Actividad:
Método de Newton para la resolución de sistemas no lineales

Todos los métodos vistos en esta asignatura para la resolución de ecuaciones no lineales permitian resolver ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$. En esta sección daremos un métode para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales de la forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Para resolver el sistema anterior, escribimos el polinomio de Taylor de las funciones f_i del sistema en un punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y lo igualamos a cero:

$$f_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_n}\Delta x_n = 0\,.$$

Si dejamos a un lado de la igualdad los términos con f_i y al otro lado los términos con derivadas, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_n}\Delta x_n = -f_1(\mathbf{x}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_n}\Delta x_n = -f_n(\mathbf{x}) \end{cases}$$

que podemos escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Notemos que el sistema de ecuaciones (1) puede ser compactado como

$$F(\mathbf{x}) = 0\,,$$

donde $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. Si ahora calculamos el polinomio de Taylor de F y lo igualamos a cero, tenemos

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + JF(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 0\,,$$

donde $JF(\mathbf{x})$ es la matriz jacobiana de F, y coincide con la matriz del sistema (2). Reescriviendo esta última ecuación, obtenemos la versión compacta del sistema lineal (2):

$$JF(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = -F(\mathbf{x})\,. \tag{3}$$

Una vez definido el sistema lineal (2) (o su versión más compacta (3)), podemos partir de un valor inicial de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$, resolver el sistema lineal para este valor y definir $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$. Iterando este procedimiento obtenemos una sucesión de puntos que, en condiciones favorable, convergerá hacia una solución del sistema original (1). En el momento en que $|F(\mathbf{x})| < \varepsilon_0$ podemos detener el método. Es importante observar que distintos valores iniciales $\mathbf{x}_0$ podrían llevar a distintas soluciones del sistema.

Notemos que, en el caso $n = 1$, el método de Newton que acabamos de presentar no es más que el método de Newton–Raphson. En este caso, la matriz del sistema lineal es 1×1, y su inversa no es más que el inverso de su único elemento.

Se pide:

1. Escribir una función llamada `Newton_nD` que reciba como parámetros la función F que define nuestro sistema junto con su matriz Jacobiana (siguiendo el mismo esquema de la función `newton_raphson` vista en clase), junto con un valor de la tolerancia ε_0 y una primera aproximación de la solución, y devuelva la solución del sistema no lineal $F(x) = 0$ siguiendo el método de Newton descrito en esta actividad.

2. Escribir un programa principal que encuentre todas soluciones del sistema no lineal

$$\begin{cases} x^2 + xy^3 = 9\,, \\ 3x^2y - y^3 = 4\,, \end{cases}$$

   y las escriba por pantalla. *Indicación: este sistema tiene cuatro soluciones, todas ellas en el cuadrado* $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

Observación

Esta actividad puede hacerse en grupos de 1–3 personas. Cada miembro del grupo tiene que entregar el mismo archivo `*.zip` (ver Formato de entrega) y tanto en el código (por ejemplo con un comentario) como en el pdf debe aparecer el nombre de todos los integrantes del grupo.

Formato de entrega

La resolución numérica debe hacerse usando el lenguaje de programación C++. Si se desea entregar algún documento de texto, debe estar escrita usando LaTeX, y el documento tiene que ser un PDF.

Tanto el documento con las posibles explicaciones como los ficheros de código deben entregarse en un único archivo comprimido `*.zip`.