Première partie

Semi-group estimates

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ un coefficient donné. Consider the linear wave system in dimension one Consideron le système d'onde linéaire en

$$\partial_t p + \partial_x v = \sigma(v - p) \tag{A}$$
$$\partial_t v + \partial_x p = \sigma(p - v) \tag{B}$$

a) Determine une répresentation explicite de $U(x,t)$ en fonction des données initiales.

(A)+(B)

$$\begin{aligned}
\partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) &= \sigma(v-p) + \sigma(p-v) \\
&= \sigma(v-p+p-v) \\
&= \sigma(0) \\
\partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) &= 0
\end{aligned}$$

(A)-(B)

$$\begin{aligned}
\partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) &= \sigma(v-p) - \sigma(p-v) \\
&= \sigma(v-p-p+v) \\
&= \sigma(2v-2p) \\
&= 2\sigma(v-p) \\
\partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) &= -2\sigma(p-v)
\end{aligned}$$

On a obtenu deux équations de transport :

$$\partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) = 0 \tag{1}$$
$$\partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) = -2\sigma(p-v) \tag{2}$$

Résolution de (1) par la méthode des caractéristiques.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x^*(t)}{\mathrm{d}t} &= 1 \\ x^*(t_*) &= x_* \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}
x^*(t) &= t + c \\
x^*(t_*) &= t_* + c = x_* \\
c &= x_* - t_* \\
x^*(t) &= t + x_* - t_*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p+v)(x_*, t_*) &= (p_0 + v_0)(x_*, t_*) \\
(p+v)(x,t) &= p_0(x,t) + v_0(x,t)
\end{aligned}$$

Résolution de (2) par la méthode des caractéristiques.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x_1^*(t)}{\mathrm{d}t} & = & -1 \\ x_1^*(t_*) & = & x_* \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} x_1^*(t) & = & -t + c_1 \\ x_1^*(t_*) & = & x_* = -t_* + c_1 \\ c_1 & = & x_* + t_* \\ x^*(t) & = & -t + x_* + t_* \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p-v)(x_1^*(t),t) & = & -2\sigma(p-v)(x_*(t),t) \\ (p-v)(x_1^*(t),t) & = & K\exp^{-2\sigma t} \\ K & = & K\exp^{-2\sigma t} \\ & = & (p-v)(x_1^*(0),0) \\ & = & (p_0-v_0)(x_1^*+t_*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (p-v)(x_1^*(t),t) & = & (p_0-v_0)(x_*+t_*)\exp^{-2\sigma t_*} \\ (p-v)(x,t) & = & (p_0-v_0)(x,t)\exp^{-2\sigma t} \end{array}$$

Solutions de 1 et 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} (p+v) & = & (x-t) + u_0(x-t) \\ (p-v) & = & (x+t)\exp^{-2\sigma t} - u_0(x+t)\exp^{-2\sigma t} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & (p(x,t),v(x,t)) \qquad \forall t \geq 0 \\ avec & & \\ p(x,t) & = & 1/2\left[p_0(x-t)+u_0(x-t)+(p_0(x+t)-u_0(x+t))\exp^{-2\sigma t}\right] \\ v(x,t) & = & 1/2\left[p_0(x-t)+u_0(x-t)-(p_0(x+t)-u_0(x+t))\exp^{-2\sigma t}\right] \end{array} \tag{3}$$

L'operator A, tel que $u = \exp^{tA} u_0$

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & (p(x,t),v(x,t)) \\ \partial_t u(x,t) & = & (\partial_t p(x,t), \partial_t v(x,t)) \\ \partial_x u(x,t) & = & (\partial_x p(x,t), \partial_x v(x,t)) \\ \partial_x \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_x v \end{pmatrix} \\ \partial_x \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} & = & A_1 \partial_x u, \quad avec \\ A_1 & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma(v-p) \\ \sigma(p-v) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma(v-p) \\ \sigma(p-v) \end{pmatrix} &= Bu, \quad avec \\
B &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

Deuxième partie
Numerical methods

c)