

# 1 Semi-group estimates

Pour  $\sigma \in \mathbb{R}$  Considerons le système d'onde linéaire en dimension un

$$\partial_t p + \partial_x v = \sigma(v - p) \quad (1)$$

$$\partial_t v + \partial_x p = \sigma(p - v) \quad (2)$$

**a) Détermine  $u = (p, v)$  en fonction de  $u_0 = (p_0, v_0)$**

(1)+(2)

$$\begin{aligned} \partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) &= \sigma(v-p) + \sigma(p-v) \\ &= \sigma(v-p+p-v) \\ &= \sigma(0) \\ \partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) &= 0 \end{aligned}$$

(1)-(2)

$$\begin{aligned} \partial_t(p-v) + \partial_x(v-p) &= \sigma(v-p) - \sigma(p-v) \\ \partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) &= \sigma(v-p-p+v) \\ &= \sigma(2v-2p) \\ &= 2\sigma(v-p) \\ \partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) &= -2\sigma(p-v) \end{aligned}$$

$$\partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) = -2\sigma(p-v) \quad (4)$$

On a deux équations de transport.

## Resolution par la méthode des caractéristiques

Par l'équation (3)

$$\partial_t(p+v) + \partial_x(p+v) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx^*(t)}{dt} = 1 \\ x^*(t^*) = x_* \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x^*(t) &= t + c \\ x^*(t^*) &= x_* = t^* + c \\ c &= x_* - t^* \\ x^*(t) &= t + x_* - t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p+v)(x_*, t^*) &= (p_0 + v_0)(x_* - t^*) \\ (p+v)(x, t) &= p_0(x-t) + v_0(x-t) \\ p(x, t) + v(x, t) &= p_0(x-t) + v_0(x-t) \end{aligned}$$

Par l'équation (4)

$$\partial_t(p-v) - \partial_x(p-v) = -2\sigma(p-v)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1^*(t)}{dt} = -1 \\ x_1^*(t^*) = x_* \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= -t + c_1 \\
x_1^*(t^*) &= x_* = -t^* + c_1 \\
c_1 &= x_* + t^* \\
x^*(t) &= -t + x_* + t^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(p-v)(x_1^*(t), t) &= -2\sigma(p-v)(x_*(t), t) \\
(p-v)(x_1^*(t), t) &= K \exp^{-2\sigma t} \\
K &= K \exp^{-2\sigma t} \\
&= (p-v)(x_1^*(0), 0) \\
&= (p_0 - v_0)(x_1^* + t^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p-v)(x_1^*(t), t) &= (p_0 - v_0)(x_* + t^*) \exp^{-2\sigma t^*} \\
(p-v)(x, t) &= (p_0 - v_0)(x + t) \exp^{-2\sigma t}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} p(x, t) + v(x, t) &= p_0(x - t) + v_0(x - t) \\ p(x, t) - v(x, t) &= p_0(x + t) \exp^{-2\sigma t} - v_0(x + t) \exp^{-2\sigma t} \end{cases}$$

On va résoudre le système.

Par somme on a :

$$p(x, t) = 1/2 [p_0(x - t) + v_0(x - t) + (p_0(x + t) - v_0(x + t)) \exp^{-2\sigma t}]$$

Par différence on a :

$$v(x, t) = 1/2 [p_0(x - t) + v_0(x - t) - (p_0(x + t) - v_0(x + t)) \exp^{-2\sigma t}]$$

Donc  $\forall t > 0$

$$u(x, t) = (p(x, t), v(x, t))$$

**Écrire explicitement l'operateur  $\mathbf{A}$ , tel que  $u = \exp^{tA} u_0$**

$$\begin{aligned}
u &= (p, v) \\
\partial_t u &= (\partial_t p, \partial_t v) \\
\partial_x u &= (\partial_x p, \partial_x v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_x v \end{pmatrix} = A_1 \partial_x u, \quad \text{avec} \\
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma(v - p) \\ \sigma(p - v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = Bu, \quad \text{avec} \\
B &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\partial_t U = AU \quad \text{si on pose} \quad A = -A_1 \partial_x + B$$

$$\begin{cases} \partial_t U &= AU \\ U_0 &= (p_0, v_0). \end{cases} \Rightarrow U(t) = e^{At} u_0$$

**b)**  $Y_1 = L^1(\mathbb{R})^2$

$$\|(a, b)\|_1 = \|a\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|b\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Montrons que :  $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(Y_p)} \leq (1 + e^{-2\sigma t})$  pour tout  $t \geq 0$ .

On a  $U(x, t) = (p(x, t), v(x, t))$

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_1 &= \|p(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |p(x, t)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v(x, t)| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |p_0(x-t) + v_0(x-t) + [p_0(x+t) - v_0(x+t)]e^{-2\sigma t}| dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |p_0(x-t) + v_0(x-t) - [p_0(x+t) - v_0(x+t)]e^{-2\sigma t}| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_1 &\leq \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} |p_0(x-t)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x-t)| dx + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2\sigma t} \left( \int_{\mathbb{R}} |p_0(x+t)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x+t)| dx \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} |p_0(x-t)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x-t)| dx + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2\sigma t} \left( \int_{\mathbb{R}} |p_0(x+t)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x+t)| dx \right) \right] \end{aligned}$$

On fait un changement de variable à chaque terme d'integrale :

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_1 &\leq \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)| dx + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2\sigma t} \left( \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)| dx \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)| dx + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2\sigma t} \left( \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)| dx \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)| dx + \\ &\quad + e^{-2\sigma t} \left( \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)| dx \right) \end{aligned}$$

$$\|U(t)\|_1 \leq \|p_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + e^{-2\sigma t} (\|p_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1})$$

$$\|U(t)\|_1 \leq \|U_0\|_1 + e^{-2\sigma t} \|U_0\|_1$$

$$\|U(t)\|_1 \leq (1 + e^{-2\sigma t}) \|U_0\|_1 \quad (5)$$

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(Y_p)} = \sup_{\|U_0\|_1=1} \frac{\|U(t)\|_1}{\|U_0\|_1}$$

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(Y_p)} \leq 1 + e^{-2\sigma t}$$

## 2 Numerical methods

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6)$$

La discrétisation de type Différences Finis explicite avec un schéma sur la forme :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{4}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{12} \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} = 0 \quad (7)$$

### a) Détermination du symbol du schéma

Le symbole du schéma (8) est donné par :

$$\lambda(\theta) = \sum_{r=-2}^2 \alpha_r e^{i\theta r}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Par développement de ce schéma on a :

$$u_j^{n+1} = \alpha_0 u_j^n + \alpha_{-1} u_{j-1}^n + \alpha_{-2} u_{j-2}^n + \alpha_1 u_{j+1}^n + \alpha_2 u_{j+2}^n, \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 &= 1 - \frac{15}{6}\nu + 3\nu^2 \\ \alpha_{-1} &= \frac{4}{3}\nu - 2\nu^2 \\ \alpha_{-2} &= \frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2 \\ \alpha_1 &= \frac{4}{3}\nu - 2\nu^2 \\ \alpha_2 &= \frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2 \end{cases},$$

avec  $\begin{aligned} \nu &= \Delta t / \Delta x^2 \\ \nu^2 &= \Delta t^2 / \Delta x^4 \end{aligned}$

## 3 Consistence du schéma

On définit l'erreur de troncature par :

$$r_j^t = u(x_j, t^{n+1}) - \alpha_0 u(x_j, t^n) - \alpha_{-1} u(x_{j-1}, t^n) - \alpha_{-2} u(x_{j-2}, t^n) - \alpha_{+1} u(x_{j+1}, t^n) - \alpha_{+2} u(x_{j+2}, t^n)$$

Par développement de Taylor du schéma (8) on a :

$$u(x_{j-1}, t^n) = u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t^n) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_{j+1}, t^n) = u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_{j-2}, t^n) = u(x_j, t^n) - 2\Delta x \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t^n) + \frac{(2\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t^n) - \frac{(2\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_{j+2}, t^n) = u(x_j, t^n) + 2\Delta x \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t^n) + \frac{(2\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t^n) + \frac{(2\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} - \\ & - \frac{4}{3} \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{1}{12} \frac{u(x_{j+2}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-2}, t^n)}{\Delta x^2} - \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u(x_{j+2}, t^n) - 4u(x_{j+1}, t^n) + 6u(x_j, t^n) - 4u(x_{j-1}, t^n) + u(x_{j-2}, t^n)}{\Delta x^4} = \\ & = \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4) \end{aligned}$$

Alors le schéma consistant et d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace.

### a) Stabilité

La stabilité au sens de Von Neumann est une condition suffisante et nécessaire pour la stabilité uniforme en norme quadratique

On obtient le résultat de convergence ???

### b)