

Ficha 6

Semântica das Linguagens de Programação

2021/22

1. Indique as variáveis livres e ligadas de cada uma das seguintes expressões:

- (a) $\lambda x.((\lambda z.\lambda u.\lambda v. u v z) x f y)$
- (b) $\lambda y.\lambda z.(x z) (y z)$
- (c) $(\lambda x.f x (\lambda y. y)) x$
- (d) $\lambda x.((\lambda z.\lambda u.\lambda v. u v z) x f y) z x$

2. Indique o resultados das seguintes substituições:

- (a) $(\lambda x.\lambda y. x z)[(\lambda v.v (r w))/z]$
- (b) $(\lambda x.\lambda y. x z)[\lambda y. w/z]$
- (c) $((\lambda x.\lambda y. x z) x)[y w/x]$
- (d) $((\lambda x.\lambda y. x z) z)[y w/z]$

3. Escreva de forma explicita as regras do lambda calculus puro para

- (a) fecho compatível de \rightarrow_β
- (b) fecho reflexivo e transitivo da β -redução, \rightarrow_β^*
- (c) fecho reflexivo, simétrico e transitivo da β -redução, $=_\beta$

4. Apresente todas as possíveis sequências de redução dos seguintes termos:

- (a) $(\lambda x. (\lambda y. y x) z) (z w)$
- (b) $(\lambda u. \lambda v. v)((\lambda x. x x)(\lambda x. x x))$

5. Considere os termos

$$\begin{aligned} I &\equiv \lambda x. x \\ K &\equiv \lambda x. \lambda y. x \\ S &\equiv \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z (y z) \\ \Omega &\equiv (\lambda x. x x)(\lambda x. x x) \end{aligned}$$

Construa as sequências de redução para as expressões abaixo indicadas, seguindo como estratégia de redução a “normal-order reduction” e a “applicative-order reduction”, respectivamente.

- (a) $S K K$
- (b) $K S \Omega$
- (c) $I (I (\lambda z. I z))$

6. Calcule, se existir, a norma normal do termo $(\lambda a. \lambda b. a \ a \ b)(\lambda x. \lambda y. y)(\lambda x. \lambda y. y)$. Diga se o termo é fortemente normalizável, fracamente normalizável, ou não normalizável.

7. Apresente as sequências de redução correspondente à avaliação “call-by-name” e “call-by-value” para as seguintes expressões:

(a) $(\lambda x. x) ((\lambda y. y)(\lambda z. z))$

(b) $(\lambda x. \lambda y. y) ((\lambda x. x \ x)(\lambda x. x \ x))$

8. Considere os seguintes termos do lambda calculus puro:

$$\begin{aligned} I &\equiv \lambda x. x \\ K &\equiv \lambda a. \lambda b. a \\ S &\equiv \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z) \end{aligned}$$

Apresente a sequência correspondente à *ordem aplicativa* de redução da expressão

$$K \ S \ (I \ K) \ I$$

até à sua *forma normal*. Sublinhe o β -redex que é seleccionado em cada passo de redução.

9. Considere o seguinte λ -termo:

$$(\lambda a. \lambda b. a \ b) ((\lambda y. y) (\lambda x. x)) ((\lambda x. \lambda y. y) (\lambda z. z))$$

Apresente a sequência de redução deste termo até à sua *forma normal* de acordo com a *ordem normal de avaliação*. Sublinhe sempre o β -redex que é seleccionado em cada passo de redução.

10. Considere o seguinte termo do lambda calculus puro:

$$(\lambda a. \lambda b. \lambda c. a \ (b \ a) \ c) (\lambda x. \lambda y. y) ((\lambda u. u) (\lambda u. u)) (\lambda a. \lambda b. a)$$

Apresente a sequência correspondente à *avaliação “call-by-name”* deste termo até à sua *forma canónica*. Sublinhe o β -redex que é seleccionado em cada passo de redução.

11. Relembre a codificação dos Booleanos apresentada nas aulas teóricas:

$$\text{TRUE} \equiv \lambda x. \lambda y. x \qquad \text{FALSE} \equiv \lambda x. \lambda y. y$$

Usando os Booleanos, a codificação de pares pode ser feita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{PAIR} &\equiv \lambda f. \lambda s. \lambda b. b \ f \ s \\ \text{FST} &\equiv \lambda p. p \ \text{TRUE} \\ \text{SND} &\equiv \lambda p. p \ \text{FALSE} \end{aligned}$$

Mostre que

(a) $\text{FST} (\text{PAIR} \ a \ b) \rightarrow_{\beta}^* a$

(b) $\text{SND} (\text{PAIR} \ a \ b) \rightarrow_{\beta}^* b$