EXERCICE 1

1. Valeur 8 points.
   Intervalle de confiance pour la moyenne avec variance de la population inconnue :

   $$\mu = \bar{x} \pm t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\, \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

   avec

   $$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = s_x/\sqrt{n-1}$$

   Caractéristiques de l'échantillon :

   $$n = 9\,, \quad \bar{x} = 4.\bar{2}\,, \quad s_x = 2.04$$

   Calcul de l'intervalle de confiance :

   $$t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{(9)}_{0.975} = 2.262$$

   $$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = 2.04/\sqrt{8} = 0.7212$$
   $$\mu = 4.\bar{2} \pm 2.262 \cdot 0.7212 = 4 - \bar{2} \pm 1.63$$

   $$P(\mu \in [2.59; 5.85]) = 95\%$$

   Commentaire : Le vrai nombre moyen de demandeurs d'emploi rencontrés quotidiennement en 2007 a 95% de chance d'être compris entre 2.59 et 5.85.

   Répartition des points : *Moyenne de l'échantillon (1), variance de l'échantillon (1), utilisation d'un intervalle avec variance de la population* ***inconnue*** *(1), seuil de la loi de Student (1), écart-type de la moyenne (1), intervalle de confiance (2), commentaire (1).*

2. Valeur 1 point.
   Etant donné que l'intervalle de confiance ne comprend pas de valeurs supérieures à 7, il n'est pas courant de rencontrer plus de 7 demandeurs d'emploi le même jour.

EXERCICE 2

Hypothèses à tester :

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = 6 \\ H_1 &: \sigma^2 \neq 6 \end{aligned}$$

La moyenne de la population est inconnue. Statistique de test :

$$Q_0 = \frac{n\, S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

n=10. Variance de l'échantillon : S^2=5.81.

$$Q_0 = \frac{10\, 5.81}{6} = 9.681$$

Seuils de rejets pour une loi du chi-2 à 9 degrés de liberté et un risque de 5% : 2.70 et 19.02.

Conclusion : On se trouve dans la région d'acceptation de H_0. L'hypothèse nulle est donc acceptée.

Commentaire ; On peut admettre que la vraie variance est égale à 6.

Répartition des points : *Hypothèses nulle et alternative (1), utilisation d'un test avec moyenne inconnue (1), calcul de la variance de l'échantillon (1), valeur de la statistique de test (1), valeur des seuils de rejet (2), conclusion (acceptation de H_0 ou H_1) (1), commentaire (1).*

EXERCICE 3

– Hypothèses :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{2007} - \mu_{2005} = 0 \\ H_1 &: \mu_{2007} - \mu_{2005} \neq 0 \end{aligned}$$

– L'hypothèse nulle est acceptée, car la p-valeur est supérieure au risque de première espèce de 5%.
– On peut admettre que le nombre moyen de demandeurs d'emploi rencontrés quotidiennement est le même en 2005 et 2007.
– On a effectué un test de Student paramétrique sur deux échantillons non-appariés. La statistique de test vaut -1.3559 avec 17 degrés de liberté.
– L'intervalle de confiance autour de la différence des moyennes s'étend de -3.78 à 0.82.
– La moyenne de l'échantillon de 2005 vaut 5.7 et celle de l'échantillon de 2007 vaut 4.22.

Répartition des points : *Hypothèses nulle et alternative (1), conclusion (acceptation de H_0 ou H_1) (1), commentaires (3).*

EXERCICE 4

1.

$$H_0 : \text{med}(D) = 0$$
$$H_1 : \text{med}(D) \neq 0$$

2. Calcul de la différence :

X : cinéma	Y : théâtre	D=Y-X	signe de D
20	20	0	0
18	9	-9	-
2	6	4	+
8	7	-1	-
5	9	4	+
30	0	-30	-
25	5	-20	-
15	3	-12	-
17	1	-16	-
6	3	-3	-

3. Nous avons n=10, n_-=7.5 et n_+=2.5.
4. $m_- = \min\{n_- \,;\, n_+\} = 2.5$
5. Calcul de la p-valeur :

$$\begin{aligned} P(M_- \leq 2.5) &= P(M_- = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2) \\ &= 0.001 + 0.0098 + 0.0439 \\ &= 0.0547 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad p = 2 \cdot 0.0547 = 0.1094$$

6. La p-valeur 0.1094 est strictement supérieure au risque $\alpha = 5\%$, donc l'hypothèse H_0 est acceptée. Statistiquement, avec un risque de première éspèce à 5%, on ne peut pas exclure que les genevois vont aussi souvent au cinéma qu'au théâtre.

7 points :

1. 1 point
2. 1 point
3. 1 point
4. 1 point
5. 1 point
6. 2 points (1 point si H_0 acceptée. 1 point si explication en français.)

EXERCICE 5

1. $\bar{x} = 14.5$ $\bar{y} = 18.8$
2. $\hat{\sigma}_x^2 = 7$ $\hat{\sigma}_y^2 = 37.2$
3. $$\hat{\sigma}_{\overline{Y}-\overline{X}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{n_Y}} = 3.0315$$
4. $$t'_0 = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\hat{\sigma}_{\bar{y}-\bar{x}}} = 1.4184$$
5. $$d\ell' = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n_X}\right)^2}{n_X-1} + \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_Y^2}{n_Y}\right)^2}{n_Y-1}} = 5.6837$$
6. Avec un risque de première espèce α=5%, les seuils de rejets d'une loi de Student à 5 degrés de liberté sont -2.571 et 2.571.
7. Etant donné que la valeur calculée t'_0 se situe entre ces deux seuils, nous acceptons l'hypothèse nulle. Le vélo est le bus sont aussi rapides pour un trajet entre la gare et l'aéroport.

9 points :

1. 1 point
2. 1 point
3. 1 point
4. 1 point
5. 1 point
6. 2 points
7. 2 points (1 point si H_0 acceptée. 1 point si explication en français.)