

Intervalle de confiance

Dr Sacha Varone

Objectif

Comprendre et savoir calculer un intervalle de confiance pour la moyenne

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ

Rappels

$\hat{\Theta}$

TCL

\bar{p}

Intervalle de
confiance

IC pour μ

Rappels

Estimation ponctuelle

Une *estimation ponctuelle*, ou point d'estimation, est une valeur calculée à partir d'un échantillon pour estimer un paramètre d'une population.

Une *distribution d'échantillonnage* d'un estimateur $\hat{\Theta}$ est la distribution des valeurs possibles d'une statistique pour un échantillon de taille fixée, sélectionné à partir d'une population.

Le *biais* : $E(\hat{\Theta} - \theta) = E(\hat{\Theta}) - \theta$

Estimateur *convergent* si, lorsque la taille n de l'échantillon devient grande

1. le biais disparaît : $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Biais}(\hat{\Theta}) = 0$
2. la variance devient nulle : $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\Theta}) = 0$

Rappels

$\hat{\Theta}$

TCL

\bar{p}

Intervalle de
confiance

IC pour μ

Théorème central limite

Soit une suite (X_1, X_2, \dots, X_n) de n variables aléatoires identiquement et indépendamment distribuées (μ, σ^2) .

Lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\overline{X} \underset{=}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

où

- μ = moyenne dans la population
- σ^2 = variance dans la population
- n = taille de l'échantillon

Rappels

$\hat{\theta}$

TCL

\bar{p}

Intervalle de
confiance

IC pour μ

Rappels

$\hat{\theta}$

TCL

\bar{p}

Intervalle de
confiance

IC pour μ



source : "The Cartoon Guide to Statistics", L. Gonick & W. Smith

Estimateur d'une proportion

Lorsque $n\pi \geq 5$ et $n(1 - \pi) \geq 5$, la distribution d'échantillonnage d'une proportion peut être approchée par une loi normale :

$$\bar{p} \sim \mathcal{N} \left(\pi, \frac{\pi(1 - \pi)}{n} \right)$$

où

π = proportion dans la population

n = taille de l'échantillon

Remarque. En général, π n'est pas connu. On l'estimera donc avec $\hat{p} = \bar{p}$, la proportion dans l'échantillon.

Rappels

$\hat{\theta}$

TCL

\bar{p}

Intervalle de
confiance

IC pour μ

Rappels

Intervalle de
confiance

Principe

Définition

α

Construction

IC pour μ

Intervalle de confiance

Rappels

Intervalle de
confiance

Principe

Définition α

Construction

IC pour μ 

source : "The Cartoon Guide to Statistics", L. Gonick & W. Smith

Principe

Rappels

Intervalle de confiance

Principe

Définition

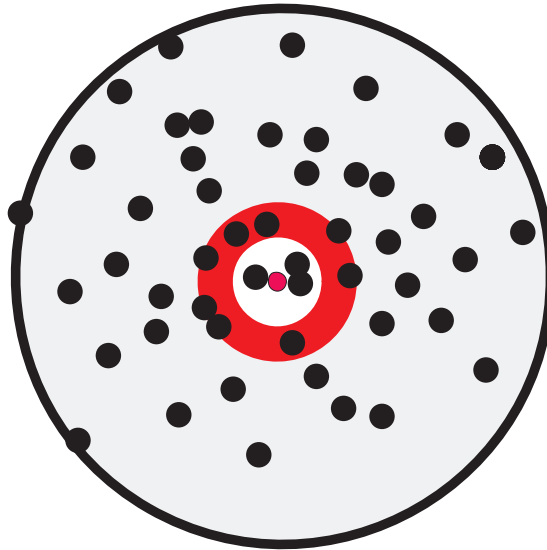
α

Construction

IC pour μ

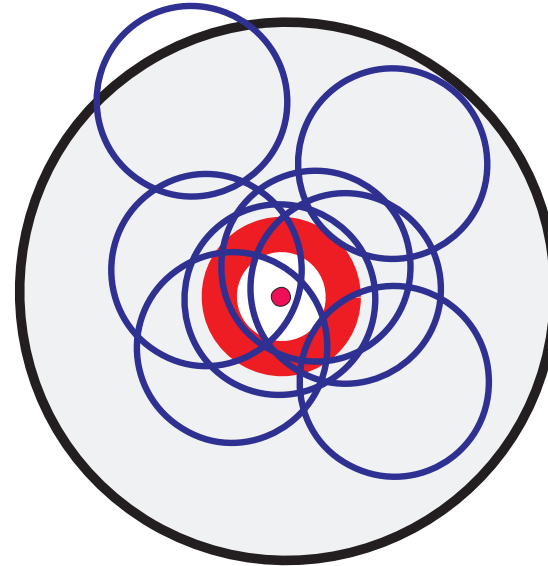
Estimation ponctuelle

→ une valeur précise $\hat{\theta}$



Estimation par intervalle

→ intervalle $[\hat{\theta}_{inf} ; \hat{\theta}_{sup}]$
avec un niveau de confiance fixé.



Définition

$1 - \alpha$ est appelé le *degré de confiance* ou *niveau de confiance* ; il indique la probabilité que la vraie valeur du paramètre θ soit comprise dans l'intervalle de confiance.

$$\underbrace{1 - \alpha}_{\text{degré de confiance}} = P\left(\theta \in \underbrace{[\hat{\theta}_{\text{inf}} ; \hat{\theta}_{\text{sup}}]}_{\text{intervalle aléatoire}}\right)$$

Le *risque de première espèce* α est le risque que l'intervalle ne recouvre pas θ .

Rappels

Intervalle de
confiance

Principe

Définition

α

Construction

IC pour μ

Choix du degré de confiance

Rappels

Intervalle de confiance

Principe

Définition

α

Construction

IC pour μ

- α petit \Rightarrow intervalle fiable, mais large
- α grand \Rightarrow intervalle précis, mais risque de non recouvrement du paramètre

En pratique : $\alpha = 5\%$ ou 10% .

Rappels

Intervalle de
confiance

Principe

Définition

 α

Construction

IC pour μ

© Original Artist
Reproduction rights obtainable from...
www.CartoonStock.com



"That's what I want to say. See if you can find some statistics to prove it."

Définition

Rappels

Intervalle de
confiance

Principe

Définition

α

Construction

IC pour μ

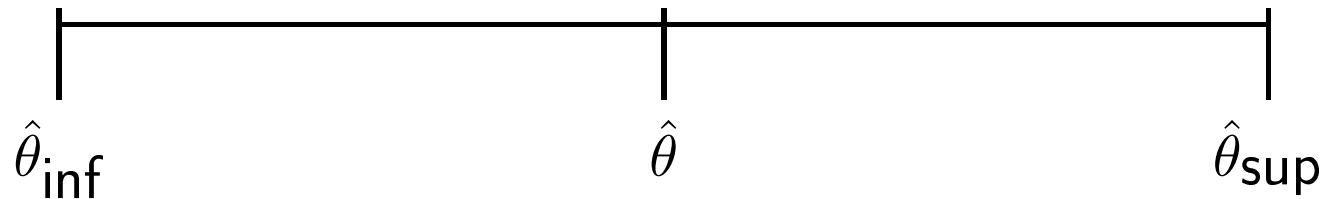
Un *intervalle de confiance* de niveau $1 - \alpha$ pour un paramètre inconnu θ d'une population est un intervalle tel que la probabilité pour que cet intervalle recouvre θ est $1 - \alpha$.

Les bornes de cet intervalle se calculent à partir d'un échantillon.

Construction d'un IC

Estimation ponctuelle \pm (Valeur critique) (Écart type)

Estimation ponctuelle



Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

IC pour μ

IC pour estimer μ , σ^2 connu

Population qui suit une loi normale de variance σ^2 connue,

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

où :

\bar{x} = moyenne de l'échantillon

$z_{\alpha/2}$ = valeur critique de la distribution normale standard pour un degré de confiance de $1 - \alpha$

σ = écart type de la population

n = taille de l'échantillon

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ
 σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

Exemple

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ
 σ^2 connu

Étapes
 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

Considérons la population suivante : l'ensemble des pots de peinture d'1lt remplis par une machine industrielle. Supposons que la quantité de peinture est une variable aléatoire X suivant une loi normale d'écart type $\sigma = 0.04\text{lt}$. Votre but en tant que responsable qualité est de contrôler qu'en moyenne, la machine remplisse 1lt de peinture par pot.

Vous prenez 4 pots au hasard

Pot	x_1	x_2	x_3	x_4
Quantité [lt]	1.0	0.98	1.1	1.1

Intervalle de confiance à 95% pour la quantité de peinture par pot ?

Exemple (suite)

1. Population d'intérêt

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ
 σ^2 connu

Étapes
 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ
 σ^2 connu

Étapes
 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

1. Population d'intérêt = ensemble des pots.
2. Degré de confiance $1 - \alpha$

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ
 σ^2 connu

Étapes
 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

1. Population d'intérêt = ensemble des pots.
2. Degré de confiance $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne de l'échantillon

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

1. Population d'intérêt = ensemble des pots.
2. Degré de confiance $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne de l'échantillon = $\bar{x} = \frac{1.0+0.98+1.1+1.1}{4} = 1.045$
4. Erreur standard de la moyenne

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

1. Population d'intérêt = ensemble des pots.
2. Degré de confiance $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne de l'échantillon = $\bar{x} = \frac{1.0+0.98+1.1+1.1}{4} = 1.045$
4. Erreur standard de la moyenne = $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0.04}{\sqrt{4}} = 0.02$
5. Les pots peuvent être trop peu remplis, ou trop remplis.
L'erreur de première espèce α est alors divisée en 2 parties.
La valeur critique est donc $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
6. L'intervalle de confiance est

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de
confianceIC pour μ σ^2 connu

Étapes

 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

1. Population d'intérêt = ensemble des pots.
2. Degré de confiance $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne de l'échantillon $= \bar{x} = \frac{1.0+0.98+1.1+1.1}{4} = 1.045$
4. Erreur standard de la moyenne $= \sigma_{\bar{x}} = \frac{0.04}{\sqrt{4}} = 0.02$
5. Les pots peuvent être trop peu remplis, ou trop remplis.
L'erreur de première espèce α est alors divisée en 2 parties.
La valeur critique est donc $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
6. L'intervalle de confiance est

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.045 \pm 1.96 \cdot 0.02 = [1.0058; 1.0842]$$

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de
confianceIC pour μ σ^2 connu

Étapes

 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

1. Population d'intérêt = ensemble des pots.
2. Degré de confiance $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne de l'échantillon $= \bar{x} = \frac{1.0+0.98+1.1+1.1}{4} = 1.045$
4. Erreur standard de la moyenne $= \sigma_{\bar{x}} = \frac{0.04}{\sqrt{4}} = 0.02$
5. Les pots peuvent être trop peu remplis, ou trop remplis.
L'erreur de première espèce α est alors divisée en 2 parties.
La valeur critique est donc $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
6. L'intervalle de confiance est

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.045 \pm 1.96 \cdot 0.02 = [1.0058; 1.0842]$$

Conclusion : l'IC ne comprend pas la valeur 1lt. Donc la machine est mal réglée.

Étapes de construction

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ
 σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

Calcul d'un IC estimé pour une moyenne de population, lorsque l'écart type de la population est connue, et

- soit la moyenne suit une loi normale
- soit l'échantillon est de taille au moins 30.

1. Définir la population d'intérêt et sélectionner un échantillon aléatoire de taille n
2. Spécifier le degré de confiance $1 - \alpha$
3. Calculer la moyenne de l'échantillon $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
4. Déterminer l'erreur standard de la moyenne $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
5. Déterminer la valeur critique $z_{\alpha/2}$
6. Calculer l'intervalle de confiance

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

IC pour estimer μ , σ^2 inconnu

Hypothèse : la distribution de la population suit une loi normale.

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

où :

\bar{x} = moyenne de l'échantillon

$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ = valeur critique de la \mathcal{T} -distribution à $n - 1$ dl
pour un degré de confiance de $1 - \alpha$

s = écart type de l'échantillon

n = taille de l'échantillon

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

Exemple

En tant que responsable d'un "backoffice" dans une entreprise, vous souhaitez calculer l'intervalle de confiance à 95% du temps moyen passé au téléphone par les employés du "backoffice" avec les clients. Vous avez recueilli les temps, en minutes, de 25 appels.

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

7.1	13.6	1.4	3.6	1.9
11.6	1.7	16.9	2.6	7.7
12.4	11.0	3.7	14.6	8.8
8.5	6.1	3.3	6.1	6.9
0.4	11.0	0.8	6.4	9.1

1. Population :

Exemple

En tant que responsable d'un "backoffice" dans une entreprise, vous souhaitez calculer l'intervalle de confiance à 95% du temps moyen passé au téléphone par les employés du "backoffice" avec les clients. Vous avez recueilli les temps, en minutes, de 25 appels.

Rappels

Intervalle de
confianceIC pour μ σ^2 connu

Étapes

 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

7.1	13.6	1.4	3.6	1.9
11.6	1.7	16.9	2.6	7.7
12.4	11.0	3.7	14.6	8.8
8.5	6.1	3.3	6.1	6.9
0.4	11.0	0.8	6.4	9.1

1. Population : tous les appels des clients au "backoffice"
2. Niveau de confiance souhaité :

Exemple

En tant que responsable d'un "backoffice" dans une entreprise, vous souhaitez calculer l'intervalle de confiance à 95% du temps moyen passé au téléphone par les employés du "backoffice" avec les clients. Vous avez recueilli les temps, en minutes, de 25 appels.

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

7.1	13.6	1.4	3.6	1.9
11.6	1.7	16.9	2.6	7.7
12.4	11.0	3.7	14.6	8.8
8.5	6.1	3.3	6.1	6.9
0.4	11.0	0.8	6.4	9.1

1. Population : tous les appels des clients au "backoffice"
2. Niveau de confiance souhaité : $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne estimée

Exemple

En tant que responsable d'un "backoffice" dans une entreprise, vous souhaitez calculer l'intervalle de confiance à 95% du temps moyen passé au téléphone par les employés du "backoffice" avec les clients. Vous avez recueilli les temps, en minutes, de 25 appels.

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

7.1	13.6	1.4	3.6	1.9
11.6	1.7	16.9	2.6	7.7
12.4	11.0	3.7	14.6	8.8
8.5	6.1	3.3	6.1	6.9
0.4	11.0	0.8	6.4	9.1

1. Population : tous les appels des clients au "backoffice"
2. Niveau de confiance souhaité : $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne estimée $\bar{x} \approx 7.088$ et écart type estimé $s \approx 4.64$
4. l'erreur standard de la moyenne

Exemple

En tant que responsable d'un "backoffice" dans une entreprise, vous souhaitez calculer l'intervalle de confiance à 95% du temps moyen passé au téléphone par les employés du "backoffice" avec les clients. Vous avez recueilli les temps, en minutes, de 25 appels.

Rappels

Intervalle de
confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

7.1	13.6	1.4	3.6	1.9
11.6	1.7	16.9	2.6	7.7
12.4	11.0	3.7	14.6	8.8
8.5	6.1	3.3	6.1	6.9
0.4	11.0	0.8	6.4	9.1

1. Population : tous les appels des clients au "backoffice"
2. Niveau de confiance souhaité : $1 - \alpha = 0.95$
3. Moyenne estimée $\bar{x} \approx 7.088$ et écart type estimé $s \approx 4.64$
4. l'erreur standard de la moyenne $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0.928$

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ σ^2 connu

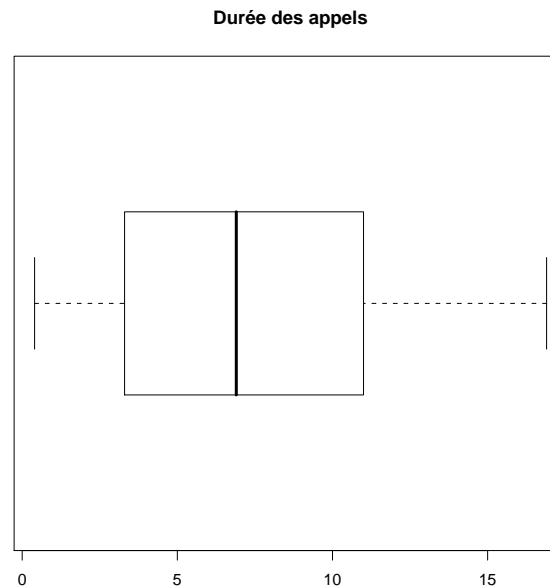
Étapes

 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

5. Comme vous ne savez pas *a priori* si la population est normalement distribuée, vous vérifiez à l'aide d'une boîte à moustache que la distribution de votre échantillon soit normalement distribuée :



la valeur critique vaut $t_{0.025,24} = 2.0639$

6. IC :

Exemple (suite)

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ σ^2 connu

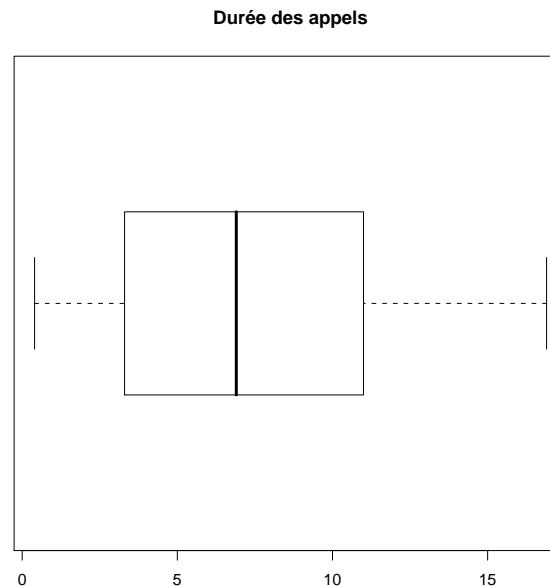
Étapes

 σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

5. Comme vous ne savez pas *a priori* si la population est normalement distribuée, vous vérifiez à l'aide d'une boîte à moustache que la distribution de votre échantillon soit normalement distribuée :



la valeur critique vaut $t_{0.025,24} = 2.0639$

6. IC : $7.088 \pm 2.0639 \cdot 0.928 = [5.173 ; 9.003]$

Étapes de construction

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque

IC pour une moyenne de population, lorsque la variance de la population est inconnue, échantillon de petite taille ($n \leq 30$)
Hypothèse : population distribuée suivant une loi normale.

1. Définir la population d'intérêt et sélectionner un échantillon aléatoire de taille n
2. Spécifier le degré de confiance $1 - \alpha$
3. Calculer la moyenne et l'écart type de l'échantillon

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$
4. Déterminer l'erreur standard de la moyenne $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
5. Déterminer la valeur critique $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$
6. Calculer l'intervalle de confiance $\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \sigma_{\bar{x}}$

Remarque

Échantillon de grande taille ($n \geq 30$)

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

où :

\bar{x} = moyenne de l'échantillon

$z_{\alpha/2}$ = valeur critique de la distribution normale standard pour un degré de confiance de $1 - \alpha$

s = écart type de l'échantillon

n = taille de l'échantillon

Rappels

Intervalle de confiance

IC pour μ

σ^2 connu

Étapes

σ^2 inconnu

Étapes

Remarque