MPEI

Geração de números aleatórios

Motivação (exemplos)

- Gerar strings “aleatórias” em que:
  - comprimento assume valores entre 1 e 10 e tendo cada comprimento a mesma probabilidade
  - o caracter em cada posição é uma das letras minúsculas ou maiúsculas do alfabeto português e tendo todas a mesma probabilidade

- Gerar strings em que quer as letras quer o comprimento assumem distribuições mais próximas da realidade
  - Comprimento seguindo uma distribuição Normal com média e variância estimada de um conjunto de textos
  - As letras seguem a distribuição para o Português
    - Que vimos numa aula anterior

Geradores

- Para situações como as do exemplo, necessitamos de resolver o problema de gerar, ou simular, vectores de números aleatórios tendo uma determinada distribuição

- Nos primeiros tempos da simulação utilizavam-se métodos mecânicos para obter valores aleatórios: Moedas, dados, roletas, cartas
- Mais tarde utilizaram-se propriedades de dispositivos e elementos
  - Exemplos (atuais):
    - www.fourmilab.ch/hotbits (decaimento do Césio-137)
    - www.random.org/integers (ruído atmsoférico)

- Na área da Informática e outras, estes métodos foram substituídos por algoritmos que se podem implementar facilmente em computador , os Geradores de números pseudo-aleatórios
  - Capazes de criar sequências numéricas com propriedades próximas de sequências aleatórias
  - São algoritmos determinísticos, pelo que é usual designar os números gerados por "pseudo-aleatórios"

Abordagens principais

- Gerar directamente

- Gerar número "aleatório" de uma distribuição uniforme (contínua) e transformar …
  - Neste caso, torna-se necessário ser capaz de gerar variáveis aleatórias com a distribuição uniforme
    - Em geral distribuída entre 0 e 1
  - É a abordagem comum

Geração de variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1

Algoritmos congruenciais

- Os métodos mais comuns para gerar sequência pseudo-aleatórias usam os chamados *linear congruential generators - LCG* (algoritmo congruencial linear)

- Este geradores geram uma sequência de números através da fórmula recursiva

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \mod m$$

- Com X_0 sendo a "semente" (seed) e *a*, *c*, *m* (todos inteiros positivos) designados de multiplicador, incremento e módulo, respetivamente

- Quando $c = 0$ o algoritmo designa-se por congruencial multiplicativo

Algoritmos congruenciais

- Como X_i pode apenas assumir os valores {0, 1, …, m-1}, os números

$$U_i = \frac{X_i}{m}$$

são designados por número pseudo-aleatórios e constituem uma aproximação a uma sequência de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas

Processo de cálculo em detalhe

1. Escolher os valores de *a, c* e *m*
2. Escolher a semente X_0 (tal que 1<= X_0 <=*m*)

3. Calcular o próximo número aleatório usando a expressão $X_1 = (aX_0 + c)\ mod\ m$
4. Substituir X_0 por X_1 e voltar ao ponto anterior

Exemplo

- Fazendo a=9, c=1, m=17 e $X_0 = 7$

n	x_n	$y=9x_n+1$	y mod 17	$x_{n+1}/17$
0	$X_0=7$	9*7+1=64	13	13/17 = 0.7647
1	$X_1=13$	118	16	16/17 = 0.9412
2	$X_2=16$	145	9	0.5294
3	$X_3=9$	82	14	0.8235
4	$X_4=14$	127	8	0.4706

*números **pseudo-aleatórios** inteiros entre 0 e 16 (=17-1)*

números pseudo-aleatórios inteiros entre 0 e 1

Como escolher os parâmetros ?

- A sequência repete-se no máximo após *m* números
- Será, portanto, periódica com um período que não excede *m*

- Mas pode ser muito pior
  - Exemplo: *a*=*c*= X_0=3 e *m*=5 gera a sequência {3,2,4,0,3 …} com período 4

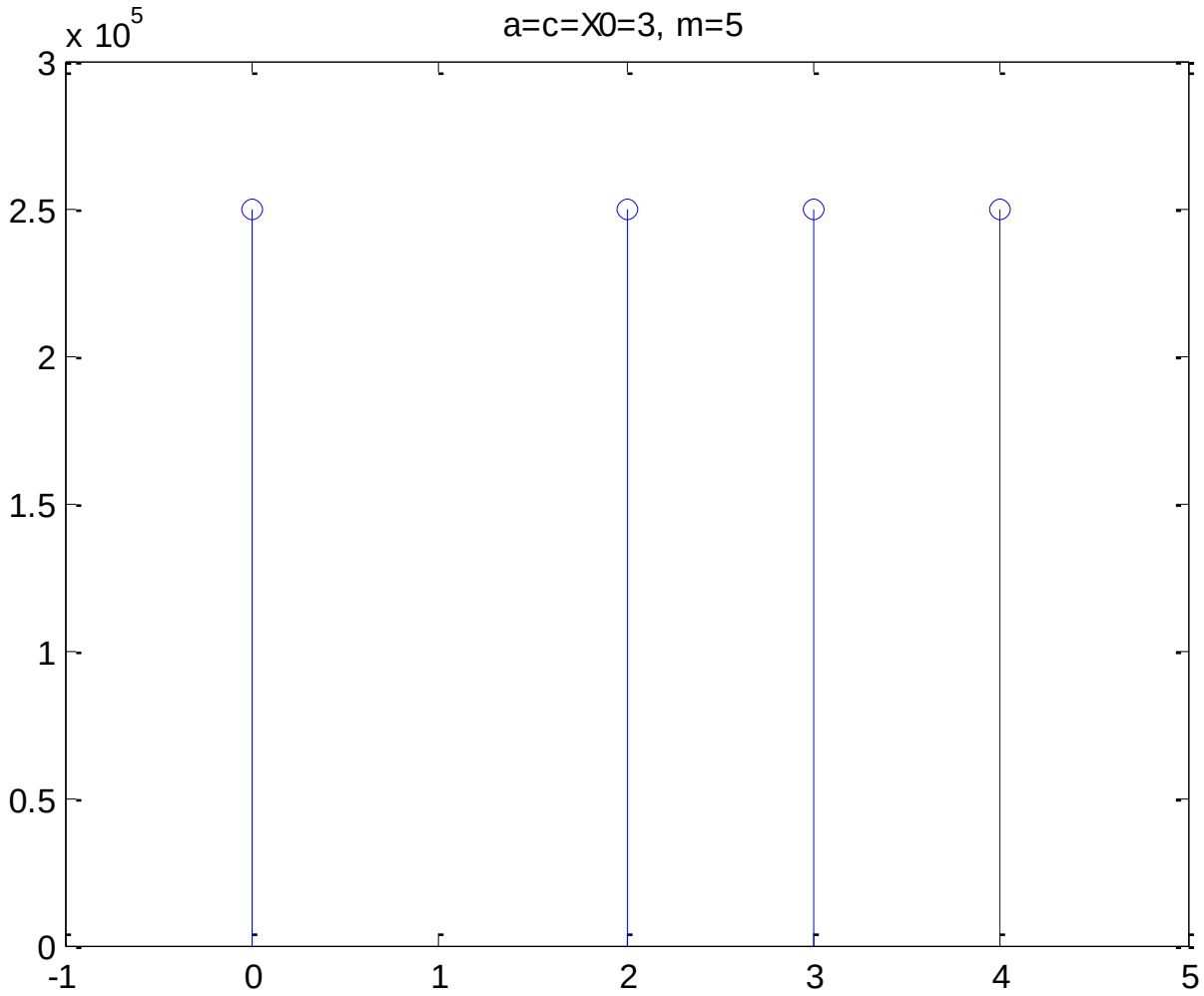
- Apenas algumas combinações de parâmetros produzem resultados satisfatórios
  - Exemplo: Usar $m = 2^{31} - 1$ e $a = 7^5$ em computadores de 32 bits

Demo Matlab

- Exemplo: a=c= X_0=3 e m=5 gera a sequência {3,2,4,0,3 …}

```
function U=lcg(X0,a,c,m, N)
U=zeros(1,N);
U(1)=X0;
for i=2:N
   U(i) =   rem(a*U(i-1)+c, m);
end
```

Resultados - histograma



Outros algoritmos congruenciais

- Uma generalização que se pode fazer do algoritmo congruencial multiplicativo é basear o cálculo do novo valor numa combinação linear das *k* amostras anteriores
- Um exemplo deste tipo baseia-se na sequência de **Fibonacci**

$$x_i = x_{i-1} + x_{i-2},\ x_1 = 1, x_0 = 0$$

- Como a utilização directa não dá bons resultados, usa-se

$$x_i = (x_{i-j} + x_{i-k}) \bmod m$$

- Para j=31, k=63, m=2^{64} temos período de 2^{124}

Outros algoritmos congruenciais

- Outra estratégia: combinar os resultados obtidos com dois geradores congruenciais que, com a escolha conveniente dos parâmetros, vai permitir maiores períodos
  - Conhecida por Combined Multiple Recursive Generator
- Na implementação em Matlab consiste em:

$$x_{1,n} = (14033580x_{1,n-2} - 810728x_{1,n-3}) \bmod m_1$$
$$x_{2,n} = (527612x_{2,n-1} - 1370589x_{2,n-3}) \bmod m_2$$

- Sendo a saída

$$z_n \equiv (x_{1,n} - x_{2,n}) \bmod m_1$$
$$u_n = \begin{cases} z_n/(m_1+1) & , z_n < 0 \\ m_1/(m_1+1) & , z_n = 0 \end{cases}$$

Outros geradores

- **FSR** – Feedback Shift Register
  - Relacionados com os geradores recursivos anteriores
  - A formula recursiva é aplicada a bits
    - Conjuntos de *k* bits representam inteiros
  - A formula de recursão é realizada recorrendo a um Shift Register
    - Vetor de bits que pode ser deslocado para a esquerda um bit de cada vez
    - Feita num computador recorrendo aos registos internos e programação em linguagem máquina
- Mersenne Twister
  - Desenvolvido para resolver problemas de uniformidade do FSR
  - Apresenta um período extraordinário de $2^{19937} - 1$
  - Informação em:
    - http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html

Outros geradores

- Para além destes geradores, outras classes foram propostas por forma a obter períodos mais longos e melhor aproximação à distribuição uniforme

- A biblioteca NAG, por exemplo, inclui vários:

Pseudorandom Numbers . . . . . .
2.1.1 NAG Basic Generator . . . . . .
2.1.2 Wichmann–Hill I Generator . . . . . .
2.1.3 Wichmann–Hill II Generator . . . . . .
2.1.4 Mersenne Twister Generator . . . . . .
2.1.5 ACORN Generator . . . . . .
2.1.6 L'Ecuyer MRG32k3a Combined Recursive Generator . .

Outros geradores - Exemplo

- Wichman-Hill I
- Usa uma combinação de 4 LCGs

This series of Wichmann–Hill base generators (see Maclaren (1989)) use a combination of four linear congruential generators and has the form:

$$\begin{aligned} w_i &= a_1 w_{i-1} \bmod m_1 \\ x_i &= a_2 x_{i-1} \bmod m_2 \\ y_i &= a_3 y_{i-1} \bmod m_3 \\ z_i &= a_4 z_{i-1} \bmod m_4 \\ u_i &= \left(\frac{w_i}{m_1} + \frac{x_i}{m_2} + \frac{y_i}{m_3} + \frac{z_i}{m_4} \right) \bmod 1, \end{aligned} \tag{1}$$

where the u_i, for $i = 1, 2, \ldots$, form the required sequence. The NAG Library implementation includes 273 sets of parameters, a_j, m_j, for $j = 1, 2, 3, 4$, to choose from.

Na prática…

- A maioria das linguagens de computador disponibilizam geradores de números pseudo-aleatórios
  - Em geral o utilizador apenas fornece o valor da "semente"

- Java
  - Classe Random
  - Random rnd = new Random()
  - rnd.nextDouble()

Matlab

- A geração de números (pseudo-)aleatórios no Matlab baseia-se na geração de números uniformemente distribuídos no intervalo (0, 1) por um algoritmo similares aos anteriormente descritos, usando o comando rand()

- Por defeito rand() utiliza o algoritmo Mersenne twister
  - Mas permite que se altere, usando rng()

rng

- s=rng
- s =

  struct with fields:

  Type: 'twister’ %% algoritmo por defeito
  Seed: 0
  State: [625×1 uint32]

rng

- rng(type)

`Type` define o tipo de algoritmo usado e pode ser:

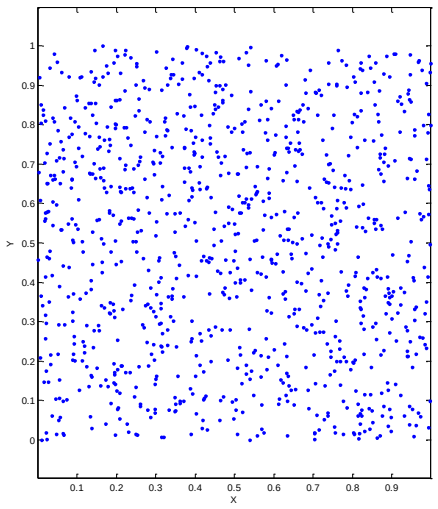
nome	descrição	state
`'twister'`	Mersenne Twister	`625x1 uint32`
`'combRecursive'`	Alg. multiplo recursivo	`12x1 uint32`
`'multFibonacci'`	Alg. Fibonacci multplicativo com atraso	`130x1 uint64`
`'v5uniform'`	Gerador uniforme do MATLAB® 5.0	`35x1 double`
`'v5normal'`	Gerador normal do MATLAB 5.0	`2x1 double`
`'v4'`	Gerador do MATLAB 4.0	`1 uint=seed`

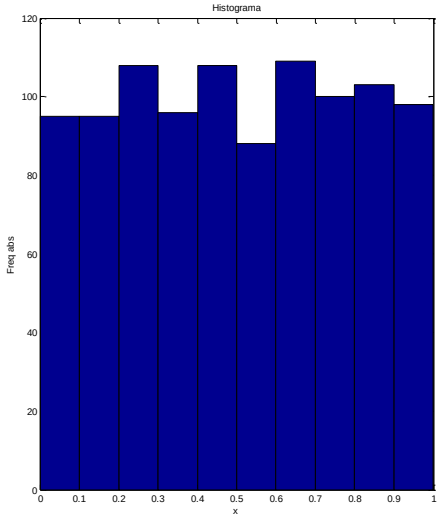
rand

```
>> rand                    % generate a uniform random number
    0.0196
>> rand                    % generate another uniform random number
    0.823
>> rand(1,4)               % generate a uniform random vector
    0.5252  0.2026  0.6721  0.8381
rand('state',1234)         % set the seed to 1234
>> rand                    % generate a uniform random number
    0.6104
rand('state',1234)         % reset the seed to 1234
>> rand
    0.6104                 % the previous outcome is repeated
```

Demonstração do uso de rand()

```
N=1000
X = rand(1, N);    Y= rand(1,N);
subplot(121), plot(X,Y,'.')
axis equal
xlabel('X')
ylabel('Y')

subplot(122), hist(X)
title('Histograma');
xlabel('X')
ylabel('Freq abs');
```





Transformações

Transformações simples

- Aplicando a de **transformação linear** Y=a U + b é simples obter variáveis com distribuição uniforme num intervalo

  ex: Y=2 U + 1 permite intervalo [1, 3]

- A aplicação da transformação linear seguida da conversão para inteiros permite obter, por exemplo, uma simulação de lançamentos de um dado (uma gama de números inteiros)
  - Em versões mais recentes do Matlab existe mesmo a função randi()

Exemplos em Matlab

```
% geração de n resultados do lançamento de uma moeda
function Y=moeda(n)
if nargin ==0
        n=1;
end
z=round(rand(1,n));

Y(1:n)='C';          %  CARA
Y(find(z==0))='R';   %  COROA


%  usando
moeda(10)
```

Exemplos em Matlab

```
% n resultados do lançamento de um dado
function Y=dado(n)

if nargin==0
   n=1;
end

Y=floor(rand(1,n)*6)+1;        %%  ou randi(6,1,n)
```

dado → 5

dado(10) → 3 1 4 5 6 3 4 3 2 4

Métodos Genéricos para gerar variáveis aleatórias com distribuições não uniformes

Métodos

- Números aleatórios com outras distribuições podem ser obtidos das sequências com distribuição uniforme através de:
  - Métodos de transformação
  - Métodos de rejeição
  - Procura em tabelas

Método da Transformação (Inversa)

- Para uma v.a. contínua, se a função de distribuição acumulada é $F(x)$ então para uma variável U com distribuição uniforme em (0,1)

  $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$ tem por função distrib. acum. $F(x)$

- Este método é apenas eficiente num conjunto pequeno de casos (ex: distribuição exponencial)
- Também não é possível ou é difícil determinar a inversa de muitas distribuições

Demonstração

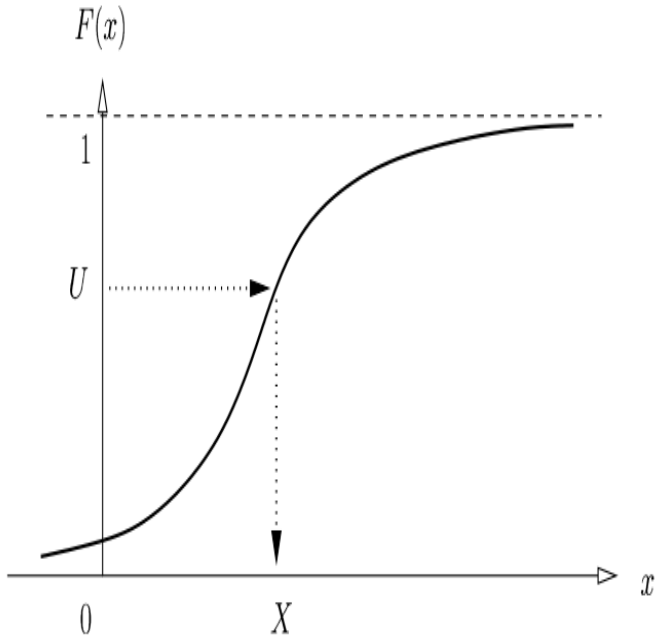
- $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$ tem por função de distribuição acumulada $F(x)$??

- Por definição $F(x) = P(X \leq x)$

- $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$
- $= P(U \leq F(x))$
- $= F(x)$ porque $P(U \leq a) = a$

Algoritmo

1. Gerar U com distribuição U(0,1)
2. Devolver $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$



Exemplo de aplicação – Simulação de uma variável aleatória **exponencial**

- Sendo $F(x) = 1 - e^{-x}$ (exponencial de média 1)
- $F^{-1}(u)$ será o valor de x que verifique

$$1 - e^{-x} = u$$

- ou seja $x = -\log(1-u)$

- Portanto:

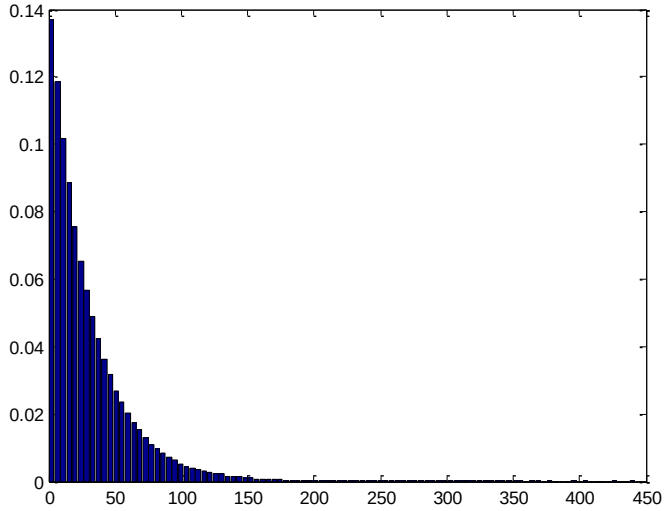
$$F^{-1}(u) = -\log(1-u)$$

É exponencialmente distribuída com média 1

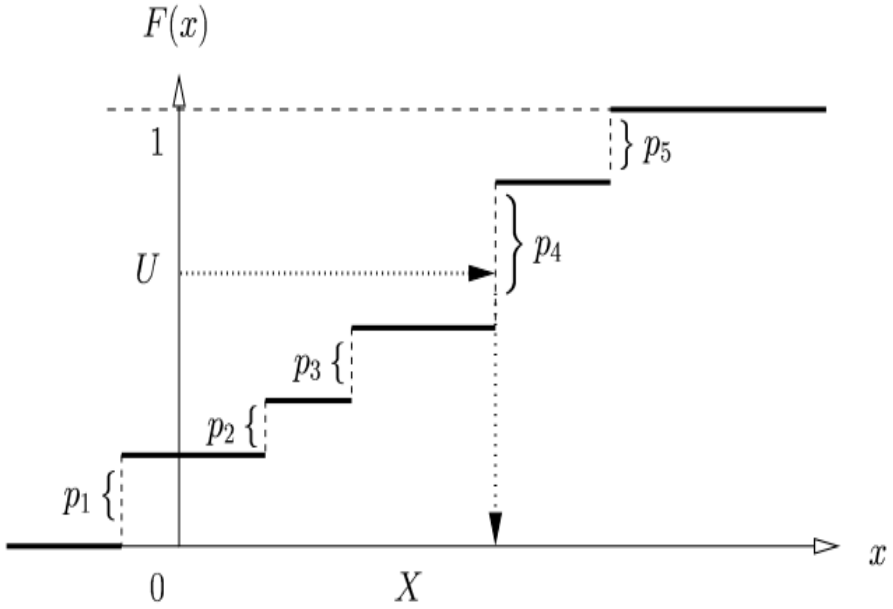
- 1-U é também uniforme em (0,1)
- Como $c\ X$ é exponencial com média c para obter uma exponencial de média c basta usar $-c\log(U)$

Exemplo em Matlab

```
function X=exponencial(m,N)
U=rand(1,N);
X=-m*log(U)

%
N=1e6
X=exponencial(10,N);
[n,xout] = hist(X,100);
bar(xout,n/N)
```



Algoritmo para caso discreto



1. Gerar U com distribuição U(0,1) exemplo U=0,7
2. Ir aumentando x e determinar o primeiro para o qual $F(x) \geq U$
3. Devolver esse valor de x

A procura pode ser tornada mais rápida usando técnicas de procura eficientes

Método de procura numa tabela

- Se a função cumulativa for guardada numa tabela, então este algoritmo pode ser visto como uma simples procura numa tabela de

$$i \text{ tal que } F_{i-1} < u \leq F_i$$

- Ou seja:

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{if } U < P_1 \\ x_2, & \text{if } P_1 < U < P_1 + P_2 \\ \vdots & \\ x_j, & \text{if } \sum_{1}^{j-1} P_i < U < \sum_{i}^{j} P_i \\ \vdots & \end{cases}$$

Exemplo de aplicação

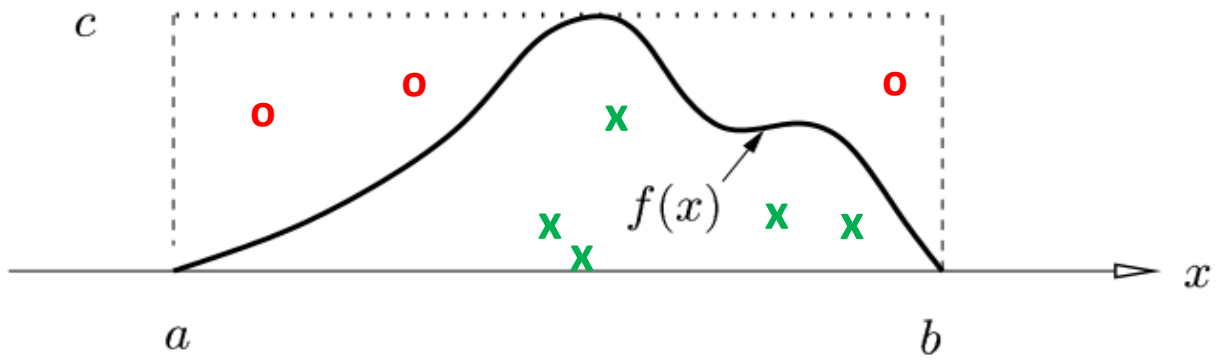
- Gerar pseudo-palavras com as letras assumindo a probabilidade das letras em Português
  - Que já vimos anteriormente

Em Matlab

```
letters='abcde';
% p=[0.0828   0.0084   0.0201   0.0342   0.0792];  % PT real
p=[0.800   0.01   0.01   0.01   0.17];                % fake
p=p/sum(p);  % só existem para nós 5 letras

X= zeros(1,60);
for j=1:60
        U=rand();
        i = 1 + sum( U > cumsum(p) );
        % out sera valor entre 1 e 5
        %  de acordo com as probabilidades p
        X(j)= letters(i);
end
char(X)
```

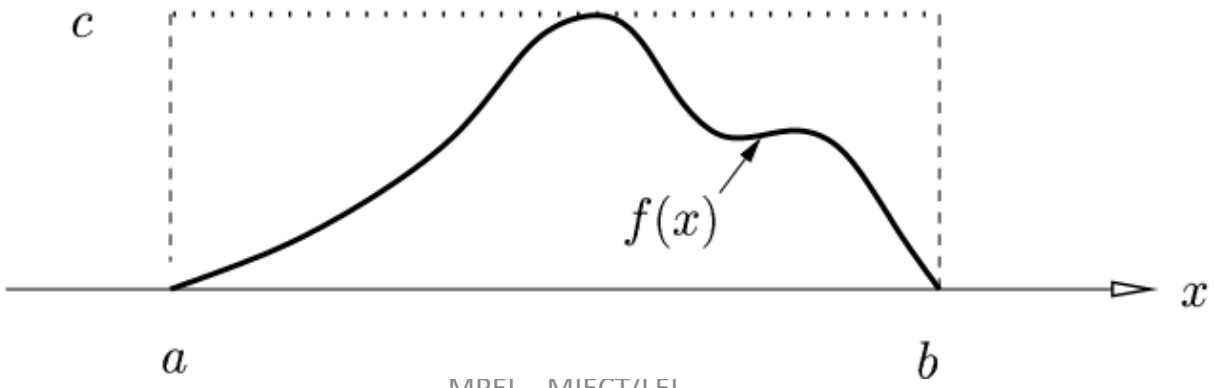
Métodos baseados em Rejeição

- Na sua forma mais simples:
  - define-se uma zona que contém todos os valores da função densidade de probabilidade no intervalo em que está definida
  - Geram-se números com distribuição uniforme nessa zona e rejeitam-se os que ficam acima de f(X)



Algoritmo

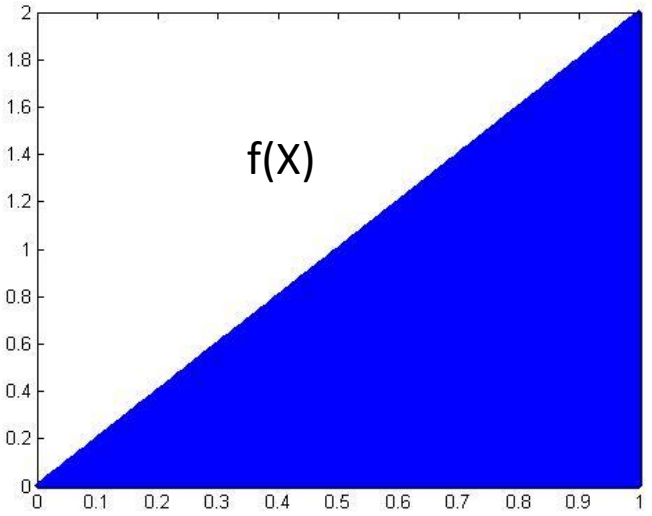
1. Gerar X com distribuição $U(a, b)$
2. Gerar Y com distribuição $U(0, c)$ independente de X
3. Se $Y \leq f(X)$ devolver $Z = X$; Caso contrário ir para o passo 1



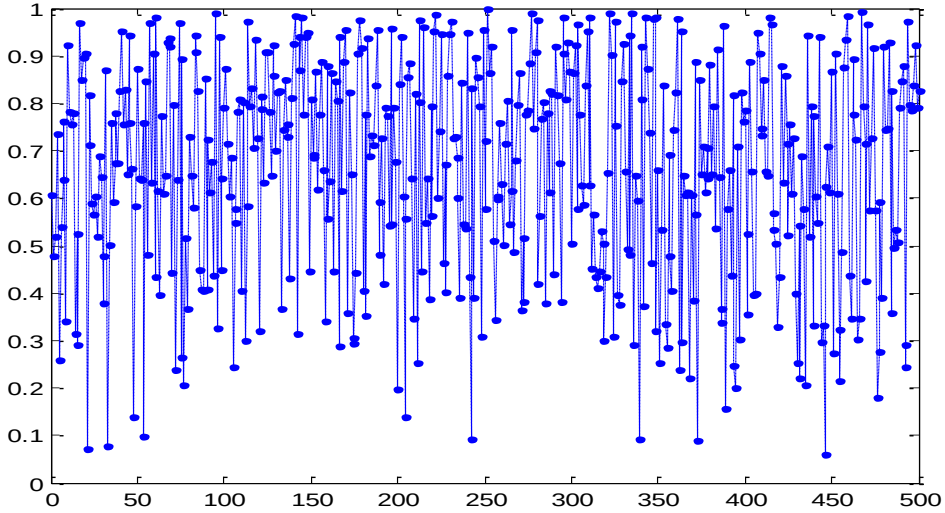
Exemplo

- $f(x) = \begin{cases} 2\,x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & outros\ valores \end{cases}$

- Temos de usar c=2 , a=0 e b=1



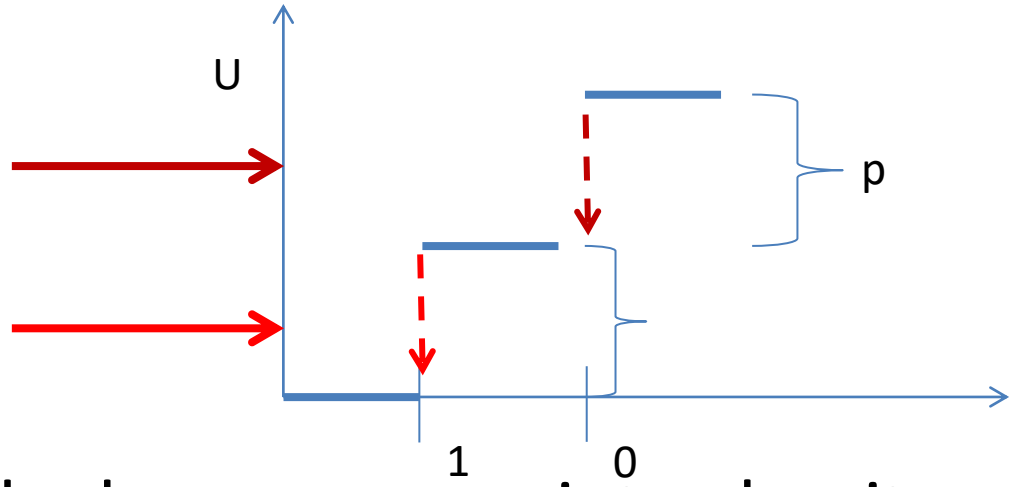

```
%
N=1e6;
X=rand(1,N);
Y=rand(1,N)*2;

Z=X(Y<=2*X);

%  grafico
Y2= Y(Y<=2*X);
plot(Z,Y2,'.')
```



Algoritmos específicos para distribuição mais comuns (discretas)

Bernoulli

- Aplicando o método da transformação inversa para o caso discreto tem-se



- De onde decorre o seguinte algoritmo:

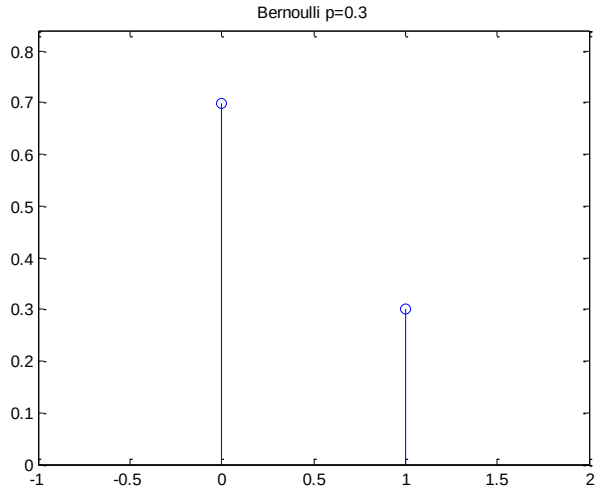
  1 – Gerar U com distribuição U(0,1)

  2 – Se U<= p X=1; caso contrário X=0

Exemplo Matlab

```
function X=Bernoulli (p,N)
X=rand(1,N)<=p

% usando
N=1e6
X=Bernoulli(0.3, N);

myhist(X,'Bernoulli p=0.3')
p=sum(X==1) /N
```

→ 0.2999



Técnicas especiais - Obter Binomial

- Pode obter-se uma variável aleatória Binomial usando o facto de que esta pode ser expressa como a soma de n variáveis de Bernoulli independentes

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma v.a. Binomial com parâmetros *n* e *p* quando X_i é de Bernoulli com parâmetro *p*

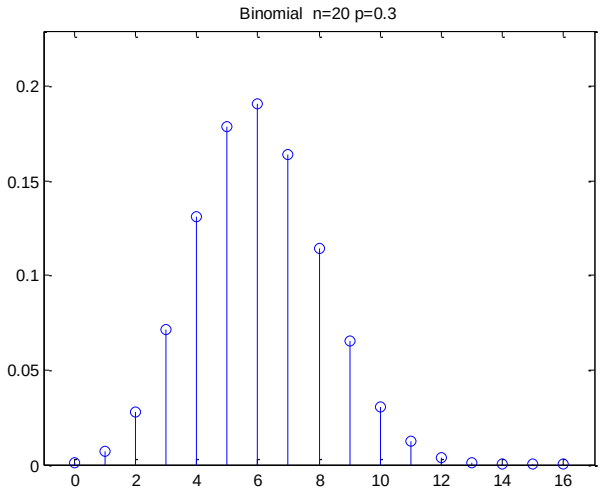
Obter Binomial - Algoritmo

- Gerar variáveis independentes e identicamente distribuídas (iid) $X_1, \ldots, X_n$ usando distribuição de Bernoulli com parâmetro *p*

- Devolver $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

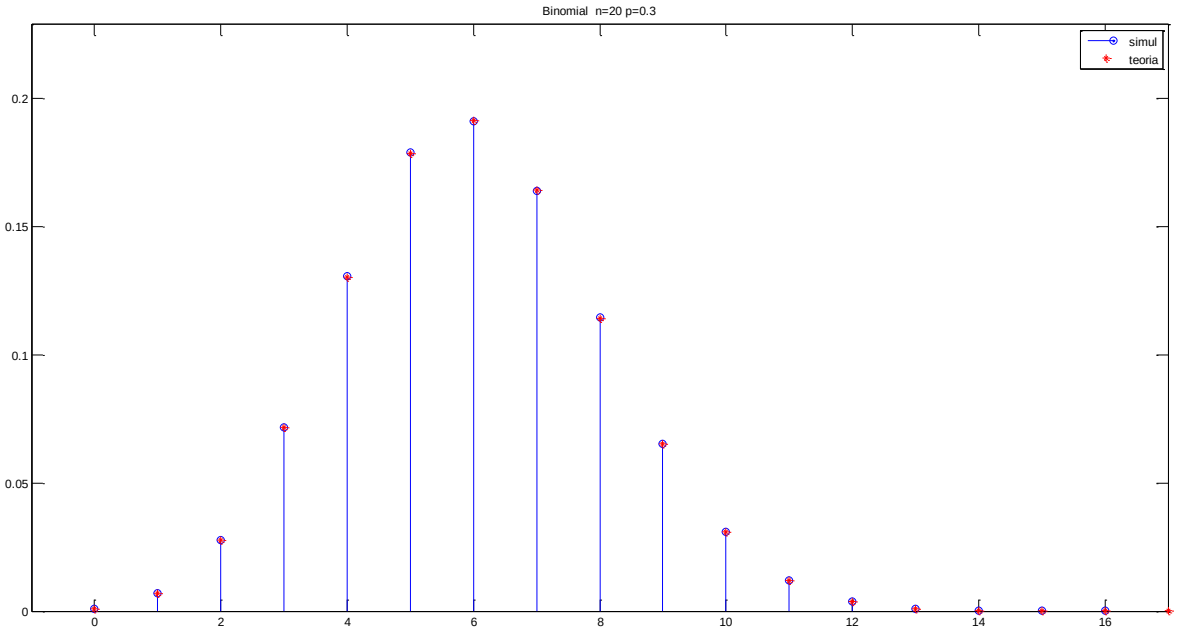
Demo obtenção binomial

```
function X=binomial(n,p, N)
Bern=rand(n,N)<=p;    % n Bernoulli(p)
X=sum(Bern);


% usando
N=1e6;  n=20; p=0.3;
X=binomial(n,p, N);
myhist(X,'Binomial  n=20 p=0.3')
```



Simulação versus teoria

- N=1e6



Algoritmos específicos para distribuição mais comuns (contínuas)

Distrib. Normal – Alg. Box Müller

- Algoritmo de Box e Müller:

1 – Gerar 2 variáveis independentes U_1 e U_2 uniformes em (0,1)

2 – Obter 2 variáveis com distribuição Normal, X e Y, através de:

$$X = (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2) \,,$$
$$Y = (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2) \,.$$

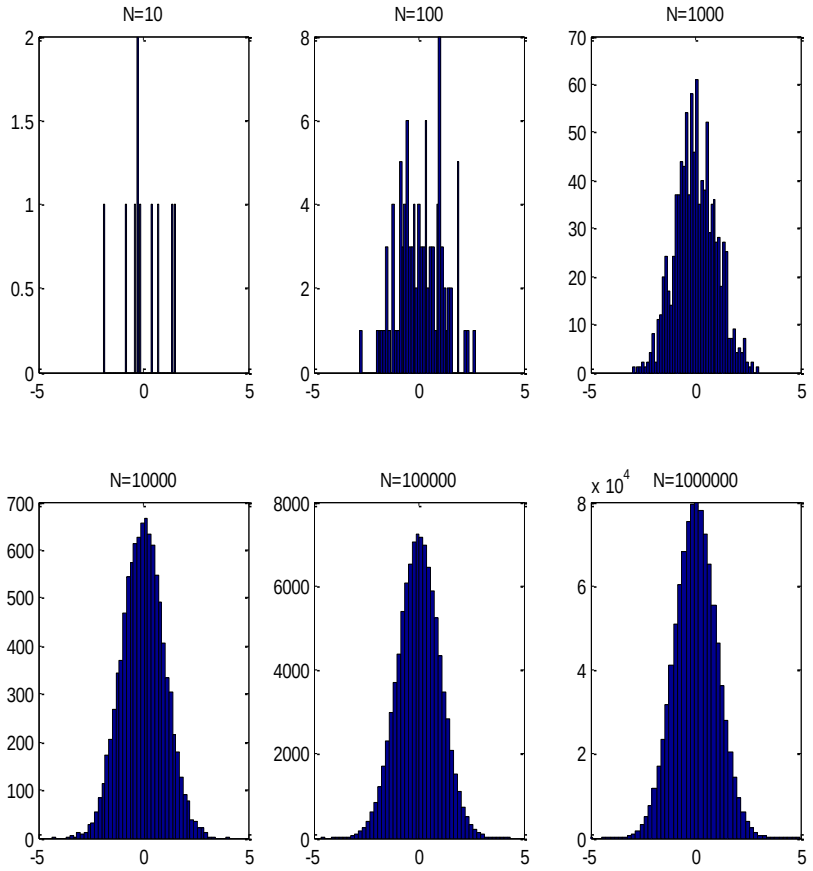
Box Müller em Matlab

```
function[X,Y]=BoxMuller(N)

U1=rand(1,N);    % gerar uma v.a. uniforme
U2=rand(1,N);    % gerar outra v.a. uniforme

X=(-2*log(U1)).^(1/2).* cos(2*pi*U2);
Y=(-2*log(U1)).^(1/2).* sin(2*pi*U2);
```

- Atenção ao uso de .^ e .*

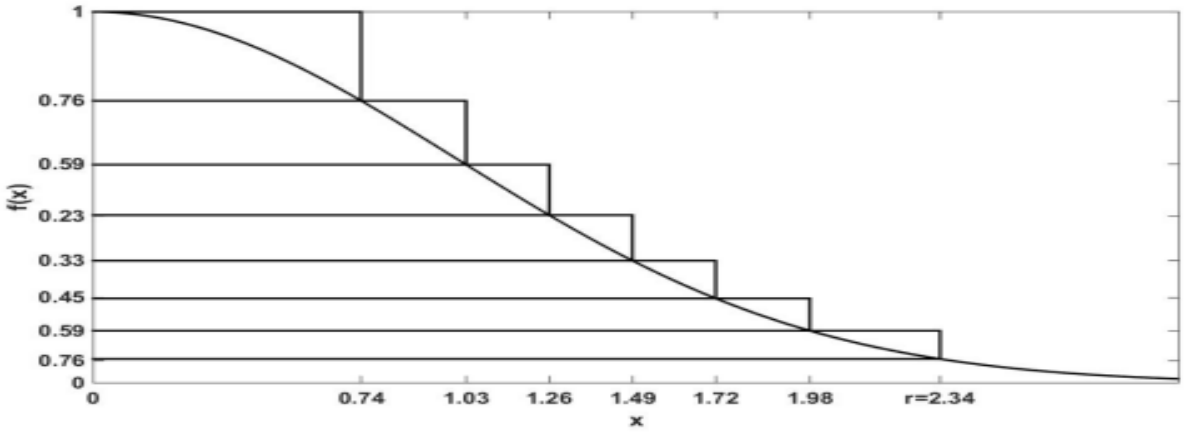
Demonstração em Matlab

```
for i=1:6
    subplot(2,3,i)
    N=10^i;
    [X,Y]=BoxMuller(N);
    hist(X,50)
    title(['N=' num2str(N)]);
    ax=axis;
    ax(1)=-5; ax(2)=5;
    axis(ax)
end
```



Distribuição Normal – Algoritmo Ziggurat

- Desenvolvido por Marsaglia em 2000
- É um método de rejeição
- Utiliza a curva $y = f(x) = e^{-x^2/2}$ para $x > 0$
  - Devido a simetria
- Utiliza um conjunto de tiras com a mesma área e geração de números com distrib. Uniforme



  - Figura faz lembra um Zigurate (antiga Mesopotâmia)

Em Java

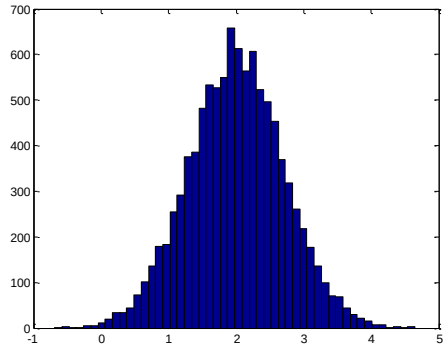
- É similar a gerar números de uma distribuição uniforme
- O exemplo seguinte mostra como gerar um número aleatório de uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1

```
import java.util.*;
Random r = new Random();
g = r.nextGaussian();
```

- De cada vez que se invoca r.nextGaussian() obtém-se um novo número

Distribuição normal no Matlab

- Em Matlab está disponível a função **randn()**
  - **Gera números aleatórios com uma distribuição Normal de média 0 e variância 1**



- Para obter outras médias e variâncias basta aplicar uma transformação
- O comando randn() utliza o algoritmo Ziggurat

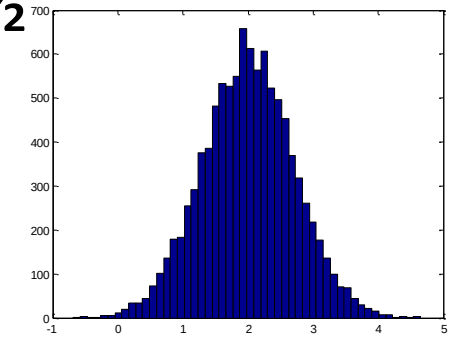
randn() Matlab

- Utilizando as já referidas propriedades
  $E(X + c) = E(X) + c$
  e $Var(cX) = c^2 Var(X)$

podem gerar-se valores de distribuições com média e variância arbitrárias

- Exemplo: média 2 e variância ½

```
Y=sqrt(1/2) * randn(1, 1e4)+2;
hist(Y,50)
```



Outras distribuições em Matlab

- Exemplos de distribuições **discretas**

Distribution	**Random Number Generation Function**
Binomial	binornd, random, randtool
Geometric	geornd, random, randtool
Negative binomial	nbinrnd, random, randtool
Poisson	poissrnd, random, randtool
Uniform (discrete)	unidrnd, random, randtool

- Fonte: https://www.mathworks.com/help/stats/random-number-generation.html

Outras distribuições em Matlab

- Exemplos de distribuições **contínuas**

Distribution	**Random Number Generation Function**
Chi-square	chi2rnd, random, randtool
Exponential	exprnd, random, randtool
Gamma	gamrnd, randg, random, randtool
Normal (Gaussian)	normrnd, randn, random, randtool
Rayleigh	raylrnd, random, randtool
Student's t	trnd, random, randtool
Uniform (continuous)	unifrnd, rand, random

- Fonte: https://www.mathworks.com/help/stats/random-number-generation.html

Para aprender mais

- Online
  - Capítulo “RANDOM NUMBERS, RANDOM VARIABLES AND STOCHASTIC PROCESS GENERATION” http://moodle.technion.ac.il/pluginfile.php/220739/mod_resource/content/0/slava_fall_2010/Random_number_2_.pdf
- Cap. 1 e Apêndice B do livro “Probabilidades e Processos Estocásticos”, F. Vaz, Universidade de Aveiro

MPEI

Funções de dispersão

(*Hash functions*)

Motivação

- Em muitos programas de computador torna-se necessário aceder a informação através de uma chave
  - Exemplo:
    - Obter nome associado a um número de telefone

- Em Java, por exemplo, temos estruturas de dados como HashMap e Hashtable

Um dicionário simples: `Hashtable`

- Para criar uma *Hashtable*:

```
import java.util.*;
Hashtable table = new Hashtable();
```

- Para colocar elementos (par chave-valor) na Hashtable, usa-se:

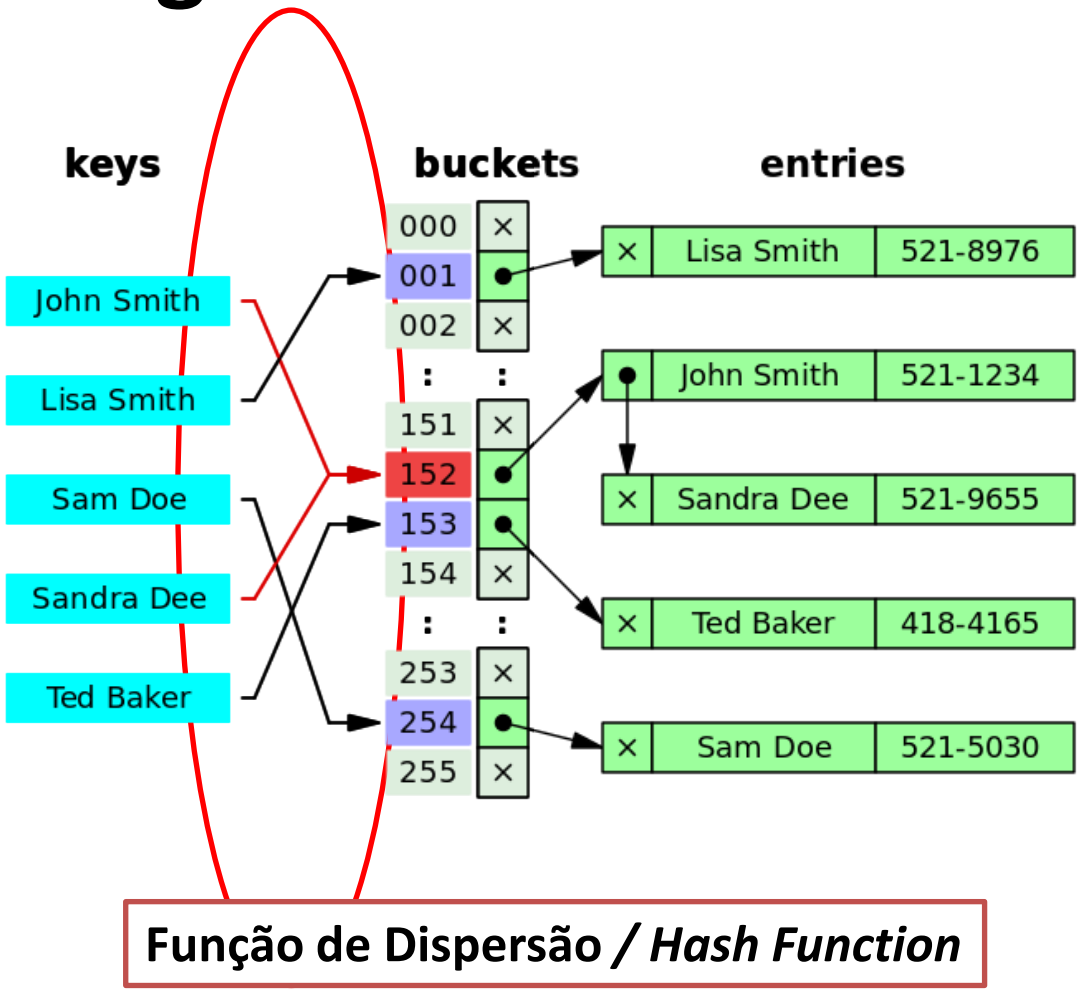
```
table.put(chave, valor);
```

- Para obter um valor:

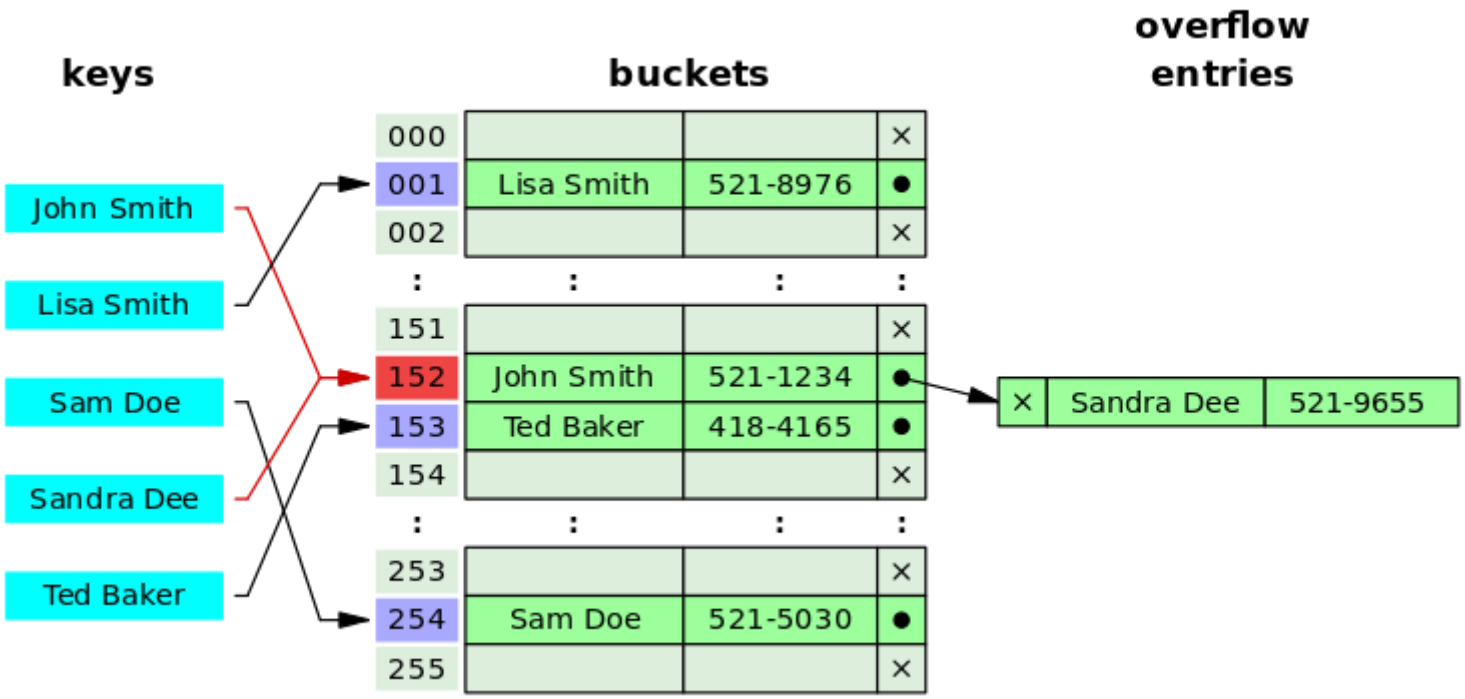
```
valor = table.get(chave);
```

Implementação comum
Separate chaining with linked lists

- As chaves são transformadas em posições num array
  - usando uma função
- Cada posição do array é o início de uma lista ligada



Outra implementação
Separate chaining with list head cells



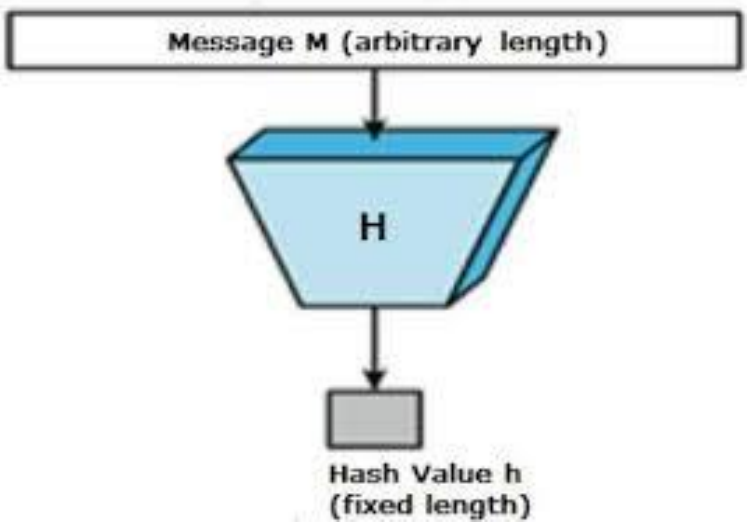
Função de dispersão

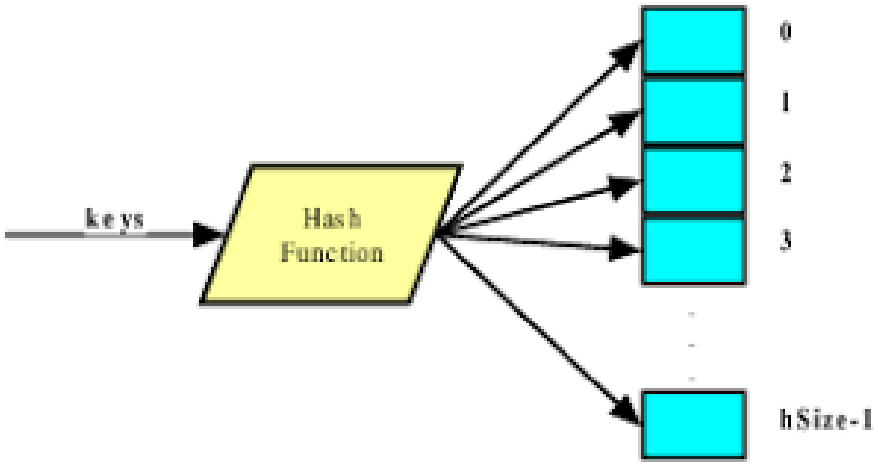
- Em termos gerais, uma função de dispersão -- em Inglês *hash function* - é qualquer algoritmo que **mapeia um conjunto grande e de tamanho variável para um conjunto de tamanho fixo de menor dimensão**

- É, como veremos, essencial para muitas aplicações

Função de dispersão / Hash function

- Uma função de dispersão (hash function) **mapeia** símbolos de um **universo U** num conjunto de M valores, em geral inteiros





- Processo pode ser visto como a atribuição de uma posição num vetor de M posições, entre 0 e M-1, a cada símbolo.
  - As posições designam-se nuitas vezes por *buckets*

Hash Code

- O conjunto dos símbolos efetivamente usados numa determinada aplicação é, em geral, apenas uma parte do universo de valores (U) pelo que faz todo o sentido usar um **valor de M muito menor do que a dimensão de U**
  - Muitas vezes os valores designam-se por chaves

- Uma função de dispersão recebe um elemento de U como entrada e devolve um número inteiro h no intervalo $0, \ldots, M-1$
  - h é o Código de dispersão (em Inglês **hash code**)

Funções de dispersão / Hash functions

- Qualquer função que mapeie uma chave do universo U no intervalo $0..M-1$ é uma função de dispersão em potencial.
- No entanto, uma tal função só é eficiente se distribuir as chaves pelo intervalo de uma forma razoavelmente uniforme
  - mesmo quando existem regularidades nas chaves.

- Uma função de dispersão ideal mapeia as chaves em inteiros de uma forma aleatória
  - De forma a que as *keys* sejam igualmente distribuídos pelos *buckets.*

- É fundamental que a função de dispersão seja uma função no sentido matemático do termo,
  - Isto é, que para cada chave a função devolva sempre o mesmo código

Funções de dispersão / Hash functions

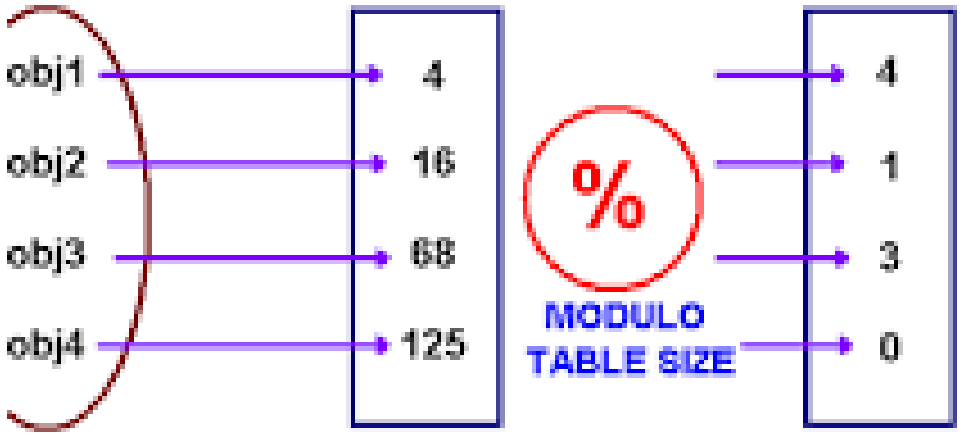
- Uma função de dispersão ideal mapeia as chaves em inteiros de uma forma aleatória,
  - De forma a que os valores sejam igualmente distribuídos, mesmo quando existem regularidades nas chaves

- As funções de dispersão são tipicamente transformações matemáticas pseudo-aleatórias, existindo uma grande variedade, com diferentes graus de complexidade e diferentes desempenhos
  - Em geral o desempenho depende da aplicação pelo que é recomendável testar várias.

Funções de dispersão

- O processo pode ser dividido em dois passos:

1. Mapeamento do elemento para um inteiro
2. Mapeamento do inteiro para um conjunto limitado (de inteiros).



HASH TABLE

OBJ4	OBJ2		OBJ3	OBJ1
0	1	2	3	4

Notação

- Adopta-se para a representação das funções de dispersão
  $h()$
  - do Inglês hash function

- e k para uma chave
  - do Inglês key

Funções de dispersão - colisões

- Como o número de elementos de U é em geral maior que M, é inevitável que a função de dispersão mapeie vários elementos diferentes no mesmo valor de h, situação em que dizemos ter havido uma **colisão**

- Por exemplo, sendo k um elemento de U e a função de dispersão:

$$h(k, M) = k \; mod \; M$$

- teremos colisões para $k, M + k, 2M + k, \ldots$

Exemplo muito simples

Considere o universo U é o conjunto dos números inteiros que vai de 100001 a 9999999. Suponha que $M = 100$ e se adota os dois últimos dígitos da chave como código de dispersão (em outras palavras, o código é o resto da divisão por 100). Calcule os códigos (*hash codes*) para 123456, 7531 e3677756.

Resultado:

chave	código
123456	56
7531	31
3677756	56

Propriedades

- Requer-se, em geral, que as funções de dispersão satisfaçam algumas propriedades, como:

- Serem determinísticas

- **Uniformidade**:
  - Uma boa função de dispersão deve mapear as entradas esperadas de forma igual por toda a gama de valores possíveis para a sua saída

  - Todos os valores possíveis para a função de dispersão devem ser gerados com aproximadamente a mesma probabilidade

Funções de dispersão para inteiros

- Estas funções mapeiam uma única chave inteira k num número inteiro $h(k)$ entre M possíveis

- Existem vários tipos:
  - baseadas em divisão
  - baseadas em multiplicação
  - membros de famílias universais.

Método da Divisão

- Utiliza o resto da divisão por M
- A fução de de dispersão é

$$h(k) = k \; mod \; M$$

  - M é o número de posições (igual ao tamanho da tabela), que deve ser um número primo
- Exemplo: se $M = 12$ e a chave $k = 100$ temos $h(k) = 4$

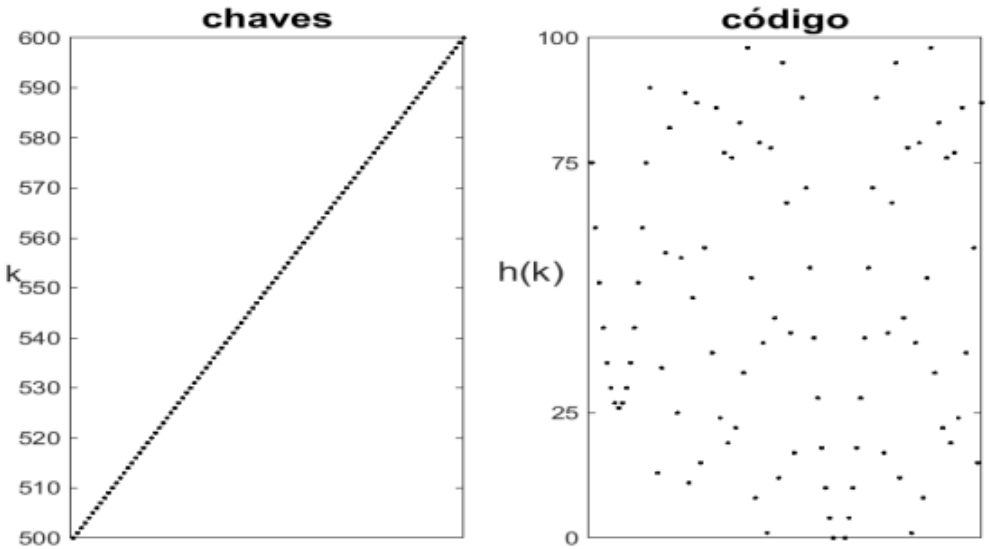
- Método bastante rápido
  - Requer apenas uma operação de divisão

- Funciona muito mal para muitos tipos de padrões nas chaves
- Foram desenvolvidas variantes como a de Knuth:

$$h(k) = k(k+3) \; mod \; M$$

Exemplo: Variante de Knuth

- $h(k) = k(k+3)\ mod\ M$
- $M = 113$
- Aplicação a todos os inteiros de 500 a 600.



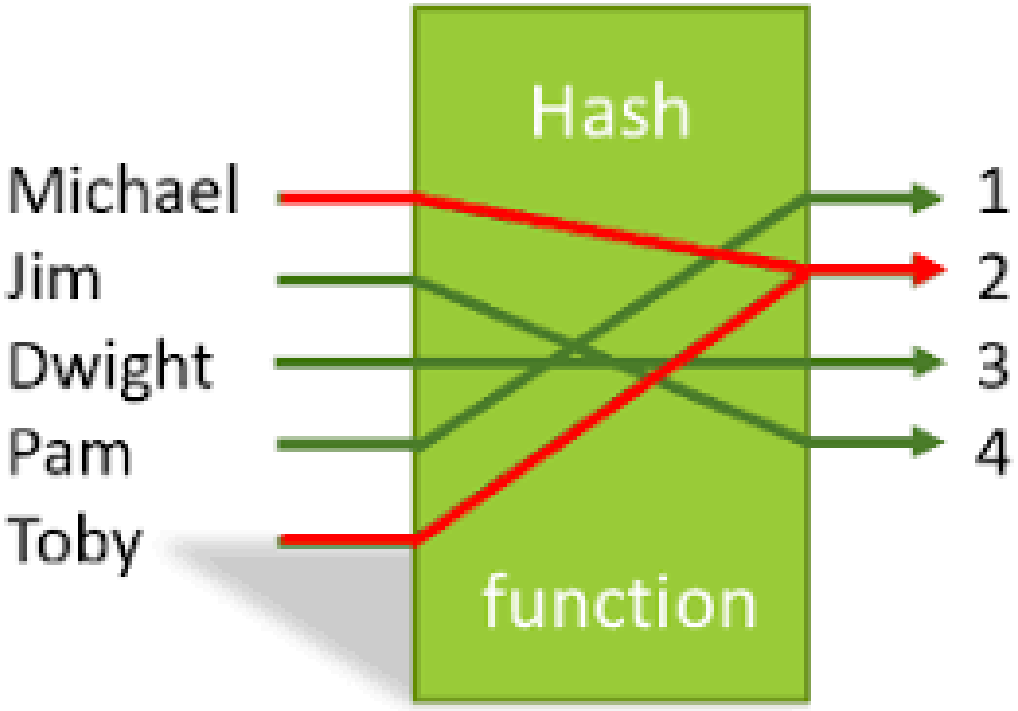
- A sequência igualmente espaçada de números (à esquerda) é dispersada sem regularidade aparente
  - que é o que se pretende de uma boa função de dispersão

Método da multiplicação

- Este método opera em duas etapas:
  - primeiro, multiplica-se a chave por uma constante A, $0 < A < 1$, e extrai-se a parte fraccionária de kA;
  - de seguida,multiplica-se por M e arredonda-se para o maior inteiro menor ou igual ao valor obtido
- Matlab:

```
function h = hmultiplic(k,M)
% Função de dispersão para  baseada na multiplicação
% Entradas:   k - chave;
%             M  - núm. de valores possíveis [0,M-1]

A= 0.5*(sqrt(5) - 1);

h=floor(M*(mod(k*A,1)));
```

Função de dispersão de uma sequência de caracteres



Função de dispersão de uma sequência de caracteres

- Uma função de dispersão para cadeias de caracteres (strings) calcula a partir desta, qualquer que seja o seu tamanho, um inteiro
- Como sabemos uma sequência de caracteres (String) é em geral representada como uma sequência de inteiros
- Em consequência, a função de dispersão para Strings tem por entrada uma sequência de inteiros

$$k = k1, \ldots, ki, \ldots., kn$$

- e produz um número inteiro pequeno $h(k)$

- Os algoritmos para este tipo de entrada assumem que os inteiros são de facto códigos de caracteres

Função de dispersão de uma sequência de caracteres

- Os algoritmos para este tipo de entrada fazem em geral o uso do seguinte:
- Em muitas linguagens um caracter é representado em 8 bits
- O código ASCII apenas usa 7 desses 8 bits
- Desses 7, os caracteres comuns apenas usam os 6 menos significativos
  - E o mais significativo desses 6 indica essencialmente se é maiúscula ou minúscula, muitas vezes pouco relevante

- Em consequência os algoritmos concentram-se na preservação do máximo de informação dos 5 bits menos significativos, fazendo muito menos uso dos 3 bits mais significativos

Função de dispersão de uma sequência de caracteres (String)

- Em geral, o processamento efetuado consiste em:
  - inicializar h com 0 ou outro valor inicial
  - Percorrer a sequência de inteiros (representando os caracteres) combinando os inteiros ki, um por um, com h
    - Os algoritmos diferem na forma como combinam ki com h
  - Obtenção do resultado final através de h mod M (método da divisão).

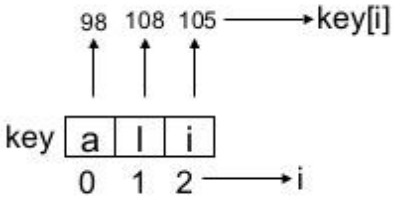
- Para evitar ao máximo problemas com overflow, em geral os inteiros ki são representados por números inteiros sem sinal (unsigned int)
  - A utilização de representações de inteiros com sinal pode resultar em comportamentos estranhos

Exemplo simples

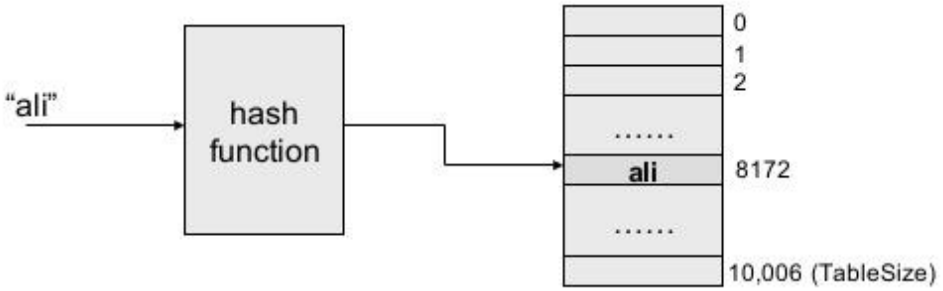
$$hash(key) = \sum_{i=0}^{KeySize-1} Key[KeySize - i - 1] \cdot 37^i$$

```
int hash (const string &key, int tableSize)
{
   int hashVal = 0;

   for (int i = 0; i < key.length(); i++)
      hashVal = 37 * hashVal + key[i];

   hashVal %=tableSize;
   if (hashVal < 0)    /* in case overflows occurs */
      hashVal += tableSize;

   return hashVal;
};
```

Hash function for strings:



hash("ali") = (105 * 1 + 108*37 + 98*37²) % 10,007 = 8172



CENG 213 Data Structures 12

Exemplo – hashCode() do Java

- A classe java.lang.String implementa desde o Java 1.2 a função hashCode() usando um somatório de produtos envolvendo todos os caracteres
- Uma instância s da classe java.lang.String tem o seu código h(*s*) definido por:

$$h(s) = \sum_{i=0}^{n-1} s\,[\,i\,] \cdot 31^{n-1-i}$$

- com *s*[*i*] representando o código UTF-16 do caracter *i* da cadeia de comprimento *n*
- A adição é efectuada usando 32 bits

Alguns algoritmos – variante CRC

- Fazer um shift circular de 5 bits para a esquerda ao h.
- De seguida fazer XOR de h com ki.

CRC variant: Do a 5-bit left circular shift of h. Then XOR in ki. Specifically:

```
highorder = h & 0xf8000000    // extract high-order 5 bits from h
                              // 0xf8000000 is the hexadecimal representation
                              //   for the 32-bit number with the first five
                              //   bits = 1 and the other bits = 0
h = h << 5                    // shift h left by 5 bits
h = h ^ (highorder >> 27)     // move the highorder 5 bits to the low-order
                              //   end and XOR into h
h = h ^ ki                    // XOR h and ki
```

Alguns Algoritmos– PJW hash

- Deslocar (shift) h 4 bits para a esquerda
- Adicionar ki
- Mover 4 bits mais significativos

PJW hash (Aho, Sethi, and Ullman pp. 434-438): Left shift h by 4 bits. Add in ki. Move the top 4 bits of h to the bottom. Specifically:

```
// The top 4 bits of h are all zero
h = (h << 4) + ki                 // shift h 4 bits left, add in ki
g = h & 0xf0000000                // get the top 4 bits of h
if (g != 0)                       // if the top 4 bits aren't zero,
   h = h ^ (g >> 24)              //   move them to the low end of h
   h = h ^ g
// The top 4 bits of h are again all zero
```

Exemplo de uma função completa

- Mapeia uma string de comprimento arbitrário num inteiro (>=0)
- DJB31MA

```
uint hash(const uchar* s, int len, uint seed)
{
    uint h = seed;
    for (int i=0; i < len; ++i)
        h = 31 * h + s[i];
    return h;
}
```

  - Fonte: Paulo Jorge Ferreira “MPEI – summary” 2014

Exemplo Matlab

```
function hash=string2hash(str,type)
% This function generates a hash value from a text string
%
% hash=string2hash(str,type);
%
% inputs,
%   str : The text string, or array with text strings.
% outputs,
%   hash : The hash value, integer value between 0 and 2^32-1
%   type : Type of has 'djb2' (default) or 'sdbm'
%
% From c-code on : http://www.cse.yorku.ca/~oz/hash.html
 .....
```

- From: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27940-string2hash/content/string2hash.m

Exemplo Matlab

```
str=double(str);

hash = 5381*ones(size(str,1),1);

for i=1:size(str,2),
    hash = mod(hash * 33 + str(:,i), 2^32-1);
end
```

Exemplos de uso ($M = 11$):

```
k = António          ->  h(k) = 4
k = Antónia          ->  h(k) = 1
k = Manuel           ->  h(k) = 6
k = Manu             ->  h(k) = 4
k = Manuela          ->  h(k) = 0
k = Vitor            ->  h(k) = 0
```

Problemas

- As funções de dispersão terão que lidar com conjuntos $S \subseteq U$ com $|S| = n$ chaves não conhecidos de antemão
- Normalmente, o objetivo destas funções é obter um número baixo de colisões (chaves de *S* que mapeiam na mesma posição)

- Uma função de dispersão determinística (fixa) não pode oferecer qualquer garantia de que não ocorrerá o pior caso:
  - um conjunto *S* com todos os elementos a serem mapeados na mesma posição, tornando a função de dispersão inútil em muitas situações.
- Além disso, uma função determinística não pode ser alterada facilmente em situações em que ocorram muitas colisões.

Solução

- A solução para estes problemas consiste em **escolher uma função aleatoriamente de uma família de funções**,

- Têm particular interesse as famílias de funções universais.

Funções de dispersão universais

- Uma família *H* de funções de dispersão *h* é universal se:

$$\forall x, y \in U,\ x \neq y: \quad P_{h \in H}[h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{M}$$

- Por palavras…
- **quaisquer duas chaves do universo colidem com probabilidade máxima igual a $1/M$** quando a função de dispersão h é extraída aleatoriamente de H

  – exatamente a probabilidade de colisão esperada caso a função de dispersão gerasse códigos realmente aleatórios para cada chave.

Funções de dispersão universais

- Esta solução garante um baixo número de colisões em média, mesmo no caso de os dados serem escolhidos por alguém interessado na ocorrência do pior cenário (ex: *hacker*).
- Este tipo de funções pode utilizar mais operações do que as funções que vimos anteriormente

- Existe uma diversidade de famílias universais e métodos para as construir
  - Veremos a seguir alguns

Método de Carter Wegman

- A proposta original, de Carter e Wegman, consiste em escolher um primo $p \geq M$ e definir

$$h_{a,b}(x) = ((ax + b) \bmod p) \bmod M$$

- sendo *a* e *b* inteiros aleatórios módulo *p*

- Trata-se de uma iteração de um gerador de números aleatórios de congruência linear.

Método da Matriz

- Este método baseia-se em:

1. considerar as **chaves na sua representação binária**
2. construir uma matriz de bits aleatoriamente

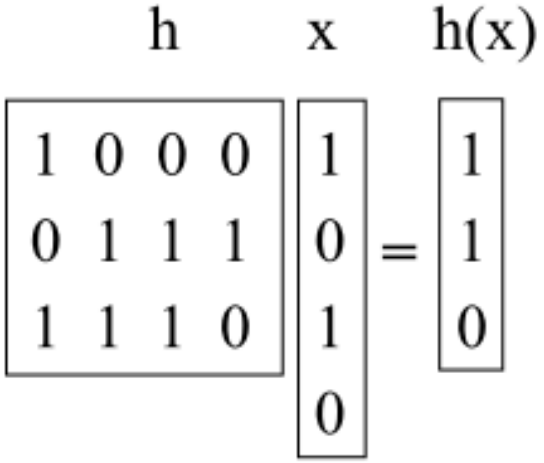
3. multiplicar a chave e matriz

Método da Matriz (continuação)

- Consideremos que as chaves são representáveis por u bits
- Sendo M uma potência de 2 : $M = 2^b$
- Criar uma matriz h de 0s e 1s de forma aleatória
  - a matriz terá dimensões b x u

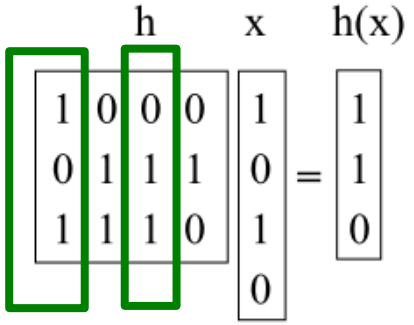
- Definir $h(x) = hx$
  - usando adição mod 2

- Examplo:
  - u = 4
  - b= 3



O que significa hx ?

- Pode ser interpretada como a adição de algumas das colunas de h, aquelas em que *x* tem o valor 1 nas linhas



- No exemplo:
- A 1ª e 3ª coluna são somadas
  - 1 + 0 = 1
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 1 = 0

Método da matriz

Propriedade. *A função de dispersão h(x) definida desta forma terá:*

$$\forall\, x \neq y, \quad P_{h\in H}[h(x) = h(y)]) = \frac{1}{M} = \frac{1}{2^b}$$

Demonstração:

- Um par de chaves diferentes x *e* y difere em algum dos bits. Consideremos que diferem no bit na posição *i* e que $x_i = 0$ e $y_i = 1$.
- Se selecionarmos toda a matriz *h* exceto a coluna *i* obteremos um valor fixo para $h(x)$;
- No entanto, cada uma das 2^b diferentes possibilidades da coluna *i* implica um valor diferente para *h*(*y*), pois sempre que se muda um valor nessa coluna muda o bit correspondente em *h*(*y*);
- Em consequência temos exatamente a probabilidade $1/2^b$ de $h(x) = h(y)$.

Outro método

- Mais eficiente do que o da matriz
- A chave é representa por um **vetor de inteiros**
  - Em vez do vetor de bits do método da matriz

$[x_1, x_2, \ldots, x_k]$

  - x_i pertencendo a $\{0,1, \ldots, M-1\}$
  - k é o tamanho do vetor
  - M um número primo

- Exemplo:
  - Em Strings, x_i pode representar o código do caracter i

Outro método (continuação)

- Para seleccionar uma função de dispersão h escolhem-se k números aleatórios

$$r_1, r_2, \ldots, r_k \quad \text{de } \{0,1, \ldots, M-1\}$$

- E define-se :

$$h(x) = (r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_k\, x_k)\ mod\ M$$

Exemplo Matlab

```
s='Métodos Probabilísticos'
M=  113;

% converter para vetor
x=double(s)

% gerar vetor r
r=randi(M-1,1,length(x))

% h(x) =  r * x  mod M
h=mod( r* x', M)
```

Demonstração da universalidade

- A demonstração segue a mesma linha da apresentada anteriormente para o método da matriz

- Considere-se duas chaves distintas x e y
- Pretendemos demonstrar que

$$P[h(x) = h(y)] \leq 1/M$$

Demonstração da universalidade

Como $x \neq y$, existe pelo menos um indíce i tal que $x_i \neq y_i$. Selecionando todos os números aleatórios r_j com $j \neq i$ podemos definir $h^{'}(x) = \sum_{j \neq i} r_j x_j$.

Desta forma, ao escolher um valor para r_i teremos $h(x) = h^{'}(x) + r_i x_i$.

Teremos uma colisão entre x e y exatamente quando

$$h^{'}(x) + r_i x_i = h^{'}(y) + r_i y_i \ mod \ M$$

ou, de forma equivalente, quando

$$r_i(x_i - y_i) = h^{'}(y) - h^{'}(x) \ mod \ M \ .$$

Demonstração da universalidade

Como M é primo, a divisão por um valor não nulo módulo M é possível e existe apenas um único valor $r_i \ mod \ M$ que constitui a solução, mais exactamente

$$r_i = \frac{h^{'}(y) - h^{'}(x)}{x_i - y_i} \ mod \ M$$

Temos assim apenas uma possibilidade de igualdade entre 1 e $M - 1$ e, em consequência, a probabilidade de colisão é exatamente $1/M$, como pretendíamos demonstrar.

□

Exemplo em Matlab

```
%
function InitHashFunction(this)
    % Set prime parameter
    ff = 1000; % fudge factor
    pp = ff * max(this.m + 1,76);
    pp = pp + ~mod(pp,2); % make odd
    while (isprime(pp) == false)
        pp = pp + 2;
    end
    this.p = pp; % sufficiently large prime number

    % Randomized parameters
    this.a = randi([1,(pp - 1)]);
    this.b = randi([0,(pp - 1)]);
    this.c = randi([1,(pp - 1)]);
end
```

Exemplo em Matlab - HashCode()

```
    function hk = HashCode(this,key)
        % Convert character array to integer array
        ll = length(key);
        if (ischar(key) == false)
            % Non-character key
            HashTable.KeySyntaxError();
        end
        key = double(key) - 47; % key(i) = [1,...,75]

        %
        % Compute hash of integer vector
        %
        % Reference: http://en.wikipedia.org/wiki/Universal_hashing
        %            Sections: Hashing integers
        %                      Hashing strings
        %
        hk = key(1);
        for i = 2:ll
            % Could be implemented more efficiently in practice via bit
            % shifts (see reference)
            hk = mod(this.c * hk + key(i),this.p);
        end
        hk = mod(mod(this.a * hk + this.b,this.p),this.m) + 1;
    end
end
```

Como ter *n* funções de dispersão ?

Possíveis soluções:

1. Ter mesmo *n* funções diferentes
2. Usar funções customizáveis (definindo uma família de funções) e usando parâmetros diferentes
3. Usar a mesma função de dispersão e processar a chave por forma a ter *n* chaves diferentes baseadas na chave original

Exemplo (Matlab):

```
for i=1:n
    str= [str num2str(i)];
    h=HashCode(hash,m,str);
end
```

Propriedades (continuação)

- As *n* funções de dispersão devem cumprir um requisito adicional:
- Produzir resultados **não-correlacionados**
- Esta propriedade é muito importante e é aconselhável verificá-la/avaliá-la em trabalhos envolvendo várias funções

“Teste” de funções de dispersão

- Um teste simples e básico consiste em:

1. Gerar um conjunto grande de chaves (pseudo)aleatórias

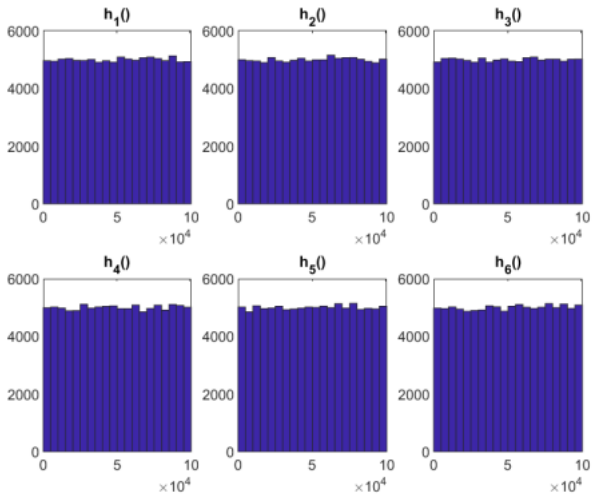
2. Processar todas essas chaves com as *n* funções de dispersão
   - Guardando os resultados produzidos (*hash codes*)

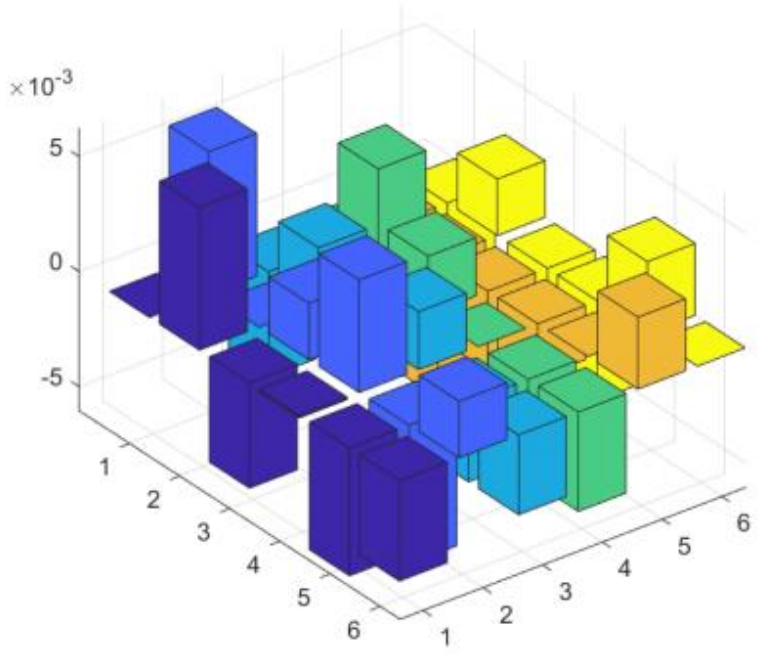
3. Analisar o histograma de cada função de dispersão
   - Para verificar a uniformidade da distribuição dos *hash codes*

4. Calcular, visualizar e analisar as correlações entre os resultados produzidos pelas várias funções de dispersão

Exemplo

- Teste com 100 mil números de 6 funções (h1, . . . , h7)





Funções de dispersão criptográficas

- Para este tipo de funções (cryptographic hash functions) M é um número exponencialmente grande
  - Como 2^{256}
- A tabela seria maior que o número de eletrões no universo!
- Mas não temos a tabela… $h(k)$ é apenas uma impressão digital (fingerprint) de k.

- Mesmo para *M* com valores muito grandes os indíces de h(k) são pequenos
  - Ex: apenas 256 bits (32 bytes) para $M = 2^{256}$

- **A principal propriedade** requerida para uma função de dispersão criptográfica é de que seja computacionalmente intratável para alguém descobrir $y \neq x$ tal que $h(y) = h(x)$

cryptographic hash functions

- For cryptographic hash functions M is as an exponentially large number, like 2^256.
- The table would be bigger than the # electrons in the universe!
- But we don't have the table. Instead, h(x) is a "fingerprint" of x.

- Note that even for M very big (like 2^256) the indices h(x) are fairly small
  - e.g., only 256 bits (32 bytes)

- The main property you want for a cryptographic hash function is that given x, it should be computationally intractable for anyone to find $y \neq x$ such that $h(y) = h(x)$

Alguns links

- http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27940-string2hash/content/string2hash.m
- http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/45123-data-structures/content/Data%20Structures/Hash%20Tables/HashTable.m
- http://www.cse.yorku.ca/~oz/hash.html
- http://programmers.stackexchange.com/questions/49550/which-hashing-algorithm-is-best-for-uniqueness-and-speed
- https://www.cs.hmc.edu/~geoff/classes/hmc.cs070.200101/homework10/hashfuncs.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hash_function#Properties
- https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_hashing
- http://www.i-programmer.info/programming/theory/2664-universal-hashing.html

Funções de Dispersão Universais

- https://www.cs.cmu.edu/~avrim/451f11/lectures/lect1004.pdf
- https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/video-lectures/lecture-8-universal-hashing-perfect-hashing/lec8.pdf
- http://cs-www.bu.edu/faculty/homer/537/talks/SarahAdelBargal_UniversalHashingnotes.pdf

MPEI

Solução Probabilística
do
Problema da Pertença a um Conjunto

Definição do problema

- Em termos gerais o problema pode ser colocado da seguinte forma:

- Dado um **elemento *e*** e um **conjunto C**, ***e* pertence a *C ?***

- O elemento pode ser, por exemplo, uma String

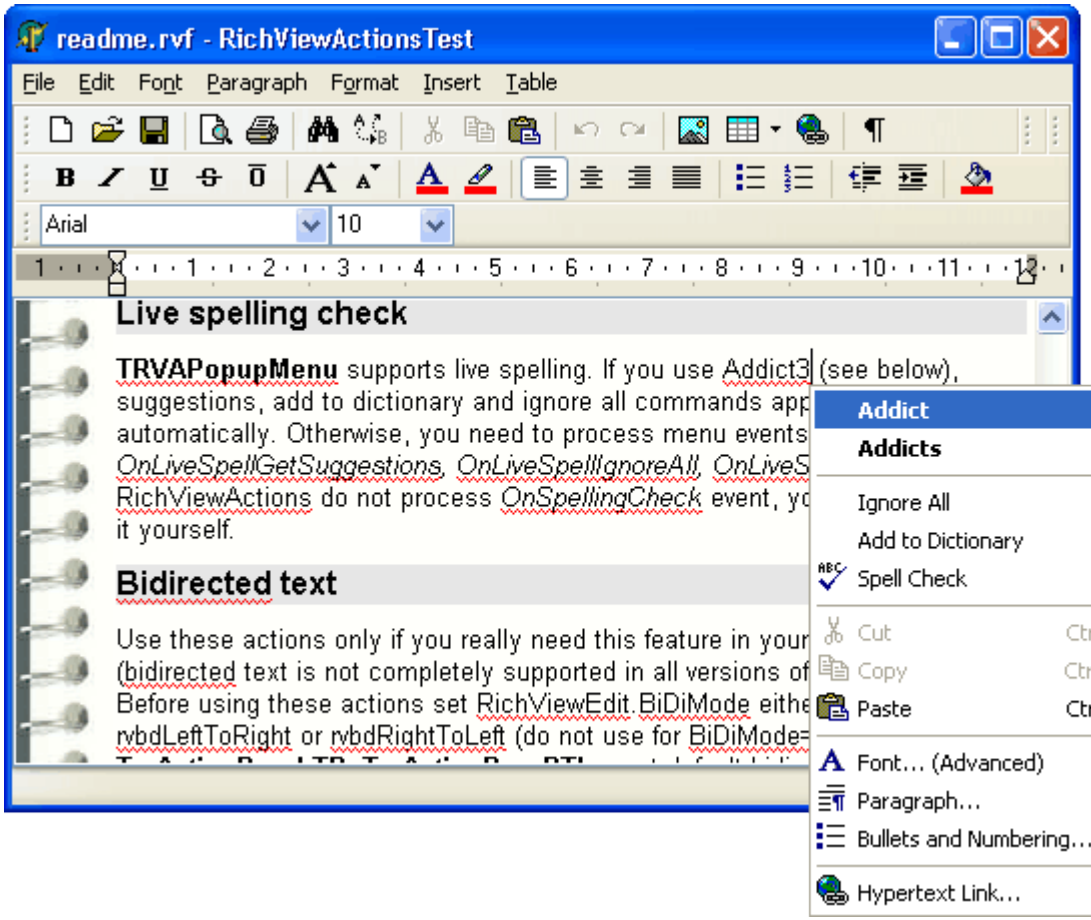
Problema para conjuntos de grandes dimensões

- A resolução deste tipo de problemas para pequenos conjuntos é fácil
  - usando, por exemplo, *hash tables*

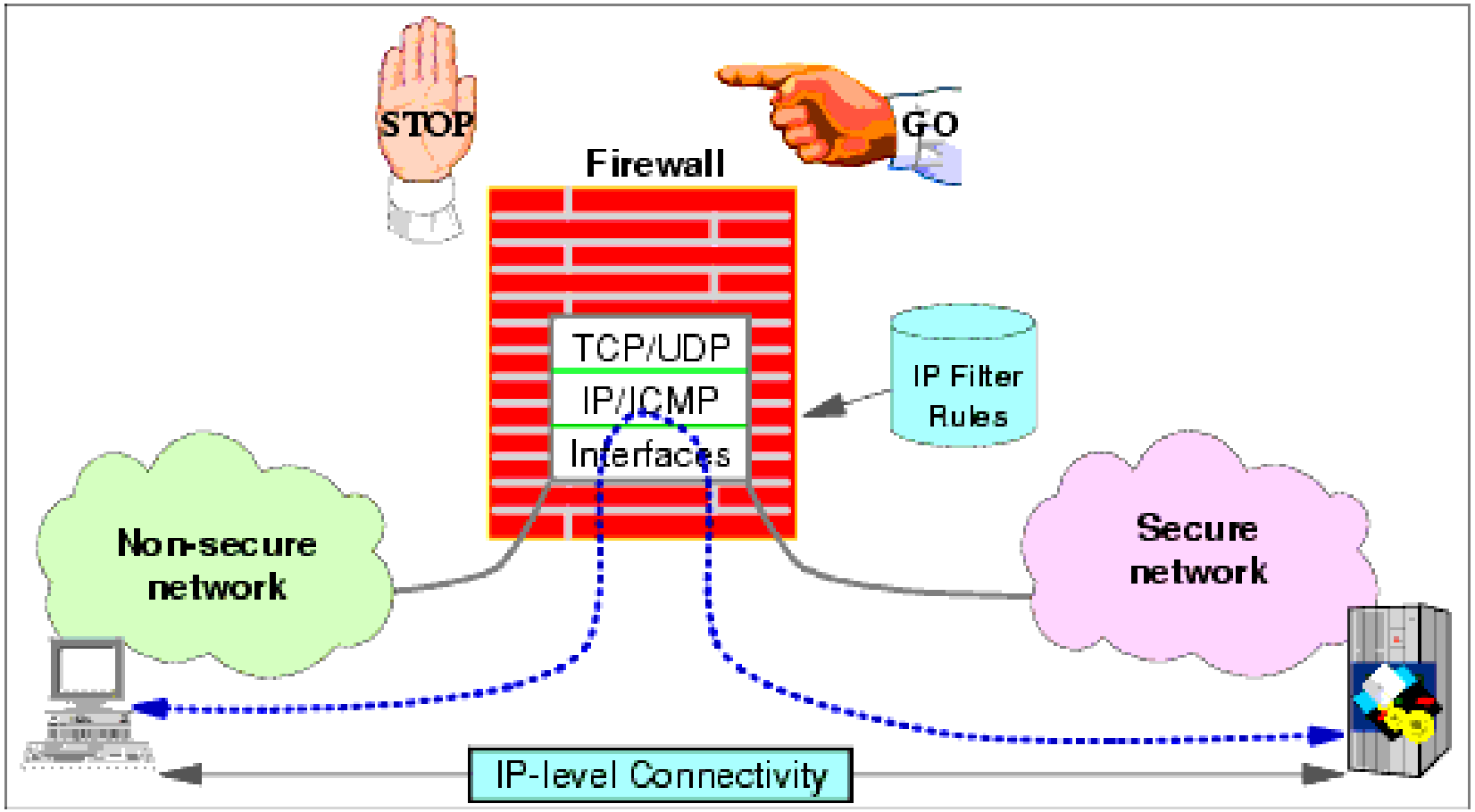
- No entanto, para **conjuntos de dimensão muito grande** (e apenas passíveis de serem definidos em extensão) não é assim tão simples
  - pode mesmo não haver memória suficiente para armazenar todos os elementos de *C*
  - aparecendo soluções probabilísticas como necessárias e interessantes
    - Com o aumento de Big Data cada vez mais relevantes

Problema 1 - Verificação ortográfica

- Utiliza dicionário(s)
  - Muitas vezes complementados por regras
- Ortografia validada através da pertença a dicionário
  - Que deve ser de confiança

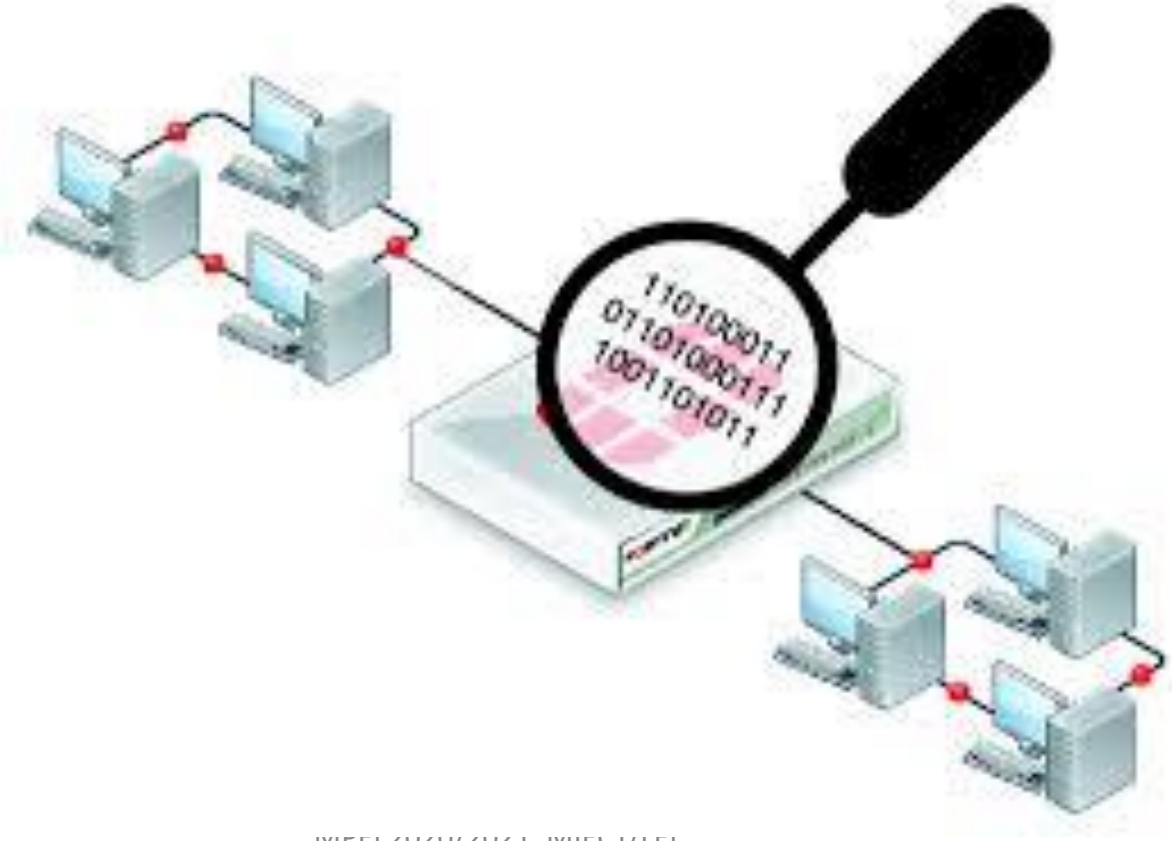


Problema 2 - Firewall



Problema 3

- Detetar sequências de bits (ex: Strings)



Generalizando …

- Na área da Informática temos muitos outros exemplos
  - Combate ao SPAM: pertença a uma lista de emails seguros
  - Browser: pertença à lista de endereços que já visitámos
  - …

- Em muitas aplicações e situações temos de ter uma forma eficiente de determinar se um determinado item pertence ou não a um conjunto

Ideia base

- Em muitos problemas **apenas pretendemos saber se um elemento pertence ou não ao conjunto**
  - sem necessitarmos de acesso ao conjunto ou informação associada aos elementos

- Nestas situações podemos eliminar a parte de armazenamento dos elementos
  - guardando nele apenas informação de que existe

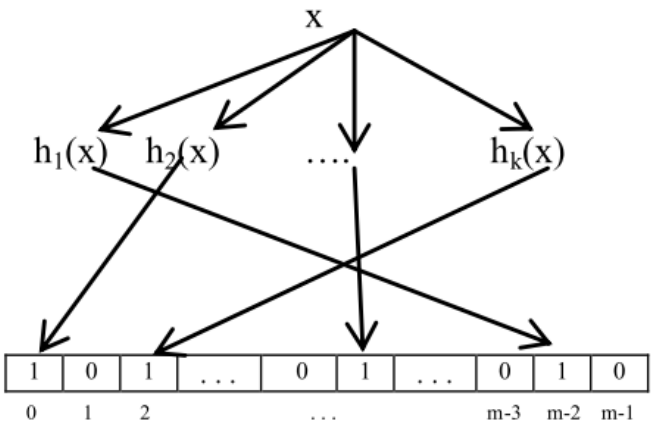
Filtros de Bloom

(Bloom Filters)

Os Filtros de Bloom são uma forma de usar funções de dispersão para determinar se um elemento pertence a um conjunto

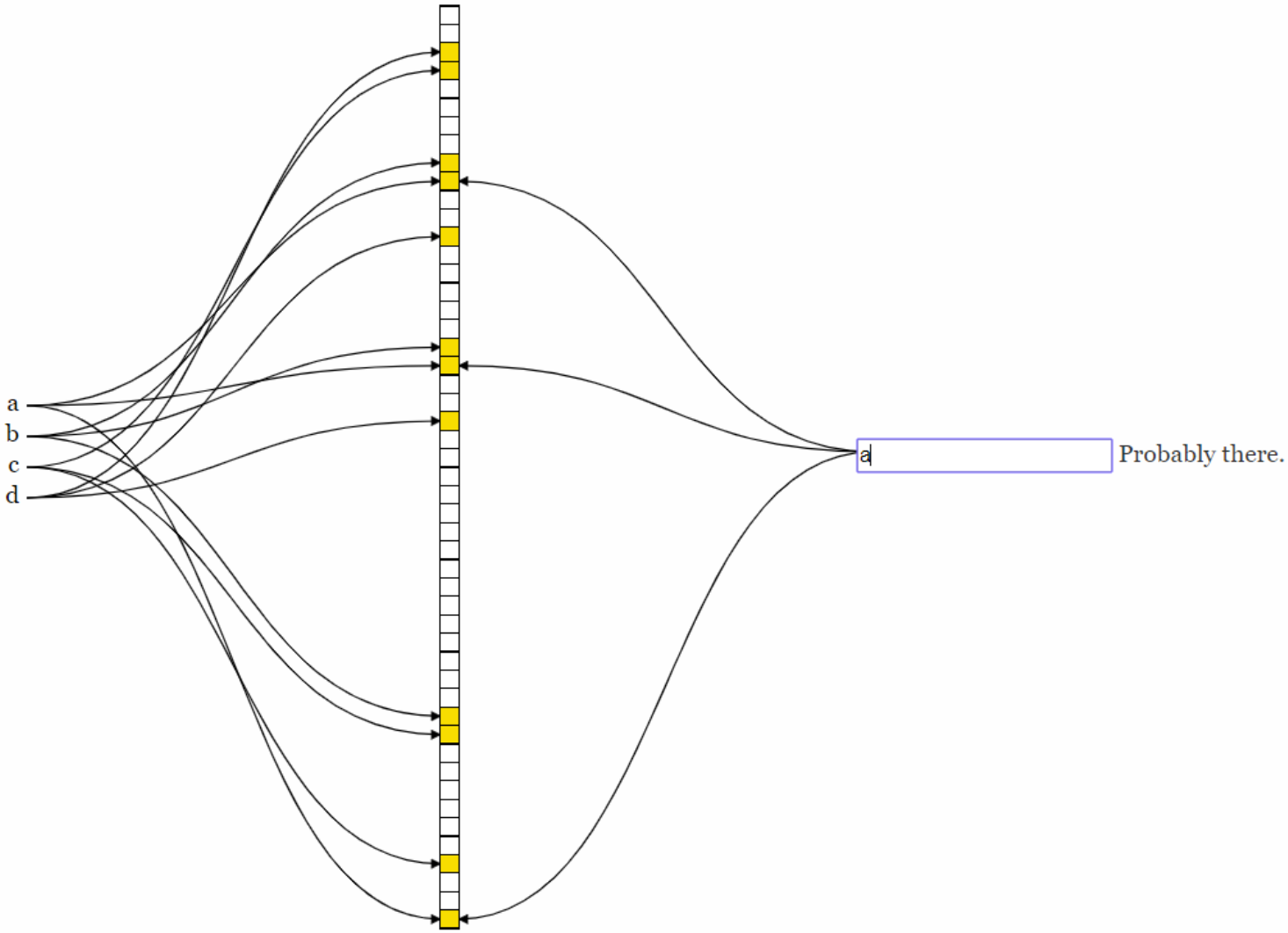
Filtros de Bloom

- Os Filtros de Bloom usam funções de dispersão para calcular um vetor (**o filtro**) que é representativo do conjunto



- A pertença ao conjunto é testada através da comparação dos resultados da aplicação das mesmas funções de dispersão aos potenciais membros com o conteúdo desse vetor

Filtro de Bloom

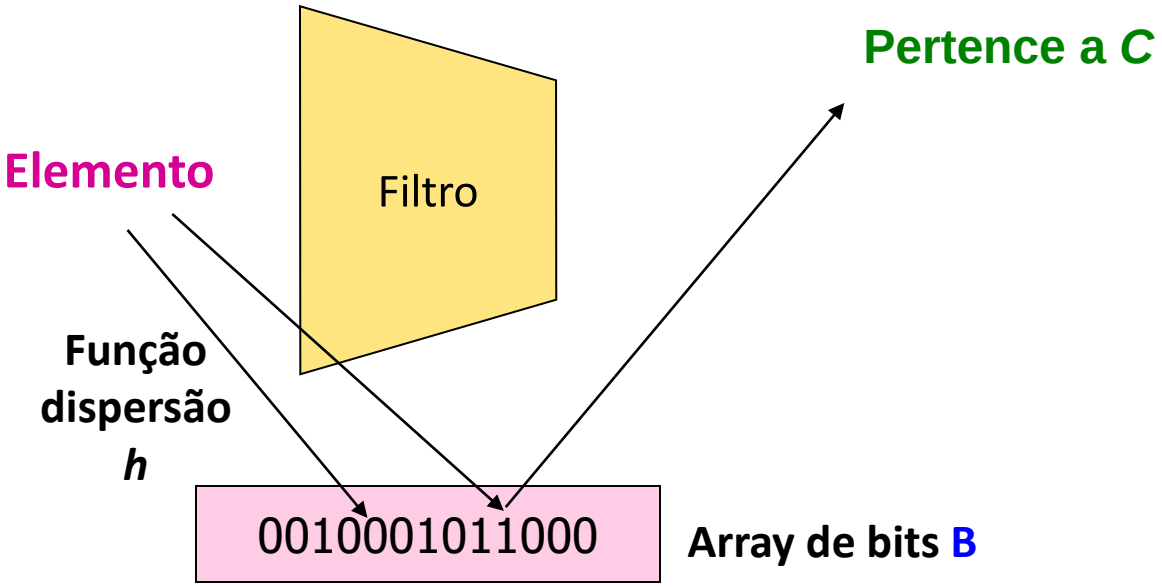


Filtros de Bloom

- Na sua **forma mais simples** o vetor (filtro) é composto por *n* posições
  - cada uma de apenas 1 bit
- O bit correspondente a um elemento é apenas colocado a 1 se a função de dispersão mapear nessa posição algum dos elementos do conjunto

- São rápidos, de complexidade temporal constante
- e não incorporam qualquer tentativa de resolução de colisões.

Filtro



Descartar o elemento

Se é mapeado pela função de dispersão para uma posição contendo 0

Exemplo – Deteção de SPAM

- Conhecem-se mil milhões (10^9) de endereços de email de confiança
  - que constituem o nosso conjunto *C*
- Se uma mensagem é proveniente de um destes endereços não é SPAM

- Pretende-se filtrar um conjunto de emails recebidos

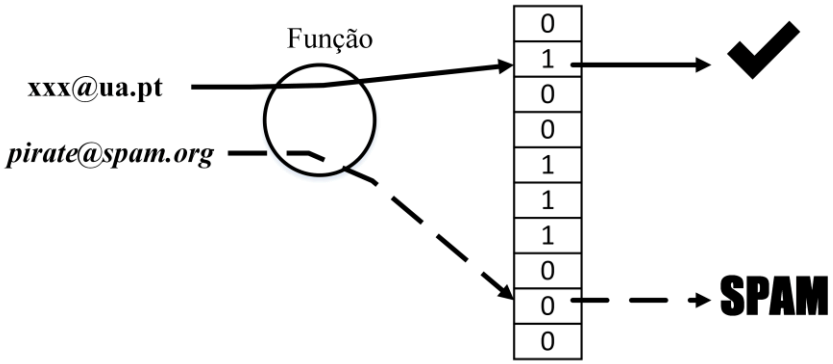
Exemplo – Deteção de SPAM

- Uma solução consiste em:

1. Criar um vetor de *n* bits *B* bastante grande e inicializando todos esses bits com 0

2. Utilizar uma função de dispersão para mapear cada endereço de email numa posição desse vetor

3. Colocar a 1 os bits correspondentes à aplicação da referida função de dispersão a toda a lista de endereços de email "bons" (todos os elementos do conjunto *C)*



4. Aplicar a função de dispersão ao endereço de cada uma das mensagens que se pretende verificar, considerando SPAM todas as em que o vetor tem 0 na posição correspondente

Ausência de falsos negativos

- Se um endereço que verificamos pertence a *C* então ele vai ser certamente mapeado pela função de dispersão numa posição do vetor que contém 1
  - Será sempre considerado de confiança

- Todos os que são de confiança serão sempre considerados de confiança, **nunca havendo falsos negativos**.

Generalização

- A solução adotada para o exemplo anterior pode ser generalizada pela utilização de um conjunto de funções de dispersão
  - com algumas vantagens, como veremos mais adiante.
- No caso geral temos
  - *C* como sendo o **C**onjunto
    - com *m* elementos (membros) (#*C* = *m*)
  - *B* o vetor (filtro) de **B**loom
    - de dimensão *n* (#*B* = *n*)
  - *k* funções de dispersão independentes $h_1,...,h_k$

Inicialização de um Filtro de Bloom

- Inicializar todas as posições de *B* com 0

- Aplicar *k* funções de dispersão a cada um dos elementos *de C*
  - colocando a um todas as posições devolvidas pelas funções de dispersão
    - *Ou seja* $B[\, h_i(elemento\,)\,] = 1.$

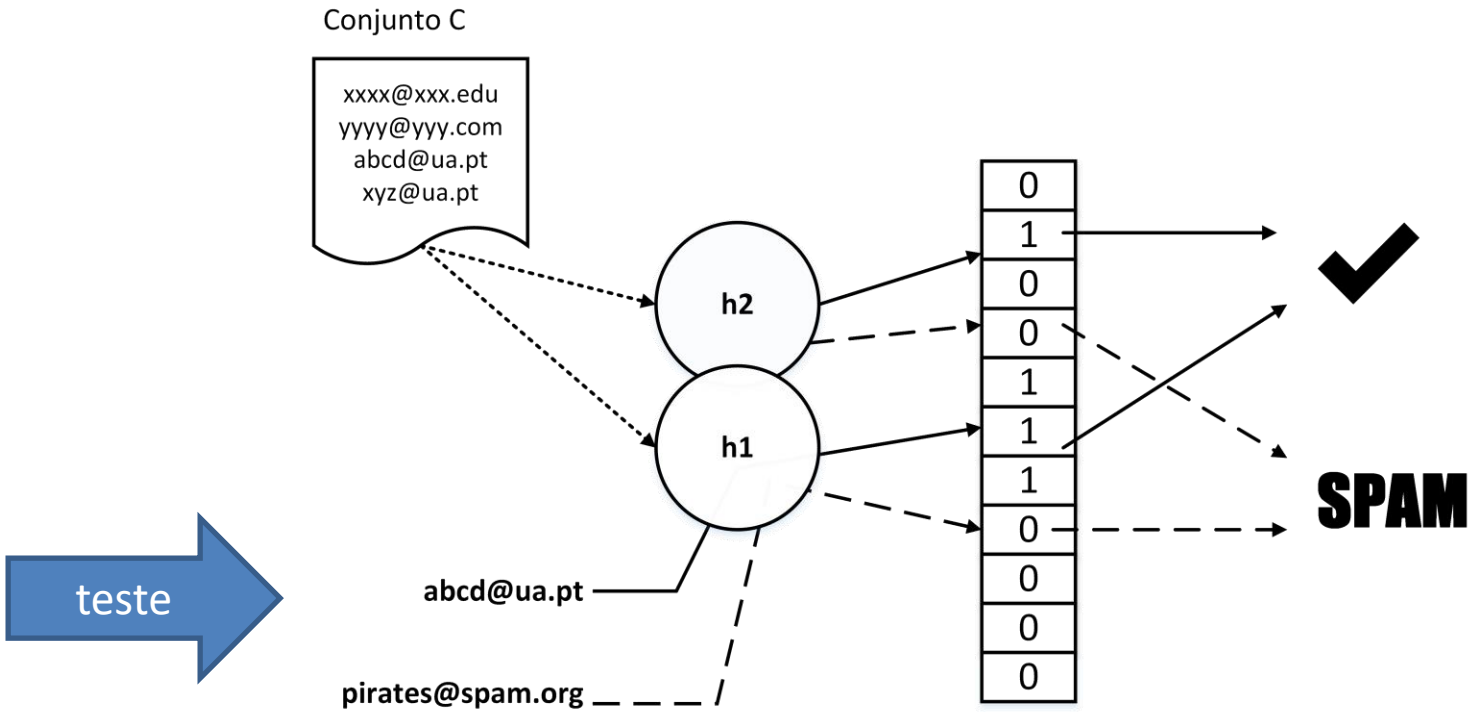
Utilização do Filtro de Bloom

- Para testar um valor *x:*
- aplicar as *k* funções de dispersão
- e analisar o conteúdo das posições resultantes

- se $B[\ h_i(x)\ ] == 1$ para todos os valores de $i = 1,...,k$ então *x* provavelmente pertence a *C*
  - caso contrário não pertence *C*

Retomando o nosso exemplo …

- Adotando valores pequenos para o número de funções, tamanho do conjunto e do filtro
  - n = 11 bits
  - k = 2 funções de dispersão.



Erros

- O teste de associação para um elemento *x* funciona verificando os elementos que teriam sido atualizados se a chave tivesse sido inserida no vetor

- Se todos os bits apropriados foram colocados a 1 por outras chaves, então *x* será reportado erradamente como um membro do conjunto.
- Temos neste caso o que se designa habitualmente por **falso positivo**.

Exemplo de falso positivo

- Consideremos um conjunto de vegetais contendo batata e couve mas não tomate

Uma parte do filtro:

...	B	C	B	B	C	-	C	..

Resultado de aplicação das funções de dipersão a **Tomate**:

...	-	T	-	T	T	-	-	..

- O filtro da figura identifica incorretamente tomate como vegetal

Parâmetros do Filtro de Bloom

- *m* : Dimensão do conjunto
  - número de membros do conjunto
- *n* : Número de posições ou células do filtro
- *k* : Número de funções de dispersão utilizadas
- Adicionalmente, pode definir-se a fração das posições do filtro com o valor igual a 1 (*f*)

Implementação

- Em geral, a implementação destes filtros consiste em 3 operações
  - inicialização
  - adição de elementos
  - E teste de pertença de um elemento ao conjunto
- A implementação destas operações é simples

Tipo de dados abstrato

FiltroBloom
n % número de bits do filtro
m % número de elementos do conjunto
k % número de funções de dispersão
+ inicializar (n) % Inicializar filtro com 0s + adicionarElemento (elemento) % Inserir elemento no filtro
+ membro (elemento) % Testa se elemento existe no filtro

Implementação

- **inicializar()**
  - Simplesmente o preenchimento com zeros de todo o vetor *B*
- **adicionarElemento()**
  - Esta operação calcula os valores das *k* funções de dispersão do elemento a adicionar e atualiza as posições apropriadas do vetor *B*
  - No caso mais simples, coloca a 1 as posições devolvidas pelas funções de dispersão
    - o que requer tempo proporcional ao número de funções

adicionarElemento()

adicionarElemento(B, elemento,k)

for i=1:k do

- Aplicar a função de dispersão *hi()* a elemento
  - Obtendo o respetivo hash code h

- Colocar a 1 o Vetor B na posição *h*
  - B [h] = 1

endfor

membro()

- Aplica as *k* funções como adicionarElemento(), mas apenas verifica se as posições contêm o valor 1
  - Se alguma das posições contém 0 não é um membro do conjunto
- A pior situação em termos de tempo de processamento ocorre para membros e para falsos positivos
  - Ambos obrigam a calcular todas as *k* funções de dispersão

membro()

```
membro(B, elemento) -> Boolean

i=0
repeat
        i=i+1
        hi é a função de dispersão i  (1<i<=k)
        h é o hash code devolvido por hi (elemento)
until (   (i==k) | (B [h] == 0)   )

if i==k then
        return (  B [ h]  == 1 )   % True se posição contém 1
else
        return(False)
end.
```

Complexidade das operações

Operação	Parâmetros	Complexidade temporal
Inicializar()	n (tamanho do vetor)	O (n)
adicionarElemento()	Vetor, elemento, k funções de dispersão	O (k)
membro()	Vetor, elemento, k funções de dispersão	O (k)

Exemplos de aplicações de Filtros de Bloom

Mais Informação em:

BLOOM FILTERS & THEIR APPLICATIONS, International Journal of Computer Applications and Technology (2278 - 8298) Volume 1– Issue 1, 2012, 25-29

https://pdfs.semanticscholar.org/d899/05bdf1ff791bdddc7c471070f34f4da18844.pdf

Aplicações gerais – *Spell Checkers*

- Os filtros Bloom são particularmente úteis na verificação de ortografia
  - São usados para determinar se uma palavra é válida numa determinada língua
- Verificação é feita criando um Filtro Bloom com todas as palavras possíveis dessa linguagem e verificando uma palavra contra esse filtro

- As correções sugeridas são geradas fazendo todas as substituições únicas em palavras rejeitadas e, em seguida, verificando se esses resultados são membros do conjunto

Redes de dados

- Muitas aplicações na área de redes
- São usados, por exemplo, em caches de servidores proxy na World Wide Web (WWW)
  - para determinar eficientemente a existência de um objeto em cache
  - Servidores proxy interceptam solicitações de clientes e respondem caso tenham a informação solicitada

- O uso de caches na web ajuda a reduzir o tráfego da rede
- Também melhora o desempenho quando os clientes obtêm cópias de arquivos de servidores vizinhos em vez do servidor original
  - que pode ser vários links de rede lentos de distância)

Segurança e Privacidade

- **Sistemas de detecção e prevenção de intrusão** (IDS/IPS) usam matching de strings do conteúdo dos pacotes para deteção de conteúdo malicioso
- Os filtros Bloom são particularmente úteis para pesquisar um grande número de strings de forma eficiente.
- A ideia básica é encontrar (sub)strings (comumente conhecidas como assinaturas) a alta velocidade

- Uma abordagem comum é separar assinaturas por comprimento e usar filtro Bloom para cada comprimento
  - permitindo processamento paralelo
- **O Google Chrome usa filtros Bloom** para a decisão preliminar se um determinado site é malicioso ou seguro
- Os filtros de Bloom também são usados na deteção de vírus e Prevenção de Negação de Serviço (DoS), entre muitas outras aplicações

Demonstrações Online

- **Bloom Filters by Example**
  - http://billmill.org/bloomfilter-tutorial/

- Bloom Filters
  - https://www.jasondavies.com/bloomfilter/

Exemplos de Aplicação (em Matlab)

- Pequeno exemplo com vegetais
- Dicionário
- Strings aleatórias
  - Efeito do número de funções de dispersão (k)
- Alunos da UC MPEI

Questões?

- Como obter n ?
- Como determinar o melhor valor para k (número de funções de dispersão) ?

Obtenção dos parâmetros de um Filtro de Bloom

Para que se possa definir de forma adequada um filtro tem de primeiro se perceber **como se relacionam com os indicadores de desempenho como a probabilidade de falsos positivos**

Falsos positivos e falsos negativos

Elemento pertence ao conjunto ?	Resulto do teste de pertença	Correto ?	Tipo de erro
SIM	Sim (pertence)	Sim	
	Não	ERRO	Falso negativo
NÃO	Sim	ERRO	Falso positivo
	Não	Sim	

Obtenção dos parâmetros de um Filtro de Bloom

- Qual a relação dos falsos positivos com os parâmetros do filtro (*n* e *k*) e do conjunto (*m*)?

Lançamento de *m* dardos para *n* alvos

- Caso similar ao do lançamento de *m* dardos para *n* alvos igualmente prováveis
  - por sua vez similar ao problema dos aniversários

- Se atirarmos ***m*** dados para ***n*** alvos igualmente prováveis , **qual a probabilidade de um alvo ser atingido por pelo menos um dardo ?**

- No caso dos filtros de Bloom
  - os alvos são os vários bits do filtro
  - os dardos são os valores assumidos pela função de dispersão

Probabilidade de falsos positivos ?

- Para termos falso positivo teremos de ter as *k* posições determinadas pelas funções de dispersão com o valor 1
  - Para elementos não pertencentes ao conjunto

- Como obter essa probabilidade?
- Comecemos pela probabilidade de um bit estar a 1 …

Probabilidades para um bit

- Inicialmente todos os bits estão a zero

- Designando o bit na posição *i* por b_i …
- Qual a probabilidade do bit $b_i = 1$ depois de aplicar a primeira função de dispersão na inserção de um elemento?

- Assumindo que a função de dispersão seleciona cada uma das posições do vetor com igual probabilidade …
- A probabilidade é simplesmente

$$\boldsymbol{P[b_i = 1] = \frac{1}{n}}$$

  - pois os *n* alvos são equiprováveis.
- Em consequência: $P[b_i = 0] = 1 - \frac{1}{n}$

Probabilidade após aplicar *k* funções de dispersão

- Probabilidade de um bit se manter a zero após a inserção de um elemento ?

- É a probabilidade do bit continuar a ser zero depois de aplicadas as *k* funções de dispersão
- Se assumirmos que os resultados das funções de dispersão são independentes, será:

$$P[b_i = 0] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

Probablilidade após inserir *m* elementos

- Após a inserção de *m* elementos, assumindo independência, temos:
- $P[b_i = 0] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k\,m}$
- Fazendo $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m} = a$
- $P[b_i = 0] = a^k$
- $P[b_i = 1] = 1 - a^k$
  - Relacionada com a **probabilidade de um alvo ser atingido por pelo menos um dardo**

Probabilidade de falsos positivos

- Temos um falso positivo quando temos os *k* bits iguais a 1 para um elemento não pertencente a *C*
- A probabilidade de um falso positivo, p_{fp}, após inserirmos *m* elementos é

$$p_{fp} = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{km}\right]^k \qquad = \left(1 - a^k\right)^k$$

- Aplicando $lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n = e^{-1}$

- Que pode ser aproximada por:

$$p_{fp} \approx \left(1 - e^{-km/n}\right)^k$$

- A probabilidade de falsos positivos depende de *k*,*m* e *n*

Efeito de *k* na p_{fp}

- Exemplo:
  $m = 10^9$ (mil milhões)
  $n = 8 \times 10^9$ (8 mil milhões)

m/n= 1/8

- k=1

$$p_{fp} = 1 - e^{-1/8} = 0.1175$$

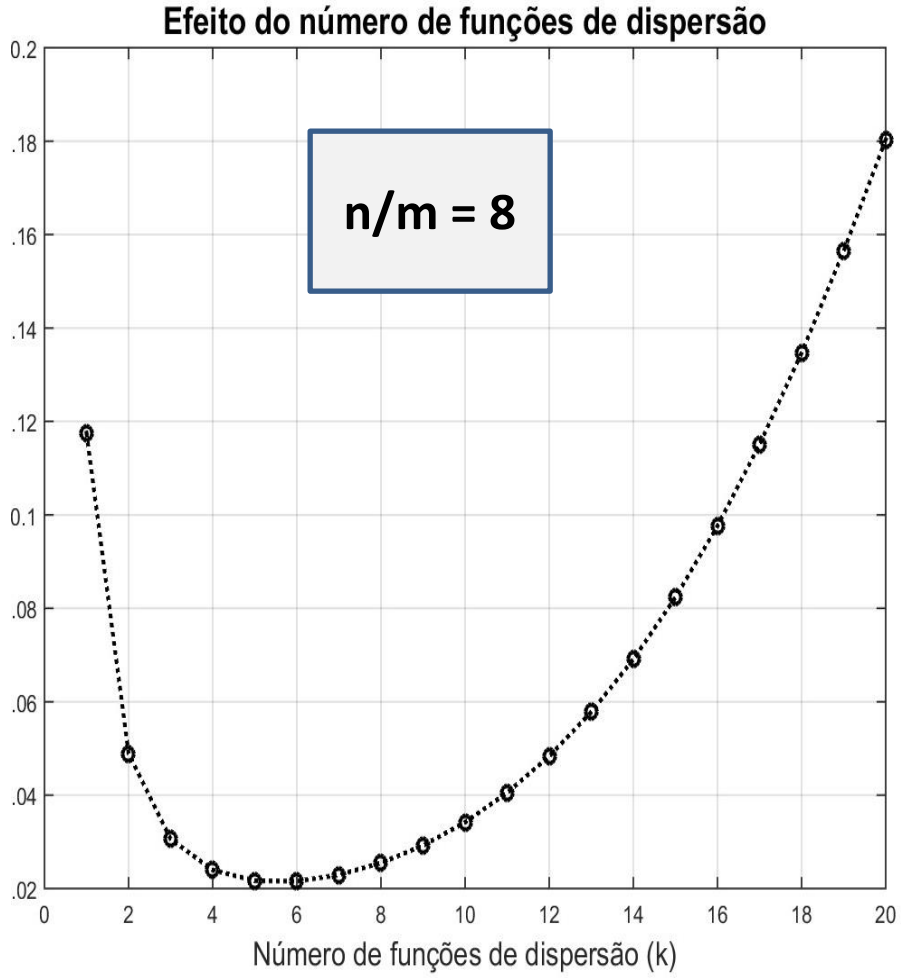
- k=2

$$p_{fp} = \left(1 - e^{-2/8}\right)^2 = 0.00493$$

- Probabilidade de erro diminui com aumento de *k* (acontece sempre ?)

- O que acontece se formos aumentando *k* ?

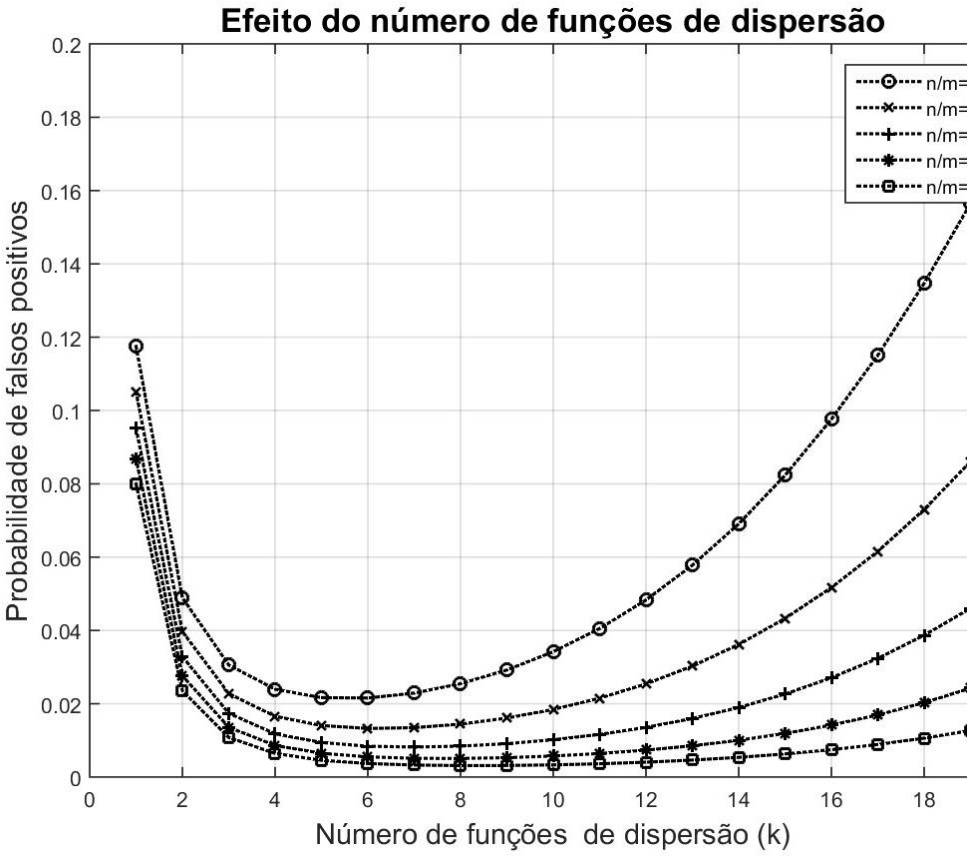
Efeito de *k* na prob. Falsos Positivos



- Adicionando mais funções não diminui obrigatoriamente essa probabilidade
- Decresce até um certo valor de *k*
- Depois aumenta
  - Motivo ?

Redução de falsos positivos

- FP podem ser reduzidos aumentando o tamanho do vetor B
  - neste caso à custa de mais memória.
  - O efeito da relação *n/m* é ilustrado na figura
- Também podem ser reduzidos aumentando o número de funções de dispersão
  - mas apenas até um certo valor



Então qual o valor ótimo de *k* ?

- E possível determinar o número de funções de dispersão que minimiza a probabilidade de falsos positivos, p_{fp}
- Para facilitar os cálculos minimiza-se $ln(p_{fp})$
- Aplicando $ln()$ a $p_{pf} = (1 - a^k)^k$
- temos: $ln(p_{pf}) = k \ ln(1 - a^k)$

Minimização

- Como obter *k* ótimo (que minimiza *p*) ?
- A solução usual de calcular zeros da derivada

- Derivando (em ordem a *k*) e igualando a zero

$$\left(1 - a^k\right) \ln\left(1 - a^k\right) - a^k \ln\left(a^k\right) = 0$$

- Que tem por solução

$$a^k = 1/2$$

[usar, por exemplo, fsolve no Matlab]

k ótimo

- O valor ótimo de *k* pode ser obtido aplicando logaritmos e resolvendo em ordem a *k*:

$$k_{ótimo} = \frac{ln(1/2)}{ln(a)}$$

- Substituindo o valor de a temos

$$k_{ótimo} = \frac{ln(1/2)}{m \times ln(1 - 1/n)}$$

- Aproximando $ln(1 - 1/n)$ pelo primeiro termo da série de Taylor $(-1/n)$

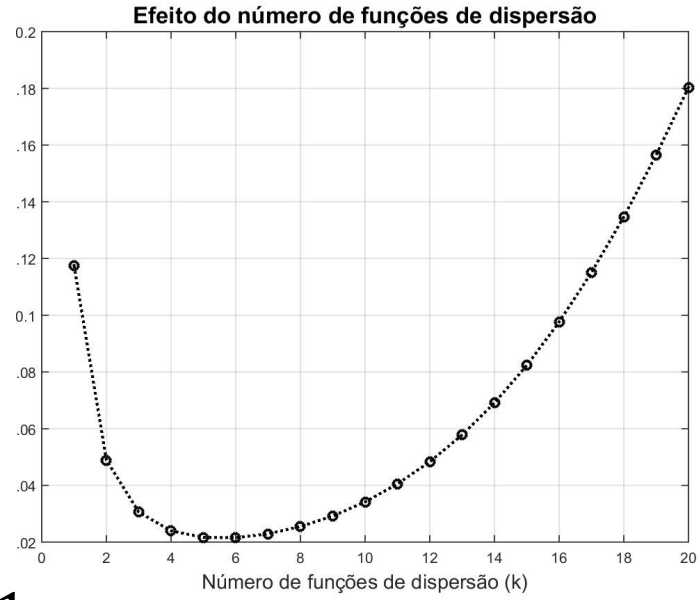
$$k_{ótimo} \approx \frac{\boldsymbol{n \ \ ln(2)}}{\boldsymbol{m}} = \frac{0.693\ n}{m}$$

- Na prática **utiliza-se o inteiro mais próximo**

Exemplo – k ótimo

- m= 10^{12}
- n=8×10^{12}

- k ótimo ?



- $k_{ótimo} \approx \frac{n \ln(2)}{m} = \frac{0.693 \times 8 \times 10^{12}}{10^{12}} = 5.54$
  - Aproximadamente 6

- Qual a relação com um dos gráficos que já vimos?

Determinação de *n*

- O valor de *n* pode ser calculado substituindo o valor ótimo de *k* na expressão de probabilidade

$$p_{fp} \approx \left(1 - e^{-km/n}\right)^k$$

  - *Sendo dados m e* um objetivo em termos de probabilidade de falsos positivos p_{fp}
  - e assumindo que o valor de *k* ótimo é adotado

Limite inferior para a probabilidade de erro (FP)

- Se tivessemos $a^k = 1/2$ para um inteiro $k_{ótimo}$, a equação $\left(1 - a^k\right)^k$ resultaria em:

$$p_{ótima} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k_{ótimo}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{ótimo}}$$
$$= 2^{-k_{ótimo}}$$

- Que pode ser considerado o limite inferior para a probabilidade de erro
  - Obviamente falsos positivos

Filtros de Bloom – Aspectos positivos

- Os filtros de Bloom garantem **não existência de falsos negativos** …
- e usam uma **quantidade de memória limitada**
  - Ótimo para pré-processamento antes de processos mais exigentes
- Adequados para implementação em hardware
  - As funções de dispersão podem ser paralelizadas

Filtros de Bloom - Limitações

- Como a tabela não pode ser expandida, o máximo número de elementos a armazenar no filtro tem de ser conhecido previamente

- Assim que se excede a capacidade para a qual foi projetado, os falsos positivos aumentam rapidamente ao serem inseridos mais elementos

Filtros de Bloom - Compromissos

- Os falsos positivos podem ser diminuídos através de:
  - Aumento do número de funções de dispersão (até ao $k_{ótimo}$)
  - E do espaço alocado para armazenar o vetor

Comentários finais

- Os filtros de Bloom d**evem ser considerados para programas em que um teste de pertença imperfeito pode ser aplicado** a um conjunto de dados (muito) grande

- As **grandes vantagens** de um filtro de Bloom são a rapidez e taxa de erro

- Apesar de poder ser aplicado a conjuntos de qualquer dimensão, árvores e heaps são melhores soluções para conjuntos pequenos

Filtros Bloom de contagem / Filtros de Contagem

Counting Bloom Filters

Filtros de Contagem

- Um filtro Bloom básico representa um conjunto, mas:
  - não permite a consulta da multiplicidade
    (número de vezes que elemento foi inserido)
  - nem suporta a remoção de elementos
- Um filtro Bloom de contagem estende um filtro Bloom básico para dar resposta a estas limitações

Filtros de Contagem

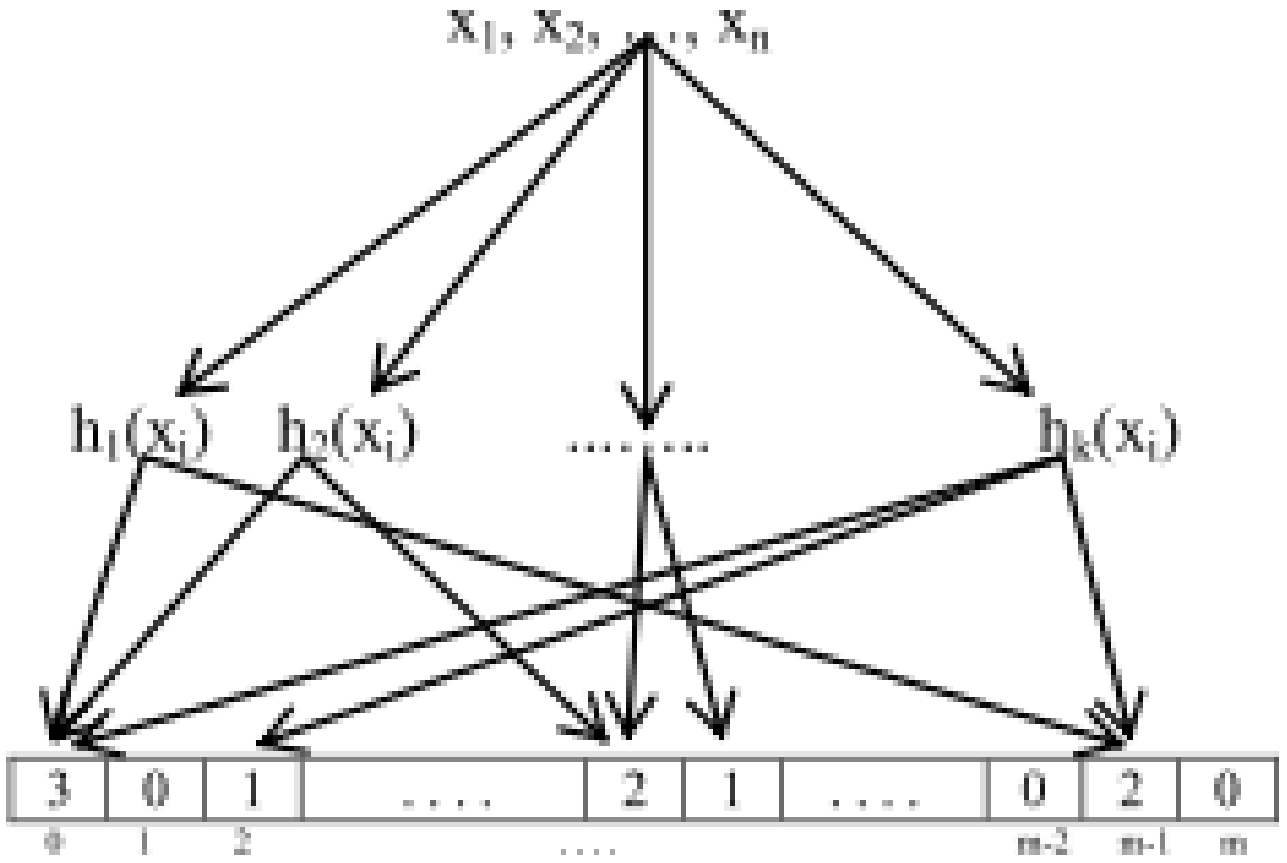
- As posições do vetor são estendidas de um único bit para um contador de *b* bits

  [a versão original utilizava 4 bits]

- Na **inserção** de um elemento o contador é incrementado
- na **remoção** é decrementado

- Ocupa mais espaço
  - tipicamente 3 a 4 vezes mais que o de Bloom

Filtro de Contagem



Obtenção da multiplicidade

- Problema:
  - Os contadores correspondentes a um elemento podem também ser alterados por outros elementos
- Como ter boa estimativa do número de inserções de um elemento ?

- Solução:
  - Usar o **valor mínimo** entre os vários contadores correspondentes ao elemento

Implementação

- A implementação deste tipo de filtros em Matlab é simples

- Bastam ligeiras alterações a:
  - adicionar() : passa a incrementar
  - membro() : requer que todos sejam não nulos

- A criação da função adicional contagem()
- E, se necessário, a função remover()

contagem()

- Operação nova

- Para obter a contagem (multiplicidade) associada a um elemento do conjunto:

  1. Detemina-se o conjunto de contadores que lhe correspondem
     - Através das k funções de dispersão

  2. Calcula-se o **valor mínimo** armazenado nesses contadores

     - Algoritmo como *minimum selection* (MS)

remover()

- Implementação similar a adicionar()

- **Esta operação introduz a possibilidade de falsos negativos**
  - Quando se coloca um bit a zero que era parte dos *k* bits de outro elemento, o filtro deixará de o considerer como pertencendo ao conjunto

Problemas …

- *Overflow* do contador
  - Quando a contagem chega a $2^b - 1$
  - Tipicamente as implementações param de contar
    - Preferível a recomeçar em 0 (introduziria falsos negativos)
    - Mas introduz mais erro na estimativa da contagem

- Escolha de b (número de bits dos contadores)
  - Um valor grande reduz a poupança de espaço
  - Um valor pequeno rapidamente leva a overflow
  - Escolha do valor é um compromisso e depende dos dados

Outras Técnicas

- Variantes do Filtro de Bloom
  - Ver, por exemplo:
  - http://matthias.vallentin.net/course-work/cs270-s11.pdf
- Cuckoo Hashing
  - Ver:
  - http://www.lkozma.net/cuckoo_hashing_visualization/

PPT baseado em: Mining Data Streams

Mining of Massive Datasets
Jure Leskovec, Anand Rajaraman, Jeff Ullman
Stanford University
http://www.mmds.org

Outras fontes utilizadas

- http://matthias.vallentin.net/blog/2011/06/a-garden-variety-of-bloom-filters/

- https://en.wikipedia.org/wiki/Bloom_filter#Counting_filters