Corrigé 2

Problème 1 Nombre de spectateurs

Soit Y le nombre de personnes qui assistent à la représentation d'une pièce de théâtre.

a) Pour 5 jours de représentation pris au hasard on a observé :

i	1	2	3	4	5
y_i	300	280	290	310	295

Estimer l'espérance $E(Y) = \mu$ par la médiane de l'échantillon $\tilde{y}$, puis par la moyenne de l'échantillon $\bar{y}$.

$$\bar{y} = \frac{1475}{5} = 295 \quad \tilde{y} = 295$$

b) Pour 4 nouveaux jours choisis au hasard on a observé :

i	6	7	8	9
y_i	305	318	290	280

Recalculer les deux estimations de μ en considérant l'échantillon formé par l'ensemble des 9 observations. Commenter.

$$\tilde{y} = 295 \quad \bar{y} = \frac{2668}{9} \approx 296.4$$

c) Pour les cinq premières observations on trouve :

$$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 435'625$$

et pour l'ensemble des 9 observations :

$$\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 792'274$$

Donner une estimation non-biaisée de la variance de Y, ainsi qu'une estimation non-biaisée de l'écart type de $\bar{y}$ dans chacun des deux cas considérés. Commenter.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2\right)$$

Attention, il s'agit de S^2 qui est la variance d'une population.

a) cinq observations

$$S^2 = \frac{435625}{5} - 295^2 = 100$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{5}{5-1}100 = 125$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{125} \approx 11.18$$

Pour la moyenne de l'échantillon, nous avons

$$\hat{\sigma}_{\bar{y}_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{11.18}{\sqrt{5}} = 5$$

b) neuf observations

$$S^2 = \frac{792274}{9} - 296.4^2 \approx 151.14$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{9}{9-1}151.14 \approx 170.03$$

$$\hat{\sigma} \approx \sqrt{170.03} \approx 13.04$$

Pour la moyenne de l'échantillon, nous avons

$$\hat{\sigma}_{\bar{y}_2} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{13.04}{\sqrt{9}} \approx 4.35$$

d) Supposons maintenant qu'à la suite d'une erreur le nombre d'entrées du 9ème jour ait été mal relevé. De ce fait nous avons :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	300	280	290	310	295	305	318	290	28

Recalculer les deux estimations de μ. Lequel des deux estimateurs est-il le plus pertinent ?

$$\tilde{y} = 295 \quad \bar{y} = \frac{2416}{9} \approx 268.4$$

La médiane est ici plus pertinente que la moyenne comme estimateur de μ car elle est plus robuste.