O Sistema de Tipos

Tipos

Apresentamos agora um sistema de tipos simples para a nossa linguagem funcional.

- Sintaxe abstracta

$$
\begin{array}{rcl}
\langle type \rangle & ::= & \mathbf{Int} \mid \mathbf{Bool} \mid \langle type \rangle \to \langle type \rangle \\
& \mid & \mathbf{Prod}(\langle type \rangle, \ldots, \langle type \rangle) \\
& \mid & \mathbf{Sum}(\langle type \rangle, \ldots, \langle type \rangle) \\
& \mid & \mathbf{List}\ \langle type \rangle
\end{array}
$$

- Abreviaturas

$$
\begin{array}{rcl}
\langle type \rangle \times \ldots \times \langle type \rangle & \doteq & \mathbf{Prod}(\langle type \rangle, \ldots, \langle type \rangle) \\
\mathbf{Unit} & \doteq & \mathbf{Prod}() \\
\langle type \rangle + \ldots + \langle type \rangle & \doteq & \mathbf{Sum}(\langle type \rangle, \ldots, \langle type \rangle)
\end{array}
$$

- Precedências: $\mathbf{List}$, $\times$, $+$, $\to$
- Associatividade: $\times$, $+$ à esquerda; $\to$ à direita

Contextos

Para definir a relação de tipificação entre termos e tipos precisamos de introduzir a noção de *contexto* para declarar o tipo das variáveis (e dos padrões).

- Um contexto é uma lista de associações de tipos a padrões

$$\langle context \rangle \ ::= \ \mid \ \langle context \rangle, \langle pat \rangle : \langle type \rangle$$

  com a restrição de uma variável não poder ocorrer mais do que uma vez num contexto.

- Um juizo de tipo tem a forma

$$\langle context \rangle \vdash \langle exp \rangle : \langle type \rangle$$

Sistema de tipos

- Definimos agora um sistema de tipos com base num conjunto de regras de inferência de tipos que especificam os juizos de tipos válidos.

- Usaremos as seguintes meta-variáveis

$$
\begin{array}{llll}
\Gamma & \langle context \rangle & x & \langle var \rangle \\
\theta, \tau, \sigma & \langle type \rangle & p & \langle pat \rangle \\
e & \langle exp \rangle & k, n & \mathbb{N}
\end{array}
$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, p : \sigma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \lambda p.e : \sigma \to \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash e_2 : \sigma}{\Gamma \vdash e_1\, e_2 : \tau}$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{}{\Gamma \vdash n : \mathbf{Int}} \quad \text{para cada } n \in \mathbf{N}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{Int}}{\Gamma \vdash -e : \mathbf{Int}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{Int} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{Int}}{\Gamma \vdash e_1 \;\mathbf{bop}\; e_2 : \mathbf{Int}} \quad \text{para } \mathbf{bop} \in \{+, -, *, \mathsf{div}, \mathsf{mod}\}$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{True} : \mathbf{Bool}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{False} : \mathbf{Bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{Bool}}{\Gamma \vdash \neg e : \mathbf{Bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{Bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{Bool}}{\Gamma \vdash e_1 \;\mathbf{bop}\; e_2 : \mathbf{Bool}} \quad \text{para } \mathbf{bop} \in \{\vee, \wedge\}$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{Int} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{Int}}{\Gamma \vdash e_1 \;\mathbf{bop}\; e_2 : \mathbf{Bool}} \quad \text{para } \mathbf{bop} \in \{=, \neq, <, >, \leq, \geq\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{Bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \theta \qquad \Gamma \vdash e_3 : \theta}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ e_1\ \mathsf{then}\ e_2\ \mathsf{else}\ e_3 : \theta}$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{}{\Gamma \vdash \langle\rangle : \mathbf{Unit}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \theta_1 \ \cdots \ \Gamma \vdash e_n : \theta_n}{\Gamma \vdash \langle e_1, \ldots, e_n \rangle : \theta_1 \times \ldots \times \theta_n}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \theta_1 \times \ldots \times \theta_n}{\Gamma \vdash e.k : \theta_k} \ \text{para } k \in \{1, \ldots, n\}$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{\Gamma \vdash e : \theta_k}{\Gamma \vdash @k\, e : \theta_1 + \ldots + \theta_n} \ \text{para } k \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \theta_1 + \ldots + \theta_n \qquad \Gamma \vdash e_1 : \theta_1 \to \theta \ \cdots \ \Gamma \vdash e_n : \theta_n \to \theta}{\Gamma \vdash \mathsf{sumcase}\ e\ \mathsf{of}\ (e_1, \ldots, e_n) : \theta}$$

Regras de inferência de tipos

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{nil} : \mathbf{List}\ \theta} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \theta \qquad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{List}\ \theta}{\Gamma \vdash (e_1 :: e_2) : \mathbf{List}\ \theta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{List}\ \theta \qquad \Gamma \vdash e_1 : \theta' \qquad \Gamma \vdash e_2 : \theta \to \mathbf{List}\ \theta \to \theta'}{\Gamma \vdash \mathsf{listcase}\ e\ \mathsf{of}\ (e_1, e_2) : \theta'}$$