2 Numerical methods

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \partial_{xx} u &=& 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) &=& u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{1}$$

La discrétisation de type Différences Finis explicite avec un schéma sur la forme :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{4}{3}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{12}\frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^2} - \\ - \frac{\Delta t^2}{2}\frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a) Determination du symbol du schéma

Par développement du schéma (2) on a :

$$u_j^{n+1} \quad = \quad \alpha_0 u_j^n + \alpha_{-1} u_{j-1}^n + \alpha_{-2} u_{j-2}^n + \alpha_1 u_{j+1}^n + \alpha_2 u_{j+2}^n, \quad \textit{où}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_0 &=& 1 - \frac{15}{6}\nu + 3\nu^2 \\ \alpha_{-1} &=& \frac{4}{3}\nu - 2\nu^2 \\ \alpha_{-2} &=& \frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2 \\ \alpha_1 &=& \frac{4}{3}\nu - 2\nu^2 \\ \alpha_2 &=& \frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2 \end{array} \right. ,$$

$$\textit{avec} \quad \begin{array}{rcl} \nu &=& \Delta t / \Delta x^2 \\ \nu^2 &=& \Delta t^2 / \Delta x^4 \end{array}$$

Le symbole du schéma (2) est donné par :

$$\lambda(\theta) = \sum_{r=-2}^{2} \alpha_r e^{\mathbf{i}\theta r}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(\theta) = 1 - \frac{15}{6}\nu + 3\nu^2 + 2\left(\frac{4}{3}\nu - 2\nu^2\right)\cos\theta + 2\left(\frac{-1}{12}\nu + \frac{1}{2}\nu^2\right)\cos 2\theta \tag{3}$$

b) Consistence du schéma

On définit l'erreur de troncature par :

$$r_j^t = u(x_j, t^{n+1}) - \alpha_0 u(x_j, t^n) - \alpha_{-1} u(x_{j-1}, t^n) - \alpha_{-2} u(x_{j-2}, t^n) - \alpha_{+1} u(x_{j+1}, t^n) - \alpha_{+2} u(x_{j+2}, t^n)$$

Par développement de Taylor du schéma (2) on a :

$$u(x_{j-1}, t^n) = u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t^n) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_{j+1}, t^n) = u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t^n) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_{j-2},t^n) = u(x_j,t^n) - 2\Delta x\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t^n) + \frac{(2\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j,t^n) - \frac{(2\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x_j,t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_{j+2},t^n) = u(x_j,t^n) - 2\Delta x\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t^n) + \frac{(2\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j,t^n) - \frac{(2\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x_j,t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

$$u(x_j,t^{n+1}) = u(x_j,t^n) + \Delta t\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} - \\
&- \frac{4}{3}\frac{u(x_{j+1},t^n) - 2u(x_j,t^n) + u(x_{j-1},t^n)}{\Delta x^2} + \\
&+ \frac{1}{12}\frac{u(x_{j+2},t^n) - 2u(x_j,t^n) + u(x_{j-2},t^n)}{\Delta x^2} - \\
&- \frac{\Delta t^2}{2}\frac{u(x_{j+2},t^n) - 4u(x_{j+1},t^n) + 6u(x_j,t^n) - 4u(x_{j-1},t^n) + u(x_{j-2},t^n)}{\Delta x^4} = \\
&= \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)
\end{aligned}$$

Alors le schéma consistant et d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace.

c) Stabilité

La stabilité au sens de Von Neumann est une condition suffisante et nécessaire pour la stabilité uniforme en norme quadratique

On obtient le résultat de convergence ? ? ?

d)