indice adiabatique des électrons, on a

$$\frac{1}{P_e} \frac{dP_e}{dt} = \frac{\gamma_e}{n_e} \frac{dn_e}{dt} \quad (5.121)$$

Dans la dérivée convective, seul le gradient (explicite) dans la direction  $Y$  intervient,

$$\frac{1}{P_{e0}} \left( -i\omega P_{e1} + V_{ey1} \frac{\partial P_{e0}}{\partial y} \right) = \frac{\gamma_e}{n_{e0}} \left( -i\omega n_{e1} + V_{ey1} \frac{\partial n_{e0}}{\partial y} \right) \quad (5.122)$$

soit pour la perturbation de pression,

$$P_{e1} = \gamma_e \frac{n_{e1}}{n_{e0}} P_{e0} - i V_{ey1} \frac{dn_{e0}}{dy} \left( \frac{\gamma_e P_{e0}}{\omega n_{e0}} - \frac{1}{\omega} \right) \quad (5.123)$$

dans laquelle  $V_{ey1}$  est toujours donné par (5.118). Avec l'équation de continuité des électrons, on explicite la perturbation de densité des électrons

$$n_{e1} = \frac{1}{\omega} \left( \frac{k_{\perp} \phi}{B_0} \frac{dn_{e0}}{dy} + n_{e0} k_{\parallel} V_{e1z} \right) \quad (5.124)$$

On peut alors déterminer la forme de la perturbation de vitesse des électrons dans la direction parallèle

$$V_{e1z} = \frac{1}{\omega^2 - \gamma_e k_{\parallel}^2 v_{Te\parallel}^2} \left( -\omega + \frac{k_{\perp}}{B_0 e n_{e0}} \frac{d(n_{e0} k_B T_{e\parallel})}{dy} \right) \frac{k_{\parallel} e \phi}{m_e} \quad (5.125)$$

On introduit la pulsation diamagnétique des électrons définie par

$$\omega_{de} = \frac{k_{\perp}}{B_0 e n_{e0}} \frac{d(n_{e0} k_B T_{e\parallel})}{dy} \quad (5.126)$$

qui tient son nom du fait que la vitesse  $\omega_{de}/k_{\perp}$  n'est autre que la vitesse diamagnétique des électrons. La partie électronique du courant parallèle est donnée par  $J_{e1\parallel} = -n_{e0} e V_{e1z}$ . La composante parallèle du tenseur de susceptibilité est donc

$$\chi_{ezz} = i \frac{n_{e0} e}{\omega \varepsilon_0} V_{e1z} \quad (5.127)$$

soit avec (5.125) on obtient

$$\chi_{ezz} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_{Te\parallel}^2} \left( 1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \quad (5.128)$$

et donc pour le tenseur diélectrique

$$\varepsilon_{e\parallel} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_{Te\parallel}^2} \left( 1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \quad (5.129)$$

La composante ionique de la composante parallèle de ce tenseur est simplement  $-\omega_{pi}/\omega^2$ , d'où l'on tire

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega}\right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \quad (5.130)$$

On se place dans la gamme de fréquence  $\omega_{ce} \ll \omega < \omega_{ci}$ . Alors,

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} \quad (5.131)$$

et

$$g = \frac{\omega_{pi}^2 \omega}{\omega_{ci}(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \quad (5.132)$$

De la relation  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ , on va prendre la divergence afin de ne faire intervenir que la seule variable  $\phi_1$ . On obtient en n'omettant pas le terme de gradient explicite

$$-i\hat{\mathbf{y}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dy} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (5.133)$$

Avec la forme du tenseur diélectrique, on obtient

$$-\frac{dg}{dy} k_{\perp} + (k_{\perp} \varepsilon_{\perp} \hat{\mathbf{x}} + i g k_{\perp} \hat{\mathbf{y}} + k_{\parallel} \varepsilon_{\parallel})(k_{\perp} \hat{\mathbf{x}} + k_{\parallel} \hat{\mathbf{z}}) = 0 \quad (5.134)$$

soit après simplification

$$-\frac{dg}{dy} k_{\perp} + k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + k_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel} = 0 \quad (5.135)$$

En explicitant la forme de  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  et  $g$ , on obtient comme équation de dispersion

$$k_{\perp} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}\right) - k_{\perp} \frac{d}{dy} \frac{\omega \omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} + k_{\parallel}^2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (5.136)$$

dans laquelle on a fait l'hypothèse que le gradient de pression des électrons est suffisamment faible pour avoir  $\omega \gg |\omega_{de}|$ , et la température des électrons suffisamment faible pour avoir  $\omega^2 \gg \gamma_e k_{\parallel}^2 v_{Te}$ .

Pour un mode perpendiculaire ( $k_{\parallel} = 0$ ), et en milieu homogène, la solution de l'équation (5.136) est obtenue lorsque la première parenthèse s'annule, soit

$$\omega_{LH}^2 = -\frac{\omega_{ce} \omega_{ci} (\omega_{pe}^2 - \omega_{ce} \omega_{ci})}{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \quad (5.137)$$

On appelle cette pulsation “hybride basse”, car elle fait intervenir des fréquences ioniques et électroniques, ainsi que les fréquences plasmas et cyclotroniques. Cette pulsation est bien positive, en se rappelant que  $\omega_{ce}$  est bien une pulsation algébrique (et donc négative pour les électrons). Dans cette expression, on a utilisé la relation  $\omega_{pe}^2 \omega_{ci} = -\omega_{pi}^2 \omega_{ce}$ . La solution de (5.136) n’est pas explicite, et s’obtient en général avec des hypothèses supplémentaires.

## 5.6 Exercices

Exercice 1 - Comment retrouver le mode BG à partir de l’équation (5.80)? Isolez les termes qui en modifient l’équation de dispersion, et discutez ceux qui ont déjà été négligés.

Exercice 2 - Montrez que la vitesse linéarisée au premier ordre d’une espèce est reliée à la perturbation de champ électrique  $\mathbf{E}_1$  et au champ magnétique statique  $\mathbf{B}_0$  par la relation (5.37).

Exercice 3 - Comment se modifie l’équation de dispersion de l’onde acoustique-ionique (5.54) si l’on ne se place plus dans le cas  $k\lambda_D \ll 1$ . Même question si l’on ne fait plus l’approximation plasma.



## Réduction fluide

Bien que ce cours concerne les approches multifluides, il existe un certain nombre de situations physiques pour lesquelles il est intéressant de se ramener, au prix d'approximations, à une formulation qui met en jeu un seul fluide effectif. Dans ces situations on parle alors de réduction hydrodynamique à un seul fluide, ou plus simplement de *réduction fluide*.

Le premier cas que nous présentons succinctement dans la première section de ce chapitre est la réduction *magnétohydrodynamique* (MHD). Cette approche fera l'objet d'un cours entier, et nous ne présentons dans ce qui suit que les approximations qui justifient cette réduction fluide particulière. L'approche magnétohydrodynamique en physique des plasmas est justifiée dans l'étude des phénomènes magnétiques lents et à suffisamment grandes échelles. C'est également le cadre de l'étude hydrodynamique des liquides conducteurs comme le mercure par exemple.

A l'opposé de la magnétohydrodynamique, il existe d'autres situations où l'effet électromagnétique dominant est celui dû au champ électrique, et pour lesquelles la réduction fluide est également possible. Dans le cadre d'une exercice (cf. Exercice 1) nous présentons un exemple de réduction *électrohydrodynamique* (EHD) : l'expansion spatiale d'un plasma dans le vide en régime stationnaire. Il est intéressant de noter que ce problème apparaît naturellement dans le cadre de la formation des nuages interstellaires, mais que les mécanismes physiques sous-jacents sont également observés, à une échelle très différente, dans les plasmas froids faiblement ionisés étudiés dans les décharges électriques d'assez basses pressions.

## 6.1 Réduction Magnéto-Hydro-Dynamique

Une partie du système des équations MHD résulte de la somme des équations d'un même ordre associées à chaque fluide. Dans la plupart des applications MHD, la fermeture se fait sur la troisième équation : l'équation d'énergie. Classiquement, dans celle-ci, on peut supposer de supprimer le terme associé au flux de chaleur (on fait alors une hypothèse adiabatique), ou de le garder avec une loi simple comme la loi de Fick sur le flux de chaleur réduit  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  (par exemple dans les problèmes de couronnes solaire pour lesquels un processus de chauffage est indispensable à la description physique du système).

### 6.1.1 Les variables MHD

Pour écrire ces équations, on définit les nouvelles variables

$$n = \sum_{s+} n_{s+} = \sum_{s-} n_{s-} \quad (6.1)$$

$$m = \sum_s m_s \quad (6.2)$$

$$m\mathbf{V} = \sum_s m_s \mathbf{V}_s \quad (6.3)$$

$$P = \sum_s P_s \quad (6.4)$$

$$\mathbf{J} = \sum_s n_s q_s \mathbf{V}_s \quad (6.5)$$

- Dans la première équation,  $n$  est une densité de particules. On a fait l'hypothèse de quasi-neutralité à l'échelle macroscopique. La densité  $n$  est donc la densité de particule d'une même charge.
- Dans la seconde équation, la différence de masse entre protons et électrons suggère que  $m$  est essentiellement donnée par les espèces massives (les ions) du système.
- La troisième équation est une équation barycentrique. Elle montre que la vitesse fluide est elle aussi dictée par les espèces massives. A titre d'exemple, dans un plasma d'hydrogène (comme le vent solaire), cette vitesse fluide est

très peu différente de celle des protons. Cependant, nous verrons par la suite que pour des raisons de quasi-neutralité, toutes les espèces ont à peu près la même vitesse fluide.

- La quatrième équation ne fait pas intervenir explicitement la masse des espèces mais les pressions partielles de chacune d'entre elles. Les populations “légères” n'ont donc pas de raisons de ne pas y contribuer significativement.
- La dernière équation souligne simplement que la densité de courant résulte du différentiel de vitesse entre les différentes espèces.

### 6.1.2 L'hypothèse des variations lentes

En général, les théories fluides, et plus particulièrement la théorie MHD ne peuvent s'appliquer que dans le cadre de “variations lentes”. Cette hypothèse est associée au fait que les gradients considérés (spatiaux et temporels) sont à “grande échelle” :  $\partial_t \sim 1/\tau \ll \omega_c, \omega_p$  et  $\nabla \sim 1/L \ll \rho_L^{-1}, \lambda_D^{-1}$ . Ainsi, si l'on fait tendre vers zéro tous les gradients, on obtient à partir des équations fluides

$$\mathbf{E} + \mathbf{V}_s \times \mathbf{B} \rightarrow 0 \quad (6.6)$$

$$\rho \rightarrow 0 \quad (6.7)$$

$$\mathbf{J} \rightarrow 0 \quad (6.8)$$

- La première équation signifie que les espèces ont toutes la même vitesse fluide perpendiculaire. Cette vitesse est donc la vitesse moyenne fluide. Une conséquence importante est celle du “champ gelé”. Cette vitesse (égale à  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ ) est la vitesse du champ magnétique, i.e. la vitesse du repère dans lequel le champ électrique est nul<sup>1</sup>. Une première conséquence est que le champ électrique parallèle est faible. Pour un champ de nature électrostatique, les lignes de champ sont alors equipotentiellles. Une seconde est que pour un plasma non-relativiste ( $E_\perp/B \ll c$ ), l'énergie électrique est négligeable devant l'énergie magnétique :  $\varepsilon_0 E^2/2 \ll B^2/2\mu_0$ .

- La seconde relation est l'approximation de quasi-neutralité. Elle signifie que les gradients de densité de charge de chaque espèce sont petits devant les

---

1. Ceci est un résultat connu de la transformée de Lorentz (relativiste ou non) des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$

densités de charge de ces espèces :  $\delta n_\alpha/n_\alpha \ll 1$ . Cela a pour conséquence que dans l'équation de Maxwell-Gauss, la divergence du champ électrique peut être utilisée pour évaluer la densité de charge totale, mais pas le contraire.

- La troisième relation signifie que le courant total est faible devant les courants portés par chaque espèce. Ces deux dernières relations sont les causes du comportement collectif du plasma pour les mouvements parallèles au champ magnétique.

### 6.1.3 Les équations MHD

Les trois premières équations MHD, pour un plasma magnétisé, isotrope et adiabatique, peuvent s'écrire

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n \mathbf{V}) = 0 \quad (6.9)$$

$$\partial_t (nm \mathbf{V}) + \nabla \cdot (nm \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{1}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (6.10)$$

$$\partial_t \left( \frac{nmv^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) + \nabla \cdot \left[ \mathbf{V} \left( \frac{nmv^2}{2} + \frac{5}{2}p \right) \right] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (6.11)$$

En se plaçant dans le cas d'un plasma bi-fluide avec des ions une seule fois chargé, on peut faire plusieurs remarques. Les hypothèses de quasi-neutralité et de faible courant impliquent que la densité et la vitesse de chaque espèce sont très proches. Ces moments sont alors aussi égaux à la densité et à la vitesse du fluide MHD. Les deux premières équations MHD correspondent alors à l'un ou l'autre des fluides. Par contre, pour le troisième moment —la pression— ainsi que pour la masse du fluide MHD, ces grandeurs résultent de la sommes de celles attachées à chacun des fluides.

Dans la dernière équation, le membre de droite suggère que l'énergie du système ne soit pas conservée. Elle l'est en fait, à condition de la considérer sous toutes ses formes. Comme cela a été vu, il ne faut pas oublier la densité d'énergie électrique et magnétique, ainsi que le flux du vecteur de poynting associé. A l'aide du bilan d'énergie électromagnétique, on obtient

$$\partial_t \left( \frac{nmv^2}{2} + \frac{3}{2}p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left[ \mathbf{V} \left( \frac{nmv^2}{2} + \frac{5}{2}p \right) + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right] = 0 \quad (6.12)$$

Dans la seconde équation, la somme des termes magnétiques de la force de Laplace donne le terme  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , alors que la composante électrique de la force de Laplace a disparue. Ceci est une conséquence directe de l'hypothèse de quasi-neutralité. Le système semble plus simple car un terme a disparu. Mais le champ électrique est toujours présent dans les équations de Maxwell. Il va donc falloir trouver une autre équation pour déterminer la forme de  $\mathbf{E}$ . Une solution est d'écrire l'équation de conservation de l'impulsion de l'une des espèce. Cela permet alors d'isoler la forme du champ électrique, mais présente le désagrément d'introduire de nouvelles inconnues : les moments de l'espèce considérée.

Pour des raisons qui deviendront évidente par la suite, c'est ce que l'on appelle une loi d'Ohm. Son introduction est une différence essentielle avec l'approche multi-fluide. Il faut noter qu'il en existe plusieurs, en fonction des hypothèses physiques que l'on peut faire. Mais il faut d'abord préciser la nature des équations de Maxwell que l'on doit retenir dans le système.

#### 6.1.4 Le courant de déplacement

Pour obtenir un système cohérent, il faut bien sur adjoindre à ces équations fluides les équations de Maxwell permettant de résoudre la forme des champs électriques et magnétiques. Comme cela a été précisé, seules les équations en rotationnel sont importantes. On rappelle leur forme

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.14)$$

Le dernier terme du membre de droite est le courant de déplacement. On peut voir simplement (à titre d'exercice) que lorsque la vitesse de phase des modes que l'on considère est petite devant la vitesse de la lumière ( $\omega/k < c$ ) alors le courant de déplacement est négligeable.

Les deux équations en divergence ne donnant pas d'informations supplémentaires sur les champs électriques et magnétiques, le champ électrique n'apparaît plus que dans l'équation de Maxwell-Faraday. C'est la raison pour laquelle il faut introduire une autre équation faisant intervenir le champ électrique.

### 6.1.5 La loi d'Ohm

Le champ électrique apparaît dans l'équation de conservation de l'impulsion de chaque fluide. On peut donc utiliser une de ces équations pour déterminer la forme de  $\mathbf{E}$ . En l'écrivant pour les électrons, moyennant quelques substitutions et en isolant le terme  $\mathbf{E}$ , on obtient

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{qn} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{m}{q} d_t \mathbf{V}_i - \frac{m}{nq^2} d_t \mathbf{J} - \frac{1}{nq} \nabla \cdot \mathbf{P}_e + \frac{nq}{\sigma} \mathbf{J} \quad (6.15)$$

- Le premier terme qui apparaît dans le membre de droite est d'ordre 0. Il n'est donc jamais négligeable. S'il est seul, la loi d'Ohm est alors dite idéale.
- Le second terme est un terme d'ordre 1 (comme tous les autres termes), avec un scaling en  $k^2 \omega / V_A^2 \Omega_c$ . Pour une perturbation Alfvénique, l'échelle temporelle est en  $\Omega_c^{-1}$ , et l'échelle spatiale en  $V_A / \Omega_c$ . C'est un terme qui est associé au glissement entre les espèces. Lorsqu'on le retient, on parle de MHD Hall.
- Le troisième terme (inertie des électrons) a un scaling en  $\omega / \Omega_c$ , soit une échelle temporelle en  $\Omega_c^{-1}$ , et pour une perturbation Alfvénique, une échelle spatiale en  $\sqrt{m/M} c / \omega_p = \sqrt{m/M} \delta_e$  (où  $\delta_e = c / \omega_p$  est l'épaisseur de peau des électrons), ce qui signifie qu'il ne va être significatif qu'à très petite échelle.
- Le quatrième terme (épaisseur de peau des électrons) a un scaling en  $k^2 c^2 / \omega_p^2$  et peut donc devenir substantiel à une échelle spatiale en  $\delta_e = c / \omega_p$ .
- Le cinquième terme (compressibilité des électrons) a un scaling en  $k^2 \rho_L^2 \omega_c / \omega$  i.e. une échelle spatiale en  $\rho_L$  et une échelle temporelle en  $\omega_c$ . Cet effet peut donc être substantiel pour des électrons chauds.
- Le sixième terme (effets résistifs) a un scaling en  $nqk^2 / \omega \mu_0 \sigma$ . Pour comparer l'importance des termes résistifs avec le terme convectif de la loi d'Ohm idéale, on utilise souvent le nombre de Lundquist  $S$ , rapport entre le temps de convection et le temps de diffusion.

## 6.2 Réduction Electro-Hydro-Dynamique

A titre d'illustration de l'approche électrohydrodynamique, nous étudions, sous la forme d'un problème, l'expansion spatiale d'un plasma partiellement ionisé en régime stationnaire, sous l'effet des seules forces qui agissent en son sein. Cette situation apparaît assez naturellement après la formation des nuages interstellaires, mais également dans certains régimes de fonctionnement des réacteurs à plasmas exploités industriellement à des fins de dépôt ou de gravure.

### Modélisation à 2 fluides et résultats numériques

Le plasma étudié est constitué d'électrons, de charges  $-e$  et de masse  $m$ , de neutres, et d'ions positifs monovalents, de masses  $M$  et de charges  $+e$ . Pour simplifier, on considèrera une situation unidimensionnelle et stationnaire : les variables dynamiques ne dépendent pas du temps et ne dépendent que d'une seule variable d'espace, disons  $x$ . La pression du gaz neutre est très basse, le taux d'ionisation est suffisamment faible pour que l'on puisse supposer la densité des neutres uniforme :  $n_n = \text{Cte}$ , et négliger la (lente) dynamique des atomes :  $v_n \approx 0$ . On suppose en outre que le plasma n'est ni confiné, ni magnétisé :  $B = 0$ .

Le système dépend donc des 5 variables suivantes : densités et vitesses électroniques,  $n_e(x), v_e(x)$ , densités et vitesses ioniques :  $n_i(x), v_i(x)$ , et potentiel électrostatique  $\varphi(x)$ . On propose les équations suivantes pour modéliser le système étudié dans le cadre d'une approche fluide à 2 composantes

$$\begin{aligned} \partial_x(n_e v_e) &= +\nu_I n_e, \\ \partial_x(n_i v_i) &= +\nu_I n_e, \\ 0 &= -k_B T_e \partial_x n_e + e n_e \partial_x \varphi, \\ M n_i v_i \partial_x v_i &= -e n_i \partial_x \varphi, \\ \epsilon_0 \partial_{xx}^2 \varphi &= -e(n_i - n_e) \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\partial_x$  et  $\partial_{xx}^2$  désignent une dérivée première et seconde par rapport à la variable  $x$ .

Le système différentiel précédent est complété par les conditions aux limites suivantes :

$$n_e(0) = n_i(0) = n_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad v_e(0) = v_i(0) = 0.$$

1. Rappeler quelle est la dimension de la constante  $\nu_I$  et sa signification.
2. Discuter succinctement mais précisément le contenu physique de chacune des équations précédentes. On soulignera en particulier quels sont les termes négligés dans cette modélisation.
3. L'étude du système d'équations est facilitée par un adimensionnement des variables. On pose :

$$N_i \equiv \frac{n_i}{n_0}, \quad N_e \equiv \frac{n_e}{n_0}, \quad V = \frac{v_i}{u_B}, \quad V_e = \frac{v_e}{u_B}, \quad \phi \equiv \frac{e\varphi}{k_B T_e}, \quad X \equiv \frac{x}{\lambda_I},$$

où  $u_B$  est la vitesse de Bohm, et  $\lambda_I \equiv u_B/\nu_I$ , la longueur d'ionisation. Montrer que les équations s'écrivent sous la forme :

$$(N_e V_e)' = +N_e, \tag{6.16}$$

$$(N_i V_i)' = +N_e, \tag{6.17}$$

$$N_e' = +N_e \phi', \tag{6.18}$$

$$V_i V_i' = -\phi', \tag{6.19}$$

$$\epsilon^2 \phi'' = N_e - N_i, \tag{6.20}$$

avec  $\epsilon \equiv \lambda_D/\lambda_I$ , et  $\lambda_D$ , la longueur de Debye. L'apostrophe désigne une dérivée par rapport à la variable  $X$  ; par exemple :  $N_e' \equiv dN_e/dX$ .

4. Montrer que  $\epsilon = \nu_I/\omega_{pi}$ , où  $\omega_{pi}$  est la fréquence plasma ionique. On rappelle que  $\nu_I = K n_g$ , où  $K$  est une constante et  $n_g$ , la densité du gaz neutre. Estimer  $\epsilon$  pour un plasma d'hydrogène tel que  $K = 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $n_g = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_0 = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ ,  $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , et  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .
5. La résolution numérique du système d'équations (6.16-6.20) avec les conditions aux limites :

$$N_e(0) = N_i(0) = 1, \quad \phi(0) = 0, \quad V_e(0) = V_i(0) = 0. \tag{6.21}$$



et  $\epsilon = 0.001$  conduit aux résultats reportés sur les figures en fin de texte.  
En observant le schéma des densités, justifier une étude séparée des parties centrales et périphériques<sup>2</sup> du plasma.

### Réduction à un fluide

1. Les résultats numériques suggèrent l'approximation  $N_e = N_i \equiv N$  pour étudier la région centrale du plasma.

Etablir les 2 lois de conservation :

$$V_e = V_i, \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{2} V_i^2 + \ln N = 0 \quad (6.23)$$

2. Quelle interprétation physique peut-on donner de l'équation (6.23) ?  
On discutera en particulier les situations au centre et au bord du plasma.
3. Posons  $V \equiv V_e = V_i$ .

Montrer que le plasma assimilable à un fluide unique qui vérifie les 2 équations :

$$(NV)' = +N, \quad (6.24)$$

$$NVV' = -N' \quad (6.25)$$

4. Combiner ces 2 équations pour les écrire sous la forme :

$$N'(V^2 - 1) = NV, \quad (6.26)$$

$$V'(V^2 - 1) = -1 \quad (6.27)$$

5. Utilisez le système différentiel précédent pour répondre aux questions suivantes :
  - A quelle vitesse physique la vitesse normalisée  $V = 1$  correspond-elle ?
  - Quel est le signe des gradients de densités et de vitesses au voisinage de  $X = 0$  ?
  - Que peut-on dire des gradients de densités et de vitesses lorsque  $V \rightarrow 1$  ?

---

2. La zone périphérique où la densité de charge n'est pas nulle s'appelle une "gaine".

6. L'équation (6.27) s'écrit sous la forme différentielle :  $V^2 dV - dV = -dX$ . Intégrer cette équation et en déduire que la position  $\bar{x}$  où la vitesse vaut 1 vérifie :

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \lambda_I$$

Comparer avec les résultats numériques.

7. Utiliser les équations (6.19) et (6.23) pour déterminer les variations de densités  $\bar{n}/n_0$  et de potentiel  $e\bar{\varphi}$  à la position  $x = \bar{x}$ .

### Bilan d'énergie au sein du plasma

Pour effectuer un bilan d'énergie au sein du système, on revient à la description multifluide.

1. Expliquez pour quelle raison, l'équation de bilan de quantité de mouvement des ions doit être modifiée et écrite sous la forme :

$$M n_i v_i \partial_x v_i = -e n_i \partial_x \varphi - M v_i (\nu_I n_e)$$

lorsque les ions sont créés sans vitesses initiales.

2. Combiner les équations fluides du modèle et établir la relation :

$$M n_i v_i^2 + k_B T_e n_e - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \text{Cte}, \quad (6.28)$$

où  $E = -\partial_x \varphi$  désigne le champ électrique.

3. La relation (6.28) est valable dans tout le système (plasma et gaine).
- Déterminer la dimension des grandeurs apparaissant dans (6.28), et en déduire la nature de cette relation de conservation.
  - Interpréter physiquement chaque terme.
  - Quelles sont les contributions dominantes dans le plasma et dans la gaine ?
  - Représenter schématiquement chaque contribution de (6.28) en fonction de la position  $x$ .

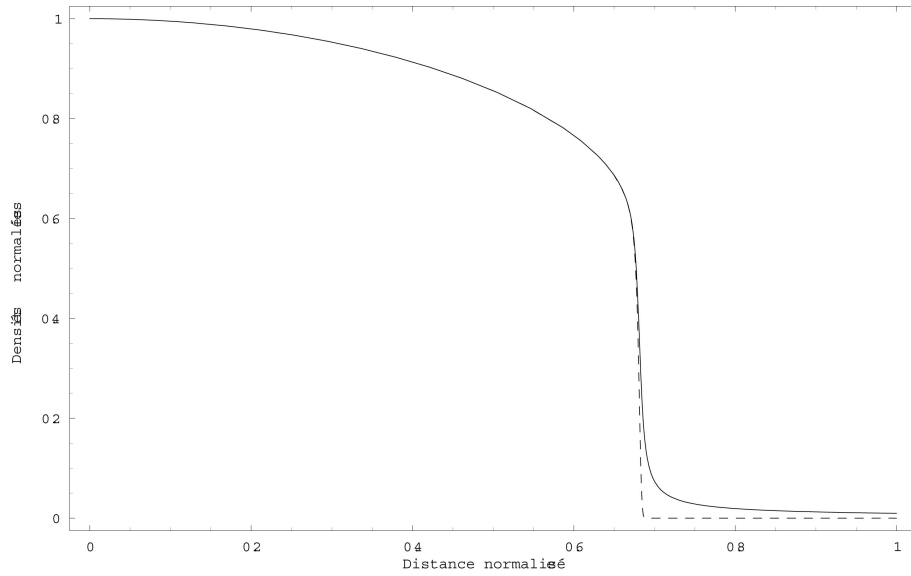


FIGURE 6.1 – Densité électronique,  $N_e$  (tirets), densité ionique,  $N_i$  (traits pleins) lorsque  $\epsilon = 0.001$ .

## 6.3 Exercices

### Exercice 1 : Réduction fluide (partie de l'examen 2011)

On considère un plasma totalement ionisé comprenant des électrons de charges  $-e$  et de masses  $m$ , et des ions positifs de charges  $+e$  et de masses  $M$ . Le plasma est d'abord décrit dans le cadre d'une modélisation multi-fluide. Les équations correspondantes sont écrites de la façon suivante (les notations sont celles du cours) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n \mathbf{V}_e), \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n \mathbf{V}_i), \quad (6.30)$$

$$0 = -ne(\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_e, \quad (6.31)$$

$$Mn \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} = +ne(\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_i \quad (6.32)$$

1. (a) A quels bilans ces équations correspondent-elles ?

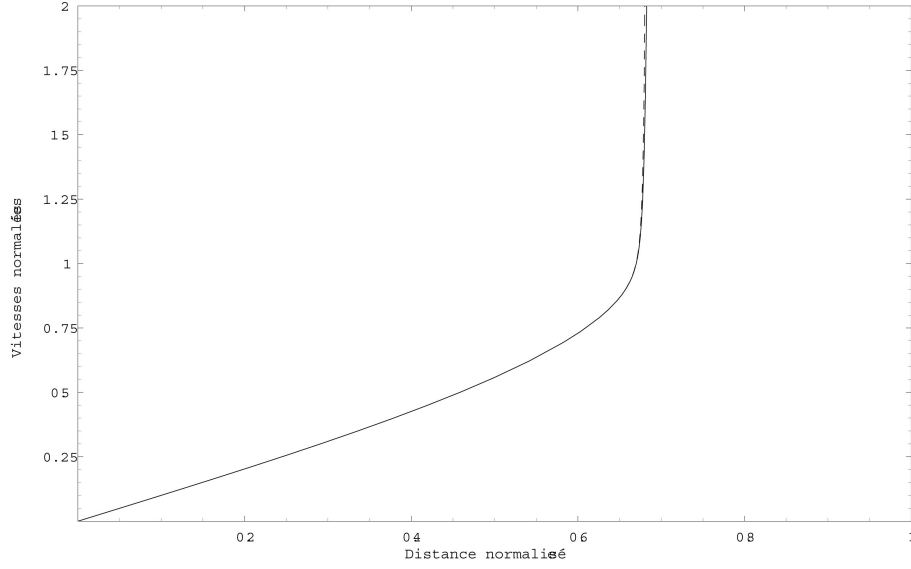


FIGURE 6.2 – vitesse électronique  $V_e$  (tirets), vitesse ionique,  $V_i$  (traits pleins) lorsque  $\epsilon = 0.001$ .

- (b) Décrire succinctement mais précisément chacun des termes de ces équations.
  - (c) Quelles sont les approximations effectuées dans ces équations ?
2. Eliminer  $\mathbf{V}_e$  entre les équations (6.31) et (6.32) et obtenir les 2 équations :

$$Mn \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (6.33)$$

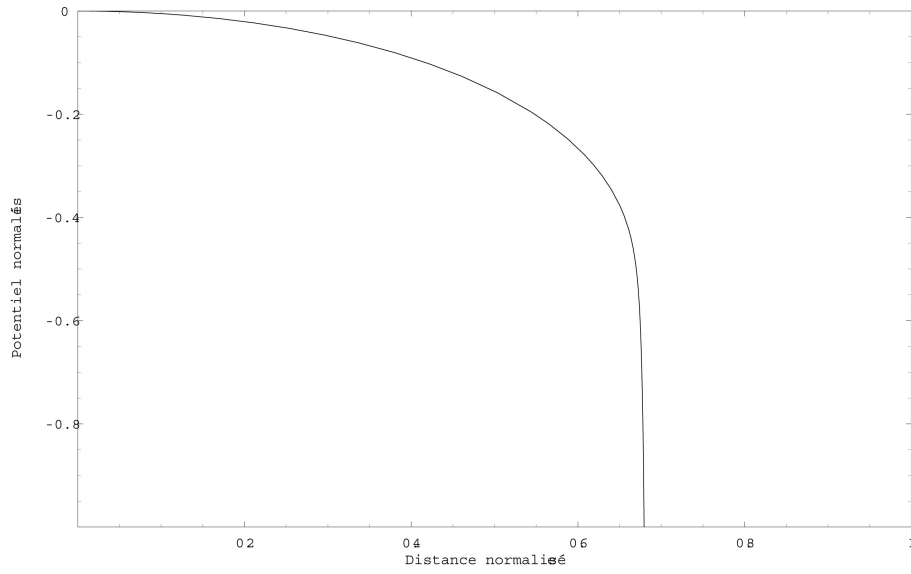
$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}_e), \quad (6.34)$$

où  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{P}$  sont deux grandeurs physiques que l'on définira.

3. On se place désormais dans le cas d'un plasma fortement magnétisé pour lequel le rayon de Larmor des ions,  $\rho_i$ , est très faible devant une distance caractéristique du plasma,  $L$  :

$$\delta \equiv \frac{\rho_i}{L} \ll 1$$

et on se propose maintenant de normaliser les équations (6.30), (6.33) et (6.34).

FIGURE 6.3 – potentiel électrostatique  $\phi$  lorsque  $\epsilon = 0.001$ .

Pour cela, on introduit les variables normalisées suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{n}{n_0} & \bar{\mathbf{V}}_i &= \frac{\mathbf{V}_i}{V_0} & \bar{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{B}}{B_0} & \bar{\mathbf{E}} &= \frac{\mathbf{E}}{B_0 V_0} \\ \bar{\mathbf{J}} &= \frac{\mathbf{J}}{en_0 V_0} & \bar{\mathbf{P}} &= \frac{\mathbf{P}}{n_0 M V_{thi}^2} & \bar{\mathbf{P}}_e &= \frac{\mathbf{P}_e}{n_0 M V_{thi}^2} \\ \bar{\nabla} &= L \nabla & \frac{\partial}{\partial \bar{t}} &= \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

où  $n_0, V_0, B_0, \omega_0$  sont des grandeurs caractéristiques du fluide et où  $V_{thi}$  est la vitesse thermique des ions.

Montrez dans ces conditions que les équations normalisées s'écrivent :

$$(\epsilon) \frac{\partial \bar{n}}{\partial \bar{t}} = -(\xi \delta) \bar{\nabla} \cdot (\bar{n} \bar{\mathbf{V}}_i), \quad (6.35)$$

$$\frac{\bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}}}{\bar{n}} = \left[ (\epsilon) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (\xi \delta) \bar{\mathbf{V}}_i \cdot \bar{\nabla} \right] \bar{\mathbf{V}}_i + \left( \frac{\delta}{\xi} \right) \frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{P}}}{\bar{n}}, \quad (6.36)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = -\bar{\mathbf{V}}_i \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{\bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}}}{\bar{n}} - \left( \frac{\delta}{\xi} \right) \frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{P}}_e}{\bar{n}}, \quad (6.37)$$

où on a introduit les 2 paramètres sans dimensions :

$$\epsilon \equiv \frac{\omega_0}{\Omega_i} \quad \xi \equiv \frac{V_0}{V_{thi}}$$

avec  $\Omega_i \equiv eB_0/M$  et  $\rho_i \equiv V_{thi}/\Omega_i$ .

4. Restreignons-nous dans la suite aux cas où  $\epsilon$  et  $\xi\delta$  sont du même ordre en  $\delta$ , disons :

$$\epsilon \sim \xi\delta \sim \delta^n$$

Récrire le système d'équations précédent, et montrer qu'il ne s'exprime qu'en fonction de  $\delta^n$  et  $\delta^{2-n}$ .

5. Les cas  $n = 2$ ,  $n = 1$  et  $n = 0$  correspondent respectivement aux cas des approximations de *dérive* ("drift approximation"), de *MHD idéale* et de *Hall-MHD*.

Pour chacune des valeurs de  $n$  :

- (a) Déterminer les valeurs de  $\epsilon$  et  $\xi$  en fonction de  $\delta$ , et préciser les conditions de validité de l'approximation considérée.
- (b) Récrire les équations.
- (c) Préciser quels sont les termes dominants dans l'équation donnant  $\bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}}$ , et discuter les conditions de l'équilibre entre les forces.
- (d) En déduire l'expression du champ électrique (la loi d'Ohm) à l'ordre le plus bas en  $\delta$ .

## Problèmes

### 7.1 Diagramme CMA (Clemmow - Mullaly - Allis)

On considère un magnétoplasma d'hydrogène, homogène, froid et non collisionnel. Le champ magnétique est uniforme suivant la direction  $z$ , soit  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}$ . On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans une direction oblique par rapport à la direction du champ magnétique.

On rappelle que l'équation de dispersion des ondes électromagnétiques pouvant se propager dans un plasma est donnée par

$$\begin{vmatrix} S - N^2 \cos^2 \Theta & -iD & N^2 \cos \Theta \sin \Theta \\ iD & S - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \Theta \sin \Theta & 0 & P - N^2 \sin^2 \Theta \end{vmatrix} = 0 \quad (7.1)$$

et peut se mettre sous la forme

$$AN^4 + BN^2 + C = 0 \quad (7.2)$$

avec  $A = S \sin^2 \Theta + P \cos^2 \Theta$ ,  $B = (D^2 - S^2) \sin^2 \Theta - SP(1 + \cos^2 \Theta)$  et  $C = PRL$  avec

$$R = 1 - \Sigma_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega + \omega_{cs})}, \quad L = 1 - \Sigma_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega - \omega_{cs})}, \quad P = 1 - \Sigma_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (7.3)$$

$$S = \frac{R + L}{2} = 1 - \Sigma_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2}, \quad D = \frac{R - L}{2} = \Sigma_s \frac{\omega_{cs} \omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{cs}^2)} \quad (7.4)$$

On se place dans le cas où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est dans le plan  $(x, z)$ . Ces notations sont celles utilisées par Stix. Pour faire la jonction avec les notations utilisées dans le cours (Landau), on a  $\varepsilon_\perp = S$ ,  $g = D$  et  $\varepsilon_\parallel = P$ .

1. Dédurre la forme de l'équation de dispersion dans les cas  $\Theta = 0$  et  $\Theta = \pi/2$ .

*Nomenclature : En propagation parallèle, les cas  $N^2 = R$  et  $N^2 = L$  s'appellent respectivement modes droit et gauche. En propagation perpendiculaire, les cas  $N^2 = P$  et  $N^2 = RL/S$  s'appellent respectivement modes ordinaires et modes extraordinaires.*

2. Montrez que l'équation de dispersion peut se réécrire sous une forme différente (formulation de Åström & Allis)

$$\tan^2 \Theta = \frac{-P(N^2 - R)(N^2 - L)}{(SN^2 - RL)(N^2 - P)} \quad (7.5)$$

3. On rappelle que les coupures sont définies par  $N = 0$  et les résonances par  $N \rightarrow \infty$ . Déterminez les conditions de coupure sur  $R$ ,  $L$  et  $P$ . On montrera que ces conditions (qui découlent de la forme de l'équation bicarrée de dispersion) ne dépendent pas de la valeur de l'angle  $\theta$ .

4. Même question pour les résonances. Il sera plus judicieux dans ce cas de se servir de la formulation de Åström & Allis, et l'on séparera maintenant les cas  $\Theta = 0$  et  $\Theta = \pi/2$  (qui seront d'ailleurs les seules que l'on traitera).

*Note : Les coupures définies par  $N = 0$  correspondent en fait à des transitions entre valeur positives et valeurs négatives de  $N^2$ . Pour  $N^2 < 0$ ,  $\mathbf{k}$  ou  $\omega$  seront imaginaires pures et l'onde considérée sera évanescence. Les coupures correspondent généralement à une réflexion des ondes, alors que les résonances correspondent à une réflexion, une absorption, ou partiellement les deux.*

5. On s'intéresse maintenant à la construction des surfaces d'ondes ou surface des vitesses normales (appellation Quémada). Elles correspondent à la surface décrite par l'extrémité du vecteur  $V_\phi$  (vitesse de phase) dans un diagramme polaire. avec

$$u = \frac{V_\phi}{c} = \frac{\omega}{kc} = \frac{1}{N} \quad (7.6)$$

L'équation de dispersion en  $u$  peut se réécrire

$$Cu^4 + Bu^2 + A = 0 \quad (7.7)$$



Le plasma n'est en fait défini que par sa densité (la même pour les électrons que pour les protons dans un plasma d'hydrogène) et par la valeur de son champ magnétique extérieur, c'est-à-dire 2 paramètres. Réécrire la forme de  $P$ ,  $R$  et  $L$  en fonction de

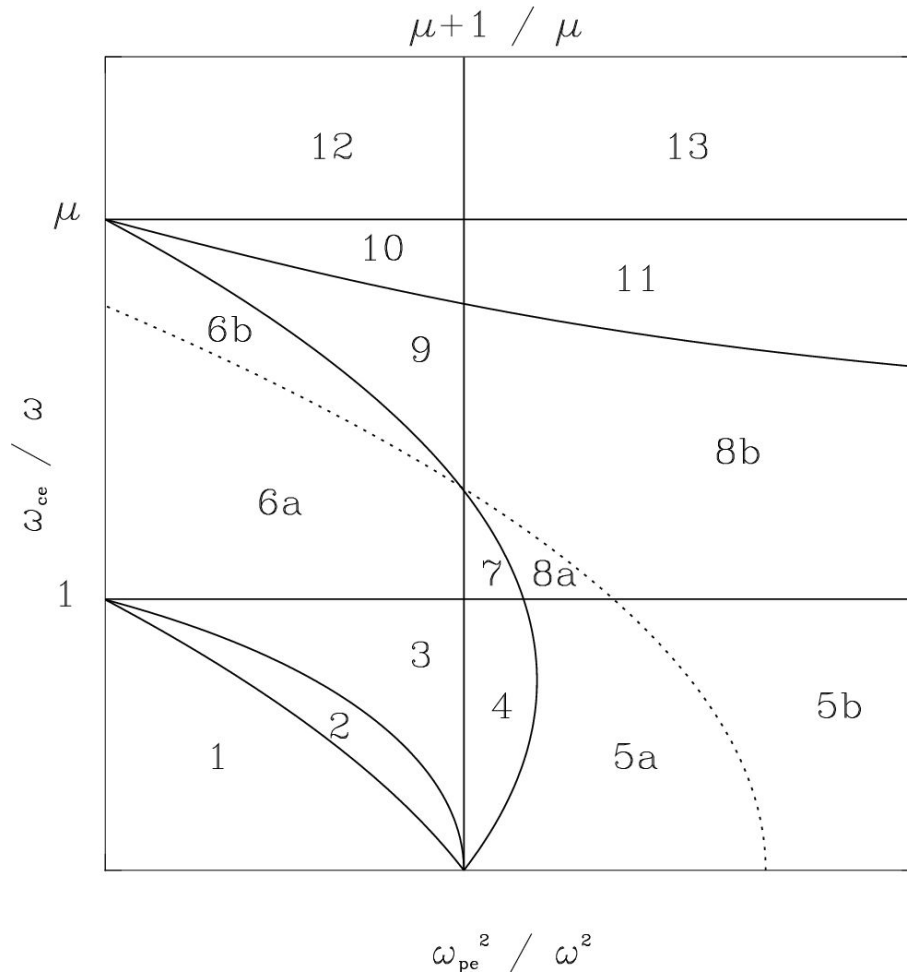
$$x = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \text{ et } y = -\frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (7.8)$$

On introduira pour cela  $\mu = m_i/m_e = |\omega_{ce}/\omega_{ci}| = \omega_{pe}^2/\omega_{pi}^2$  qui est un paramètre et non une variable. On comprend donc que la forme des ondes qui vont pouvoir se propager dans un magnétoplasma froid ne va dépendre que de  $x$  et  $y$ . On va donc pouvoir représenter les caractéristiques de ces ondes dans un plan  $(x, y)$  (diagramme CMA).

*Note : Le diagramme CMA est aussi souvent représenté dans le repère pour lequel l'ordonnée est  $\omega_{ci}/\omega$ . La forme générale des courbes est alors différente mais la physique reste évidemment la même.*

6. Propagation parallèle. Réécrire les conditions de coupures pour  $P$ ,  $R$  et  $L$ , et les exprimez en fonction de  $x$  et  $y$ . En déduire l'équation des courbes  $y(x)$  qu'elles définissent. Faire de même pour les conditions de résonances. Représenter ces courbes dans le plan  $(x, y)$  ainsi que les endroits où les ondes électromagnétiques ne peuvent pas se propager. On dessinera pour cela 2 diagrammes, un pour le mode droit, et un pour le mode gauche.
7. Même question que précédemment pour le cas de la propagation perpendiculaire.

*Vous trouverez ci-dessous la forme générale du diagramme CMA. La position des coupures et résonances est indiquée en trait plein, et le lieu des points pour lesquels  $RL = PS$  est en trait pointillé.*



8. Il reste à déterminer la forme des surfaces d'ondes dans les 13 régions du diagramme. A titre d'exemple, et sans être exhaustif, quelles informations pouvez-vous tirer des remarques ci-dessous ?

- région 3. En propagation parallèle, seule le mode gauche est propagatif. Mais en perpendiculaire, les modes ordinaires et extraordinaires le sont. Lequel est le plus rapide ?
- En utilisant la position de la résonance hybride basse entre les régions 6 et 9, déduire la vitesse de phase du mode gauche par rapport à celle du mode droit dans la région 6.
- Région 8. Seul le mode droit est propagatif.
- Région 13. Montrez que le mode droit est plus rapide que le mode

gauche.

## 7.2 Post-décharge et maintien d'un plasma confiné

Dans un plasma collisionnel, du fait des rapport de masses, les électrons diffusent plus rapidement que les ions. La densité de charges qui apparaît au cours du mouvement, crée un champ électrique qui tend à ralentir les électrons et à accélérer les ions. Les charges ont donc tendance à diffuser ensemble : on parle de *diffusion ambipolaire*.

Dans cette partie nous traitons de la diffusion d'un plasma quasi-neutre collisionnel en régime dépendant du temps.  $n_e(x, t)$ ,  $v_e(x, t)$ , et  $\Gamma_e \equiv n_e v_e$  désignant respectivement la densité, la vitesse et le flux des électrons ( $n_i(x, t)$ ,  $v_i(x, t)$ , et  $\Gamma_i \equiv n_i v_i$  pour les ions), on effectuera les approximations suivantes :

- Le plasma étant de dimensions largement supérieures à la longueur de Debye, on le considèrera comme quasi-neutre :  $n_e = n_i \equiv n$ .
- Le terme source des équations de conservation des électrons ou des ions est identique pour les 2 espèces :  $S_e = S_i = S(x, t)$ .
- Le plan médian est un plan de symétrie où  $\Gamma_e = \Gamma_i = 0$ .
- On se place dans l'approximation isotherme : les températures électronique,  $T_e$ , et ionique,  $T_i$ , sont supposées uniformes.
- Les termes d'inertie sont négligés.

1. Montrer en combinant les équations de conservation des électrons et des ions que  $\Gamma_i = \Gamma_e$  en tout point de la décharge.
2. Le plasma est suffisamment collisionnel pour qu'on puisse négliger les termes d'inertie dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. Déterminer l'expression donnant  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_i$  en fonction des mobilités  $\mu_i$  et  $\mu_e$ , des coefficients de diffusion  $D_i$  et  $D_e$ , et du champ électrique  $E$ .
3. Utilisez l'égalité  $\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$  pour éliminer le champ électrique, et en

déduire l'expression du flux ambipolaire  $\Gamma$  en fonction de la densité  $n$ .

4. En déduire que la densité vérifie l'équation de diffusion :

$$\partial_t n(x, t) - D_a \partial_{xx}^2 n(x, t) = S(x, t),$$

où  $D_a$  est le coefficient dit de diffusion ambipolaire dont on donnera l'expression.

### 7.3 Relaxation et maintien d'un plasma collisionnel confiné

On étudie maintenant la diffusion d'un plasma quasi-neutre collisionnel, lorsque celui-ci est compris entre deux parois situées en  $x = 0$  et  $x = +2L$ . On considèrera les parois comme parfaitement absorbantes : toutes les charges qui les atteignent sont supposées perdues.

#### 7.3.1 Relaxation d'un plasma confiné sans source d'ionisation

On commence par étudier comment un profil de densité relaxe en absence de terme source :  $S \equiv 0$ .

Le problème mathématique se ramène donc à étudier l'équation de diffusion :

$$\partial_t n - D_a \partial_{xx}^2 n = 0,$$

pour  $t > 0$  et  $x \in [0, +2L]$ , avec pour conditions aux limites et condition initiale :

$$\begin{aligned} n(0) &= n(+2L) = 0, \\ n(x, 0) &= n_0(x) \end{aligned}$$

On cherche la solution par *la méthode de séparation des variables* :

$$n(x, t) = f(x)g(t)$$

1. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  satisfont les équations différentielles :

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda^2 f(x) &= 0, \\ g'(t) + \lambda^2 D_a g(t) &= 0, \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est une constante réelle.

2. Résoudre ces équations et utilisez les conditions aux limites pour montrer que  $\lambda \equiv \lambda_n$  avec

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3. En déduire que la solution générale de l'équation de diffusion peut s'écrire :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 D_a t} \sin(\lambda_n x), \quad (7.9)$$

où les constantes  $A_n$  sont déterminées par la relation  $n_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x)$ .

4. Quel est le comportement asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) de la densité ?

Commenter.

Quelle est la contribution dominante dans la somme (7.9) aux temps longs ?

5. On rappelle la relation d'orthogonalité  $\int_0^{+2L} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n x) dx = L \delta_{mn}$ .  
Montrer que  $A_n$  vérifie :

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^{+2L} n_0(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad (7.10)$$

Que représentent les coefficients  $A_n$  ?

6. La figure suivante est représentée à différents instants lorsque le profil initial est donné par :

$$n_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x) + \frac{1}{4} \sin(5\pi x),$$

où le coefficient de diffusion  $D_a = 0.005$  et  $2L = 1$ .

Déterminer la solution  $n(x, t)$  et commenter la figure.

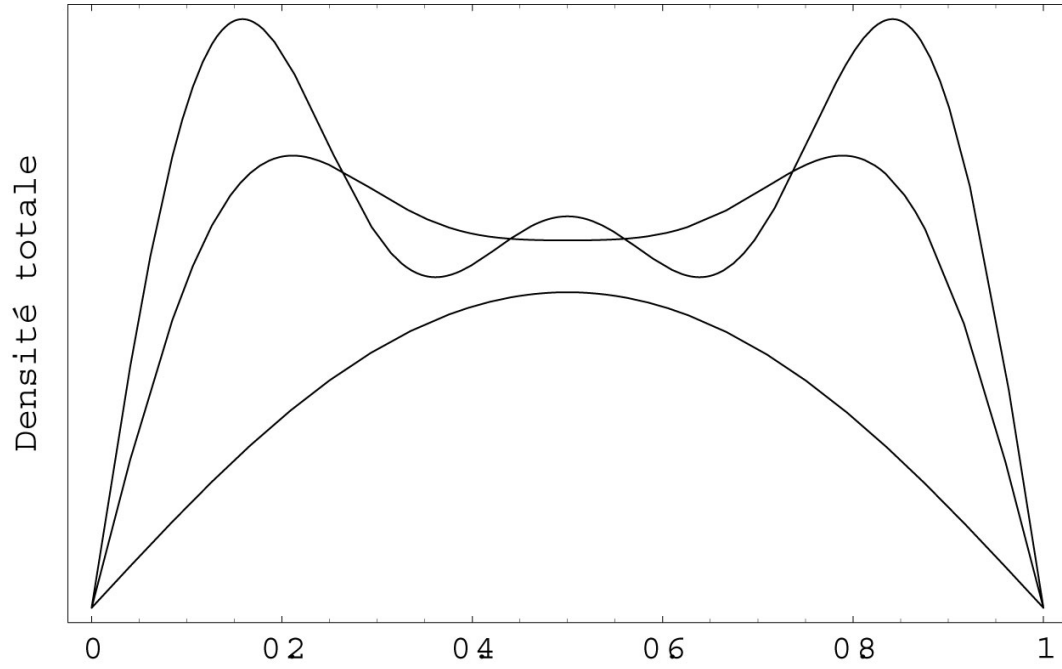


FIGURE 7.1 – Relaxation temporelle de la densité sans terme source pour  $t = 0, 1, 10$ .

### 7.3.2 Maintien d'un plasma confiné

On considère maintenant le plasma en présence d'un terme source  $S(x, t)$ . Du point de vue mathématique, on doit donc maintenant considérer le problème *inhomogène*

$$\partial_t n - D_a \partial_{xx}^2 n = S(x, t),$$

pour  $t > 0$  et  $x \in [0, +2L]$ , toujours avec pour conditions aux limites et condition initiale :

$$\begin{aligned} n(0) &= n(+2L) = 0, \\ n(x, 0) &= n_0(x) \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, on utilise *la méthode de développement sur une base de fonctions propres*. On cherche encore la solution sous la forme d'une

série :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) f_n(x),$$

où les fonctions  $f_n$  sont les fonctions (propres) que nous avons déterminées lors de la résolution du problème homogène qui satisfont l'équation :

$$f_n''(x) = -\lambda_n^2 f_n(x),$$

avec les conditions aux limites  $f_n(0) = f_n(2L) = 0$ .

On pourra donc écrire :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad (7.11)$$

où les fonctions  $g_n$  de la variable  $t$  restent à déterminer.

1. Les fonctions propres de l'opérateur  $d^2/dx^2$  peuvent également être utilisées comme base de développement du terme source :

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad (7.12)$$

Déterminer les coefficients  $s_n$  en fonction du terme source  $S(x, t)$ .

2. Substituer les équations (7.11) et (7.12) dans l'équation de diffusion, et en déduire que  $g_n$  vérifie l'équation différentielle :

$$g_n'(t) + D_a \lambda_n^2 g_n(t) = s_n(t),$$

avec la condition initiale  $g_n(0) = A_n$ .

3. Résoudre cette équation différentielle, et en déduire la solution :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 D_a t) \sin(\lambda_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \exp(-\lambda_n^2 D_a (t - \tau)) s_n(\tau) d\tau \right] \sin(\lambda_n x)$$

A quoi correspondent les 2 parties de cette expression ?

4. Quelle est la contribution dominante dans cette somme aux temps longs ?

5. Dans le cas des plasmas faiblement ionisés où l'on peut négliger la recombinaison des charges en volume, la contribution dominante au terme de source vient du terme d'ionisation, proportionnel à la densité électronique. On écrira donc :

$$S(x, t) = \nu_I n(x, t),$$

où  $\nu_I \equiv \nu_I(T_e, p)$  est une fonction de la pression de neutres,  $p$ , et de la température électronique,  $T_e$ .

- (a) Montrer que  $s_n = \nu_I g_n$ .  
 (b) En déduire que la contribution dominante à la densité aux temps longs s'écrit :

$$n(x, t) \sim A_1 \exp - (\nu_I - \lambda_1^2 D_a) t \sin(\lambda_1 x)$$

- (c) En déduire la condition de maintien du plasma en régime stationnaire (dans le cadre de ce modèle, on l'appelle la *condition de Schottky*) :

$$\boxed{\frac{\nu_I}{D_a} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 = \lambda_1^2}$$

Expliquez pour quelles raisons la température électronique ne dépend que du produit  $pL$ , où  $p$  est la pression des neutres.

$$T_e = f(pL)$$

- (d) Montrer que l'on retrouve le même résultat en résolvant directement l'équation stationnaire :

$$-D_a \partial_{xx}^2 n(x) = \nu_I n(x)$$



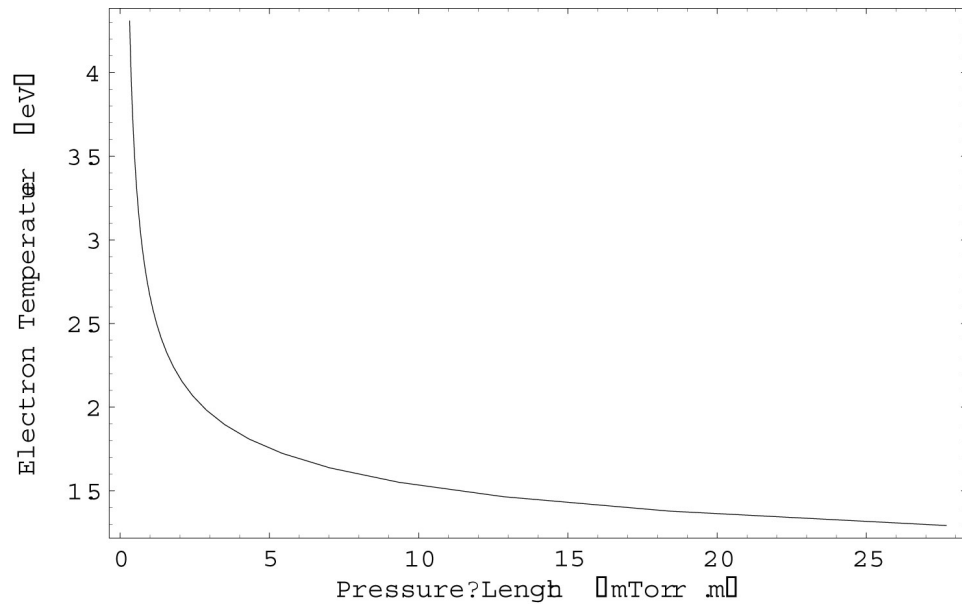
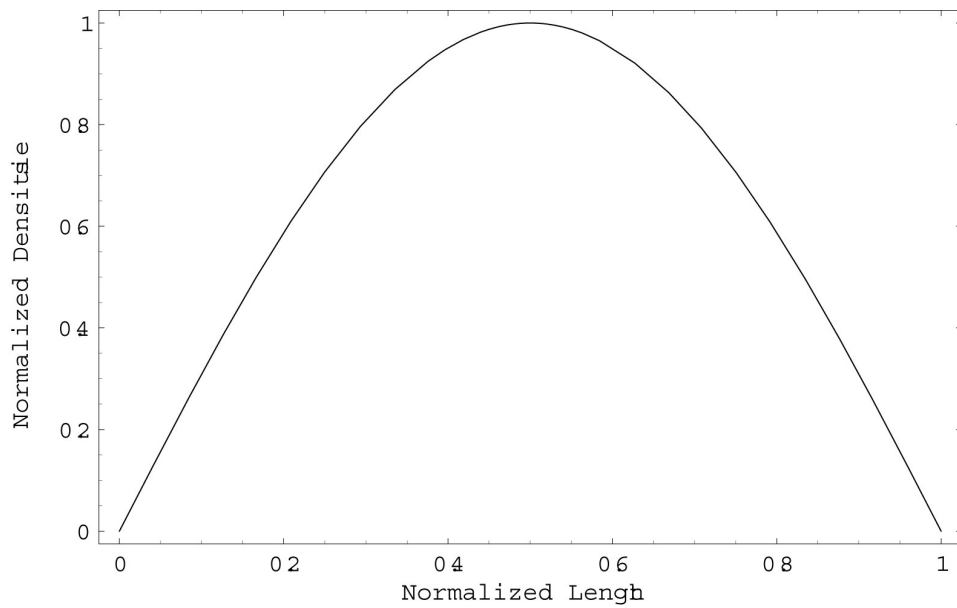
FIGURE 7.2 – Température électronique en fonction du produit  $pL$ .

FIGURE 7.3 – Profil stationnaire de densité.

## 7.4 Modes anisotropes en bi-fluides

On s'intéresse aux modes pouvant exister et se propager dans un plasma magnétisé pour lequel il peut exister une anisotropie de température. Dans le

cadre d'une approche fluide, on considèrera une équation de fermeture de type polytropique, pour laquelle l'indice polytropique dépendra de la direction parallèle ou perpendiculaire ainsi que du type de particules (protons ou électrons). On fera l'hypothèse que le tenseur de pression est gyrotrope et diagonal.

1. Ecrire toutes les équations nécessaires (fluides et Maxwell) pour calculer la forme de l'équation de dispersion. On considèrera que le champ magnétique statique d'ordre 0 est dans la direction  $\hat{\mathbf{z}}$ . Les modes auxquels on s'intéresse sont très basse fréquence  $\omega \ll \omega_{ci}$ .
2. Linéarisez ces équations à l'ordre 1.
3. Réécrivez ces équations dans le domaine Fourier-Laplace.
4. Développez les produits vectoriels qui apparaissent dans les expressions obtenues, en considérant que le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est dans le plan  $XZ$ .
5. Déterminez la forme du tenseur de pression en le linéarisant à l'ordre 1 (attention, il y a une peau de banane!).
6. En déduire la forme des 3 équations scalaires qui régissent l'évolution des 3 composantes de la vitesse à l'ordre 1.
7. En introduisant la vitesse d'Alfvén et la définition du paramètre  $\beta$

$$\frac{p_0}{nm} = \beta \frac{V_A^2}{2}$$

où  $p_0$  est la pression scalaire d'ordre 0, réécrire les 3 équations précédentes. Vous introduirez aussi les grandeurs (et notations) suivantes

$$\lambda = \frac{\omega}{kV_A} \quad (7.13)$$

$$\Delta\beta = \beta_{\parallel} - \beta_{\perp} \quad (7.14)$$

$$\beta_{\parallel}^* = \gamma_{\parallel}\beta_{\parallel} \quad (7.15)$$

$$\beta_{\perp}^* = \gamma_{\perp}\beta_{\perp} \quad (7.16)$$

8. En déduire la forme générale de la matrice de dispersion en vitesse.
9. Identifier le mode Alfvénique, et la manière dont il est altéré par l'anisotropie de température.

10. Dans le cas quasi-perpendiculaire, les 2 polarisations (suivant  $x$  et  $z$ ) ont tendance à se découpler. Déterminez l'équation de dispersion des 2 modes, rapide et lent. Attention, pour le mode lent, il faut pousser le développement limité à l'ordre 2. Le mode lent est le mode miroir. Montrez qu'il peut-être instable.
11. En quasi-parallèle, le mode rapide est dégénéré en mode Alfvénique. Montrez qu'il peut aussi être instable (instabilité fire-hose).

## 7.5 Critère de Bohm dans les plasmas faiblement ionisés

L'étude des plasmas faiblement ionisés et confinés, en absence de champ magnétique, montre que les charges électriques s'y organisent en 2 régions bien distinctes :

- une région centrale (loin des parois) où la densité de charges est faible et où le plasma peut être considéré comme quasi-neutre,
- une région à proximité des parois, appelée *gaine*, où la densité de charges est significative et où le potentiel électrostatique doit s'adapter aux conditions électriques imposées aux parois.

Nous étudions uniquement la gaine dans ce problème, successivement dans les cas d'un plasma électropositif puis électronégatif par des méthodes complémentaires. On établit que la vitesse des ions positifs doit excéder la vitesse acoustique ionique (c'est le *critère* dit de *Bohm*) pour qu'un profil de potentiel monotone puisse s'établir dans la gaine.

### 7.5.1 Critère de Bohm dans un plasma électropositif

La densité de charges d'espace n'étant pas négligeable dans la gaine, l'approximation plasma ne peut pas y être utilisée, et on devra avoir recours à l'équation de Poisson. Du fait que les densités chutent dans le plasma, du centre vers les parois, la densité électronique est généralement suffisamment faible dans la gaine pour qu'on puisse négliger les contributions d'ionisation dans

l'équation de bilan du nombre de particules. Le flux ionique se conserve donc dans la gaine en régime stationnaire. Dans le cas d'un plasma électropositif qui ne comprend que des électrons et une espèce d'ions positifs, nous effectuerons donc la modélisation (1D) de la gaine en régime stationnaire à partir du jeu d'équations suivant :

$$(n_i v)' = 0, \quad (7.17)$$

$$M n_i v v' = -e n_i \varphi', \quad (7.18)$$

$$k_B T_e n_e' = +e n_e \varphi', \quad (7.19)$$

$$-\epsilon_0 \varphi'' = e(n_i - n_e) \quad (7.20)$$

Comme on ne s'intéresse qu'à la gaine, il est commode de choisir l'origine des coordonnées et du potentiel électrostatique à l'entrée de la gaine. L'entrée de la gaine correspondant avec la sortie de la région centrale supposée quasi-neutre, on supposera la neutralité vérifiée à l'entrée de la gaine. Les conditions initiales associées au jeu d'équations précédentes sont donc les suivantes :

$$n_i(0) = n_e(0) \equiv n_s, \quad v(0) = v_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = \varphi_L$$

$L$  représente la taille de la gaine.  $\varphi_L$  est le potentiel imposé à la paroi (éventuellement auto-consistant si on est en potentiel flottant). Pour fixer les idées, on supposera  $\varphi_L < 0$  dans la suite. Le critère de Bohm fournit une condition sur la vitesse initiale des ions  $v_0$  pour que le potentiel présente des variations monotones dans la gaine.

1. Discuter succinctement le contenu physique des équations étudiées.
2. Montrer à partir de ces équations que la densité de charges dans la gaine peut s'écrire sous la forme :

$$\rho[\varphi] = n_s e \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{e\varphi}{Mv_0^2/2}}} - e^{+\frac{e\varphi}{k_B T_e}} \right)$$

3. La densité de charges peut donc être considérée comme une fonctionnelle du potentiel  $\varphi$  :  $\rho = \rho[\varphi]$ .

En effectuant un développement de Taylor de l'équation de Poisson au voisinage de l'origine (donc à l'entrée de la gaine), montrer que

$$\left. \frac{d\rho}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \leq 0$$

si l'on suppose le potentiel concave ( $\varphi'' < 0$ ).

Cette inégalité constitue la forme générale du *critère de Bohm* qui peut être utilisée aussi bien dans le cadre d'une dérivation cinétique des densités que dans le cadre d'une dérivation fluide.

4. En utilisant la forme explicite des densités fluides établies ci-dessus, montrer que la condition  $d\rho/d\varphi(0) \leq 0$  est équivalente à la condition sur  $v_0$  :

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}}$$

Cette inégalité est la forme particulière du critère de Bohm pour un plasma électro-positif considéré dans le cas d'une approche fluide. C'est dans ce contexte que la vitesse acoustique ionique est généralement appelée *la vitesse de Bohm*.

5. Montrer que la prise en compte de la température ionique,  $T_i$ , conduit au critère de Bohm suivant :

$$v_0 > \sqrt{\frac{k_B T_e + k_B T_i}{M}}$$

### 7.5.2 Vitesse de Bohm dans un plasma électronégatif

Un plasma électronégatif est un plasma qui comprend des électrons, des ions positifs et des ions négatifs. Le plasma est décrit par les équations suivantes :

$$(n_+ v_+)' = S_+, \quad (7.21)$$

$$(n_e v_e)' = S_e, \quad (7.22)$$

$$(n_- v_-)' = S_- \quad (7.23)$$

$$m_+ (n_+ v_+^2)' = -kT_+ n_+' + n_+ e E - F_+, \quad (7.24)$$

$$0 = -kT_e n_e' - n_e e E, \quad (7.25)$$

$$0 = -kT_- n_-' - n_- e E, \quad (7.26)$$

$$n_+ = n_e + n_- \quad (7.27)$$

où  $F_+$  est une densité de force de collisions entre les ions et les neutres.

1. Discuter succinctement le contenu physique de chaque équation.
2. Etablir l'égalité :

$$m_+ (n_+ v_+^2)' + kT_+ n_+' + kT_e n_e' + kT_- n_-' = -F_+$$

3. Comment peut-on interpréter cette équation dans le cas où  $F_+ \rightarrow 0$  ?
4. Dans une première étape, on cherche à éliminer le gradient de vitesse des ions positifs de l'équation précédente.  
Montrer que l'on peut écrire :

$$(kT_+ - m_+ v_+^2) n_+' = -2S_+ m_+ v_+ - kT_e n_e' - kT_- n_-' - F_+$$

5. Eliminer le champ électrique des équations (5), (6) et (7), et établir les relations qui lient les gradients de densité des espèces négatives avec le gradient de densité des ions positifs :

$$\begin{aligned} n_e' &= \frac{kT_- n_e}{kT_e n_- + kT_- n_e} n_+', \\ n_-' &= \frac{kT_e n_-}{kT_e n_- + kT_- n_e} n_+' \end{aligned}$$

6. En déduire que les gradients de densité deviennent singuliers (et le modèle n'est donc plus défini) lorsque la vitesse des ions positifs satisfait l'égalité :

$$v_+^2 = \frac{kT_e}{m_+} \left( \frac{T_+}{T_e} + \frac{1 + \gamma_s}{1 + (T_e/T_-) \gamma_s} \right)$$

où  $\gamma_s \equiv n_-(x_s)/n_e(x_s)$  est calculé au point  $x = x_s$  où les gradients deviennent infinis.

7. Etudier cette expression dans les 2 limites distinctes suivantes :

- $\gamma_s \rightarrow 0$ ,
- $\gamma_s \rightarrow \infty$ .

Commentez.

# Bibliographie

- [1] E. A. Bogdanov, A. S. Chirtsov and A. A. Kudryavtsev, *Fundamental nonambipolarity of electron fluxes in 2D plasmas*, Physical Review Letters, **106**, 195001, (2011).
- [2] J.-P. Boeuf, *Plasmas froids : génération, caractérisation et technologies*, Publications de l'Université de Saint-Etienne, p. 17, (2004).
- [3] M. A. Lieberman, A. J. Lichtenberg, *Principles of plasma discharges and material processing*, Wiley, p. 80, (2005).
- [4] V. E. Golant, A. P. Zhilinsky, I.E. Sakharov, *Fundamentals of Plasma Physics*, John Wiley and Sons, (1980).
- [5] V. M. Zhdanov, *Transport processes in multicomponent plasma*, Taylor and Francis, (2002).
- [6] J. M. Burgers, *Flow equations for composite gases*, Academic press, (1969).
- [7] E. M. Lifshitz, & L. P. Pitaevski, *Course of Theoretical Physics : Physical Kinetics*, Butterworth-Heinmann, (2005).
- [8] T. H. Stix, *Waves in Plasmas*, AIP Press, (1992).
- [9] F. F. Chen, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, (1984).
- [10] R. O. Dendy, *Plasma dynamics*, Oxford Science Publications, (1990).
- [11] N. A. Krall & A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, San Francisco Press Inc., (1986).
- [12] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Soviet Physics JETP, **35**, 908, (1972).
- [13] J.-P. Hansen, *Theory of simple liquids*, Academic Press, 1976.
- [14] R. W. Schunk, *Mathematical Structure of Transport Equations for Multi-species Flows*, Reviews of Geophysics and space Physics, **15**, 429, (1977).