Equações do pêndulo de duas rodas

Rodrigo Rocha

outubro de 2019

1 Equações iniciais

A dinâmica pode ser descrita pelas equações de torque abaixo:

$$\begin{aligned} T_\theta(t) &= ((2m+M)R^2 + 2n^2J_m)\ddot{\theta}(t) - MLR\dot{\psi}^2(t)\sin\psi(t) + (MLR\cos\psi(t) - 2n^2J_m)\ddot{\psi}(t) && (1) \\ T_\psi(t) &= (MLR\cos\psi(t) - 2n^2J_m)\ddot{\theta}(t) - MgL\sin\psi(t) + (ML^2 + J_\psi + 2n^2J_m)\ddot{\psi}(t) && (2) \end{aligned}$$

Equações de torque descritas em função das tensões aplicadas aos motores:

$$\begin{aligned} T_\theta(t) &= \alpha(v_l(t) + v_r(t)) - 2(\beta + f_w)\dot{\theta}(t) + 2\beta\dot{\psi}(t) && (3) \\ T_\psi(t) &= -\alpha(v_l(t) + v_r(t)) + 2\beta\dot{\theta}(t) - 2\beta\dot{\psi}(t) && (4) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{nK_t}{R_m} && (5) \\ \beta &= \frac{nK_tK_b}{R_m} + f_m && (6) \\ v_l(t) &= v_r(t) = G_u(\mu V_b(t) - V_o)u(t - t_a) && (7) \end{aligned}$$

OBS.: por conveniência deixaremos a variável tempo t subentendidas nas equações.

Reescrevendo (1) e (2) em termos de constantes:

$$\begin{aligned} T_\theta &= c_1\ddot{\theta} - c_2\dot{\psi}^2\sin\psi + (c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\psi} && (8) \\ T_\psi &= (c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\theta} - c_4\sin\psi + c_5\ddot{\psi} && (9) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= (2m+M)R^2 + 2n^2J_m && (10) \\ c_2 &= MLR && (11) \\ c_3 &= 2n^2J_m && (12) \\ c_4 &= MgL && (13) \\ c_5 &= ML^2 + J_\psi + 2n^2J_m && (14) \end{aligned}$$

Isolando $\ddot{\psi}$ em (9) temos:

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{c_5}(T_\psi - (c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\theta} + c_4\sin\psi) \tag{15}$$

Substituindo (15) em (8) temos:

$$\begin{aligned} T_\theta &= c_1\ddot{\theta} - c_2\dot{\psi}^2\sin\psi + \frac{c_2\cos\psi - c_3}{c_5}(T_\psi - (c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\theta} + c_4\sin\psi) \\ &= c_1\ddot{\theta} - c_2\dot{\psi}^2\sin\psi + h_1T_\psi - h_1(c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\theta} + h_1c_4\sin\psi \end{aligned}$$

onde:

$$h_1 = \frac{c_2 \cos\psi - c_3}{c_5} \tag{16}$$

Então:

$$\begin{aligned}
T_\theta &= (c_1 - h_1(c_2\cos\psi - c_3))\ddot{\theta} + h_1(T_\psi + c_4 \sin\psi) - c_2\dot{\psi}^2 \sin\psi \\
\Rightarrow \ddot{\theta} &= \frac{1}{c_1 - h_1(c_2\cos\psi - c_3)}(T_\theta - h_1(T_\psi + c_4\sin\psi) + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi)
\end{aligned}$$

De (3) e (4) temos as expressões para T_θ e T_ψ em função das tensões. Substituindo na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = \frac{1}{c_1 - h_1(c_2\cos\psi - c_3)}&[(\alpha(v_l + v_r) - 2(\beta + f_w)\dot{\theta} + 2\beta\dot{\psi}) \\
&- h_1(-\alpha(v_l+v_r) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi} + c_4\sin\psi) + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{c_1 - h_1(c_2\cos\psi - c_3)}&[\alpha(v_l+v_r) - 2(\beta+f_w)\dot{\theta} + 2\beta\dot{\psi} + h_1\alpha(v_l+v_r) - h_1 2\beta\dot{\theta} + h_1 2\beta\dot{\psi} \\
&- h_1 c_4\sin\psi + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{c_1 - h_1(c_2\cos\psi - c_3)}&[(-2(\beta+f_w) - h_1 2\beta)\dot{\theta} + (2\beta + h_1 2\beta)\dot{\psi} + (-h_1c_4 + c_2\dot{\psi}^2)\sin\psi + \alpha(v_l+v_r) \\
&+ h_1\alpha(v_l+v_r)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = \frac{1}{c_1 - h_1(c_2\cos\psi - c_3)}&\{-2[\beta(1+h_1) + f_w]\dot{\theta} + 2\beta(1+h_1)\dot{\psi} + (c_2\dot{\psi}^2 - h_1c_4)\sin\psi \\
&+ \alpha(1+h_1)(v_l+v_r)\}
\end{aligned} \tag{17}$$

Isolando $\ddot{\theta}$ em (8) temos:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{c_1}[T_\theta + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi - (c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\psi}] \tag{18}$$

Substituindo (18) em (9) temos:

$$\begin{aligned}
T_\psi &= (c_2\cos\psi - c_3)\left\{\frac{1}{c_1}[T_\theta + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi - (c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\psi}]\right\} - c_4\sin\psi + c_5\ddot{\psi} \\
&= h_2T_\theta + h_2c_2\dot{\psi}^2\sin\psi - h_2(c_2\cos\psi - c_3)\ddot{\psi} - c_4\sin\psi + c_5\ddot{\psi}
\end{aligned}$$

onde:

$$h_2 = \frac{c_2\cos\psi - c_3}{c_1} \tag{19}$$

Então:

$$\begin{aligned}
T_\psi &= h_2(T_\theta + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi) - c_4\sin\psi + [c_5 - h_2(c_2\cos\psi - c_3)]\ddot{\psi} \\
\Rightarrow \ddot{\psi} &= \frac{1}{c_5 - h_2(c_2\cos\psi - c_3)}[T_\psi - h_2(T_\theta + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi) + c_4\sin\psi]
\end{aligned}$$

De (3) e (4) temos as expressões para T_θ e T_ψ em função das tensões. Substituindo na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} = \frac{1}{c_5 - h_2(c_2\cos\psi - c_3)}&\{[-\alpha(v_l+v_r) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi}] - h_2[(\alpha(v_l+v_r) - 2(\beta+f_w)\dot{\theta} \\
&+ 2\beta\dot{\psi}) + c_2\dot{\psi}^2\sin\psi] + c_4\sin\psi\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c_5 - h_2(c_2\cos\psi - c_3)}[-\alpha(v_l+v_r) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi} - h_2\alpha(v_l+v_r) + h_2 2(\beta+f_w)\dot{\theta}$$
$$- h_2 2\beta\dot{\psi} - h_2 c_2\dot{\psi}^2\sin\psi + c_4\sin\psi]$$

$$= \frac{1}{c_5 - h_2(c_2\cos\psi - c_3)}\{[2\beta + h_2 2(\beta+f_w)]\dot{\theta} - (2\beta + h_2 2\beta)\dot{\psi} + (c_4 - h_2 c_2\dot{\psi}^2)\sin\psi - (\alpha + h_2\alpha)(v_l+v_r)\}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{c_5 - h_2(c_2\cos\psi - c_3)}\{2[\beta + h_2(\beta+f_w)]\dot{\theta} - 2\beta(1+h_2)\dot{\psi} + (c_4 - h_2 c_2\dot{\psi}^2)\sin\psi$$
$$- \alpha(1+h_2)(v_l+v_r)\} \quad (20)$$

Assim as Equações (17) e (20) representam respectivamente os ângulos $\ddot{\theta}$ e $\ddot{\psi}$ em função das tensões aplicadas aos motores.

2 Equações não lineares no espaço de estados

$$\begin{array}{lll} x_1 = \theta, & \dot{x}_1 = \dot{\theta} \Rightarrow & \dot{x}_1 = x_3 \\ x_2 = \psi, & \dot{x}_2 = \dot{\psi} \Rightarrow & \dot{x}_2 = x_4 \\ x_3 = \dot{\theta}, & & \dot{x}_3 = \ddot{\theta} \\ x_4 = \dot{\psi}, & & \dot{x}_4 = \ddot{\psi} \end{array}$$

Assim, reescrevendo as Equações (16), (17), (19) e (20) em função das variáveis de estados, temos:

$$h_1 = \frac{c_2\cos x_2 - c_3}{c_5} \quad (21)$$
$$h_2 = \frac{c_2\cos x_2 - c_3}{c_1} \quad (22)$$

$$u_1 = v_l \quad (23)$$
$$u_2 = v_r \quad (24)$$
$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (25)$$
$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (26)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{c_1 - h_1(c_2\cos x_2 - c_3)}\{-2[\beta(1+h_1) + f_w]x_3 + 2\beta(1+h_1)x_4 + (c_2x_4^2 - h_1c_4)\sin x_2$$
$$+ \alpha(1+h_1)(u_1+u_2)\} \quad (27)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{c_5 - h_2(c_2\cos x_2 - c_3)}\{2[\beta + h_2(\beta+f_w)]x_3 - 2\beta(1+h_2)x_4 + (c_4 - h_2c_2x_4^2)\sin x_2$$
$$- \alpha(1+h_2)(u_1+u_2)\} \quad (28)$$

3 Linearizando a dinâmica do pêndulo

Já que a dinâmica do sistema é não linear, as equações ficam melhormente representadas da seguinte forma:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \quad (29)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \quad (30)$$
$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \quad (31)$$
$$\dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \quad (32)$$

As equações linearizadas no formato matricial ficam:

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\\ \delta\dot{x}_3\\ \delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}\\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\delta u_1\\ \delta u_2\end{bmatrix} \tag{33}$$

As derivadas parciais acima são funções das variáveis de estado e das entradas que estão subentendidas na escrita por simplicação e devem ser calculadas na condição de equilíbrio definida, ou seja:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2)}{\partial x_i}\right|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, x_3=x_{03}, x_14=x_{04}, u_1=u_{01}, u_2=u_{02}}$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \left.\frac{\partial f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2)}{\partial u_j}\right|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, x_3=x_{03}, x_14=x_{04}, u_1=u_{01}, u_2=u_{02}}$$

A condição de equilíbrio definida é:

$$\theta_0 = \psi_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 = v_{0l} = v_{0r} = 0$$

portanto:

$$x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = u_{01} = u_{02} = 0$$

A saída do sistema fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}\delta y_1\\ \delta y_2\\ \delta y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\end{bmatrix} \tag{34}$$

De forma mais compacta, as matrizes em 33 e 34 ficam:

$$\begin{aligned}\delta x &= A\delta x + B\delta u\\ \delta y &= C\delta x\end{aligned} \tag{35}$$