Corrigé 8

Problème 1

En 2005, une enquête menée auprès de femmes quant à leur âge x_i à la naissance de leur premier enfant a donné, pour 51 femmes interrogées au hasard, les résultats suivants :

$$\bar{x} = 28 \text{ années}$$
$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 816 \, \text{années}^2$$

Les âges x_i représentent les réalisations d'une variable aléatoire X distribuée selon une loi normale (μ, σ^2).

Des études similaires ont établi que l'écart type est de 5 ans. Avec un seuil de signification de 0.05, cet écart type semble-t-il correspondre à celui de l'enquête de 2005 ?

a) Le paramètre d'intérêt est $\sigma^2 = 25$

b)

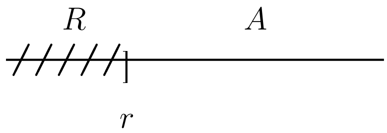
$$\begin{aligned} & H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \geq 25 \\ \text{contre} \quad & H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 < 25 \end{aligned}$$

c) Le niveau de signification est $\alpha = 0.05$

d) Test de la variance avec moyenne inconnue :

$$Q_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

La région critique est celle d'un test unilatéral gauche



Le seuil de rejet est donc $r = q_{1-\alpha}^{(n-1)} = q_{0.95}^{(50)} = 34.76$

e) La statistique est

$$q_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{816}{5^2} = 32.64$$

f) Comme $q_0 = 32.64 < 34.76 = r$, l'hypothèse H_0 est rejetée.

g) En conclusion, il y a suffisamment d'évidence pour affirmer que l'écart-type est plus petit que 5.

Problème 2

Un professeur de la HEG estime que si ses étudiants suivent régulièrement son cours et font les exercices demandés, alors au moins 70% des étudiants devraient atteindre la moyenne à son examen. Un échantillon de 100 étudiants a été sélectionné, parmi ceux ayant suivi son cours, effectué les exercices et fait l'examen. Sur les 100 étudiants, 63 ont réussi l'examen.

a) En utilisant un niveau de signification de 0.05, quelle conclusion devrait avoir ce professeur en regard de la difficulté de l'examen ?

   i) Le paramètre est $p = 0.7$

   ii)
$$\begin{aligned} & H_0 : p \geq 0.70 \\ \text{contre} \quad & H_1 : p < 0.7 \end{aligned}$$

   iii) Le niveau de signification est $\alpha = 0.05$

   iv) La région critique est l'ensemble des valeurs inférieures à $z_{0.05}$ i.e. $[\infty; -1.645]$

   v) La statistique est $\bar{p} = 63/100 = 0.63$

   vi)
$$z = \frac{0.630.70}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{100}}} = -1.5275$$

   Comme $z = -1.5275 > -1.645 = z_{0.05}$ l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée

   vii) La conclusion est que la difficulté du test semble être appropriée

b) Décrire ce que représente une erreur de seconde espèce dans ce contexte.
   Une erreur de type II signifie que la proportion d'étudiants ayant réussi l'examen est en fait inférieure à 0.7, mais le résultat de l'échantillon amène le professeur à croire que la proportion réelle est d'au moins 70%. Ainsi, un examen de même difficulté sera supposé satisfaire les exigences du professeur.