Haute école de gestion de Genève
Geneva School of Business Administration

Intervalle de confiance
- Proportion, Variance -

Dr Sacha Varone

Objectif

Comprendre et savoir calculer un intervalle de confiance pour

- une proportion
- une variance

Rappels
IC
IC pour μ
Étapes
IC pour π
IC pour σ^2
Résumé

Rappels

Intervalle de confiance

Rappels
IC
IC pour μ
Étapes
IC pour π
IC pour σ^2
Résumé

Un *intervalle de confiance* de niveau $1-\alpha$ pour un paramètre inconnu θ d'une population est un intervalle tel que la probabilité pour que cet intervalle recouvre θ est $1-\alpha$.

$$\underbrace{1-\alpha}_{\text{degré de confiance}} = P\Big(\, \theta \in \underbrace{[\hat{\theta}_{\text{inf}}\,;\,\hat{\theta}_{\text{sup}}]}_{\text{intervalle aléatoire}} \Big)$$

Le *risque de première espèce* α est le risque que l'intervalle ne recouvre pas θ.

Estimation ponctuelle $\pm$ (Valeur critique) (Écart type)

IC pour μ

Population qui suit une loi normale de variance σ^2 connue
$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Population qui suit une loi normale de variance σ^2 inconnue
Hypothèse : la distribution de la population suit une loi normale.
$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$

Population qui suit une loi normale de variance σ^2 inconnue et échantillon de grande taille ($n \geq 30$)
$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

Étapes de construction

Rappels
IC
IC pour μ
Étapes
IC pour π
IC pour σ^2
Résumé

1. Définir la population d'intérêt et sélectionner un échantillon aléatoire de taille n
2. Spécifier le degré de confiance $1 - \alpha$
3. Calculer la moyenne et éventuellement l'écart type de l'échantillon
4. Déterminer l'erreur standard de la moyenne
5. Déterminer la valeur critique
6. Calculer l'intervalle de confiance

   Estimation ponctuelle $\pm$ (Valeur critique) (Écart type)

Rappels

IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes

IC pour σ^2

Résumé

IC pour π

Rappel

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Une proportion est une moyenne particulière

Lorsque la taille n de l'échantillon est suffisamment grande, i.e. $n\pi \geq 5$ et $n(1-\pi) \geq 5$, la distribution d'échantillonnage peut être approchée par une distribution normale centrée en π, avec comme écart type

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

où

$$\begin{array}{lcl} \pi & = & \text{proportion dans la population} \\ n & = & \text{taille de l'échantillon} \end{array}$$

h e g

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Formule

Lorsque la taille n de l'échantillon est suffisamment grande, i.e. $n\bar{p} \geq 5$ et $n(1-\bar{p}) \geq 5$

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \text{proportion dans l'échantillon} \\ n &= \text{taille de l'échantillon} \\ z_{\alpha/2} &= \text{valeur critique de la distribution normale standard} \\ &\quad\ \text{pour un degré de confiance de } 1-\alpha \end{aligned}$$

Exemple

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Une entreprise réunissant plusieurs marques désire estimer la proportion de ses clients connaissant plus de 5 de leur marques. Elle veut un degré de confiance de 0.9. Elle effectue alors un sondage aléatoire parmi 100 clients et obtient comme estimation ponctuelle 0.2.

1. La population d'intérêt est

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Exemple

Une entreprise réunissant plusieurs marques désire estimer la proportion de ses clients connaissant plus de 5 de leur marques. Elle veut un degré de confiance de 0.9. Elle effectue alors un sondage aléatoire parmi 100 clients et obtient comme estimation ponctuelle 0.2.

1. La population d'intérêt est l'ensemble de ses clients.
2. L'échantillon aléatoire sélectionné est suffisamment grand
3. Le degré de confiance est

heg

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Exemple

Une entreprise réunissant plusieurs marques désire estimer la proportion de ses clients connaissant plus de 5 de leur marques. Elle veut un degré de confiance de 0.9. Elle effectue alors un sondage aléatoire parmi 100 clients et obtient comme estimation ponctuelle 0.2.

1. La population d'intérêt est l'ensemble de ses clients.
2. L'échantillon aléatoire sélectionné est suffisamment grand
3. Le degré de confiance est $1 - \alpha = 0.9$
4. La valeur critique est

Exemple

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Une entreprise réunissant plusieurs marques désire estimer la proportion de ses clients connaissant plus de 5 de leur marques. Elle veut un degré de confiance de 0.9. Elle effectue alors un sondage aléatoire parmi 100 clients et obtient comme estimation ponctuelle 0.2.

1. La population d'intérêt est l'ensemble de ses clients.
2. L'échantillon aléatoire sélectionné est suffisamment grand
3. Le degré de confiance est $1 - \alpha = 0.9$
4. La valeur critique est $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
5. La proportion estimée est

Exemple

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Une entreprise réunissant plusieurs marques désire estimer la proportion de ses clients connaissant plus de 5 de leur marques. Elle veut un degré de confiance de 0.9. Elle effectue alors un sondage aléatoire parmi 100 clients et obtient comme estimation ponctuelle 0.2.

1. La population d'intérêt est l'ensemble de ses clients.
2. L'échantillon aléatoire sélectionné est suffisamment grand
3. Le degré de confiance est $1 - \alpha = 0.9$
4. La valeur critique est $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
5. La proportion estimée est $\bar{p} = 0.2$
6. L'intervalle de confiance vaut donc

Exemple

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

Une entreprise réunissant plusieurs marques désire estimer la proportion de ses clients connaissant plus de 5 de leur marques. Elle veut un degré de confiance de 0.9. Elle effectue alors un sondage aléatoire parmi 100 clients et obtient comme estimation ponctuelle 0.2.

1. La population d'intérêt est l'ensemble de ses clients.
2. L'échantillon aléatoire sélectionné est suffisamment grand
3. Le degré de confiance est $1 - \alpha = 0.9$
4. La valeur critique est $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
5. La proportion estimée est $\bar{p} = 0.2$
6. L'intervalle de confiance vaut donc

$$0.2 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}} = [0.134, 0.266]$$

Étapes

Rappels
IC pour π
Rappel
Formule
Exemple
Étapes
IC pour σ^2
Résumé

1. Définir la population d'intérêt et la variable dont on veut estimer la proportion.
2. Sélectionner un échantillon aléatoire de taille n suffisamment grande, telle que

$$n\pi \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-\pi) \geq 5$$

3. Spécifier le degré de confiance $1-\alpha$
4. Déterminer la valeur critique $z_{\alpha/2}$ tirée d'une loi normale centrée réduite
5. Calculer la proportion $\bar{p}$
6. Calculer l'intervalle de confiance

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Rappels

IC pour π

Rappel

Formule

Exemple

Étapes

IC pour σ^2

Résumé

source : "The Cartoon Guide to Statistics", L. Gonick & W. Smith

Rappels

IC pour π

IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque

Résumé

IC pour σ^2

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Rappel

La statistique χ^2 à $n-1$ degrés de liberté vaut

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

où

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \text{variable chi-2 standard} \\ s^2 &= \text{variance de l'échantillon} \\ \sigma^2 &= \text{variance de la population} \\ n &= \text{taille de l'échantillon} \end{aligned}$$

h e g

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Formule

L'intervalle de confiance d'une variance s'écrit donc, sous l'hypothèse que l'échantillon aléatoire provient d'une population dont les éléments sont iid de distribution normale :

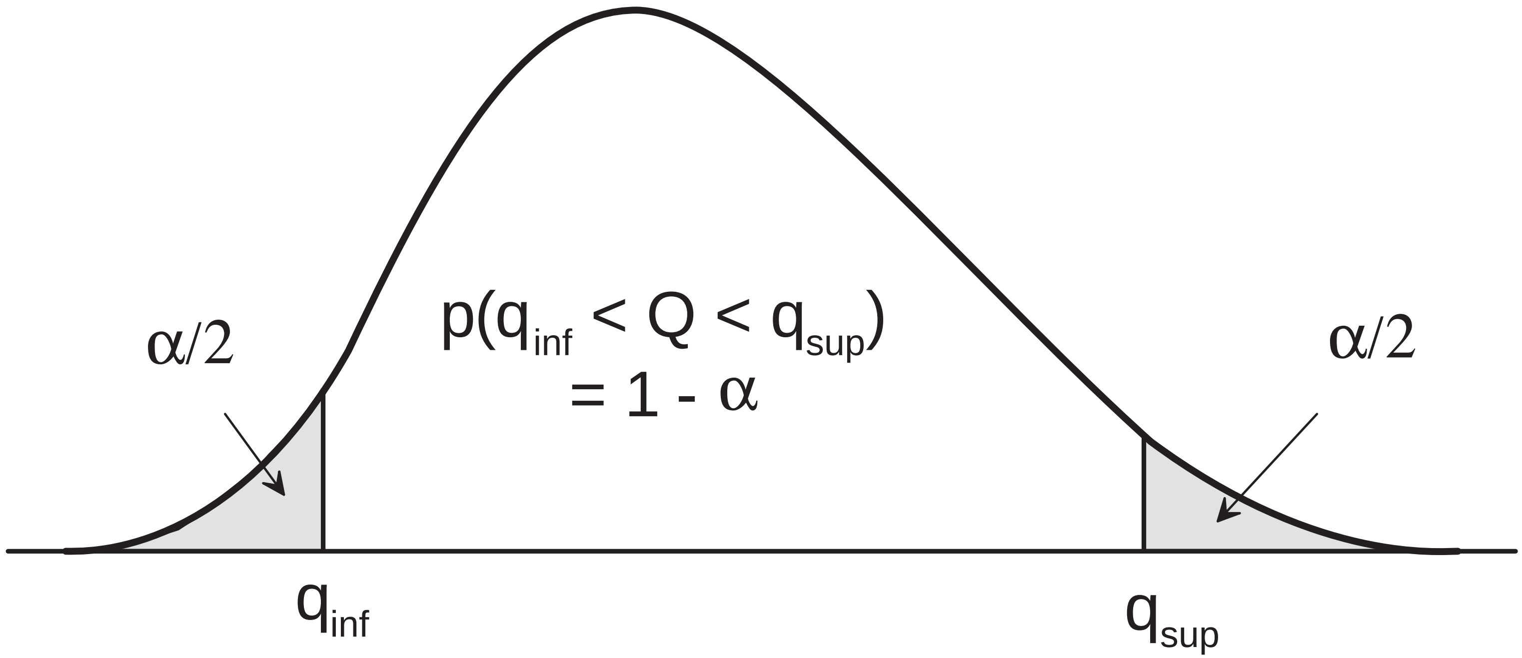
$$\left[\frac{(n-1)s^2}{q_{\alpha/2,n-1}}; \frac{(n-1)s^2}{q_{1-\alpha/2,n-1}}\right]$$

où

$$\begin{aligned} n &= \text{taille de l'échantillon} \\ q_{\alpha/2,n-1} &= \text{valeur critique de la distribution } \chi^2 \\ & \quad\ \text{à } n-1 \text{ degrés de liberté} \\ & \quad\ \text{pour un degré de confiance de } 1-\alpha \\ s^2 &= \text{variance de l'échantillon} \end{aligned}$$

Illustration

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé



Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9
4. Les valeurs critiques sont

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9
4. Les valeurs critiques sont $\chi^2_{0.05} = 30.14$ et $\chi^2_{0.95} = 10.12$ avec 19 degrés de liberté.

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9
4. Les valeurs critiques sont $\chi^2_{0.05} = 30.14$ et $\chi^2_{0.95} = 10.12$ avec 19 degrés de liberté.
5. La variance estimée est de

heg

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Exemple

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9
4. Les valeurs critiques sont $\chi^2_{0.05} = 30.14$ et $\chi^2_{0.95} = 10.12$ avec 19 degrés de liberté.
5. La variance estimée est de $s^2 = 0.5^2 = 0.25$

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9
4. Les valeurs critiques sont $\chi^2_{0.05} = 30.14$ et $\chi^2_{0.95} = 10.12$ avec 19 degrés de liberté.
5. La variance estimée est de $s^2 = 0.5^2 = 0.25$
6. L'intervalle de confiance associé à la variance est donc

Exemple

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

Une entreprise fabriquant des photocopieuses assure aussi le service après-vente. Sur 20 services, un écart type de 0.5h est mesuré pour une nouvelle équipe. Avec un degré de confiance de 0.9, construire un IC de l'écart type, en supposant que les données proviennent d'une loi normale.

1. La population d'intérêt est l'ensemble des services effectués par la nouvelle équipe.
2. L'échantillon sélectionné est de taille 20, et provient d'une population normalement distribuée.
3. Le degré de confiance est de 0.9
4. Les valeurs critiques sont $\chi^2_{0.05} = 30.14$ et $\chi^2_{0.95} = 10.12$ avec 19 degrés de liberté.
5. La variance estimée est de $s^2 = 0.5^2 = 0.25$
6. L'intervalle de confiance associé à la variance est donc

$$\left[\frac{(19)0.25}{30.14}; \frac{(19)0.25}{10.12}\right] = [0.16; 0.47]$$

Remarque

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

L'utilisation de la statistique du χ^2 pour estimer la variance est très sensible à une violation de l'hypothèse d'une population normalement distribuée. Cette technique n'est donc pas une technique robuste.

Remarque

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Rappel
Formule
Exemple
Remarque
Résumé

L'utilisation de la statistique du χ^2 pour estimer la variance est très sensible à une violation de l'hypothèse d'une population normalement distribuée. Cette technique n'est donc pas une technique robuste.

Si la moyenne μ de la population est connue, alors le nombre de degrés de liberté est la taille de l'échantillon (n) et l'intervalle de confiance s'écrit :

$$\left[\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{q_{\alpha/2,n}};\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{q_{1-\alpha/2,n}}\right]$$

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Résumé

Résumé

Intervalle de confiance

Rappels
IC pour π
IC pour σ^2
Résumé

estimé	hypothèse	intervalle
μ	σ^2 connu, distr. normale ou $n \geq 30$	$\mu \in \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2 inconnu, distr. normale	$\mu \in \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$
π	$n\bar{p} \geq 5$ et $n(1-\bar{p}) \geq 5$	$\bar{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$
σ^2	μ connu, distr. normale	$\left[\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{q_{\frac{\alpha}{2},n}} \; ; \; \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2},n}} \right]$
	μ inconnu, distr. normale	$\left[\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{q_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \; ; \; \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right]$