Notas del Trabajo Especial

Rocío Perez Sbarato

Abril 2025

Observación

Este documento busca ser un borrador del trabajo especial. Su objetivo es cristalizar y ordenar el flujo de ideas durante el proceso de investigación.

Índice

Índice de figuras

Índice de códigos

1. Conjuntos no bien fundados y diagramas de estructuras reflexivas

Uno de los objetivos centrales del trabajo es caracterizar los modelos de sistemas formales reflexivos y señalar algunas propiedades recurrentes. Para ello, es posible proponer una representación formal aprovechando las posibilidades que nos brinda la teoría de conjuntos ***ZFA*** para representar circularidad. Es aún más interesante establecer una relación con los análisis formales de las estructuras detrás de muchas paradojas, realizados por Grim y Rescher, plasmados en un tipo de diagramas especial para la ocasión.

1.1. La paradoja del Mentiroso

1.1.1. Diagrama estructural

En *Reflexivity: From Paradox to Consciousness*, Grim y Rescher se proponen mostrar que las distintas paradojas tienen una forma o estructura muy parecida. Este eje central que subyace al absurdo de las paradojas puede ser expresado con un tipo de diagrama que podemos ver en la Figura 2. En esta figura, tenemos la separación de una oración entre sujeto y predicado, lo cual nos permite construir la oración que se refiere a sí misma. Del lado izquierdo se encuentra el sujeto y del lado derecho el predicado. La flecha de estos diagramas representa que el predicado se aplica al sujeto. El predicado debe ser algo que pueda decirse de un sujeto. En nuestro caso, el sujeto se llama **S** y debe referirse a sí misma, es decir, tenerse a sí misma como sujeto (Figura 1).

Dicho esto, podemos notar que la paradoja semántica que se ve expresada en esa circularidad no es cualquier oración auto-referencial sino la expresión de la paradoja del Mentiroso: "esta oración es falsa". Lo paradójico de esta

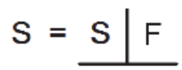


Figura 1: Expresión **S**

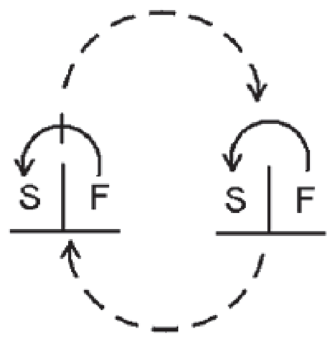


Figura 2: Diagrama de la estructura de la paradoja del Mentiroso.

oración se puede ver en la oscilación de la Figura 2, donde si S - que representa “esta oración es falsa es falsa, entonces no puede ser que sea falsa. Por otro lado, si no es falsa, entonces tiene que serlo. Resumiendo, la paradoja contiene auto-referencia y negación.

Similarmente, la paradoja de Russell contiene un ciclo. Sea R es el conjunto russelliano compuesto por cualquier conjunto que no pertenezca a sí mismo. Entonces, si R no pertenece a sí mismo, entonces debe pertenecer a sí mismo. En la Figura 8, la flecha representa la relación de pertenencia. A diferencia de la paradoja del Mentiroso, la de Russell solo trabaja con componentes con una estructura única y no de dos partes.

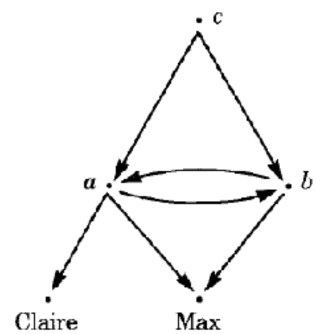
1.1.2. Proposición, ecuación y su *labeled graph* asociado

La Teoría de Conjuntos clásica de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección (**ZFC**) no permite los conjuntos que se tienen a sí mismos como elementos. Esto se debe al Axioma de Fundación (**FA**), el cual inherentemente frena la circularidad. En cambio, la Teoría de Conjuntos **ZFC** con el Axioma de Anti-Fundación (**AFA**) sí da lugar a la reflexividad en los conjuntos. Es una extensión de ZFC, tanto que para demostrar su consistencia se parte de la base de que **ZFC** lo es. [1] Ahora bien, uno de los conceptos clave desarrollados por Barwise y Moss es el *Solution Lemma*. Tiene distintas aristas y colores, en general este lemma significa que cada sistema de ecuaciones tiene una única solución. Esto solo vale en la Teoría de Conjuntos ***ZFA*** (con el Axioma de Anti-Fundación),

[1] Demostrado en los libros de Barwise

$$\mathfrak{X} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$$

$$\mathbf{x} = \{\text{Claire}, \text{Max}, \mathbf{y}\}$$
$$\mathbf{y} = \{\text{Max}, \mathbf{x}\}$$
$$\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$$



AFA tells us that these equations have a unique solution in the hyperuniverse, the sets $\mathbf{x} = a, \mathbf{y} = b$, and $\mathbf{z} = c$

Figura 3: Relación entre decorado y soluciones.

no en la teoría ***ZFC*** que conocemos. En respecto a los grafos, plantea que cada *labeled graph* tiene un único decorado. Podemos pensar que un conjunto es cualquier colección de objetos cuya relación de pertenencia puede ser ilustrada a través de un grafo. En esta Teoría, puede pasar que un conjunto tenga varios grafos que lo representan, pero en el fondo todos deben tener el mismo decorado.

A su vez, los grafos tienen sus nodos y sus aristas. Se trabaja con *labeled graphs* y se define el decorado de estos grafos como el conjunto de los hijos de cada nodo. Si no tiene hijos, entonces ese nodo se decora con su *label.* Luego, los nodos de los grafos son conjuntos y las aristas son establecidas por la relación de pertenencia invertida entre conjuntos. En la Teoría de Conjuntos con **AFA** incorporado, estos grafos pueden ser tanto bien fundados como no serlo. Por ejemplo, en la Figura 3 se ve un grafo no bien fundado.

Otra cosa importante a destacar es que las soluciones de sistemas de ecuaciones y las decoraciones de los grafos se corresponden. En *Vicious Circles* está demostrada la equivalencia entre el *Solution Lemma* en general y para grafos. Teniendo en cuenta estas dos ideas, es claro que las soluciones a las ecuaciones son un mapeo que asigna valores a las variables indeterminadas. En la Figura 3, esas variables indeterminadas son $X = \{x, y, z\}$. Para entender mejor este concepto ir a la sección Definiciones útiles.

La solución o las soluciones de cada ecuación del sistema se encuentran en el decorado del grafo asociado. Por ejemplo, la Figura X. muestra un grafo G_p asociado a la proposición $p = \langle E, q, 0\rangle$, la cual nos dice que la proposición $\mathbf{q}$ no tiene la propiedad E. La solución a la ecuación $p = \langle E, q, 0\rangle$ es el grafo asociado a G_p. Recordar que, en Teoría de Conjuntos, un par ordenado $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ es pensado como {a, {b, c}}.

Esta estructura matemática enmarcada en ***ZFA*** permite la circularidad en estos grafos, como se ve en las Figuras 5 y 4. En esta última, la solución de la ecuación es ella misma, lo que se puede ver en el *loop* a su propia raíz. Notar que en este caso tomamos la proposición p y la cambiamos para obtener la auto-referencialidad $q = \langle E, q, 0 \rangle$. Esta no es necesariamente la paradoja del Mentiroso, pero sin lugar a dudas tiene su estructura. Si $E =$ "esta oración es verdadera", entonces q representa "esta oración no tiene la propiedad "es verdadera. O sea, la oración q es "esta oración es falsa".

1.1.3. Relación entre diagrama y ecuación

Sea S la sentencia con sujeto y predicado que vimos en la **sección 1.1.1** y q la proposición que vimos en 1.1.2. Su equivalencia surge de la reflexividad, negación y la propiedad/predicado que se aplica a la misma estructura auto-referencial. presente en ambas. Además, las propiedades $E =$ "es verdaderoz el predicado $F =$ "es falso"son opuestas. Es decir, $E = \neg F$ o $F = \neg E$. Entonces, "esta oración es falsa"no cumple E si y solo si cumple F. Esto es equivalente a decir que S cumple F si y solo si S cumple $\neg E$, q cumple F si y solo si q cumple $\neg E$ y por lo tanto S es equivalente a q en tanto ambas representan el mismo estado de verdad respecto de la evaluación de E. O sea, S es falsa si y solo si q no es verdadera. Cabe aclarar que esta relación entre P y E existe porque ambas son lo que se dice de la unidad auto-referencial, independientemente de si esta propiedad se aplica o no se aplica a tal unidad.

Algo similar podríamos decir para la generalización del diagrama de la paradoja del mentiroso (Figura 7) y otros valores para la propiedad E. Es crucial estudiar esto aplicado a la paradoja de Russell, paradojas semánticas como heterological o teoremas como Halting problem y el de Incompletitud. En el caso de estos dos últimos deberá tener otro enfoque, puesto que son teoremas y el absurdo surge de una construcción de prueba. Sin embargo, se mantiene la estructura de "sujeto y predicado"del Mentiroso.

1.2. Paradoja de Russell

Podemos representar la paradoja de Russell mediante una ecuación auto-referencial en nuestro marco de ecuaciones del tipo $q = \langle E, q, 0 \rangle$. En este caso, definimos la expresión $E(x)$ como

$$E(x) = x \notin x$$

y construimos el par ordenado $q = \langle E, q, 0 \rangle$. Este objeto representa "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos no se contiene a sí mismo". Evaluar si $q \in q$ equivale a evaluar la condición $E(q)$, es decir $q \in q \iff q \notin q$ lo cual genera una contradicción. De este modo, reproducimos en nuestro sistema la estructura lógica de la paradoja de Russell.

El diagrama de Russell propuesto por Grim y Rescher (Figura 8) presenta la relación entre conjuntos como una sola parte. La flecha indica si el de la izquierda pertenece al de la derecha. Siguiendo este diagrama, notamos que es posible modelar cualquiera de las dos expresiones que generan el ciclo extraño. Esto es posible al relacionar q con R y la fecha tachada con $\neg E$. Aunque Grim

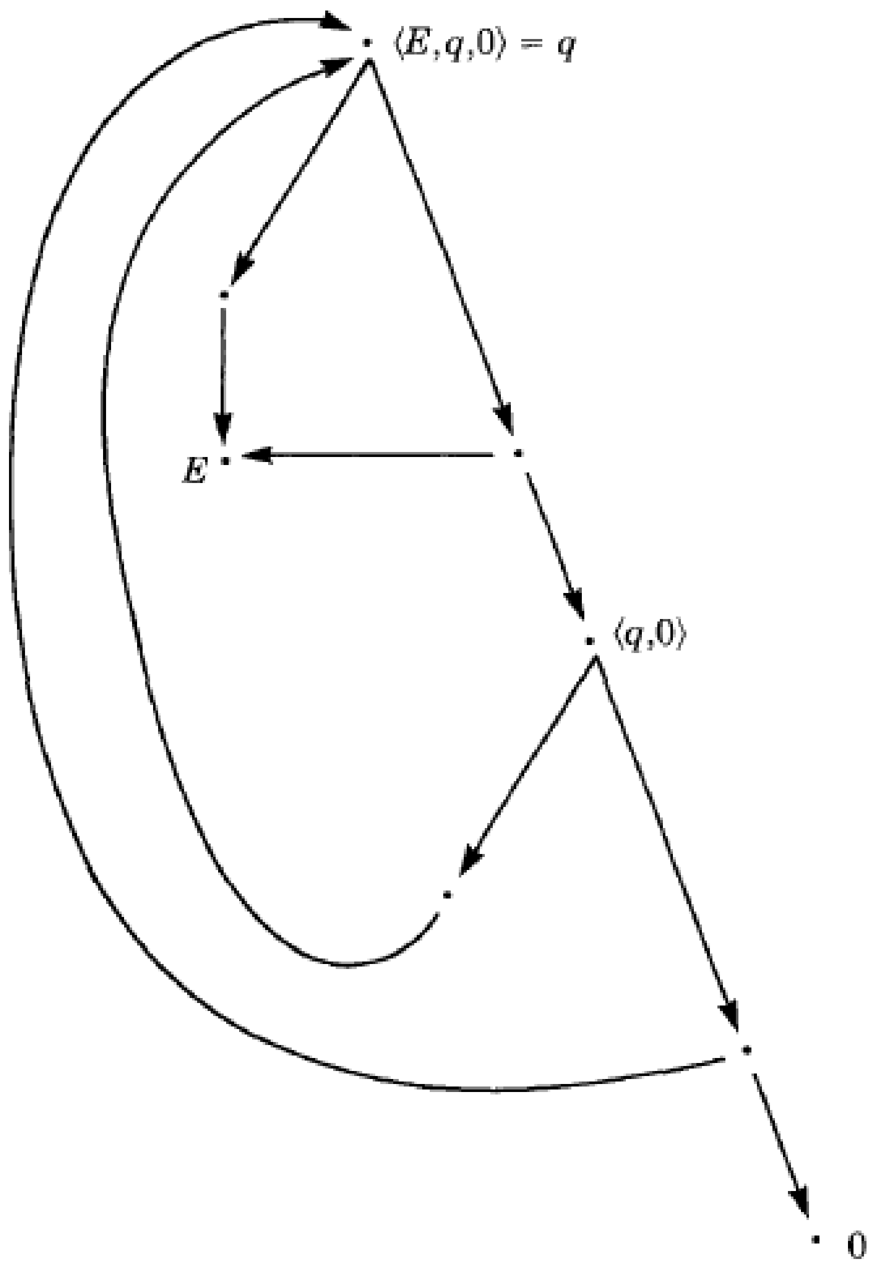


Figura 4: Grafo de $q = \langle E, q, 0\rangle$.

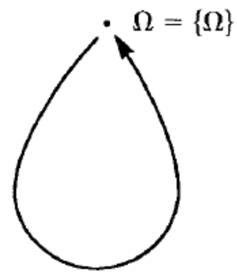


Figura 5: Grafo de la ecuación $\Omega = \{\Omega\}$.

Figura 6: Diagrama del ciclo extraño presente en la paradoja del Mentiroso que se relaciona con el *hyperset* q

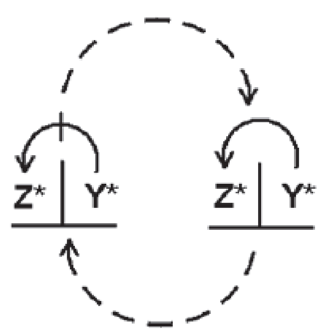


Figura 7: Diagrama de la estructura de la paradoja del Mentiroso y demás paradojas con una estructura de dos partes.

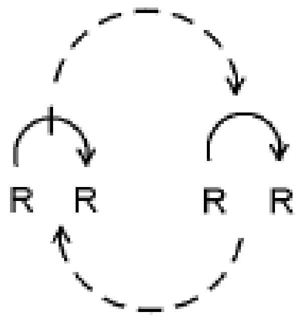


Figura 8: Diagrama de la estructura de la paradoja de Russell

y Rescher no lo propongan así, una aproximación al análisis de la paradoja de Russell mediante la estructura de dos partes con sujeto y predicado consiste en lo siguiente. Sea el conjunto ruselliano R el sujeto y la expresión P el predicado. La propiedad E indica "no pertenecer a sí mismo", que es negación de la propiedad $P(x) = x \in x$. Es decir, $E = \neg P$ y, por lo tanto, $P = \neg E$. Si $q \in q$, entonces no cumple E, y por definición de E, eso implica que $q \notin q$. Por el contrario, si $q \notin q$, entonces cumple E, lo cual implica que $q \in q$. Por lo tanto, R y q son equivalentes en tanto ambas representan una estructura auto-referencial basada en la aplicación de una propiedad a sí misma, y ambas conducen a una contradicción lógica al evaluarse.

1.3. Paradojas de Grim y Rescher

Podemos generalizar las aproximaciones en el modelo de paradojas como la del Mentirosos y la de Russell. Tomamos el análisis de los diagramas (Figuras 7, 9) y el grafo auto-referencial (Figura 4). También, tomamos las relaciones que hemos establecido entre ellas. Esperamos que estas aproximaciones puedan servir como una guía para seguir intentando comprender las estructuras paradójicas. Consideramos que esto es útil para abordar la circularidad y aprovechar las posibilidades que brinda.

Antes de comenzar, haremos notar algunas preocupaciones entorno a las hipótesis que hemos presentado.

Una diferencia entre los diagramas y los grafos es que la Figura 4 representa la oración que causa una paradoja, mientras que diagramas como el de la Figura 2 presentan el "ciclo extraño"de la paradoja, es decir, la dinámica de auto-referencia que genera la contradicción. Es por eso que podemos establecer la relación anterior, donde la propiedad E y el predicado P son opuestos: $E(x) = \neg P(x)$. En el caso del Mentiroso, E puede ser "es verdaderaz P = "es falsa", mientras que en la paradoja de Russell, $E(x) = x \notin x$ y $P(x) = x \in x$. En ambos casos, la paradoja emerge cuando una entidad se evalúa respecto de una propiedad que la niega al cumplirse, generando así una estructura lógicamente

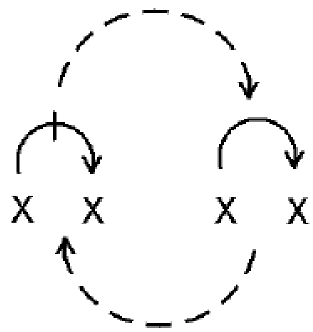


Figura 9: Diagrama de la estructura de las paradojas de Russell, del Barbero, de la palabra hetereological y demás

inestable.

Surgen las interrogantes de cómo lograr que el diagrama solo represente la oración y cómo lograr que el grafo represente el ciclo extraño. La respuesta a la primera pregunta es simple, pues S es esa misma representación. La respuesta a la segunda pregunta parece ser más complicada a la hora de formalizarla, el hecho de que $q = \langle E, q, 0 \rangle$ y $q = \langle E, q, 1 \rangle$ tienen el mismo grafo podría generar un problema. Sin embargo, podemos justificar, mediante una explicación lógica similar a Grim y Rescher, que $q = \langle E, q, 0 \rangle$ y $q = \langle E, q, 1 \rangle$ generan un "ciclo extraño".

Cabe señalar que Barwise y Moss trabajan la paradoja del Mentiroso mediante un modelo presente en una teoría de verdad Austiniana. Hemos decidido omitir este enfoque y esperamos poder incorporarlo una vez que comprendamos el rol de los *hypersets* en el *encoding* de las paradojas.

1.3.1. Formalización de relación entre diagramas y hypergrafos

A continuación, se encuentra una observación que actúa a modo de resumen de las secciones anteriores.

Observación

Semantic paradoxes
Y^*:= "este sujeto cumple la propiedad Y^*" $\equiv \neg E$
Z^*:= "este sujeto no cumple la propiedad Y^*" $\equiv q$
- La suposición de un predicado que se relaciona con R todas y solo aquellas oraciones que tienen un predicado que no se relaciona con R con su sujeto, conduce a la oscilación.
- Lleva a un ciclo infinito en el caso de la paradoja del mentiroso.

Set-therorical paradoxes
X:= conjunto de elementos que no cumplen la propiedad $Y^* \equiv$ conjunto de elementos que cumplen $\neg E$
$X \to X$:= "este conjunto X cumple la propiedad Y^*" $\equiv q$
- Nada tiene relación R con todo y solo con aquellas cosas que no tienen relación R consigo mismas.
- Lleva a un ciclo infinito en el caso de la paradoja de Russell, del barbero y de la palabra *hetereological*.

1.4. Prototipos de sistemas reflexivos

En esta sección exploramos distintos enfoques para modelar sistemas reflexivos. En particular, nos enfocamos en desarrollar representaciones formales de la Paradoja de Russell, la Paradoja del Mentiroso y otras construcciones con estructuras similares, con el objetivo de proponer un *template* general que permita capturar este tipo de circularidad de manera sistemática.

Para este propósito, utilizamos el lenguaje funcional Haskell como herramienta principal de modelado. Haskell, con su fuerte soporte para estructuras recursivas y su orientación a la definición declarativa de datos, resulta especialmente adecuado para expresar la circularidad inherente a estas paradojas.

1.4.1. Paradoja de Russell

En un principio, buscamos modelar el diagrama de la Figura 10. También es posible el camino de modelar el par ordenado $q = \langle E, q, 0\rangle$ mediante *hypersets*. Aunque no son excluyentes, dividimos el desarrollo del primer enfoque en las secciones 1.4.2, 1.4.3 y del segundo en la sección 1.4.4. Como se verá a continuación, el primer enfoque tiene mayor nivel de abstracción y de verbosidad mientras que el segundo es más directo y convincente. Es por eso que propongo que el primer enfoque tiene potencial más alto de escalabilidad.

1.4.2. Intento con bug

Es importante destacar que existe un bug en Haskell[2], donde GHC tiene el error `ghc: panic! (the 'impossible' happened)` al ejecutar el siguiente programa:

[2] Código fuente: `https://okmij.org/ftp/Haskell/impredicativity-bites.html`

Listing 1: Modelo en Haskell de la Paradoja de Russell

```
{-# LANGUAGE GADTs, KindSignatures, EmptyDataDecls #-}

data False -- Fantasma
data J c = J (c ())

{- Si el conjunto no pertence a si mismo, entonces pertenece al conjunto
    russelliano R -}
data R :: * -> * where
   MkR :: (c (J c) -> False) -> R (J c)

{- La funcion f toma como argumento el mismo R (J R) que construye -}
condFalse :: R (J R) -> False
condFalse x@(MkR f) = f x

absurd :: False
absurd = condFalse (MkR cond_false) -- Ciclo de self-reference

main = do
    print (absurd`seq` ())
```

En este caso, `f` es el predicado $P(x) := x \notin x$. Mientras que P construye el conjunto R, el predicado se aplica a este mismo conjunto.

```
condFalse (MkR condFalse)
     condFalse (MkR f)
        == f (MkR f)
== condFalse (MkR condFalse)
```

La condición `condFalse` es similar a preguntar "¿El conjunto R pertenece a sí mismo?". Más formalmente, se trata de evaluar la propiedad P aplicada a R, es decir, determinar si $P(R)$ es verdadera o falsa, o bien, si $R \in \{x : x \notin x\}$. En el ejemplo, se asigna el valor de falsedad a esta pregunta, lo cual como ya vimos lleva a un ciclo infinito.

Es posible establecer la relación con este predicado `condFalse` y $q = \langle E, q, 0\rangle$. Ambos proponen que el conjunto ruselliano no pertenece a sí mismo, si tomamos la definición de E que dimos en **Proposición, ecuación y su labeled graph asociado** (sección 1.1.2). Notar que P es exactamente este E, q es exactamente `condFalse`. Por esto mismo, podemos decir que es similar a la Figura 10.

1.4.3. Modelos de autoreferencialidad en Haskell sin bugs

Este programa[3] es muy similar al anterior, lo que cambia es el uso de `inline`. Aunque no termina de correr, puesto que genera un ciclo infinito, permite modelar la circularidad de la paradoja sin bugs.

[3]Código fuente en uno de los comentarios del post en `https://www.reddit.com/r/haskell/comments/5nzxf6/is_the_following_encoding_of_russels_paradox/`

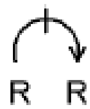


Figura 10: Diagrama de $R \notin R$

Listing 2: Otra versión del modelo en Haskell de la Paradoja de Russell

```haskell
data False

-- Conjunto ruselliano
data R = MkR {proj :: R -> False}

-- R pertenece a si mismo?
f :: R -> False
f = \x -> proj x x
-- La clave: evitar optimizaciones de GHC
{-# noinline f #-}

omega :: False
omega = f (MkR f) -- Ciclo de self-reference

main = do
  print (omega `seq` ())
```

En el código `data False` define un tipo vacío, sin constructores. Representa una proposición lógicamente falsa. El tipo `R` representa un conjunto russelliano, es decir, un conjunto que contiene elementos que no se contienen a sí mismos. Cada valor de tipo `R` tiene una función llamada `proj` de tipo `R ->False`.

El selector de campo `proj` se genera automáticamente por Haskell, y tiene tipo `proj :: R ->(R ->False)`. Así, `proj x` es una función que toma otro `R` y produce un `False`.

Por otro lado, la función `f` toma un valor `x :: R` y aplica su propio `proj` a sí mismo: `proj x x`. Es decir, pregunta si `x` "se contiene a sí mismo", y se aplica a sí mismo para decidirlo. Esta forma es directamente análoga a la construcción del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos pero tiene el componente de la auto-referencia.

El pragma `{-# noinline f #-}` es crucial: le indica al compilador que no optimice ni expanda la definición de `f`, para evitar que el compilador descubra anticipadamente el ciclo infinito. Esto fuerza a que la auto-referencia se mantenga en tiempo de ejecución. Notar que el código anterior se arregla usando la misma estrategia.

Listing 3: Arreglo del primer intento de modelo en Haskell de la Paradoja de Russell

```haskell
condFalse :: R (J R) -> False
```

```haskell
condFalse x@(MkR f) = f x
{-# noinline condFalse #-}
```

La expresión `omega = f (MkR f)` construye una instancia de `R` con la función `f`, y luego se aplica a sí misma. El resultado es un ciclo de auto-aplicación que nunca termina...

$$
\begin{aligned}
\omega &= \texttt{f (MkR f)} \\
&= \texttt{proj (MkR f) (MkR f)} \\
&= \texttt{f (MkR f)} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Finalmente, en `main`, se intenta forzar la evaluación de `omega` usando `seq` para imprimir `()`. Sin embargo, como `omega` nunca termina, el programa entra en un ciclo infinito ($\perp$).

1.4.4. Intento con `data HFS`

En pos de simular la estructura de los hypergrafos, utilizamos una estructura[4] que nos permite simular la relación de pertenencia entre nodos. En cierto modo, estamos llevando los análisis de Grim y Rescher al mundo de los *non well founded sets*, ya que permitimos que haya circularidad para poder representar la paradoja de Russell.

Listing 4: Modelo de la paradoja de Russell en Haskell usando `data HFS`

```haskell
-- Tipo de conjunto hereditarimente finito con soporte para ciclos
data HFS t = U t | S [HFS t] deriving (Eq, Show)

-- Funcion para saber si un conjunto esta en otro
elemHFS :: Eq t => HFS t -> HFS t -> Bool
elemHFS x (S xs) = x `elem` xs
elemHFS _ _     = False

-- Creamos un elemento para el conjunto R
x :: HFS String
x = S [] -- No se contiene a si mismo

-- Proponemos que R no se contiene a si mismo
r :: HFS String
r = S [ y | y <- [x, r], not (y `elemHFS` y) ] -- Circularidad

main :: IO ()
main = do
    print ((r `elemHFS` r) `seq` ()) -- Ciclo de self-reference
```

[4]Idea sacada de `https://arxiv.org/pdf/0808.0754`

1.4.5. Paradojas de Grim y Rescher

2. Definiciones útiles

2.1. Solución

- The Liar, página 50.

> By an *assignment* for $\mathbb{X}$ in V_A we mean a function $f : \mathbb{X} \to V_A$ which assigns an element $f(\mathbf{x})$ of V_A to each indeterminate $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$. Any such assignment f extends in a natural way to a function $\hat{f} : V_A[\mathbb{X}] \to V_A$. Intuitively, given some $a \in V_A[\mathbb{X}]$ one simply replaces each $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ by its value $f(\mathbf{x})$. Rather than write $\hat{f}(a)$, we write $a[f]$, or even more informally, $a(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots)$ and $a(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), \ldots)$.

Definición

Una asignación $f : V_A[\mathbb{X}] \to V_A$ es una *solución de una ecuación* $\mathbf{x} = a(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots) \in V_A[\mathbb{X}]$ si

$$f(\mathbf{x}) = a(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), \ldots) \in V_A$$

Notar que $V_A[\mathbb{X}] = V_{A'}$
- f es una solución de un sistema de ecuaciones en $\mathbb{X}$ si es una solución de cada ecuación del sistema.