solution

长郡中学 陈江伦

2022 年 11 月 19 日

1 line

1.1 tags

公式转换

1.2 100 分

容易推导出

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n x' y'}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n x'^2}$$

每次插入只要 O(1) 修改一下各个部分的值就可以了。

2 seq

2.1 做法

把数组差分，令 $d_i = a_i - a_{i-1}$。那么 $a_j - a_i = \sum_{k=j+1}^{i} d_j$。

问题变成了，选择若干段区间使得它们的总和最大。

显然，正数一定要选，负数一定不选，0 可选可不选。

先假设 0 不选，但是如果一段连续 0 的两侧都为正数，则为了减少段数，需要选。

差分后区间修改变成了单点修改，那么用线段树维护即可。

具体地，对于线段树的结点 i，用 pre_i 表示是否存在一个前缀为一段连续的 0 接一个正数，用 suf_i 表示是否存在一个后缀为一段连续的 0 接一个负数，用 all_i 表示这段区间是否全部为 0。

那么合并时，$pre_i = pre_{lson}\ or\ (all_{lson}\ and\ pre_{rson}), suf_i = suf_{rson}\ or\ (all_{rson}\ and\ suf_{lson}), all_i = all_{lson}\ and\ all_{rson}$，如果 $suf_{rson}\ and\ pre_{lson}$ 则段数-1。

3 mice

3.1 说明

这题来自CF797F

原题数据范围是 $n, m \leq 5000$。本题是上一题的加强版。

3.2 tags

贪心，堆。

3.3 subtask2

This problem can be solved using dynamic programming. Let $dp_{i,j}$ be the answer for first i holes and j mice.

If the constraints were smaller, then we could calculate it in $O(n^2m)$ just trying to update $dp_{i,j}$ by all values of $dp_{i-1,k}$ where $k \leq j$ and calculating the cost to transport all mice from the segment to ith hole.

To calculate this in $O(nm)$, we will use a deque maintaining the minimum (or a queue implemented on two stacks, for example). We iterate on i and update all the values of $dp_{i+1,j}$ with the help of this deque: for each index j we insert a value in the deque equal to $dp_{i,j} - cost$, where $cost$ is the total distance required to move first j mice to hole $i+1$. Updating the value is just extracting the minimum and adding this $cost$ to it. Don't forget to delete values from the deque to ensure that we don't send too much mice to the hole.

Time complexity: $O(nm)$.

3.4 100 分

一只老鼠有两种决策：要么选择左边的横坐标尽可能大的洞，要么选择右边的横坐标尽可能小的洞。

从左往右按照横坐标顺序扫描每只老鼠或每个洞，把扫过的洞和老鼠各维护一个堆。

如果当前扫到的是老鼠 i，那么我们在堆中找到最大的 $-p_j - t$，然后让老鼠 i 进入

洞 j，代价为 $w = x_i - p_j - t$，但是这样不一定最优，所以往老鼠堆中放入 $-x_i - w$，表示老鼠可以反悔，改为进入后面的洞。

如果当前扫到的是洞 j，那么我们在堆中找到最大的 $-x_i - w$，然后让老鼠 i 进入洞 j，代价为 $t = p_j - x_i - w$，但是这样不一定最优，所以往洞堆中放入 $-p_j - t$，表示洞可以反悔，改为让后面的老鼠进去。

如何处理洞的容量限制？先往堆中丢一个空间，如果这个空间在某时刻被使用，且洞还没有填满则再往堆中丢一个。

4 tree

4.1 说明

这题其实难度没有达到 $T3$。

4.2 做法

树是随机树，所以树高是 log 级别的，可以直接考虑 $O($ 树高 $)$ 的暴力。

使用树形 DP，对于一个连通块我们在深度最小的结点进行统计。

把 k 的某个孩子 t 的子树加入时的 DP 转移式为 $f'[k][i] += \sum_{j=0}^{i} f[k][j] * f[t][i-j]$。

首先 $O(n * 10^3)$ 预处理子树 DP 值，对于每次修改，可以 $O($ 树高 $*10^2)$ 地把子树 DP 值更新。

修改的方法是先撤销这个结点造成的影响，再把这个点重新加入。

消除影响的方法是把 DP 转移式倒过来 $f[k][i] -= \sum_{j=0}^{i} f'[k][j] * f[t][i-j]$。

询问也可以做到 $O($ 树高 $*10^2)$