Day1

gyh20

目录

得分分布

前三：
Exusiai_ 287
LWLAymh 252
hs_wfz_orz 245
第十名分数：153。

机器人与宝藏

题意

t 次询问，将 n 表示为不超过 k 进制的一个数，使得各数位和最小。

$t \leq 10^4, n \leq 10^9$

机器人与宝藏

解法 1

直接枚举合法的 k，进制分解是可以做到 $O(\log_k n)$ 的，总复杂度 $O(tn\log_k n)$，期望得分 30，可能可以 40。

机器人与宝藏

解法 2

对于 $k = n$ 的情况，直接取 $B = n$ 时可以做到答案为 1。
对于 $k = n - 1$ 的情况，直接取 $B = n - 1$ 可以做到答案为 2，但在一些时候，答案是可以为 1 的，这种情况当且仅当 $n = p^k$ 的时候会出现。

机器人与宝藏

解法 3

可以发现我们很多时候的枚举是无用的，我们实际上花很多时间枚举的 B 可能过大，使得最后的数只有两位，也就是将 n 表示为 $kx+b$ 的形式，其中 k,b 都必须 $< x$。
注意到这个东西是可以整除分块的（实际上就是枚举 k），于是可以轻松做到 $O(t\sqrt{n}\log n)$ 的复杂度，期望得分 $90 \sim 100$。
第一个达到此分数的选手：infinities 2022-10-01 08:56:08。

机器人与宝藏

解法 4

注意到一个性质：当 $B = 2$ 时答案是 $\log_2 n$ 级别的，也就是答案不大。
再考虑算法 3 的部分，可以发现，$kx + b$ 中的 $k + b$ 如果超过 $\log_2 n$ 是一定不优的，所以可以直接枚举所有的可行 k, b 对求解 x。
此时我们的算法还是不平衡的！因为我们枚举了所有最终剩下的数大于两位的情况！
我们将算法改为枚举三位，也就是枚举 $ax^2 + bx + c$，这样的复杂度为 $O(t(n^{1/3} + (\log_n)^3))$，期望得分 100。
实际上，假设枚举 k 位，最终的复杂度为 $O(t(n^{1/k} + (\log n)^k))$。
最终加一些剪枝，是远远跑不满的。
第一个达到此分数的选手：infinities 2022-10-01 09:09:29。

机器人与电

题意

给定一棵 n 个点的树。
有 m 个操作，每个操作形如将一条路径上的点缩为一个点，每个操作以 p_i 的概率被执行，求最终期望的点数。
$n, m \le 2 \times 10^5$。

机器人与电

解法 1

$m = 1$ 直接枚举，分这个操作是否执行两种情况考虑。期望得分 10。

机器人与电

解法 2

对于所有 $p_i = 0$ 的情况，实际上求的东西就是树上一些路径的并。
最简单的写法就是并查集直接缩，或者树上差分一下判断每条边是否被覆盖。
可以做到 $O(n) \sim O(n \log n)$ 不等。结合算法 1 期望得分 40。

机器人与电

解法 3

链和菊花图的部分都是在为正解做提示，想到用一个简单的容斥，用每条边来表示出连通块个数。

机器人与电

解法 4

在森林，连通块的数量可以被表示为点数-边数。现在点数是固定的，即我们只需要统计出被覆盖的边数。
这个东西用一个树上差分做到。
坑点：上述过程需要特判 $p_i = 0$ 的情况，因为 0 没有逆元，但出题人自己忘写了，不过由于数据生成的方式导致在数据中是否特殊处理逆元问题不会影响答案。考虑到对于做题不会产生太大影响且没有对应下发的大样例，没有做出修改。向大家致歉。
首个 AC: infinities 2022-10-01 09:52:19。

机器人填数

题意

给定一棵树，每个位置需要填一个 $[1,m]$ 的颜色，对于每个子树有形如颜色数量必须为 y 的要求，部分位置无限制，求方案数，对 10^9+7 取模。

$n,m \le 1.5 \times 10^5$

机器人填数

解法 0

对于任意一个点，若其父亲的 $f_i = -1$，则将其父亲接到其二级父亲处，重复此过程。
之后将所有 $f_i = -1$ 的点的 f_i 变为 1。
这样将所有问题转化为了特殊性质 A。

机器人填数

解法 1

暴力枚举，期望得分 8。
如果状压期望得分 20。

机器人填数

解法 2

对于解法 1 中的状压，可以发现具体是什么颜色是不重要的，重要的是颜色的数量。
也就是说，每一处是独立的。
我们可以得到一个背包做法，前 i 个儿子，总共有 j 种颜色，转移的时候枚举当前颜色集合与上一次颜色集合交的大小，做到 $O(nm^2)$ 应该是简单的。
第一个几乎得到以上部分分的选手：zjrqwq 2022-10-01 11:34:26。

机器人填数

解法 3

当直接计数不行时，考虑容斥！

假设对于一个点，我们已经知道了其每一个儿子的子树颜色数量依次为 $f_1 \sim f_k$。

容斥，我们对于每一个 x，求出颜色数量不超过 x 的方案数，也就是说，对于这一个点的答案为：

$$\sum_{i=0}^{f_x}(-1)^{x-i}\binom{x}{i}\prod_{j=1}^{k}\binom{f_j}{i}$$

直接按照上式计算，时间复杂度 $O(nm)$，期望得分 76。

第一个几乎达到此分数的选手：ytczy 2022-10-01 10:50:49。

机器人填数

解法 4

还能优化吗？
上式的复杂度到底是什么？
首先，上式的 i 不需要从 0 开始枚举，实际上可以从最大的 f_j 开始枚举，否则组合数就是 0 了。
然后，如果有多个相同的 f_j，直接合并在一起，求个组合数算个快速幂。
然后就过了。
证明：首先我们原来的复杂度是 $\sum deg_x(f_x - \max f_{son})$，我们上述合并的过程可以视为将 deg_x 看作 $O(\sqrt{n})$，至于 $f_x - \max f_{son}$，可以用类似树链剖分的方法将其分析到 $O(n \log n)$ 级别，所以总复杂度肯定不超过 $O(n\sqrt{n} \log n)$，期望得分 100。
实际上可以证明出复杂度为 $O(n\sqrt{n})$，不过证明比较复杂，不展开讨论。

多头机器人

题意

题面很简洁。

多头机器人

解法 0

假如输入的 z 也是加密的，有没有什么快速高分的技巧？
出题人在前几天才发现这个问题。

多头机器人

解法 1

对于 $\leq \max(r_i, r_j)$ 的限制，可以直接拆成对于每一个 i 找 $[i - r_i, i + r_i]$ 中的最大值。
然后用线段树维护一下，时间复杂度 $O(qn \log n)$。期望得分 45。
实际上由于暴力常数很小时限很大也可以过（下次记得开大一点）。

多头机器人

解法 2

k 固定时和允许离线时，解法很多，不过和正解关系不大，有兴趣的同学可以自己想一想（比如用线段树分治转化，按 k 分块，按 k 根号分治）。

多头机器人

解法 3

考虑一种利用线段树结构的方法。
首先把 d_i 的限制看作 $[i-d_i, i-1], [i+1, i+d_i]$ 两种区间，每种区间带有一个 a_i 的权值。
假如我们让线段树每个节点存以下两种信息：
1. 区间最大值。
2. 将所有区间 $[l, r]$ 拆成 log 条线段扔在线段树上的每个节点。
那我们的答案就是：每个线段树节点上的区间最大值+线段权值的 max，每次修改也只会改动 $O(\log n)$ 个位置，用堆可以很轻松的维护，总复杂度 $O((n+q)\log^2 n)$，常数比较大。

Thanks!