Haute école de gestion de Genève
Geneva School of Business Administration

Méthode de la p-valeur
Comparaison IC et test statistique

Dr. Sacha Varone

Objectif

- Savoir interpréter des résultats de tests statistiques utilisant la méthode de la p-valeur
- Comprendre le lien entre intervalle de confiance et test statistique

Rappels

Statistique de test d'une proportion

$$z = \frac{\bar{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

où

$\bar{p}$ = proportion de l'échantillon

π = proportion supposée de la population étudiée

n = taille de l'échantillon

Supposition : TAILLE DE L'ÉCHANTILLON SUFFISAMMENT GRANDE

En pratique

$$n\pi \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-\pi) \geq 5$$

Statistique de test d'une variance

La statistique de test à utiliser suit une loi du χ^2 à $n-1$ degrés de libertés :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

où

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{variance supposée de la population} \\ s^2 &= \text{variance de l'échantillon} \\ n &= \text{taille de l'échantillon} \end{aligned}$$

Hypothèse : échantillon aléatoire provenant d'une population dont les éléments sont i.i.d. de distribution normale

Méthode de la p-valeur

Qu'est-ce ?

La p-*valeur*, appelée *niveau (ou degré) de signification observé*, est la probabilité d'observer l'échantillon réellement utilisé sachant que l'hypothèse nulle H_0 est vraie.

- Autre méthode d'interprétation du résultat d'un test d'hypothèse.
- Utilisée avec un ordinateur

Interprétation :
probabilité d'obtenir à partir d'un autre échantillon tiré de la même population une valeur du paramètre testé au moins aussi extrême (plus éloignée de H_0) que la valeur réellement observée.

Utilisation

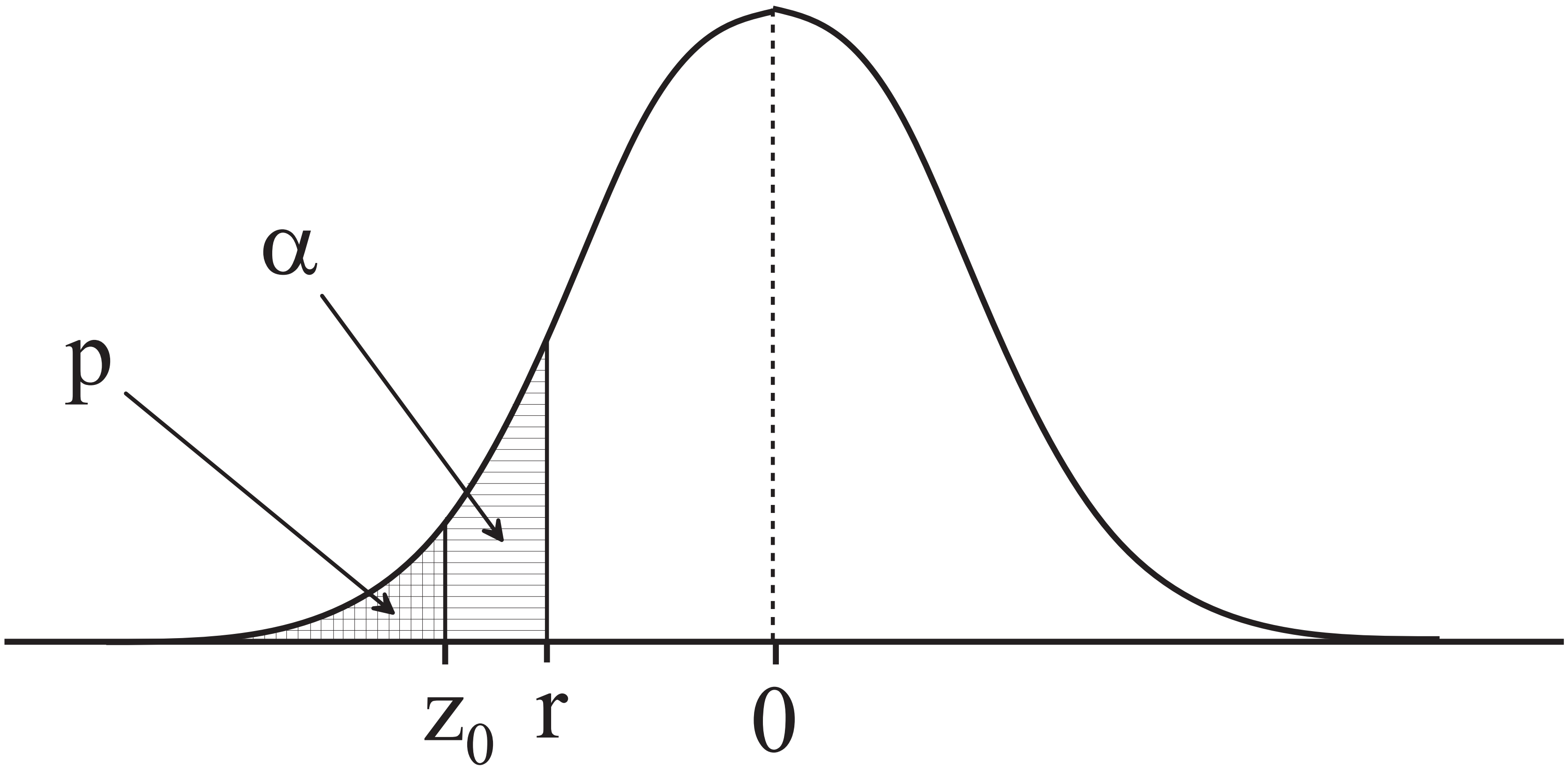
Critère : si p-valeur $< \alpha$, alors rejet de H_0.
Sinon, H_0 n'est pas rejetée.

Logiciels : Excel, Calc, Gnumeric, SPSS, R, ...

Avantage : La p-valeur donne plus d'information que simplement le rejet ou non d'une hypothèse.
$\Rightarrow$ degré de signification associé au résultat.

Illustration

Test unilatéral à gauche



Rejet de H_0, car p-valeur < risque α

Résultat du logiciel R

```
        One Sample t-test

data:  x
t = 1.6771, df = 9, p-value = 0.1278
alternative hypothesis: true mean is not equal to 500
99 percent confidence interval:
 499.0622 502.9378
sample estimates:
mean of x
      501
```

Obtenu avec les commandes suivantes :

x <- c(498, 502, 501, 499, 503, 503, 503, 499, 500, 502)
t.test(x, mu=500, alternative="two.sided", conf.level=0.99)

Interprétation

- Hypothèses nulle et alternative

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \mu = 500 \\ H_1 : &\quad \mu \neq 500 \end{aligned}$$

- Taille de l'échantillon ? $n = 10$
- Degré de confiance ? 0.99
- Valeur de la statistique ? $\bar{x} = 501$
- Résultat du test ? hypothèse nulle non rejetée
- Conclusion ? on peut supposer que la moyenne est effectivement de 500

Étapes d'un test utilisant la p-valeur

1. Spécifier la valeur de la population d'intérêt.
2. Formuler l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1
3. Choisir le niveau de signification α
4. Déterminer la région critique :
   Si la p-valeur est inférieure à α, alors rejeter H_0
   Sinon, ne pas rejeter H_0
5. Calculer la p-valeur associée à l'échantillon.
6. Prendre une décision.
   (Rejeter H_0 seulement si la p-valeur est inférieure à α)
7. Énoncer une conclusion.

Exemple

Une étude sur la mobilité des employés de l'entreprise "Jeux Mendors" affirme que la moyenne des temps de trajet des employés pour venir à leur travail excède 40 minutes. Vous devez tester cette affirmation avec une niveau de signification de 0.05. Pour cela, 100 employés vous ont indiqué leur temps de trajet actuel, dont la moyenne est 43.5 minutes. Basé sur une étude précédente, vous pouvez supposer que l'écart type de la population est de 8 minutes.

1. La valeur de la population d'intérêt est
   le temps de trajet moyen de tous les employés de l'entreprise "Jeux Mendors".

2. Les hypothèses nulle et alternative sont :
   $H_0 \quad \mu \leq 40$ minutes
   $H_1 \quad \mu > 40$ minutes

Exemple (suite)

3. Niveau de signification 0.05
4. Région critique p-valeur $< \alpha$
5. Calcul de la p-valeur :

$$z = \frac{43.5 - 40}{\frac{8}{\sqrt{100}}} = 4.38$$

$$p\text{-valeur} = \mathsf{P}(z > 4.38) = 1 - \mathsf{P}(z \leq 4.38) \approx 0$$

6. Comme la p-valeur appartient à la région critique, l'hypothèse H_0 est rejetée.
7. La conclusion est que la moyenne des temps de trajet excède 40 minutes.

Test bilatéral

Considérons une statistique suivant une distribution symétrique. Calculons la probabilité que la statistique prenne des valeurs plus extrêmes que celles obtenue à partir de l'échantillon, du côté correspondant à la situation observée.

$$P(\Theta \leq \theta_0) \quad \text{ou} \quad P(\Theta \geq \theta_0)$$

La p-valeur est le double de cette probabilité.

Exemple

Tester la moyenne d'un échantillon du nombre d'employés par PME suisse contre la moyenne de la population, $\mu = 35$, en ne connaissant pas la valeur de la variance de la population.
Par des études précédentes, nous savons que le nombre d'employés est distribué selon une loi normale.
20 PME suisses ont été interrogées sur le nombre d'employés qu'elles occupent.
La moyenne calculée vaut $\overline{x} = 27$ et la variance calculée vaut $s^2 = 334.7$.
Choix d'un niveau de signification de 0.05.

1. La valeur de la population d'intérêt est
   le nombre moyen d'employés des PME suisses.
2. Les hypothèses nulle et alternative sont :
   $H_0 \quad \mu = 35$ employés
   $H_1 \quad \mu \neq 35$ employés

Exemple (suite)

3. Niveau de signification 0.05
4. Région critique p-valeur $< \alpha$
5. Le calcul de la p-valeur

$$t = \frac{27 - 35}{\sqrt{\frac{334.7}{20}}} \approx -1.955$$

Comme la moyenne de l'échantillon est inférieure à la moyenne de la population postulée sous H_0, on considère tout d'abord la région de rejet de gauche.

$$P(t_{?,19} < -1.955) \approx 0.0327$$

$$P(t_{1-\frac{p-\text{value}}{2},19} < -1.955) \approx 0.0327$$

Test bilatéral, donc cette probabilité doit être doublée
p-value $\approx 2 \cdot 0.0327 = 0.0654$

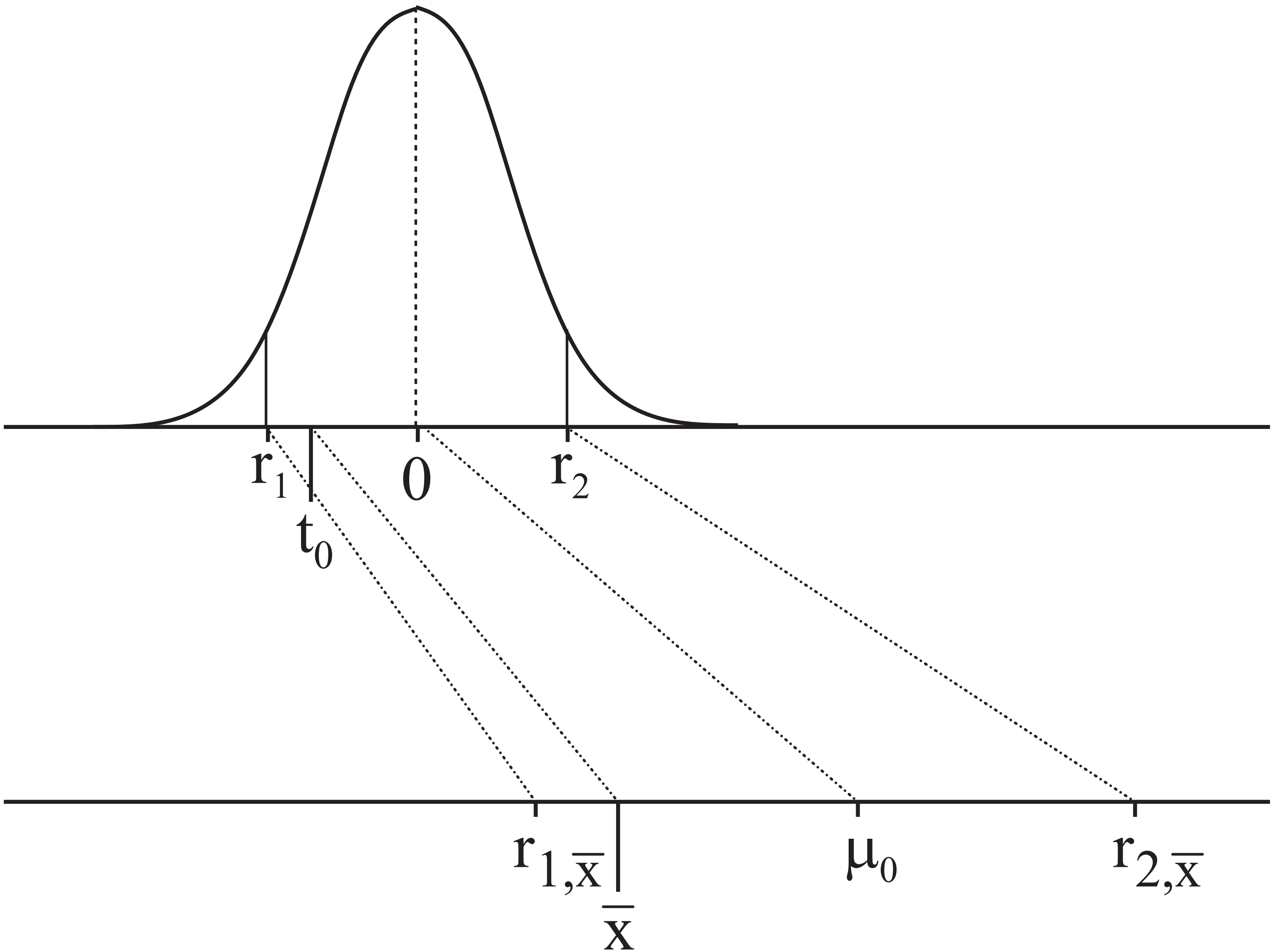
Exemple (fin)

6. Comme la p-valeur n'appartient pas à la région critique, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée.

7. La conclusion est que la vraie moyenne de la population peut être égale à 35 employés par petite entreprise suisse.

Comparaison IC et tests

Illustration



Explications

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x} = \mu + t\,\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

h e g

Exemple précédent

Test sur la moyenne, variance inconnue.

20 observations, niveau de signification $\alpha = 0.05$.

Valeur observée $\overline{x} = 27$ transformée en $t_0 = \frac{27-35}{\sqrt{\frac{334.7}{20}}} \approx -1.955$ Seuils de la loi de Student :

$$\begin{aligned} r_{1,\bar{x}} &= \mu + t_{1-\frac{\alpha}{2},19} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} \\ &\approx 35 - 2.093 \cdot 4.0908 \approx 26.43 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_{2,\bar{x}} &= \mu + t_{\frac{\alpha}{2},19} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} \\ &\approx 35 + 2.093 \cdot 4.0908 \approx 43.56 \end{aligned}$$

$r_{1,\bar{x}} \;\leq\; \bar{x} = 27 \;\leq\; r_{2,\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad H_0$ n'est pas rejetée.

IC et test

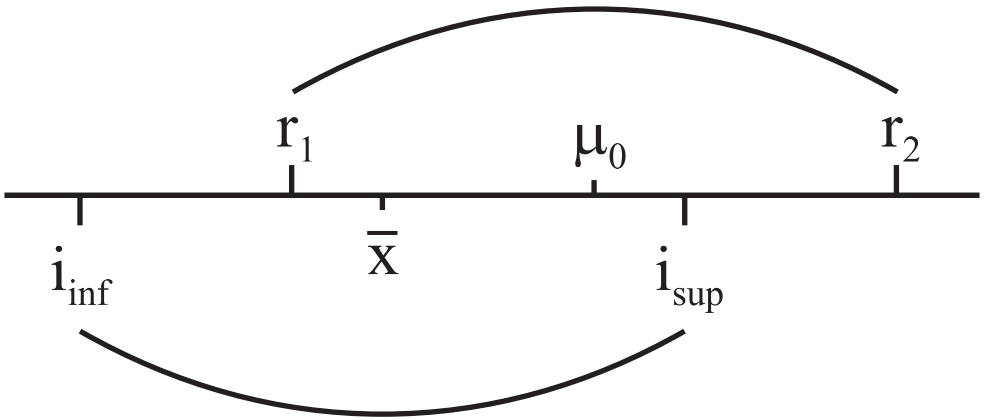
Équivalence entre le test d'hypothèse bilatéral et l'intervalle de confiance.

Exemple :

$$P\left(\mu \in \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P(H_0 \text{ accepté})$$



Résumé

estimé	hypothèse	distribution
μ	σ^2 connu	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
	σ^2 inconnu, distr. normale	$T_{(n-1)} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}_{n-1}$
π	$n\pi \geq 5$ et $n(1-\pi) \geq 5$	$Z = \frac{\bar{P}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
σ^2	μ connu, distr. normale	$Q_{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$
	μ inconnu, distr. normale	$Q_{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$