组合数学题目选讲

张一钊

IIS, Tsinghua University

2022 年 10 月 2 日

P2822 组合数问题

给出 k 和 t 组 n, m，求有多少对 (i, j) 满足 $0 \leq i \leq n$，$0 \leq j \leq \min(i, m)$ 且 $k \mid \binom{i}{j}$。

$3 \leq n, m \leq 2000, 2 \leq k \leq 21, 1 \leq t \leq 10000$。

P2822 组合数问题

如何计算组合数？

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - 预处理阶乘后每次 $O(1)$，只能模素数
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
  - n^2 递推，可以模合数

再加一个二维前缀和。

P1450 [HAOI2008] 硬币购物

题目描述 展开

共有 4 种硬币。面值分别为 c_1, c_2, c_3, c_4。

某人去商店买东西，去了 n 次，对于每次购买，他带了 d_i 枚 i 种硬币，想购买 s 的价值的东西。请问每次有多少种付款方法。

$1 \le c_i, d_i, s \le 10^5$，$1 \le n \le 1000$。

容斥原理

设有一类组合对象 U。现在有 n 种属性 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，具有 P_i 的组合对象的集合是 A_i。令 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$，那么有

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{\substack{J \in I \\ J \neq \varnothing}} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

P1450 [HAOI2008] 硬币购物

$f(s)$ 为不考虑限制时，和为 s 的方案数。可以用背包得到。

考虑打破 $S \subseteq \{1,2,3,4\}$ 中的限制。那么对于 $i \in S$，第 i 种至少要用 d_i+1 个。因此答案是 $f(s-\sum_{i\in S} c_i(d_i+1))$.

$$\sum_{S\subseteq[4]}(-1)^{|S|}f(s-\sum_{i\in S}c_i(d_i+1))$$

P4071 [SDOI2016] 排列计数

求有多少种 1 到 n 的排列 $\{a_i\}$，满足序列恰好有 m 个位置 i，使得 $a_i = i$。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

10^5 组询问，$n, m \le 10^6$。

错排问题

设 d_n 是长度为 n 的排列 $\{a_i\}$ 的数量，使得 $\forall i \in [n], i \neq a_i$。

$$d_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

P4071 [SDOI2016] 排列计数

答案就是 $\binom{n}{m}d_{n-m}$。

LOJ#6160. 二分图染色

给定一个完全二分图，图的左右两边的顶点数目相同。我们要把图中的每条边染成红色、蓝色、或者绿色，并使得任意两条红边不共享端点、同时任意两条蓝边也不共享端点。计算所有满足条件的染色的方案数，并对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \leq 10^7$

LOJ#6160. 二分图染色

完全二分图可以看成 $n \times n$ 的网格：行是一部分点，列是另一部分点，格子是边。

则每行最多一个红格子一个蓝格子，每列亦然。

单独考虑红格子/蓝格子，方案数是

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

则答案包括 $f(n)^2$。

LOJ#6160. 二分图染色

红色和蓝色同时染过同一个格子的情况要容斥掉

假设染重了 k 个格子，方案是 $\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$，容斥系数是 $(-1)^k$，

红蓝各再选 $n-k$ 个格子：$f(n-k)^2$

关于 $f(n)$ 有递推式：

$$f(n) = 2nf(n-1) - (n-1)^2 f(n-2)$$

P6280 [USACO20OPEN]Exercise G

题目描述 展开

Farmer John（又）想到了一个新的奶牛晨练方案！
如同之前，Farmer John 的 N 头奶牛站成一排。对于 $1 \le i \le N$ 的每一个 i，从左往右第 i 头奶牛的编号为 i。他告诉她们重复以下步骤，直到奶牛们与她们开始时的顺序相同。

给定长为 N 的一个排列 A，奶牛们改变她们的顺序，使得在改变之前从左往右第 i 头奶牛在改变之后为从左往右第 A_i 头。
例如，如果 $A=(1,2,3,4,5)$，那么奶牛们总共进行一步。如果 $A=(2,3,1,5,4)$，那么奶牛们总共进行六步。每步之后奶牛们从左往右的顺序如下：

0 步：$(1,2,3,4,5)$
1 步：$(3,1,2,5,4)$
2 步：$(2,3,1,4,5)$
3 步：$(1,2,3,5,4)$
4 步：$(3,1,2,4,5)$
5 步：$(2,3,1,5,4)$
6 步：$(1,2,3,4,5)$
求所有正整数 K 的和，使得存在一个长为 N 的排列，奶牛们需要进行恰好 K 步。

由于这个数字可能非常大，输出答案模 M 的余数（$10^8 \le M \le 10^9+7$，M 是质数）。

$N \le 10^4$。

置换

置换就是 $[n] \to [n]$ 的双射。

置换可以复合。

轮换是特殊的置换。$(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ 指 $i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \ldots, i_k \mapsto i_1$。

置换可以分解为轮换。

P6280 [USACO20OPEN]Exercise G

排列 a 要进行 k 步 $\iff k$ 是最小的使得 $a^k = e$ 的正整数。
假设 a 能分解为长度为 $c_1, \ldots, c_\ell$ 的轮换（满足 $c_1 + \cdots + c_\ell = n$），则

$$k = \operatorname{lcm}(c_1, \ldots, c_\ell)$$

可以发现，这样的 $k = q_1^{\alpha_1} \ldots q_s^{\alpha_s}$，其中 $q_1, \ldots, q_s$ 为不同素数且 $q_1^{\alpha_1} + \cdots + q_s^{\alpha_s} \leq n$。

P6280 [USACO20OPEN]Exercise G

问题正式转化为：给定 n，求所有不同 k 的和，满足 $k = q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s}$，其中 $q_1, \dots, q_s$ 为不同素数且 $q_1^{\alpha_1} + \dots + q_s^{\alpha_s} \le n$。

令 p_k 为第 k 大的素数，令 $f(n,k)$ 表示考虑前 k 个素因子时的和。

$$f(n,k) = f(n,k-1) + \sum_{i=1}^{\lfloor \log_{p_i} n \rfloor} p_k^i f(n - p_k^i, k-1)$$

T147584 深海少女与胖头鱼

经过漫长的战斗，Amazing John 发现了战胜胖头鱼的方法：

总共有 n 条带「圣盾」的「胖头鱼」和 m 条不带圣盾的胖头鱼，每次等概率对一条存活的胖头鱼造成「剧毒」伤害。

现在 Amazing John 想知道，期望造成多少次伤害可以杀死全部胖头鱼？

答案对 998244353 取模。

「圣盾」：当拥有圣盾的胖头鱼受到伤害时，免疫这条鱼所受到的本次伤害。免疫伤害后，圣盾被破坏。

「胖头鱼」：在一条胖头鱼的圣盾被破坏后，给予其他所有没有死亡且没有圣盾的胖头鱼圣盾。

「剧毒」：立即杀死没有圣盾的胖头鱼。

$n \le 10^{14}, m \le 10^6$。

T147584 深海少女与胖头鱼

设 $f(n,m)$ 是答案。

$$f(n,m) = 1 + \begin{cases} f(n-1,1) & m = 0 \\ \frac{n}{n+m} f(n+m-1,1) + \frac{m}{n+m} f(n,m-1) & m \geq 1 \end{cases}$$

特别地，

$$f(n,1) = n+1+f(n,0) = n+2+f(n-1,1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}+n$$

P4550 收集邮票

题目描述 展开

有n种不同的邮票，皮皮想收集所有种类的邮票。唯一的收集方法是到同学凡凡那里购买，每次只能买一张，并且买到的邮票究竟是n种邮票中的哪一种是等概率的，概率均为1/n。但是由于凡凡也很喜欢邮票，所以皮皮购买第k张邮票需要支付k元钱。

现在皮皮手中没有邮票，皮皮想知道自己得到所有种类的邮票需要花费的钱数目的期望。

$n \le 10^4$。

P4550 收集邮票

设 X_k 表示现在已经收集了 k 种邮票，收集全所需次数的随机变量。

答案就是 $\mathbb{E}[X_0(X_0+1)/2] = (\mathbb{E}[X_0^2]+\mathbb{E}[X_0])/2$。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k] &= \frac{k}{n}\mathbb{E}[X_k+1] + \frac{n-k}{n}\mathbb{E}[X_{k+1}+1] \\
&= 1 + \frac{k}{n}\mathbb{E}[X_k] + \frac{n-k}{n}\mathbb{E}[X_{k+1}]
\end{aligned}$$

P4550 收集邮票

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k^2] &= \frac{k}{n}\mathbb{E}[(X_k+1)^2] + \frac{n-k}{n}\mathbb{E}[(X_{k+1}+1)^2] \\
&= 1 + \frac{k}{n}(\mathbb{E}[X_k^2] + 2\mathbb{E}[X_k]) + \frac{n-k}{n}(\mathbb{E}[X_{k+1}^2] + 2\mathbb{E}[X_{k+1}])
\end{aligned}
$$

P6835 [Cnoi2020] 线形生物

线形生物要从 1 号台阶走到 $n+1$ 号台阶。

最开始，$1,2,3,\ldots,n$ 号台阶都有一条连向下一台阶的有向边 $i \to i+1$。

之后 Cirno 加入了 m 条**返祖边** $u_i \to v_i(u_i \geq v_i)$，它们构成了一个**返祖图**。

线形生物每步会 **等概率地** 选取当前台阶的一条出边并走向对应的台阶。

当走到 $n+1$ 号台阶时，线形生物就会停止行走。

同时，Cirno 会统计线性生物总共走的步数，记作 δ。

Cirno 想知道 $E(\delta)$（即 δ 的**数学期望**）对 998244353 取模后的结果。

$n,m \leq 10^6$。

P6835 [Cnoi2020] 线形生物

假设 X_k 是从第 $k-1$ 个点走到第 k 个点的期望步数，S_k 是从第一个点走到第 k 个点的期望步数。

$S_k = S_{k-1} + X_k = \sum_{i=2}^{k} X_i$，可以利用期望的线性性

从第 i 个点走到第 j 个点的期望步数：$\mathbb{E}[S_j] - \mathbb{E}[S_i]$

P6835 [Cnoi2020] 线形生物

假设 k 延返祖边走一步能到达的点集合为 T_k。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_k] &= \mathbb{E}[S_{k-1}] + 1 + \frac{\sum_{i \in T_{k-1}} (\mathbb{E}[S_k] - \mathbb{E}[S_i])}{|T_{k-1}| + 1} \\ &= (|T_{k-1}| + 1)(\mathbb{E}[S_{k-1}] + 1) - \sum_{i \in T_{k-1}} \mathbb{E}[S_i]\end{aligned}$$