

Corrigé 6

Problème 1 Formulation d'hypothèses I

Un responsable de production d'Emmental doit vérifier que le processus de fabrication du fromage Emmental utilise en moyenne 12 litres de lait pour 1kg de fromage. Si le nombre moyen de litres de lait est trop élevé, les pertes sont au préjudice de l'entreprise. Si le nombre moyen de litre de lait est trop faible, le fromage n'aura pas une qualité suffisante.

- a) Sur quelle valeur doit-il effectuer un test ?
Sur le nombre moyen de litres de lait par kg de fromage
- b) Quelle situation est supposée être vraie, tant qu'il n'y a pas suffisamment d'évidence du contraire ?
 $\mu = 12$ litres de lait
- c) Formuler les hypothèses nulle et alternative.
 $H_0 : \mu = 12$
 $H_1 : \mu \neq 12$

Problème 2 Formulation d'hypothèses II

Une zone agricole est utilisée pour expérimenter un nouvel engrais, qui devrait permettre de diminuer la variation de rendement des cultures. Il est constaté, par rapport à la moyenne sur les 10 dernières années, une variation de $\pm 10\%$ des rendements lorsque l'engrais usuel est utilisé. Durant 2 ans, le nouvel engrais a été utilisé sur 4 champs.

- a) Sur quel paramètre devra-t-on effectuer un test ?
Sur la variance des rendements
- b) Quelle situation est supposée être vraie, tant qu'il n'y a pas suffisamment d'évidence du contraire ?
 $\sigma^2 = 0.01$
- c) Formuler les hypothèses nulle et alternative.
 $H_0 : \sigma^2 \geq 0.01$
 $H_1 : \sigma^2 < 0.01$

Problème 3 Erreur de première et deuxième espèce

Supposons que la facture de chauffage mensuelle d'un petit appartement suive une loi normale de moyenne 100 francs et d'écart type 20. L'isolation ayant été refaite, la charge mensuelle de

chauffage est espérée suivre une loi $\mathcal{N}(80, 400)$.

Il s'agit de tester si la variable aléatoire suit encore une loi normale $\mathcal{N}(100, 400)$. La situation espérée est la suivante $X \sim \mathcal{N}(80, 400)$

$$H_0 : \mu_0 \geq 100$$

$$H_1 : \mu_0 < 100$$

En choisissant une erreur de première espèce $\alpha = 0.05$,

a) quel est la valeur critique r ?

$$\begin{aligned}x_c &= \mu_0 + z_\alpha \cdot \sigma_0 \\&= \mu_0 + z_{0.05} \cdot \sigma_0 \\&= 100 + (-1.645) \cdot 20 \\&= 67.1\end{aligned}$$

b) quel est la probabilité de commettre une erreur de deuxième espèce ?

$$\begin{aligned}\beta &= P(x_1 > x_c \mid x_1 \sim N(\mu_1 = 80, \sigma_1^2 = 400)) \\&= P(z_1 > \frac{x_c - 80}{20} \mid z_1 \sim N(0, 1)) \\&= P(z_1 > \frac{67.1 - 80}{20}) \\&= P(z_1 > -0.645) \\&\approx 0.74\end{aligned}$$

En choisissant une erreur de première espèce $\alpha = 0.01$,

a) quel est la valeur critique r ?

$$\begin{aligned}x_c &= \mu_0 + z_\alpha \cdot \sigma_0 \\&= \mu_0 + z_{0.01} \cdot \sigma_0 \\&= 100 + (-2.33) \cdot 20 \\&= 53.4\end{aligned}$$

b) quel est la probabilité de commettre une erreur de deuxième espèce ?

$$\begin{aligned}\beta &= P(x_1 > x_c \mid x_1 \sim N(\mu_1 = 80, \sigma_1^2 = 400)) \\&= P(z_1 > \frac{x_c - 80}{20} \mid z_1 \sim N(0, 1))\end{aligned}$$

$$= P(z_1 > \frac{53.4 - 80}{20})$$

$$= P(z_1 > -1.33)$$

$$= 0.9082$$