Day1

gyh20

目录

得分分布

机器人游戏

题意

你需要构造一种二分答案的方案，使得所有可以通过不超过 m 次二分得到的数二分所需代价的平均值最小。

$1 \leq n, m \leq 10^9$。

机器人游戏

解法 1

当 $n = m$ 的时候，显然经典的二分是最优的。
直接暴力记录 $F(n)$，每次递归到 $F(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ 和 $F(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 即可。
或者可能有其他算法。

机器人游戏

解法 2

观察“决策”到底是什么。
实际上，这种二分的决策可以看作一棵满足中序遍历为 $1 \sim n$ 的二叉搜索树。
知道了这个，原题题意转化为构造一棵大小为 n 的二叉树，使得深度不超过 m 的部分平均深度最小。
进行不同复杂度的 DP 可以得到不同的分数。

机器人游戏

解法 3

结论：最终的二叉树一定满足存在一个深度 d，使得深度 $\leq d$ 的部分是一棵满二叉树，深度 $> d$ 的部分是一条链，或者整棵树是一棵完全二叉树。
如果不是，显然可以调整变得更优。
简单的想法就是枚举每一个 d 暴力检查，总复杂度 $O(\log n)$，可能可以 $O(1)$ 或者 $O(\log \log n)$ 算，
最早有这个思想的： qzyym1023 2022-10-02 08:31:03。
第一个 AC： infinities 2022-10-02 09:12:39。

机器人与城市 2

题意

有一张图，长度为 $(10^9)_i^w$，美丽度为 h_i，w_i 互不相同
定义 $f(x,y)$ 为长度之和最小的路径的美丽度之和，求一个排列
最大化 $\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i,p_{i+1}) + f(p_1,p_n)$。

机器人与城市 2

解法 1

考虑在边权全是 $(10^9)^{w_i}$ 的图上的最短路。
首先肯定要让最大边最小。由于 w 互不相同显然这条边唯一。
然后由于这条边一定被经过，那么把这条边的两个端点缩起来。
这个过程对应着什么？

机器人与城市 2

解法 2

这个过程就是最小生成树。
也就是我们只需要保留原图的最小生成树，之后 w 的限制就没有用了。
然后就转化为了树上问题，这个部分是一个经典贪心。

机器人与城市 2

解法 3

将重心作为根。
答案的一个上界是 $2 \times \sum dep_i$，因为树上的距离可以看作 $dep_x + dep_y - dep_{lca}$，当 dep_{lca} 为 0 时答案值为上式。
显然是能取到的，因为重心的每个子树大小不超过 $n/2$，是可以用配对的方法解决的。
第一个 AC：Exusiai_ 2022-10-02 09:11:33。

机器人的积木

题意

有一个数列 h。
每一次你可以选择一个 $h_i > 0$ 的位置让这个 $h_i = h_i - 1$。
最小化 $\sum_{i=1}^{n-1} |h_i - h_{i+1}| + h_1 + h_n$。
$n, q \leq 5 \times 10^5$。

机器人的积木

解法 1

搜索，复杂度 5^5，注意特判 $X \geq \sum a_i$ 的情况。
期望得分 12。

机器人的积木

解法 2

对于 $a_i \leq 1$ 的点，我们有什么好做法？
考虑一个 a_i 全为 1 的极长连续段，其会产生 2 的贡献。
那我们的想法就是每次消去一个极长连续段。
显然每一次消掉最短的是最优的，维护可以看作按照 X 排序，每次如果能删掉当前最短的就删。
结合算法 1 期望得分 20。

机器人的积木

解法 3

$a_i \le 1$ 的情况能不能扩展?
假如我们想让答案尽快的减少，我们应该怎么做?
我们找到每一个极长的连续段，满足 $a_l = a_{l+1} = a_{l+2} \cdots = a_r$，且 $a_l > a_{l-1}$，$a_r > a_{r+1}$。
我们每次选择其中最短的一个删，这样是对的吗?
可以用调整证明，这样是对的。
直接模拟上述过程，实现优秀的话可以获得 68 分。
第一个得到该分数的选手： Chestnut 2022-10-02 10:03:31。

机器人的积木

解法 4

当值域很大的时候，这样最终得到的段数是很大的，是不能过的。
但是每一次连续用很多相同的 l, r，并且没有影响到具体的值域连续段的情况，是可以将这样的操作合并在一起的。
每次合并之后值域连续段的个数就会 -1!
也就是说，最后的答案可以写成一个 $O(n)$ 段的分段函数!
在上面二分一下即可，实现优秀的话可以做到 $O((n+q)\log n)$，期望得分 100。
第一个 AC：LWLAymh 2022-10-02 11:01:35。

机器人操作

题面

见原题面，很简单。

机器人操作

解法 -1

看到无解输出 -1，就去输出 -1 试试。
期望得分 10。
看到还有 0 的情况，去乱判一判 0。
结合以上算法期望得分 15（确实有同学得到了这个分数）。

机器人操作

解法 0

这个 a_i 好复杂阿！
但我们真的需要 a_i 吗？
因为每次减少的是 1，可以直接将每一个 a_i 看成 a_i 个 1，每一个 1 都是独立的。
所以考虑求出 f_i 表示初始 $a_i = 1$，其余位置 $= 0$ 时原问题的答案。
最后的答案即为 $\sum a_i f_i$。

机器人操作

解法 1

$n = 2$ 的时候，随便特判一下即可。
期望得分 10。

机器人操作

解法 2

结合解法 0 中提到的，每一个位置是独立的。
那么对于一个操作，将一个 x 变化为 $l \sim r$ 中的每一个，这其中每一个是不是也是独立的？
所以一个 f_i 可以由 $\sum_{i=L_j}^{R_j} f_i + W_j$ 转移而来。
可是这并不是一个正常的 DP 阿，转移是有环的？
但我们知道，转移的次数一定不超过 n，因为最优解里面一定没有环。假如用前缀和优化单次转移可以做到 $O(n^2)$，期望得分 35，实际说不定可以少转移几次。
如果结合算法 −1 可以得到 50 分。

机器人操作

解法 3

带环的 DP 转移是什么？
最短路。
考虑最短路，每次找当前 f 最小的点，将其标记为已处理点。
若一个区间的 $L_i \sim R_i$ 均被标记为已处理点，那么就用 $\sum_{i=L_j}^{R_j} f_i + W_j$ 更新 X_j。
假如 $L_i = R_i$，这个检查是简单的，其实就是直接 X_i 向 L_i 连边求最短路，期望得分 70。

机器人操作

解法 4

最后需要解决的转化为如下问题：
有一些区间 $[l,r]$，还有一个序列，初始全为 0。
每次你会把一个位置赋值为 1，在此之后，你需要立刻找到所有在之前非区间全 1 的，但在这个操作之后区间全 1 的区间 $[l,r]$。

这个问题可以线段树，我们把 $[l,r]$ 拆开，放在线段树的 log 个节点上。
当线段树的一个节点变为全 1 时，暴力检查其上面的所有线段是否全 1。
每条线段只会被检查 $O(\log n)$ 次。假如直接用树状数组维护是 $O(n\log^2 n)$ 的，期望得分 85。
但其实我们已经有线段树的结构了，我们记录一条线段被拆成的 log 个区间中当前还有几个未满，可以做到 $O(1)$ 检查，总复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 100。
第一个几乎通过的同学：Exusiai_ 2022-10-02 11:07:34。

Thanks!