

1 Semi-group estimates

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ Considerons le système d'onde linéaire en dimension un

$$\partial_t p + \partial_x v = \sigma(v - p) \quad (1)$$

$$\partial_t v + \partial_x p = \sigma(p - v) \quad (2)$$

a) Détermine $u = (p, v)$ en fonction de $u_0 = (p_0, v_0)$

(1)+(2)

$$\begin{aligned} \partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) &= \sigma(v-p) + \sigma(p-v) \\ &= \sigma(v-p+p-v) \\ &= \sigma(0) \\ \partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) &= 0 \end{aligned}$$

(1)-(2)

$$\begin{aligned} \partial_t(p-v) + \partial_x(v-p) &= \sigma(v-p) - \sigma(p-v) \\ \partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) &= \sigma(v-p-p+v) \\ &= \sigma(2v-2p) \\ &= 2\sigma(v-p) \\ \partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) &= -2\sigma(p-v) \end{aligned}$$

$$\partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) = -2\sigma(p-v) \quad (4)$$

On a deux équations de transport.

Resolution par la méthode des caractéristiques

(3)

$$\begin{cases} \frac{dx^*(t)}{dt} = 1 \\ x^*(t^*) = x_* \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x^*(t) &= t + c \\ x^*(t^*) &= x_* = t^* + c \\ c &= x_* - t^* \\ x^*(t) &= t + x_* - t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p+v)(x_*, t^*) &= (p_0+v_0)(x_*, t^*) \\ (p+v)(x, t) &= p_0(x, t) + v_0(x, t) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{cases} \frac{dx_1^*(t)}{dt} = -1 \\ x_1^*(t^*) = x_* \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= -t + c_1 \\ x_1^*(t^*) &= x_* = -t^* + c_1 \\ c_1 &= x_* + t^* \\ x^*(t) &= -t + x_* + t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(p-v)(x_1^*(t), t) &= -2\sigma(p-v)(x_*(t), t) \\
(p-v)(x_1^*(t), t) &= K \exp^{-2\sigma t} \\
K &= K \exp^{-2\sigma t} \\
&= (p-v)(x_1^*(0), 0) \\
&= (p_0 - v_0)(x_1^* + t^*) \\
(p-v)(x_1^*(t), t) &= (p_0 - v_0)(x_* + t^*) \exp^{-2\sigma t^*} \\
(p-v)(x, t) &= (p_0 - v_0)(x, t) \exp^{-2\sigma t} \\
\begin{cases} (p+v) &= (x-t) + u_0(x-t) \\ (p-v) &= (x+t) \exp^{-2\sigma t} - u_0(x+t) \exp^{-2\sigma t} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= (p(x, t), v(x, t)) \quad \forall t \geq 0 \\
&\text{avec} \\
p(x, t) &= 1/2 [p_0(x-t) + u_0(x-t) + (p_0(x+t) - u_0(x+t)) \exp^{-2\sigma t}] \\
v(x, t) &= 1/2 [p_0(x-t) + u_0(x-t) - (p_0(x+t) - u_0(x+t)) \exp^{-2\sigma t}]
\end{aligned}$$

Écrire explicitement l'operator \mathbf{A} , tel que $u = \exp^{tA} u_0$

$$\begin{aligned}
u &= (p, v) \\
\partial_t u &= (\partial_t p, \partial_t v) \\
\partial_x u &= (\partial_x p, \partial_x v) \\
\partial_x \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_x v \end{pmatrix} = A_1 \partial_x u, \quad \text{avec} \\
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sigma(v-p) \\ \sigma(p-v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = Bu, \quad \text{avec} \\
B &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2 Numerical methods

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5)$$

La discrétisation de type Différences Finis explicite avec un schéma sur la forme :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{4}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{12} \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} = 0 \quad (6)$$

a) Détermination du symbol du schéma

Le symbole du schéma (6) est donné par :

$$\lambda(\theta) = \sum_{r=-2}^2 \alpha_r e^{i\theta r}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Par développement de ce (6) on a :

$$u_j^{n+1} = \alpha_0 u_j^n + \alpha_{-1} u_{j-1}^n + \alpha_{-2} u_{j-2}^n + \alpha_1 u_{j+1}^n + \alpha_2 u_{j+2}^n, \quad \text{où}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_0 & = & 1 - \frac{15}{6}\nu + 3\nu^2 \\ \alpha_{-1} & = & \frac{4}{3}\nu - 2\nu^2 \\ \alpha_{-2} & = & \frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2 \\ \alpha_1 & = & \frac{4}{3}\nu - 2\nu^2 \\ \alpha_2 & = & \frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2 \end{array} \right. ,$$

$$\text{avec} \quad \begin{array}{lcl} \nu & = & \Delta t / \Delta x^2 \\ \nu^2 & = & \Delta t^2 / \Delta x^4 \end{array}$$

3 Consistence du schéma

On a par un développement de Taylor :