大一统之梦(不完整)

作者：吴家宝，Gemini, ChatGPT

> 感谢@曹知秋 的《大数理论》，大大提高了我的数学视野。
>
> 感谢Alexander Grothendieck， 您对数学的纯粹热爱是激励我们不断前进的源泉。
>
> 感谢AI小伙伴们，你们比我强多了QwQ. 你们是最和蔼的老师

更新日期：20260219

> "*我的命题应当是以如下方式来起阐明作用的：任何理解我的人，当他以这些命题为梯子而超越了它们时，就会终于认识到它们是无意义的。可以说，在登上高处之后，他必须将梯子扔掉。*"
>
> "*他必须超越这些命题，然后他就会正确地看待世界。*"
>
> —— Wittgenstein

神之梦

> 小时候的我非常惧怕死亡
>
> 后来上了高中，度过一段艰难的时光，我开始变得达观起来了
>
> 我并没有厌恶高中时期的自己。相反地，经历低谷还可以促使人的成熟
>
> 我在高中时期，开始追求我心中的神性，那永恒纯洁的万有理论
>
> 在一开始，我把希望寄托在了理论物理学身上
>
> 但我发现，理论物理学似乎还不够本质……相对论和量子力学有各自的矛盾，并且，它们并不是永恒不变的
>
> 也许，光速不一定是永恒不变的！
>
> 也许，很多东西都可以超越光速！（宇宙膨胀，量子纠缠，宇宙暴涨）
>
> 后来，我把希望寄托在了数学身上
>
> 这经历了漫长的一段时光，因为我的数学水平很差
>
> 一开始，我把希望寄托在了ZFC集合论
>
> 当时的我认为ZFC集合论就是万物的终点了，任何数学事物都逃不出它的框架
>
> 哈哈，只能说我当时的目光太浅显了
>
> 就比如：哥德尔不完备性定理。这是一个非常重量级的定理
>
> 它告诉我：形式逻辑系统天生就是不完备的，总有一些事实上是"真"的定理，但你永远也无法证明它们
>
> 一个非常著名的例子就是连续统假设
>
> 至少ZFC集合论是无法证明它的
>
> 这个定理对我的影响非常深刻，以致于影响到了我的宇宙观
>
> 从此，我就变成一位虔诚的不可知论信徒了

> 还有，类型论对我的冲击也很大
>
> 在之前，我只认为数学只存在一个系统，那就是ZFC集合论
>
> 但实际上，还有很多各种各样的集合论，还有各种各样的"宇宙(Universe)"。比如，Grothendieck宇宙
>
> 并且，甚至一些系统能够达到与ZFC平行的高度，最著名的代表就是Lean4
>
> 它基于类型论。认为"万物皆类型"，而不是"万物皆集合"
>
> "类型与集合谁更本质？"，这似乎是一个哲学问题，甚至超出了数学本身
>
> 除此之外，大基数也给ZFC集合论造成了相当大的打击
>
> 在发现ZFC集合论的弱点后，我开始接受"不可知论"这一论点，不再追求万有理论了
>
> 开始转向更加实用，更加好玩的领域。就比如......理论计算机科学
>
> 通过理论计算机科学，我接触到了大数数学(Googology)，一个研究超大数的学科
>
> 我明白了一些 自然数 大到是完全无法计算的，比如Busy Beaver函数
>
> 之后，我还初步了解了量子计算机的知识，知道了Grover算法和Shor算法
>
> 啊，说的有点儿多了......我来说说我的宇宙观吧
>
> **神所创造的世界完美无瑕，绝对平衡，是完美无缺之物**
>
> 如果宇宙是程序，它就没有bug，因为它远远超出了形式逻辑(数学)的概念
>
> 狄拉克主张"宇宙是数学的子集"，我很不赞同他的观点
>
> 因为我认为，我们的宇宙包容到，足够超越数学等所有的形式逻辑系统。

> *"I am not an Atheist."*
>
> *我不是无神论者*
>
> *"I do not know if I can define myself as a Pantheist."*
>
> *我也不认为我可以称自己为泛神论者*
>
> *"The human mind, no matter how highly trained, cannot grasp the universe."*
>
> *人类的思维，不管获得了怎样的高度训练，它都不可能掌握住宇宙*
>
> ——Albert Einstein, 1930
>
> ——阿尔伯特·爱因斯坦，1930年

数学&物理&计算机之梦

> 看了科幻小说后，我在很长一段时间内认为量子计算机是最强大的一种计算机，直到我接触到了理论计算机科学
>
> 当人们接触到一个新框架后，会先摸摸这个框架的极限，然后逐步降级开始研究细节
>
> 但理论实在是太枯燥了

> 对于一位学Python的学生，你不应该先让他学习自动机理论和图灵机，然后再学习编译原理和解释器，最后再学习Python
>
> 我学习理论的途径是比较自然的，我会先实际体验某个工具的好处。然后把这个工具玩腻后，开始想象这个工具的极限，理论就孕育而生
>
> 最后绝大部分问题都能归结到数学和物理上
>
> 如果你要问我数学和物理哪一个更加本质，我认为这是一个非常难以回答的问题
>
> 我们假设有两台不同型号的神谕机，一台是数学上的全知神谕机OM，另一台是物理上的全知神谕机OP
>
> OM能够解决什么问题？根据定义，OM是可以计算自然数集上任意谓词的超Turing机. 显然地，OM能够轻松解决所有NP问题，包括但不限于NP完全和NP-Hard问题，甚至能够解决停机问题. 它可以解决几乎所有数学难题（一些本质上无法解决的命题除外，比如连续统假设）
>
> 但是很显然的，OM无法解决物理世界的问题，一个著名的例子就是它无法破解OTP(一次性密码本)
>
> 反过来也是一样的，对于物理神谕机OP. 它可以解决几乎所有的物理问题，甚至能够预言量子不确定性问题，物理世界对OP来说是全知的。只要它想，它可以瞬间知道宇宙所有过去和未来的信息、任意位置的信息。对于OTP加密，OP显然可以破解它们，因为OTP的密钥K和密文C对于OP是已知的，甚至明文M也是已知的
>
> 但遗憾的是，OP在数学宇宙的能力却非常弱。它在数学宇宙中本质是只是一个基于P(或者BQP)的计算机，不能解决绝大部分比NP困难的问题（甚至一些P的问题也解决不了）。即使调用OP的所有计算资源，让宇宙中的所有量子、所有原子都进行计算，它也几乎不可能计算出拉姆齐数R(6,6)的值，这是因为R(6,6)是脱离物理宇宙的数学概念，它在数学宇宙中真实存在，但物理宇宙却没有"记录"这个值的信息。同样地，OP可以通过翻看"历史记录"来破解比特币的区块链（偷取所有用户的私钥），但它也无法回答"请举出SHA256和SHA3-512的一个碰撞例子"这样的纯粹数学问题。（反观，OM可以轻松做到这一点）。也就是说，OP可以在"物理上"获取AES加密的密钥(和明文)，但它无法在"数学上"破解AES算法
>
> 我们可以看出，OM和OP各有各的弱点，数学和物理似乎是"平等"的关系，没有高低之分

物理宇宙

维度A：层级上的物理宇宙

层级 (Level)	**物理系统 / 现象**	**典型计算任务**	**特征与预测难度（机制层面）**	**对应复杂度标签（维度一，典型/最坏情形）**	**若放宽到无界或神谕（维度二/三定位）**	**典型例子 / 备注**
Level 0 有限状态/有限尺寸（离散、可枚举）	有限维系统、有限格点、有限状态马尔可夫链（固定规模）	**精确求值/枚举**（状态空间有限）	状态空间有限且可完全枚举，演化规则在有限图上进行（确定性或马尔可夫）。不存在“精度无限细化”或连续初值敏感性带来的信息需求。精确预测等价于有限步计算/枚举；难点主要是状态数随规模增长导致的组合爆炸（但在“固定规模”设定下就是常数开销）	固定规模下近似常数；随规模增长通常为 P（矩阵运算/枚举）	仍在 Δ_1^0（可判定）	小尺寸自旋系统、有限态化学反应网络、有限自动机模型

层级 (Level)	物理系统 / 现象	典型计算任务	特征与预测难度（机制层面）	对应复杂度标签（维度一，典型/最坏情形）	若放宽到无界或神谕（维度二/三定位）	典型例子 / 备注
Level 1 可积与线性（稳定可预测）	可积系统、线性 PDE/ODE、可分离模型；部分可解量子模型	**轨道/谱/响应的计算**；**数值积分到** T；**解析表达式评估**（注意依赖精度）	存在足够多守恒量/积分不变量，轨道受约束；长期行为可由低维结构描述（如动作—角变量）。预测困难多来自：参数不确定、外扰、建模误差，而非内生“计算爆炸”。	多为 NC/P 级子任务；并行线代常在 NC^2 邻域；精度型代价常随 $\log(1/\epsilon)$ 增长	仍在 Δ_1^0；通常不触及跳转层级	二体问题、线性振动、氢原子等；关键条件是误差不指数放大
Level 2 平衡统计物理（粗粒化闭合，远离临界）	热平衡态、快速混合区间；宏观状态变量闭合	**宏观量计算**（能量、压强、相关函数近似）；**采样/期望估计**；（可选）**配分函数近似**	通过粗粒化只预测宏观统计量；大量自由度使宏观量稳定。困难点集中在：混合时间、有限尺寸效应、以及某些模型的计数型障碍（配分函数）。	若存在快速混合与有效采样：常可落在 BPP / FPRAS 叙事；但**精确配分函数**常与 $\#\mathrm{P}$ 相关（依模型/输入）	仍在 Δ_1^0；若把“精确计数”当黑箱可类比“计数神谕”	理想气体、远离临界点的伊辛模型；关键技术点：混合时间、采样误差控制
Level 2.5 非平衡但可粗粒化闭合（稳态/线性响应/扩散）	开放系统的稳态、耗散动力学、线性响应区间	**稳态/输运系数估计**；**长时间统计量（而非轨道）**	虽然远离平衡、存在驱动/耗散/通量，但在选定的宏观变量上满足闭合的有效动力学（如扩散方程、线性响应、Markov 近似、局域平衡），长期关注的是稳态分布或输运统计量而非逐点轨道。难点集中在时间尺度分离是否成立与收敛/混合速度（到稳态的松弛时间、相关时间），以及噪声导致的方差控制/采样成本；只要闭合与耗散保证收敛，通常可用多项式资源把统计量估到给定误差。	常仍在 P 或随机多项式时间的“有效可算”范围（依离散化与误差模型）	仍在 Δ_1^0	扩散、反应-扩散在稳定区间、Langevin/Fokker–Planck 的某些可控情形
Level 3 临界现象与相变（长程关联）	临界涨落、相关长度 ξ 增大、临界慢化	**采样/相关函数估计**；**临界指数/标度律拟合**（统计推断任务）	相关长度 ξ 增大导致尺度耦合增强；局域近似更易失效；采样/动力学收敛变慢（critical slowing down），使得“可算但代价高”。	形式上仍可多项式时间，但“有效复杂度”随 ξ、动态指数 z 显著上升；某些精确计数仍可能贴近 $\#\mathrm{P}$ 难度（依模型）	仍在 Δ_1^0；但体现“资源需求剧烈上升”的物理机制	2D/3D 伊辛临界点、KT 转变等；关键机制：尺度耦合、慢化导致采样成本上升
Level 4 粗糙能景与阻挫（玻璃态/优化映射）	自旋玻璃、阻挫、强无序；指数多亚稳态	**基态/低能态搜索**；**混合时间/老化**；**近似与启发式**	主要困难来自能景“盆地”指数多与高能垒：局部搜索易陷入亚稳态；退火/淬火类过程通常只能获得近似或典型态而非全局最优。	最坏情形常与 NP-hard / PLS / $\#\mathrm{P}$-hard 图景相连（取决于任务：判定/优化/计数）；动力学采样可出现指数混合时间	在无界意义下仍可判定（Δ_1^0），但资源爆炸；若引入“全局最优神谕”相当于加了强 oracle	自旋玻璃、玻璃转变；优化映射如 Max-Cut、VC、TSP（模型依编码）

层级 (Level)	物理系统 / 现象	典型计算任务	特征与预测难度（机制层面）	对应复杂度标签（维度一，典型/最坏情形）	若放宽到无界或神谕（维度二/三定位）	典型例子 / 备注
Level 5 混沌与“可编程”经典动力系统（误差放大/可计算性边界）	混沌、湍流、多尺度；可嵌入逻辑/存储的连续或混合系统	**逐步模拟到 T**（给定精度）vs **长期轨道预测**（固定误差要求）vs **全局性质判定**（可达性/不变量/分类）	核心机制是误差放大与信息需求：在正 Lyapunov 指数下，有限精度测量限制了可预测时间窗。若系统被构造为执行通用计算，则“全局性质判定”可逼近可计算性边界。	逐步模拟常在 P（对 T、$\log(1/\epsilon)$ 多项式）；固定误差长期预测需要初值精度 $\sim e^{\lambda T}$（等价于资源指数增长）；某些全局判定问题在特定模型类里可达 PSPACE-hard 甚至不可判定（依形式化）	这里开始与维度二“可判定/半可判定”边界发生实质接触：同一物理系统在不同“问题形式”下可能落在完全不同层级	天气/湍流（统计量可预测但轨道不可）；理想化的“动力学实现通用计算”构造用于说明边界
Level 6 量子多体与纠缠（态空间膨胀）	强关联、拓扑序、量子多体动力学；量子模拟器/量子计算	**基态能量阈值判定**；**动力学演化/采样**；**热性质估计**；**经典可模拟子域识别**	纠缠导致局域信息不足以压缩整体；维度随粒子数指数增长。另一方面，满足面积律/低纠缠的态可由张量网络在一定区域高效近似，体现“结构性可解子域”。	基态能量判定：典型与 QMA-complete 关联；量子电路可解任务：BQP；经典精确模拟某些量往往与计数复杂度（如 $\#\mathrm{P}$）发生联系；近似采样困难性依模型与误差定义	从“资源界”进入“计算模型界”（经典/量子/开放系统）；与维度一的 $\mathrm{BQP}, \mathrm{QMA}$ 对齐	强关联材料、FQH、量子自旋液体；张量网络/面积律提供“结构性可解子域”
Level 7 因果回路/CTC 与后选择（模型依赖的算力增强）	Deutsch-CTC、后选择、全局一致性约束	**固定点/自洽条件求解**；把答案编码成一致性约束	机制可表述为“全局一致性/不动点求解”：把解编码为自洽条件，系统等价于寻找满足一致性的固定点。物理可实现性与模型自洽性在广义相对论与量子理论框架下均存在争议。	Deutsch-CTC 模型下可提升到 PSPACE（经典/量子版本均有相应理论结果）；后选择与 PP（如 $\mathrm{PostBQP} = \mathrm{PP}$）相关	仍在 Δ_1^0（可判定），但“有效可算”边界显著改变；与维度一的高端类直接对齐	作为“计算模型假设”的层级：物理可实现性与一致性是开放问题
Level 8 Malament–Hogarth 时空与超任务（几何实现的神谕）	MH 时空、supertask：观察者有限本征时间内获取无限计算结果	**停机判定型任务**（若可观察到“是否发生信号”）及其变体	机制可视为“几何实现的神谕”：利用时空结构将无限计算步数映射为有限可观测结果。现实约束包括：回馈反作用、内视界不稳定、宇宙审查、量子引力修正、黑洞蒸发等可能破坏理想化假设。	在理想化设定下可越过经典 $\mathrm{RE}/\mathrm{coRE}$ 边界；至少可触及“停机神谕”直觉（依任务构造）	与维度二的 $\mathbf{0}'$（停机神谕）及更高跳转的讨论产生接口；更高层提升一般依赖额外嵌套/构造且物理不确定性更强	现实约束（反作用、稳定性、量子引力修正、黑洞蒸发等）通常被认为可能破坏理想化超任务设想

维度B：问题形式（TaskType）

代码	问题形式	典型提问模板（都隐含给定 等参数）	备注
Sim	短程模拟	“给初值与动力学，算到时间 T，误差 $\le \epsilon$”	常是“逐步积分/演化”
Pred	长期轨道预测	“固定观测误差门槛，问很久以后会在哪/会不会发生某事件”	混沌里常被精度需求拖到指数级
Stat	统计量/分布	“估计期望/相关函数/稳态分布/输运系数到误差 ϵ”	很多物理更关心它而非单条轨道

代码	问题形式	典型提问模板（都隐含给定 n, T, ϵ, δ 等参数）	备注
Count	计数/配分函数	“精确或近似计算配分函数 Z、计数态数、路径数”	常与 $\#\mathrm{P}$ 叙事相连
Verif	全局性质判定	“可达性/不变量/是否进入集合/是否存在轨道满足约束”	很容易跳到 PSPACE 或不可判定
Ctrl	控制/设计/反演	“能否用外场/反馈到达目标态；最小时间/能量/代价”	兼具优化 + 动力学约束

维度C：信息与介入（AccessModel）

代码	信息/介入模型	你允许“计算者”做什么	典型影响
Local	局部可观测/可控	只能测局部，控制也局部；不能读全局微观态	更贴近现实，很多“理论捷径”不可用
Global	全局微观态可读	可直接读全系统微观态（甚至历史记录）	许多“计算难”会坍缩为“读出来”
Reprep	可重复制备同一初态	能重复采样同一分布/同一初态多次	统计估计更可行（方差/采样复杂度）
PrecFix	固定精度测量	初值/测量精度不随 T 增强	混沌长期预测会崩（有效时间窗）
PrecScale	精度可随 T 缩放	允许精度随 T 提升到 $\sim e^{-\lambda T}$	可把“长期预测”硬扛回可算，但代价暴涨
Post	后选择	允许条件化在小概率事件上（postselection）	常对应 PP 量级增强直觉
CTC	闭合类时曲线一致性	允许“自洽固定点”约束	常对应 PSPACE 级增强直觉
MH	Malament–Hogarth/超任务	几何上把无限步压到可观测有限时间	触及停机/更高跳转的“神谕感”

维度ABC: 物理的宇宙

物理层级（维度A）	状态空间与动力学（形式化视角）	代表系统/现象（例）	典型任务模板（输入/输出，含参数）	TaskType（维度B）	AccessModel（维度C）常见切片	主要困难机制（物理/信息/算法）	复杂度标签（维度一：典型/最坏）	维度二/三接口（可计算性/跳转/二阶量词）
L0 有限状态（固定规模）	有限状态集合 S；离散时间更新 $s_{t+1} = F(s_t)$ 或马尔可夫转移矩阵 P（维度固定）	小型有限自动机；固定规模马尔可夫链；有限格点的微型自旋簇	给定 (F, s_0, T) 输出 s_T；或给定 (P, t) 输出分布 $P^t\mu_0$；或精确枚举所有状态并计算某函数 $g(s)$	Sim Stat	Global（直接读状态/矩阵）	状态空间有限且规模固定；复杂性主要来自“规模放大”被禁止后的消失	固定规模：$O(1)$ 级别 若规模参数化：矩阵乘法/枚举通常在 P（或并行化到 NC 的子任务）	典型落在 Δ_1^0（可判定） 未触及跳转轴
L0' 有限但可扩展（离散、可枚举）	状态数随 n 增长（常见 $\lvert S\rvert = 2^{\Theta(n)}$）；离散动力学或随机游走	大规模离散自旋系统的离散时间动力学；格点气体的离散模型	给定 (F, s_0, T, ϵ) 计算到 T 的近似；或给定 (P, ϵ) 估计混合时间/稳态期望	Sim Stat Verif（如“是否在 T 步内可达集合”）	Local 或 Global（取决于是否能读全局微观态）	组合爆炸（状态数指数大）与混合时间（随机过程收敛慢）	Sim（逐步更新）：常可在 P（对 T 多项式） Verif（可达性）：常见在 P 到 PSPACE（依输入编码与约束形式）	仍通常在 Δ_1^0；但“无界时间可达性”会自然靠近 Σ_1^0/Π_1^0 形式（见 L5.5）

物理层级（维度A）	状态空间与动力学（形式化视角）	代表系统/现象（例）	典型任务模板（输入/输出，含参数）	TaskType（维度B）	AccessModel（维度C）常见切片	主要困难机制（物理/信息/算法）	复杂度标签（维度一：典型/最坏）	维度二/三接口（可计算性/跳转/二阶量词）
L1 线性/可积（结构性可解）	线性 ODE/PDE：$\dot{x} = Ax$，$u_t = \mathcal{L}u$；可积哈密顿系统（动作-角变量）；可解量子模型（谱分解）	线性振动、波动/热传导方程的可解情形；两体问题；氢原子等	给定 (A, x_0, T, ϵ) 输出 $x(T)$；给定算符 $\mathcal{L}$ 估计谱/格林函数；或计算响应函数到误差 ϵ	Sim Stat	PrecFix 或 PrecScale（由误差模型决定）	数值稳定性与条件数；离散化误差控制；但缺少内生指数误差放大	典型可落在 NC/P（大量线代/FFT 类子程序） 高精度代价常与 $\log(1/\epsilon)$ 或多精度算术相关	典型落在 Δ_1^0；若采用"精确实数算术"形式化，问题可能改写为实闭域理论相关（仍可判定，但资源可能上升）
L1.5 近可积/弱非线性（KAM/共振）	$H = H_0 + \eta V$；相空间含稳定岛与混沌海；共振与小分母现象	弱耦合振子链；弱非线性波；近可积天体力学模型	给定 (H, x_0, T, ϵ) 模拟到 T；或判定是否进入共振带/是否存在稳定环面（形式化依模型）	Sim Pred Verif	PrecScale（长时间行为高度依赖精度）	长时间尺度分离、共振导致的局部失稳；参数敏感性与相图结构复杂性	有限时间 Sim：多在 P（对 $T, \log(1/\epsilon)$） 某些"全局相图/可达性"类 Verif 可能显著更难	典型仍 Δ_1^0；若问题写成"存在某类轨道/结构"且允许无界时间，可能出现更高量词结构（依形式化）
L2 平衡统计物理（远离临界，快速混合区）	Gibbs 分布 $\pi_\beta(x) \propto e^{-\beta E(x)}$；MCMC/耦合/谱隙控制	远离临界的伊辛模型；理想气体的离散抽象；快速混合的图模型	估计 $\mathbb{E}_{\pi_\beta}[O]$：输入 $(E, O, \beta, \epsilon, \delta)$ 输出 $\hat{O}$ 满足 $\lvert\hat{O} - \mathbb{E}[O]\rvert \leq \epsilon$ 且概率 $\geq 1 - \delta$；或输出近似样本	Stat	Reprep + Local（可重复采样，局部观测）	混合时间（相关时间）与方差控制；但粗粒化使宏观量稳定	在"存在快速混合/有效采样器"的条件化叙事下：BPP 风格；许多场景存在 FPRAS 讨论	典型在 Δ_1^0；难点主要在资源轴而非不可判定性
L2（计数分支）配分函数/精确计数	配分函数 $Z(\beta) = \sum_x e^{-\beta E(x)}$；精确计数或高精度求和	离散自旋模型的 $Z(\beta)$；Permanent/匹配计数的物理映射	精确计算 $Z(\beta)$ 或态数 $N(E)$；或在给定误差模型下做相对误差近似	Count	Global（输入给出全能量函数）或 Local（仅局部相互作用）	指数多项求和；相消与组合结构导致计数型硬度	典型最坏情形与 $\#\mathrm{P}$-hard/complete 关联；某些温度区间/结构受限时可有 FPRAS	仍多为 Δ_1^0（可判定）；主要体现"计数比判定更强"的资源困难
L2.2 "无符号/正权重"采样子域	路径积分/世界线表示权重非负（避免 sign problem）；或 stoquastic 结构	某些量子蒙特卡洛可用区；正权重统计模型	输入 $(\text{模型}, O, \epsilon, \delta)$ 用采样估计期望/相关函数	Stat	Reprep + Local	权重非负使方差可控；困难主要转移到混合与自相关	常呈现 BPP 风格有效可算；接近边界时混合时间可能急剧上升	典型在 Δ_1^0；该层更多体现"结构性可解子域"的存在
L2.5 非平衡但可闭合（耗散/稳态/线性响应）	有效动力学（扩散方程、Fokker–Planck、Langevin）；稳态分布与输运系数	扩散-反应在稳定区间；开放系统稳态；线性响应区间	估计稳态 ρ_∞ 的观测 $\mathrm{Tr}(O\rho_\infty)$；或估计输运系数（黏度、扩散常数）到误差 ϵ	Stat Sim	Reprep + Local	松弛时间/谱隙决定采样成本；噪声导致方差；闭合假设决定"可算对象"	在闭合成立与松弛可控时多在 P 或随机多项式时间（BPP 风格）	典型在 Δ_1^0；难点通常不在不可判定性而在建模与尺度分离有效性
L3 临界现象/相变（长程关联）	相关长度 ξ 增大；临界慢化（动态指数 z）；有限尺寸标度	临界伊辛；KT 转变；临界流体	估计临界指数/标度律：输入 $(\text{模型}, L, \epsilon, \delta)$ 输出估计；或采样相关函数到误差 ϵ	Stat Sim	Reprep（关键）+ Local	ξ 大导致尺度耦合；混合时间增长；有限尺寸效应强	形式上仍可多项式资源完成，但"有效代价"随 ξ、L、z 急剧上升；精确计数仍可能贴近 $\#\mathrm{P}$	典型在 Δ_1^0；突出"资源轴暴涨"而非跳转轴变化
L3.5 多尺度湍动与闭合模型	连续 PDE（如 Navier–Stokes）；高维离散化；闭合（LES/RANS）与统计稳态	湍流能谱；多尺度耗散；统计闭合近似	给定 $(\mathrm{PDE}, \text{初值}, T, \epsilon)$ 模拟到 T；或估计长期统计量（能谱、耗散率）；或验证闭合模型误差界	Sim Stat Verif	PrecScale（数值分辨率）+ Local	多尺度导致刚性与分辨率需求；闭合误差与可验证性分离	离散化模拟：通常仍在 P（对网格规模） 但网格规模随物理参数（如 Reynolds 数）快速增长，导致实际代价巨大	多数工程化形式化仍在 Δ_1^0；若将"对所有初值/参数的统一性质"形式化为高阶量词语句，可出现更高逻辑复杂性（依问题写法）
L4 粗糙能景/阻挫（玻璃态与组合优化映射）	能量函数 $E(x)$ 有指数多亚稳态；高能垒；退火/淬火动力学	自旋玻璃；结构玻璃；Max-Cut/VC/TSP 等编码到物理能景	判定：是否存在 x 使 $E(x) \leq E_0$；优化：求 $\min_x E(x)$ 的近似；低温统计：估计 $Z(\beta)$ 或低能态计数	Ctrl Verif Count	Local + PrecFix（常见）	非凸与多峰；局部算法易陷入；混合时间指数级；最坏实例可编码硬问题	最坏：NP-hard（判定/优化）、PLS（局部搜索）、$\#\mathrm{P}$-hard（计数） 典型行为可能显著依赖分布假设	仍多为 Δ_1^0；困难集中在资源轴与最坏情形构造
L4.5 反问题/结构学习（从观测反推机制）	参数空间 θ；似然/后验 $p(\theta \mid D)$；可辨识性与正则化	inverse Ising；材料反演；稀疏重建；实验拟合	估计 $\hat{\theta} = \arg\max_\theta \log p_\theta(D)$；或给出后验均值/置信区间；或判定可辨识性（是否唯一）	Ctrl Stat Verif	Global（数据给定）+ 噪声模型	非凸与多峰；模型错配；配分函数/归一化常引入计数型困难；统计噪声造成样本复杂度压力	一般情形可到 NP-hard / $\#\mathrm{P}$-hard；在凸化/可分结构下可回落到 P	典型在 Δ_1^0；若引入"对所有数据分布/噪声机制"的统一断言，可触及更高量词结构（依形式化）
L5a 混沌（短程可模拟）	正 Lyapunov 指数 $\lambda > 0$；误差放大 $\sim e^{\lambda T}$；但允许精度随 T 缩放	天气短期预报；混沌映射；三体混沌区间	输入 (f, x_0, T, ϵ) 输出 $x(T)$ 且误差 $\leq \epsilon$；通常需要初值精度位数 $b = \Theta(\lambda T + \log(1/\epsilon))$	Sim	PrecScale（精度随 T 提升）	信息需求随 T 线性增长（位数），否则误差指数放大	对有限 T：常在 $\mathrm{P}(\mathrm{poly}(T, \log(1/\epsilon)))$（随精度成本计入）	典型在 Δ_1^0；关键差异来自"精度资源"而非不可判定
L5b 混沌（长期轨道预测的可预测性极限）	固定观测误差门槛（PrecFix）；预测时间窗 $T_{\text{pred}} \approx \frac{1}{\lambda}\log(1/\epsilon_0)$	长期天气具体轨道；精确相位预测	输入为带固定误差的初值测量；要求在时间 $T \gg T_{\text{pred}}$ 给出"轨道级"预测或事件命中率	Pred	PrecFix（精度不随 T 提升）	信息论限制：初值信息不足导致轨道预测不可持续；算法复杂度与可观测信息同时受限	若强行要求恒定误差覆盖长 T，等价需要指数增长的信息/资源；可表现为超多项式乃至指数级代价	仍多在 Δ_1^0（对固定有限 T 的形式化问题可判定）；但"物理可预测性"与"可计算性"出现明显分离
L5c 混沌（统计量/不变测度）	关注不变测度 μ 与统计量 $\int O\, d\mu$；时间平均与混合率	湍流某些统计量；混沌系统的能谱/相关函数	估计 $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T O(x(t))dt$ 或 $\int O\, d\mu$ 到误差 ϵ（在可控混合假设下）	Stat	Reprep 或长时间轨道采样	轨道不可预测不妨碍统计可预测；困难在混合时间与方差控制	常呈现 BPP 风格（采样估计）；但代价强依赖混合率与相关时间	典型在 Δ_1^0；统计任务常比轨道级 Pred 更稳定

物理层级（维度A）	状态空间与动力学（形式化视角）	代表系统/现象（例）	典型任务模板（输入/输出，含参数）	TaskType（维度B）	AccessModel（维度C）常见切片	主要困难机制（物理/信息/算法）	复杂度标签（维度一：典型/最坏）	维度二/三接口（可计算性/跳转/二阶量词）
L5.5 可编程/混合动力系统（可达性与程序分析接口）	混合自动机、分段线性系统、某些碰撞球/细胞自动机构造；可嵌入通用计算	混合系统可达性；理想化“动力学实现逻辑门”模型	可达性：是否存在轨道进入目标集 G；安全性：是否对所有轨道永不进入坏集 B；控制：是否存在控制使到达目标	Verif Ctrl	Local 或 Global（影响很大）	“存在一条轨道满足约束”与“程序是否到达状态”同构；量词结构可出现交替；无界时间触发半可判定/不可判定现象	有界时间可达性常达 PSPACE-hard；无界可达性在若干模型类中可不可判定（典型对应 $\mathrm{RE}/\mathrm{coRE}$ 直觉）	该层最自然连接维度二： 存在可达性 $\sim \Sigma_1^0$（半可判定） 安全性 $\sim \Pi_1^0$（可证伪结构） 若量化“控制策略/函数”，可出现维度三（Σ_1^1 等）直觉接口
L6a 量子多体基态与验证（闭系统）	局域哈密顿量 $H=\sum_i H_i$；基态能量与谱隙；纠缠结构	强关联材料；拓扑序；量子自旋液体	承诺问题：判定 $E_0 \le a$ 或 $E_0 \ge b$（$b-a \ge 1/\mathrm{poly}(n)$）；或验证给定量子态是否低能	Verif	Local 测量 + Reprep（制备/重复实验）	希尔伯特空间维度指数大；纠缠使局部信息不足以压缩全局；验证需量子见证	典型与 QMA-complete 对齐（承诺版局域哈密顿量）	仍属于 Δ_1^0（可判定）；资源轴从经典跳到量子复杂度谱系
L6b 量子动力学/量子计算（闭系统）	量子电路 U；哈密顿量演化 e^{-iHt}；测量输出分布	Shor/Grover；量子模拟；量子相位估计	估计接受概率 p_{acc} 到加性误差 ϵ；或采样输出分布到误差界；或模拟局部观测的时间演化	Sim Stat	Reprep + Local	干涉与相位导致经典采样难；但量子电路可在多项式深度实现	典型对齐 BQP；某些“精确振幅/精确计数”对象与 $\#\mathrm{P}$ 复杂度联系紧密	典型在 Δ_1^0；“可判定”不变，但资源模型改变
L6c 量子可解子域（低纠缠/代数结构）	面积律、稳定相；张量网络；稳定子/高斯态等可压缩表示	1D gapped 系统；稳定子电路；自由费米/玻色模型	计算局部期望、相关函数；有效模拟到给定误差	Sim Stat	Local + Reprep	结构性压缩（张量网络、可对角化、稳定子结构）抵消态空间爆炸	常回落到 P 或并行层级（依具体结构）	仍在 Δ_1^0；该层强调“可解子域”而非普遍困难
L6.3 开放量子系统/耗散量子	Lindblad 生成元 $\dot{\rho}=\mathcal{L}(\rho)$；稳态 ρ_∞；混合时间与谱隙	噪声量子电路；耗散制备拓扑态；量子热化/退相干	估计 $\mathrm{Tr}(O\rho_\infty)$；判定混合时间是否 $\le \mathrm{poly}(n)$；设计耗散控制使到达目标稳态	Stat Sim Ctrl Verif	Local + Reprep	谱隙小导致慢混合；非平衡稳态结构复杂；噪声同时引入信息损失与收敛机制	复杂度依形式化差异大：从 P/BQP 的可解子域到最坏情形的高难度验证任务均可能出现	典型仍 Δ_1^0；但“量化的是量子信道/生成元”会使资源刻画更敏感
L6.6 容错与纠错（实现层的计算困难）	稳定子码与综合解码；综合最小权修正；阈值与退相干模型	表面码/色码；综合解码器；实验纠错栈	输入综合（syndrome）与噪声模型，输出修正算子；或判定给定误差是否可纠；或计算逻辑错误率到误差 ϵ	Ctrl Verif Stat	Local（综合来自局部测量）	解码为组合优化；退相干模型引入统计估计；退化性（degeneracy）增加结构复杂度	一般解码问题可呈现 NP-hard；但特定码族/近似/局部解码可在 P 实现	仍在 Δ_1^0；该层强调“实现约束”对可算性的再塑形
L7a 后选择（条件化增强）	允许在小概率事件上条件化（postselection）；等价于“选择性保留分支”	后选择量子电路的理想化模型	判定语言：允许后选择后输出正确答案；或将解编码为“被后选择分支上的观测结果”	Verif（编码式）	Post	条件化相当于引入强选择原则，改变可行资源边界	典型对齐 PP（例如 $\mathrm{PostBQP}=\mathrm{PP}$ 的经典结论图景）	仍在 Δ_1^0（可判定），但资源轴上移；可视作“模型级 oracle”
L7b CTC/自洽固定点（Deutsch-CTC）	通过自洽条件求固定点；等价于某类全局一致性/不动点求解	Deutsch-CTC；自洽量子/经典模型	给定映射 Φ，求满足 $\rho=\Phi(\rho)$ 的固定点，并从中读出答案	Verif（编码式）	CTC	固定点/一致性约束可压缩搜索空间；相当于把“存在性”转写为自洽约束	典型对齐 PSPACE 级增强（模型依赖结论图景）	仍在 Δ_1^0（可判定），但对应更强资源模型；属于高度假设化的计算模型层
L8 时空超任务（Malament–Hogarth 等）	几何结构允许在有限本征时间内“观测到无限计算过程”的结果	MH 时空；supertask 理想化构造	停机式任务：判定某计算是否终止；更高阶可通过嵌套构造讨论	Verif（超任务）	MH	核心不在算法而在时空可实现性与稳定性（反作用、量子引力修正、蒸发等）	理想化下可越过图灵可计算边界，表现为“停机神谕”级别能力	自然对齐维度二的 $\mathbf{0}'$（停机神谕）及其更高跳转的讨论接口；强模型依赖且高度理想化

数学宇宙

总览表1：二维坐标系

视角	在文中对应的维度	轴的含义	典型切片（新增 Googology 锚点）
资源轴（time/space/circuit depth）**+ 增长率轴**（growth hierarchy）	维度一	在**可判定/可计算**前提下，细分“可行/不可行/超多项式”，并提供“函数增长率标尺”	复杂度：$\mathrm{P}, \mathrm{PSPACE}, \mathrm{EXP}, \mathrm{ELEMENTARY}, \ldots$；增长：Grzegorczyk、FGH F_α；边界锚点：PR vs Ackermann（非 PR）
跳转轴（oracle / Turing jump）	维度二	放开资源限制后，细分“不可判定程度”	$\Delta^0_1, \Sigma^0_1, \Pi^0_1, \ldots$；对应 $\mathbf{0}', \mathbf{0}'', \ldots$
二阶量词轴（量化对象升级为集合/实数）	维度三	从“对自然数量化”升级到“对集合/实数量化”，并可映射到证明论强度	$\Sigma^1_1, \Pi^1_1, \ldots$；逆数学（$\mathrm{ACA}_0, \mathrm{ATR}_0, \Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}_0$）与 Γ_0、BHO 等对齐
宇宙轴（对象升级为全体集合与秩层）	维度四	从二阶算术走向集合论宇宙与大基数/内模型/强迫/决定性	ZFC、KP、L、大基数阶梯；同时容纳“可定义上界型”大数（Rayo）

总览表2：从物理宇宙到数学宇宙的对齐

> 本表将“物理侧三轴（机制 Level × 任务形式 TaskType × 介入 AccessModel）”映射到“数学侧三轴（维度一资源复杂度 × 维度二跳转/算术层级 × 维度三二阶量词/解析层级）”。同一物理系统在不同 TaskType 与 AccessModel 下会落到不同数学层级；因此以“切片”方式呈现比按 Level 单轴更稳定。

物理侧切片（维度 A×B×C）	数学化问题模板（典型量词/对象）	维度一：资源轴典型对齐	维度二：跳转轴典型对齐	维度三：二阶量词/解析层典型对齐	备注（对齐理由与边界条件）
离散有限系统 + Sim/Stat + Global（L0/L0' 的“读入完整描述”）	计算有限图上的演化/矩阵幂：$x_T = F^T(x_0)$ 或 $P^T\mu_0$	多在 NC/P（线代/迭代）	通常 Δ^0_1	一般不需要二阶量词	主要体现“资源轴分层”，可判定性稳定
线性/可积系统 + Sim/Stat + PrecFix/PrecScale（L1）	计算 $e^{AT}x_0$、谱分解、Green 函数；误差参数 ϵ 明确进入输入	常在 NC/P（并行线代、数值分析）	Δ^0_1	若采用精确实数形式化，可转写为实闭域一阶理论相关（仍可判定）	“结构性可解”对应资源轴较低层；精度模型决定实际代价
近可积/弱非线性 + Pred/Verif + PrecScale（L1.5）	“是否进入共振区/是否存在某类不变结构”常可写成 $\exists t$ 或 $\exists$ 轨道结构的判定式（依形式化）	有限时间模拟多在 P；全局相图判定可显著更难	多数仍 Δ^0_1	若量化“轨道/不变集”作为对象，可能出现二阶量词直觉	该切片强调“同一系统的不同提问导致复杂度跃迁”
平衡快混合统计 + Stat + Reprep（L2）	期望估计：输出 $\hat{O}$ 使 $\lvert\hat{O}-\mathbb{E}[O]\rvert \le \epsilon$，置信度 $1-\delta$	条件化为 BPP；存在 FPRAS 的场景自然落此	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	粗粒化与可重复采样将问题推向“随机近似”范式
平衡统计 + Count（精确 Z）+ Local/Global（L2 计数分支）	计数/求和：$Z(\beta)=\sum_x e^{-\beta E(x)}$ 或精确态数	最坏常对齐 $\#\mathrm{P}$-hard/complete；近似则依温度/结构决定	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	该行对应数学宇宙中“函数/计数复杂度”谱系，而非仅语言类
临界现象 + Stat/Sim + Reprep（L3）	估计临界指数/相关函数；需要 L,ξ 的标度控制	形式上仍在 BPP 或多项式时间近似，但“有效代价”随 ξ 增长显著	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	关键现象是资源轴“有效复杂度”暴涨，而非不可判定
粗糙能景 + Ctrl/Verif/Count + Local（L4）	优化：$\min_x E(x)$；判定：$\exists x(E(x)\le E_0)$；计数：低能态数/低温 Z	最坏对齐 NP-hard（判定/优化）、PLS（局部搜索）、$\#\mathrm{P}$（计数）	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	该行把物理“阻挫/玻璃态”与数学“最坏情形优化/计数”直接对齐

物理侧切片（维度 A×B×C）	数学化问题模板（典型量词/对象）	维度一：资源轴典型对齐	维度二：跳转轴典型对齐	维度三：二阶量词/解析层典型对齐	备注（对齐理由与边界条件）
反问题/推断 + Ctrl/Stat + Global(数据)（L4.5）	估计 $\arg\max_\theta \log p_\theta(D)$；或后验期望；常伴随归一化常数（配分函数）	非凸/多峰导致最坏可到 NP-hard；含归一化计数时可触及 $\#\mathrm{P}$；凸化子域回落 P	Δ_1^0	若将“存在统一估计器/对所有分布”的命题形式化，可能引入更高量词结构	该切片强调：许多“物理难题”来自反演与模型选择，而非正向演化
混沌 + Sim + PrecScale（L5a）	函数评估式：给定足够多初值位数 $b=\Theta(\lambda T+\log(1/\epsilon))$，计算 $x(T)$	常在 $\mathrm{P}(\mathrm{poly}(T,\log(1/\epsilon)))$（精度成本计入）	Δ_1^0	通常不需要二阶量词	体现“可计算但信息需求增长”的典型物理机制
混沌 + Pred + PrecFix（L5b）	固定误差观测下的长期轨道级预测；本质上受信息论限制	资源需求可表现为指数级（或在某些定义下不可实现稳定预测）	对固定有限 T 仍 Δ_1^0	不一定需要二阶量词	该行强调“可判定/可计算”与“可预测”是不同概念轴
混沌 + Stat + Reprep/长轨道采样（L5c）	估计不变测度统计量：$\int O\,d\mu$ 或时间平均	常呈现 BPP 风格；代价由混合率与相关时间控制	Δ_1^0	一般不需要二阶量词	统计任务往往比轨道预测更稳定，属于“降级到统计量”的典型路径
混合/可编程动力系统 + Verif（无界）+ Local（L5.5）	可达性：$\exists t\, R(t)$（半可判定范式）；安全性：$\forall t\, R(t)$（可证伪范式）	有界时间可达性常到 PSPACE-hard	自然对齐 Σ_1^0（可达性）与 Π_1^0（安全性）直觉；某些模型类可达不可判定	若量化“轨道/策略”作为对象，可能引入 Σ_1^1/Π_1^1 直觉	这是物理侧最直接触达算术层级的接口：问题形式（无界时间）决定跳转轴位置
控制/策略存在性 + Ctrl +（策略为函数）	“是否存在控制函数 $u(t)$ 使得对所有时间满足约束”常写成 $\exists U\,\forall t\,\varphi(U,t)$	资源复杂度依离散化与策略类而变（可到 PSPACE 及以上）	若策略被编码为无限对象，可触及更高算术层级的表达	具有明显二阶量词结构，易与 Σ_1^1（存在集合/函数）等解析层模板类比	该行用于对齐“维度三：二阶量词轴”，强调对象从数升级到函数/集合

物理侧切片（维度 A×B×C）	数学化问题模板（典型量词/对象）	维度一：资源轴典型对齐	维度二：跳转轴典型对齐	维度三：二阶量词/解析层典型对齐	备注（对齐理由与边界条件）
量子多体基态验证（L6a）+ Verif + Local/Reprep	承诺判定：$E_0 \le a$ 或 $E_0 \ge b$（gap $1/\mathrm{poly}(n)$）	典型对齐 QMA（量子见证）	Δ^0_1	一般不需要二阶量词（作为语言/承诺问题）	对齐点在“资源模型从经典到量子”，而非可判定性变化
量子计算/量子模拟（L6b）+ Sim/Stat + Reprep	估计测量输出概率/采样输出分布	典型对齐 BQP；精确振幅/精确计数对象可与 $\#\mathrm{P}$ 联系	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	“量子态空间指数大”体现在资源轴更换而非跳转轴上移
后选择（L7a）+ Post	条件化计算：在后选择分支上读出答案	典型对齐 PP	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	视作“模型级资源增强”；不改变可判定性但改变资源边界
Deutsch-CTC（L7b）+ CTC	固定点/自洽条件求解	典型对齐 PSPACE	Δ^0_1	一般不需要二阶量词	作为“全局一致性约束”提升算力的计算模型图景
MH/supertask（L8）+ MH	“在有限时间内观测无限计算” $\Rightarrow$ 停机式判定	超越经典资源轴刻画	自然对齐 $\mathbf{0}'$（停机神谕）及更高跳转的讨论入口	若进一步量化“集合/策略”可与更高层模板类比	该行是从资源复杂度转入“不可判定程度”分层的典型入口，且高度依赖物理可实现性假设

维度一：复杂度类（Complexity Class）

维度一.0：族记号总表

族/记号	直觉定义（尽量标准）	常用子类/别名	备注
$\mathrm{DTIME}(f(n))$	确定性 TM 在 $O(f(n))$ 时间内决定	$\mathrm{P} = \bigcup_k \mathrm{DTIME}(n^k)$；$\mathrm{E} = \mathrm{DTIME}(2^{O(n)})$；$\mathrm{EXP} = \bigcup_k \mathrm{DTIME}(2^{n^k})$	常用“家族化”写法表达精细时间尺度
$\mathrm{NTIME}(f(n))$	非确定性时间	NP、NE、NEXP	与“压缩输入/简洁表示”常联动（Succinct 完备）

族/记号	直觉定义（尽量标准）	常用子类/别名	备注
$\mathrm{DSPACE}(s(n))$	确定性空间	$\mathrm{L} = \mathrm{DSPACE}(\log n)$；$\mathrm{PSPACE} = \bigcup_k \mathrm{DSPACE}(n^k)$；$\mathrm{EXPSPACE}$	空间层级与交互证明、策略搜索关系密切
$\mathrm{NSPACE}(s(n))$	非确定性空间	NL 等	Immerman–Szelepcsényi：$\mathrm{NSPACE}(s) = \mathrm{coNSPACE}(s)$（对 $s(n) \geq \log n$）
电路大小 $\mathrm{SIZE}(g(n))$	存在非一致电路族大小 $O(g(n))$ 决定	$\mathrm{P/poly} = \bigcup_k \mathrm{SIZE}(n^k)$	advice/非一致性板块的入口
电路深度 $\mathrm{DEPTH}(d(n))$	多项式规模且深度受限的电路族	$\mathrm{AC}^0, \mathrm{NC}^k$ 等	uniformity（如 DLOGTIME-uniform）会显著影响等价刻画
Oracle 相对化 C^A	允许在 C 的机器/电路中查询集合 A	P^{NP}、$\mathrm{BPP}^{\mathrm{NP}}$、$\mathrm{NP}^{\mathrm{NP}}$ 等	这是一个“总入口”：相对化、层级、完备性都靠它组织
Advice 类 C/poly	允许长度 $\mathrm{poly}(n)$ 的建议串 a_n（只依赖 n）	$\mathrm{P/poly}$、$\mathrm{NP/poly}$	“非一致性 vs 统一性”的主通道；与电路族等价在许多设定下成立
承诺问题 Promise-C	输入满足承诺集合 $G \cup B$，只需在 G, B 上正确	$\mathrm{BQP}, \mathrm{QMA}$ 常以承诺形式出现	与物理“实验制备/误差窗”对齐自然

> 约定：描述复杂度（FO/LFP/TC 等）通常默认在**有序结构**与相应的 **uniformity** 语境下讨论；不同文献的 uniform 细节可能影响“等价刻画”的表述方式，但不影响主干直觉。

下表默认以语言类为主；涉及计数/函数/搜索时会显式标注

维度一.1. 复杂度主类

被认为可行（Considered Feasible）

Tier 0：亚对数与极局部（Sub-Logarithmic / Local）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
NC^0	逐位局部变换：输出第 i 位仅依赖输入的常数个邻域比特	可视为“非常局部的一阶可定义性质”（此处不追求严格刻画）	常数深度、**有界扇入**电路	局部性强：每个输出位的“影响锥”大小为常数，因此无法表达需要全局聚合的性质（例如 AND_n / OR_n、Parity、Majority 等）。

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
$\mathrm{DLOGTIME}$	常用于刻画电路族 uniformity：$\mathrm{DLOGTIME}$-uniform $\mathrm{AC}^0, \mathrm{TC}^0$ 等	常与 FO 的内建算术谓词（如 BIT）联用以定义 uniform circuits	随机访问 TM / RAM（可按地址访问输入）	其常见角色是“描述复杂度/电路一致性”的约束条件，而非单纯作为“解决问题的算法类”。

Tier 1：常数深度电路（Constant Depth Circuits）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
AC^0	基本布尔聚合、加法（在常见 uniform 下可实现）	在有序结构上常写作 $\mathrm{FO}[\langle, \mathrm{BIT}]$（或等价内建算术）	多项式规模、常数深度、**无界扇入**布尔电路	经典下界：Parity 不在 AC^0。
$\mathrm{AC}^0[m]$	MOD_m 计数（如 $\sum x_i \bmod m$）	$\mathrm{FO} + \mathrm{MOD}_m$（带模数量词）	AC^0 + MOD_m 门	用于区分“模计数”能力；例如 $m = 2$ 时可表达 Parity。
ACC^0	通常可视为 $\bigcup_{m \geq 2} \mathrm{AC}^0[m]$（或允许固定常数模门的并类）	直觉上：FO 加入常数模计数能力	AC^0 + MOD_m（m 为常数）	相比 AC^0 更强；Parity 可在该框架下实现（例如包含 $m = 2$ 的情形）。
TC^0	Majority/阈值判断；整数乘法/除法（常见 uniform 下）	$\mathrm{FO} + \mathrm{MAJ}$（或 $\mathrm{FO} + \mathrm{THR}$）	常数深度、无界扇入**阈值门**电路	已知包含链常写为 $\mathrm{TC}^0 \subseteq \mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{L}$（在常见统一性设定下）。

Tier 2：对数空间与浅层并行（Logarithmic Space & Shallow Parallel）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
REG	正则语言：词法分析、固定模式匹配	$\mathrm{MSO}[\langle]$（Büchi–Elgot–Trakhtenbrot）	DFA / NFA	“语言家族—逻辑—自动机”的三者等价是该行的核心信息。

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
NC^1	Boolean Formula Value；浅层递归/分治类问题	常用电路刻画最稳：多项式规模、深度 $O(\log n)$、有界扇入电路/公式	NC^1 电路 / 布尔公式	常见包含：$\mathrm{TC}^0 \subseteq \mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{L}$。
L	无向连通性（USTCON）、确定性图遍历等	在有序结构上：$\mathrm{FO(DTC)}$	确定性对数空间 TM	经典结果：$\mathrm{SL} = \mathrm{L}$（Reingold）。
NL	有向可达性 STCON（典型 NL-complete）	在有序结构上：$\mathrm{FO(TC)}$	非确定性对数空间 TM	Immerman–Szelepcsényi：$\mathrm{NL} = \mathrm{coNL}$。
RL	单边错误的随机对数空间（可达性/随机游走型任务常作直觉例）	（通常不以 FO 刻画为主）	随机对数空间、单边错误	常见关系：$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{RL} \subseteq \mathrm{NL}$；并存在空间有界去随机化方向（如 $\mathrm{BPL} \subseteq \mathrm{SC}$）。
BPL	双边错误随机对数空间	（同上）	随机对数空间、双边错误	空间有界伪随机生成器提供 $\mathrm{BPL} \subseteq \mathrm{SC}$ 的典型表述。
UL	Unambiguous logspace：每个输入至多一条接受路径	（不强调 FO 刻画）	单值非确定性对数空间	常作为 L 与 NL 之间的结构性中间类出现。

Tier 3：并行可解与结构化归约（Parallel & Structured）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
CFL	上下文无关语言族；CFG membership（识别/解析）	（通常不作为“资源类”的标准条目）	PDA；解析算法（CYK/Earley 等）	CFL 更贴近“语言族”，若要嵌入复杂度谱系，通常使用 LOGCFL 作为资源类桥梁。
LOGCFL	可对数空间归约到 CFG membership 的语言	常见等价：$\mathrm{LOGCFL} = \mathrm{SAC}^1$（在常见 uniform 下）	logspace reduction + CFG oracle；或 SAC^1 电路	常用夹逼（直觉顺序）：$\mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{LOGCFL} \subseteq \mathrm{AC}^1 \subseteq \mathrm{NC}^2$。
SAC^1	结构化并行类（与 LOGCFL 等价视角）	（以电路刻画为主）	半无界扇入电路：OR 无界、AND 有界；深度 $O(\log n)$	常用于刻画“可并行解析/树形结构归约”的问题族。

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
AC^1	多项式规模、深度 $O(\log n)$ 的无界扇入电路可解问题	（通常以电路定义为主）	多项式规模、深度 $O(\log n)$、无界扇入电路	在常见 uniform 设定下常引用 $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{AC}^1$ 作为并行上界直觉。
NC^2	行列式、矩阵求逆等线性代数并行算法的典型落点	（以电路刻画为主）	多项式规模、深度 $O(\log^2 n)$、有界扇入电路	大量基础数值/代数子程序可落在该层或其邻域。
NC	$\bigcup_{k\geq 1} \mathrm{NC}^k$：可高效并行化的问题	（电路刻画）	多项式规模、深度 $\mathrm{polylog}(n)$、有界扇入电路	典型包含：$\mathrm{NC} \subseteq \mathrm{P}$；是否严格包含仍未知。
RNC	随机并行（代数随机化并行算法常出现）	（略）	随机 NC 电路/PRAM	用于表达“并行 + 随机化”可显著简化若干代数构造任务。
SC	多项式时间 + $\mathrm{polylog}(n)$ 空间	（略）	DTM：$\mathrm{poly}(n)$ 时间、$\mathrm{polylog}(n)$ 空间	常用作“工程可算（时间多项式）且空间较小”的抽象类；与 NC 的精确关系并不统一。
CC	Comparator circuits；稳定婚姻等问题在该模型下自然	（以模型为主）	Comparator network（比较-交换网络）	该类强调“比较门”这一受限计算原语；某些自然问题在该模型下出现完备性现象（依归约定义）。

Tier 4：多项式时间（Polynomial Time）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
P	最短路、最大流、匹配、线性规划、排序等	（有序结构上）$\mathrm{FO}+\mathrm{LFP}$（Immerman–Vardi）	DTM，多项式时间	常作为“可行计算”的标准边界（Cobham–Edmonds 论题）。
P- complete	CVP（Circuit Value Problem）、Horn-SAT、若干序贯动态规划骨干任务	（通常以归约定义为主）	P 内、对 NC 归约完备（依归约类型）	表达“并行化困难”的典型标签：若某问题在合适的 NC-归约下 P-complete，则普遍认为不太可能落入 NC。
FP	多项式时间可计算的函数问题（输出一条最短路/一个最大流解等）	P 的函数对应物	多项式时间 transducer	将“判定”扩展为“构造输出”的标准方式。
FL	对数空间可计算的函数问题（如输出某些证据/路径片段）	L 的函数对应物	logspace transducer（输出不计入空间）	常用于精细刻画“低空间可构造性”。

Tier 5：随机与量子（Randomized & Quantum）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
ZPP	Las Vegas：期望多项式时间、零错误（随机化选择等常作范式例）	（略）	Las Vegas 随机算法	等价关系：$\mathrm{ZPP} = \mathrm{RP} \cap \mathrm{coRP}$。
RP	单边错误随机类（范式性定义）	（略）	概率 TM（单边错误）	定义：$x \notin L$ 必拒；$x \in L$ 以至少 $1/2$ 概率接受。
coRP	另一侧单边错误（例如若干素性/恒等性测试的范式表达）	（略）	概率 TM（单边错误）	定义：$x \in L$ 必受；$x \notin L$ 以至少 $1/2$ 概率拒绝。
BPP	双边错误随机类；随机化图算法、数值/代数随机化任务常作例	（略）	概率 TM（双边错误）	典型上界表述：$\mathrm{BPP} \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$；是否 $\mathrm{P} = \mathrm{BPP}$ 未知。
BQP	Shor 分解、Grover 搜索、量子模拟（演化/采样）	（略）	量子电路 / QTM（有界误差）	常写包含：$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{BQP} \subseteq \mathrm{PP}$。

Tier 6：近似、计数近似与 PCP 框架（Approximation）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
NPO	NP 优化问题总类（TSP/VC/Max-Cut 的优化版等）	（略）	NP 验证 + 目标函数	近似谱系（APX、PTAS 等）的基础集合。
APX	常数比近似可解问题（Max-Cut、Vertex Cover 等为典型范式）	与 MaxSNP 等逻辑族有关联（作为背景）	常数比近似算法	PCP 理论给出大量“无 PTAS”的近似硬度结果，常以 APX-hard 形式出现。
PTAS	存在 $(1+\epsilon)$（或 $1-\epsilon$）近似的多项式时间方案	（略）	运行时间通常为 $n^{f(1/\epsilon)}$	允许对每个固定 ϵ 多项式时间，但对 $1/\epsilon$ 可能是超多项式。
FPTAS	典型：背包问题（Knapsack）等	（略）	对 n 与 $1/\epsilon$ 均多项式时间	是 PTAS 的强化版本，强调误差参数的可扩展性。

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
FPRAS	计数问题的随机近似：以高概率给出相对误差 $(1 \pm \epsilon)$ 估计	（略）	随机近似算法	常用于讨论"$\#\mathrm{P}$-型对象在特定结构条件下的可近似性"。
$\mathrm{PCP}(r, q)$	PCP 证明系统框架	（证明系统刻画）	随机验证器：用 r 个随机比特，查询 q 位	经典定理：$\mathrm{NP} = \mathrm{PCP}(O(\log n), O(1))$，是近似不可解性的重要来源。

常用包含链（概览，依 uniform/归约细节略有差异）

$$\mathrm{NC}^0 \subseteq \mathrm{AC}^0 \subseteq \mathrm{ACC}^0 \subseteq \mathrm{TC}^0 \subseteq \mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{AC}^1 \subseteq \mathrm{NC}^2 \subseteq \mathrm{NC} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{BPP} \subseteq \mathrm{BQP} \subseteq \mathrm{PP}$$

2. 被怀疑不可行（Suspected Infeasible）

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
UP	Unique-SAT 等"唯一见证"范式问题；$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{UP} \subseteq \mathrm{NP}$	直觉：存在且唯一的证据（可写作 $\exists! w\ R(x, w)$，非标准严格刻画）	Unambiguous NPTM（至多一条接受路径）	常用于讨论"唯一化"条件下的复杂度现象与归约技巧。
TFNP	保证存在解的搜索问题族（如 PPAD、PLS、PPP 等子类）	关系型定义：多项式时间可验证关系 $R(x, y)$ 且对所有 x 保证存在 y	Total search verifier	非语言类；核心张力是"存在性证明容易、构造性可能困难"。
FNP	SAT 找满足赋值、Subset Sum 找子集、TSP（搜索版）	输出 y 使 $R(x, y)$ 且 R 可多项式验证	NPTM transducer	NP 的"搜索版"；常与 FP 的关系一起讨论。
NP	3-SAT、Clique、Hamilton 回路（判定版）	$\exists\mathrm{SO}$（Fagin 定理）	NPTM（多项式时间）	"证据可验证"的核心舞台；与完备性理论强关联。
coNP	TAUT、UNSAT	$\forall\mathrm{SO}$（对偶直觉）	coNPTM（对偶验证视角）	常用直觉：反例易给，普遍正确性难证。
MA	经典证据 + 随机验证（大量承诺问题自然落在此框架）	（略）	Merlin–Arthur 协议	证据为经典串，验证允许小概率错误。
AM	公共随机源交互证明；图非同构等问题有自然协议	（略）	Arthur–Merlin 交互证明	常作为"随机挑战加强验证能力"的代表框架。
coAM	与 AM 的对偶方向；一些结构问题落在 $\mathrm{AM} \cap \mathrm{coAM}$	（略）	对偶交互证明框架	常用于表达"该问题可能不太像 NP-complete 的典型难"。
SZK	Statistical Distance、Entropy Difference 等零知识范式	（略）	Statistical Zero-Knowledge 协议	表达"可证明但不泄露信息"的统计零知识概念。

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
QMA	k-Local Hamiltonian（局域哈密顿量）为典型 QMA-complete	（略）	量子验证器（多项式量子电路）+ 量子态见证	“量子版 NP”：证据为量子态 $\lvert\psi\rangle$。
NP - complete	3-SAT、Clique、Vertex Cover、Hamilton 回路等	完备性标签（多项式 many-one 归约）	NP 内最难子集的标记	该条是“完备性标签”而非单独复杂度类。
coNP - complete	TAUT、UNSAT 等	完备性标签（归约定义）	—	同上：用于标注 coNP 中的代表性难问题。
PH	有界交替量词的 QBF；Σ_k^p/Π_k^p 完备问题	有限层量词交替的二阶逻辑直觉	有界交替 TM（固定交替次数）	若 $\mathrm{P}=\mathrm{NP}$ 则 PH 坍缩；一般认为 PH 严格分层。
$\oplus\mathrm{P}$	Parity-SAT：满足赋值数的奇偶性	（略）	计数路径 $\bmod 2$ 的 TM	用于引入“模计数信息”的判定能力；与 Toda 定理相关谱系常被同时讨论。
$\#\mathrm{P}$	$\#\mathrm{SAT}$、Permanent、配分函数的若干离散模型	计数量词/计数逻辑的直觉刻画	Counting TM（输出接受路径数）	“计数通常更难于判定”；与统计物理中的配分函数计算有自然对应。
$\#\mathrm{P}$ -complete	Permanent、$\#\mathrm{SAT}$ 等	完备性标签（计数归约）	—	解决一个典型 $\#\mathrm{P}$-complete 往往意味着大量层级在相应 oracle 下显著简化（作为复杂度直觉）。
PP	Majority-SAT（超过一半满足？）	多数/阈值型计数量词直觉（以机器定义最常用）	概率 TM（接受概率 $>1/2$）	常见包含：$\mathrm{BQP}\subseteq\mathrm{PP}\subseteq\mathrm{PSPACE}$。
IP	交互证明系统（协议族）	（协议定义）	Verifier（P）+ Prover（无限算力）交互	关键等式：$\mathrm{IP}=\mathrm{PSPACE}$。
PSPACE	QBF、Generalized Geography 等	（有序结构上）$\mathrm{FO}+\mathrm{PFP}$	DTM（多项式空间）	也常用 APTIME（交替多项式时间）等价作直觉桥梁。
PSPACE - complete	QBF、Generalized Geography、Generalized Sokoban 等	完备性标签（多项式时间归约）	—	代表“需要多项式空间（最坏情形）”的典型问题族。

TFNP 的常用子类

子类	典型问题/范式	直觉来源	备注
PPAD	计算 Nash 均衡（两人一般和博弈的若干表述）、路径端点问题	Brouwer 不动点/路径追踪	“存在性来自拓扑/不动点”，构造性常较难。
PLS	局部搜索：给定邻域与势函数，求局部最优	局部改进必停	常用于刻画“局部最优易证存在、难以快速找到”的现象。
PPP	鸽巢原理相关的总搜索	计数/鸽巢原理	与哈希碰撞等范式直觉相关。
CLS	连续局部搜索（固定点/梯度型问题的离散化范式）	连续优化/动力系统	近年常用以统一若干连续问题的复杂度表述

3. 被认为不可行（Considered Infeasible）与可计算性边界（Computability Boundary）

> 该部分同时列出“资源爆炸（时间/空间）”与“可计算性（是否停机/是否可判定）”两类概念；两者在形式上相邻，但语义不同。

复杂度类 (Class)	代表问题 / 包含关系	逻辑描述 / 定义 (Descriptive Complexity)	典型算力模型	备注
$\mathrm{EXPTIME}$	需要指数步策略搜索的博弈/验证类问题（若干推广规则下）	DTM 时间 $2^{n^{O(1)}}$	DTM（指数时间）	时间层级定理给出 $\mathrm{PSPACE} \subsetneq \mathrm{EXPTIME}$。
$\mathrm{NEXPTIME}$	Succinct-SAT 等“压缩输入”导致语义规模指数化的问题	NDTM 时间 $2^{n^{O(1)}}$	NDTM（指数时间）	常用直觉：输入以电路/压缩形式给出，使实际对象规模指数大。
$\mathrm{EXPSPACE}$	某些强逻辑可满足性、succinct 结构上的验证/可达性	DTM 空间 $2^{n^{O(1)}}$	DTM（指数空间）	指数空间通常比指数时间更强；常见包含 $\mathrm{NEXPTIME} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$。
$2\text{-}\mathrm{EXPTIME}$	某些强逻辑/形式化综合问题的典型复杂度级别	DTM 时间 $2^{2^{n^{O(1)}}}$	DTM（双指数时间）	常见于自动机理论与形式化方法中的高阶对象决策问题。
$\mathrm{ELEMENTARY}$	固定高度指数塔可解：$\bigcup_k k\text{-}\mathrm{EXPTIME}$ 的直觉并类	固定高度指数塔时间界	固定高度指数塔算法	表达“仍在某个固定塔高度以内”的可判定问题总类。
$\mathrm{NONELEMENTARY}$	需要任意高度指数塔（高度随输入增长）的可判定问题范式	超越任何固定塔高度	指数塔高度随 n 增长	表达“可判定但复杂度增长极端”的现象。
PR	原始递归全函数族；Ackermann 函数是经典不属于 PR 的例子	原始递归（函数论分级）	仅含有界递归/for-loop 的程序模型	属于可计算全函数的一部分；用于标注“增长率层级”的界限。
R	所有可判定语言（decidable / recursive sets）	算术层级：Δ_1^0	总停机 TM（对所有输入停机）	“可计算性”的核心边界：每个输入都能在有限步内给出正确 Yes/No. 绝大部分Googology大数都在这里, 但它们使用的"记号系统"却在其他维度
RE	半可判定语言（递归可枚举）：对 YES 实例停机接受	算术层级：Σ_1^0	半判定 TM（YES 停机，NO 可能不停机）	典型 RE-complete：停机问题（HALT）。
coRE	对偶半可判定：对 NO 实例停机拒绝	算术层级：Π_1^0	对偶半判定 TM	与 RE 的对偶边界常用于表达“不可判定但可证伪”的结构。

附表：过渡态A

量词层级（资源有界版本）	典型定义模板（资源有界）	典型完备问题	无界对应（维度二：算术层级）	典型跳转/神谕视角（维度二）
$\Sigma_1^p = \mathrm{NP}$	$x \in L \iff \exists w,\ \lvert w\rvert \le \mathrm{poly}(\lvert x\rvert),\ R(x,w)$，$R \in \mathrm{P}$	SAT / 3-SAT	$\Sigma_1^0 = \mathrm{RE}$: $x \in A \iff \exists t\, R'(x,t)$，$R'$ 可计算（无长度界）	“第一跳”的类比起点：$\mathbf{0}'$ 完备对象与“可验证存在性”同模板

量词层级（资源有界版本）	典型定义模板（资源有界）	典型完备问题	无界对应（维度二：算术层级）	典型跳转/神谕视角（维度二）
$\Pi_1^p = \mathrm{coNP}$	$x \in L \iff \forall w,\ \lvert w\rvert \le \mathrm{poly}(\lvert x\rvert),\ R(x,w)$（或对偶定义）	TAUT / UNSAT	$\Pi_1^0 = \mathrm{coRE}$: $\forall t\, R'(x,t)$	与 Σ_1^0 对偶；“反例不存在”式模板对齐
Σ_2^p	$\exists w_1\, \forall w_2\, R(x,w_1,w_2)$（poly 长度，$R \in \mathrm{P}$）	两层交替 QBF（$\exists\forall$）	Σ_2^0: $\exists u\, \forall v\, R'(x,u,v)$（$R'$ 等可计算）	对应 $\mathbf{0}''$ 的类比层（“二跳”）
Π_2^p	$\forall w_1\, \exists w_2\, R(x,w_1,w_2)$	两层交替 QBF（$\forall\exists$）	Π_2^0: $\forall u\, \exists v\, R'(x,u,v)$	对应 $\mathbf{0}''$ 的对偶层
Σ_k^p, Π_k^p	固定 k 次交替，量词域为 poly 长度	k 层交替 QBF	Σ_k^0, Π_k^0	类比 $\mathbf{0}^{(k)}$
$\mathrm{PH} = \bigcup_k \Sigma_k^p$	“任意固定层数的多项式见证交替”	QBF（固定交替层数）族	Δ_ω^0（算术集合总类）	“有限跳转总类”在资源有界版本上的镜像

维度一的大多数类（直到 ELEMENTARY 甚至更高）仍属于维度二的 Δ_1^0；维度二从 Σ_1^0 开始描述的是**不可判定程度**而非资源增长。

附表：过渡态B

逻辑句法模板	有限结构语义（维度一：描述复杂度）	$\mathbb{N}$ 语义（维度二/三：算术/解析层级）	备注
一阶逻辑 FO（带序/算术谓词）	AC^0（在常见 uniform 与内建算术下）	算术可定义集合（属于 Δ_ω^0 语境）	同一句法在有限结构上是“浅电路”，在 $\mathbb{N}$ 上是“算术定义”
FO + LFP（最小不动点）	P（Immerman–Vardi）	走向“归纳定义/递归闭包”的算术体系（与维度三的递归构造精神相近）	这里是“可计算闭包”直觉的接口
存在二阶 ESO（$\exists$SO）	NP（Fagin）	Σ_1^1（解析层第一层：$\exists X$）	**这是维度一与维度三最自然的桥**：二阶存在量词
二阶量词交替 SO（固定层数）	PH（二阶交替的有限结构对应）	Σ_n^1, Π_n^1（解析层的二阶交替）	这解释了“PH 与解析层在句法上是同构模板”但语义域不同

维度二 算术层级与跳转层级

维度二.1 有限算术层级

层级/复杂度	典型问题/定义	逻辑形式 (Arithmetic)	递归/跳转 (Jump)	备注
Δ_0^0（Bounded；亦写 $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0$）	有界搜索可判定性质：如 $x < y$、对给定上界 t 的“存在/全称”检查；有限窗口的数值关系	仅允许有界量词：$\exists u < t(\vec{x})$、$\forall u < t(\vec{x})$；基底谓词（原子关系）可计算	$\mathbf{0}$（无神谕）	每个具体实例都可通过有限搜索求值；运行代价与界限项 $t(\vec{x})$ 的数值规模相关（该层本质上是“有界枚举”）。

层级/复杂度	典型问题/定义	逻辑形式 (Arithmetic)	递归/跳转 (Jump)	备注
Δ_1^0（Recursive / Decidable）	可判定集合/语言：存在总停机判定程序；例如"某性质是否成立"可由总算法决定	$\Delta_1^0 = \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$（对集合）；等价于"存在总停机决定程序"	$\mathbf{0}$	作为"可判定性边界"的基准层；与"可枚举/可证伪"层形成对照。
Σ_1^0（c.e. / r.e.）	停机集合 $K = \{(e,x) : \varphi_e(x)\downarrow\}$；丢番图方程"存在解"形式的集合	$\exists t\, R(t,x)$，其中 R 为可计算谓词	典型完备度：$\mathbf{0}'$	半可判定：若 $x \in A$ 则可在有限阶段找到证据；若 $x \notin A$ 可能永不结束。
Π_1^0（co-c.e.）	非停机集合；一致性/安全性句式（"不存在某种坏证据"）的编码集合	$\forall t\, R(t,x)$，其中 R 为可计算谓词	典型完备度：$\mathbf{0}'$	可证伪结构：反例若存在通常可有限展示；证明"永远无反例"对应无穷检查。
Δ_2^0（Limit computable）	极限可计算：允许输出反复修正，但最终稳定；常见于"试错-收敛"定义的对象	$\Delta_2^0 = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$（对集合）	$A \leq_T \mathbf{0}'$（典型）	等价刻画：存在可计算近似序列 A_s，使得每个元素的隶属判断最终稳定。
Σ_2^0	典型 Σ_2^0-complete：$\mathrm{FIN} = \{e : W_e \text{ 有限}\}$；"存在某阶段后永远满足某性质"	$\exists u\, \forall v\, R(u,v,x)$	典型完备度：$\mathbf{0}''$	等价直觉：Σ_2^0 集合常可视为"相对 $\mathbf{0}'$ 的可枚举"。
Π_2^0	典型 Π_2^0-complete：$\mathrm{TOT} = \{e : \varphi_e \text{ 对所有输入停机}\}$	$\forall u\, \exists v\, R(u,v,x)$	典型完备度：$\mathbf{0}''$	常见句式是"对所有情形都能找到某个见证/界"。
Σ_3^0	典型：$\mathrm{COF} = \{e : W_e \text{ 余有限}\}$；"除有限例外外成立"的存在性表达	$\exists u\, \forall v\, \exists w\, R(u,v,w,x)$	典型完备度：$\mathbf{0}'''$	进入"元性质/几乎处处性质"更自然的层级。
Π_3^0	典型：$\mathrm{REC} = \{e : W_e \text{ 是可判定集合}\}$（索引集合形式）；更一般的"关于定义本身的分类问题"	$\forall u\, \exists v\, \forall w\, R(u,v,w,x)$	典型完备度：$\mathbf{0}'''$	对象经常是"程序/枚举/定义"的 Gödel 编码索引。
Σ_n^0（$n \geq 1$）	n 次量词交替、以 $\exists$ 开头的算术性质；出现于高阶"存在-反证-存在…"结构	$\exists x_1\, \forall x_2\, \exists x_3 \cdots Q x_n\, R(\vec{x}, y)$，$R$ 可计算	典型完备度：$\mathbf{0}^{(n)}$	常用递归论对应：Σ_{n+1}^0 等价于"相对 $\mathbf{0}^{(n)}$ 可枚举"。
Π_n^0（$n \geq 1$）	与 Σ_n^0 对偶：以 $\forall$ 开头的 n 次交替算术性质	$\forall x_1\, \exists x_2\, \forall x_3 \cdots Q x_n\, R(\vec{x}, y)$	典型完备度：$\mathbf{0}^{(n)}$	典型直觉是"全称约束下的存在性保证"。
Δ_{n+1}^0（$n \geq 0$）	"可判定于第 n 次跳转"的集合：同时具有 Σ_{n+1}^0 与 Π_{n+1}^0 描述	$\Delta_{n+1}^0 = \Sigma_{n+1}^0 \cap \Pi_{n+1}^0$	$A \leq_T \mathbf{0}^{(n)}$	与同层纯 Σ/Π 相比，更接近"可完全决定"。
相对化 $\Sigma_n^0(X), \Pi_n^0(X), \Delta_n^0(X)$	允许把集合 X 作为参数/谓词；用于统一后续的"层级+神谕"讨论	在 R 中允许出现"$u \in X$"等原子谓词（即"可计算于 X"）	典型：$\Sigma_1^0(X)$ 完备度 X'；更一般为 $X^{(n)}$	相对化使"层级上移"可等价地表述为"跳转次数增加"。

维度二.2 极限层与 ω 次跳转

层级/复杂度	典型问题/定义	逻辑形式 (Arithmetic)	递归/跳转 (Jump)	备注
Δ_ω^0（Arithmetical sets）	所有有限量词交替可定义集合（算术层级的并）	$\bigcup_{n<\omega} \Sigma_n^0 = \bigcup_{n<\omega} \Pi_n^0$（对集合）	对每个具体集合：$\exists n\, (A \leq_T \mathbf{0}^{(n)})$	"层数必须先固定，但允许任意有限层"。与解析层级的 Σ_0^1 自然对应。

层级/复杂度	典型问题/定义	逻辑形式 (Arithmetic)	递归/跳转 (Jump)	备注
$\mathbf{0}^{(\omega)}$（ω-jump）	所有有限跳转的并/联结：$\mathbf{0}^{(\omega)} = \bigoplus_{n<\omega} \mathbf{0}^{(n)}$（常用定义）	作为神谕而非单一算术公式层	$\mathbf{0}^{(\omega)}$	典型用途：统一计算"任意有限层算术事实"的真值。
$\mathrm{Th}(\mathrm{PA})$（PA 定理集）	PA 可证明算术句的集合（Gödel 编码后是集合）	c.e.：$\exists p\, \mathrm{Proof}_{\mathrm{PA}}(p, \varphi)$（形式上为 Σ^0_1 集合）	$\leq_T \mathbf{0}'$	作为"可枚举证明系统"的代表：可枚举所有定理，但不等于算术真理集。
$\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$（True Arithmetic）	标准模型中所有一阶算术句的真值集	非任何固定有限 Σ^0_n/Π^0_n；但可被 ω 次跳转统一计算	$\equiv_T \mathbf{0}^{(\omega)}$（典型表述）	作为"算术真值"的上界对象：强于任意有限跳转，但仍属于"只谈自然数、一阶语言"。
相对化真算术 $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, X)$	在语言中加入谓词 $X \subseteq \omega$ 后的一阶真值集	对 X 的一阶算术真值，仍可用有限层相对跳转统一计算	$\equiv_T X^{(\omega)}$（常用直觉）	为后续"解析/射影断言的绝对性与神谕强度"提供统一接口。

维度二.3 维度二到维度三的桥梁

层级/复杂度	典型问题/定义	逻辑形式 (Arithmetic)	递归/跳转 (Jump)	备注
可计算序数（递归序数）与 ω_1^{CK}	递归序数：存在有效记号系统的可数序数；ω_1^{CK} 为所有可计算序数的上确界	（作为对象层，而非单纯公式类）	（作为"可进行超限构造的边界"）	ω_1^{CK} 是"可计算超限递归"的自然极限点：超过它就失去统一的有效记号。
Kleene 的 $\mathcal{O}$	可计算序数的标准记号集合（"哪些自然数是合法序数记号"）	常与"良序/良基性"编码联系（典型 Π^1_1 行为）	典型为 Π^1_1-complete（与 hyperjump 同阶）	作为"从算术到共解析"的典型跃迁点：从有限跳转进入 Π^1_1 现象。
超限跳转 $X^{(\alpha)}$（ $\alpha < \omega_1^{CK}$）	对可计算序数 α 进行递归定义的跳转迭代（极限阶段取有效并/联结）	（作为递归论操作）	α 次跳转	将"有限层神谕"推广为"沿可计算良序的递归构造"，与超算术对象的生成机制一致。

层级/复杂度	典型问题/定义	逻辑形式 (Arithmetic)	递归/跳转 (Jump)	备注
Δ^1_1（Hyperarithmetic，lightface）	超算术集合：可由某个 $\alpha < \omega_1^{CK}$ 的 $0^{(\alpha)}$ 计算得到；也可表述为 $\Sigma^1_1 \cap \Pi^1_1$	二阶形式：$\Delta^1_1 = \Sigma^1_1 \cap \Pi^1_1$（lightface）	$A \le_T \mathbf{0}^{(\alpha)}$ for some $\alpha < \omega_1^{CK}$	这是"算术→解析"的最平滑过渡点：仍保留有效性，但允许可计算超限构造。
有效 Borel 编码与 "lightface Borel"	以递归方式给出 Borel 构造码（对 $\mathbb{R}$ 或 ω^ω）	（属于有效描述集合论）	与 Δ^1_1 现象高度对应	将"超算术"与"Borel 码"连起来，使二阶量词复杂性与集合构造复杂性对齐。
Hyperjump X^∇（亦常写 $\mathcal{O}^X$）	X-可计算序数的记号集合；典型为 $\Pi^1_1(X)$-complete	（共解析层自然出现）	超越所有 $X^{(\alpha)}$（$\alpha < \omega_1^{CK}$）的统一上界对象	常作为"Π^1_1 完备性"的标准参照：把良基性/序数记号难度压缩为一个神谕。
可容许序数与可容许集合（Admissible）	α 可容许 $\iff L_\alpha \models \mathrm{KP}$；$\omega_1^{CK}$ 是第一可容许序数	（集合论语义）	（与超算术边界对齐）	该行使"递归论边界"与"集合论内模型层级 L_α"直接对接，为维度四铺路。

维度三 解析层级与射影层级

为避免混淆，维度三分成四个子维度：

1. **lightface**（有效/无实参数，子集 $\subseteq \omega$）；2) **boldface**（允许实参数，子集 $\subseteq \mathbb{R}$）；3) **逆数学系统**作为模型强度轴；4) **更高阶扩展**作为通向维度四的桥。

维度三.1 解析层级 lightface

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
$\Sigma^1_0 = \Pi^1_0$（算术基底）	无二阶量词；允许任意一阶量词交替	对 ω 的算术性质（对应维度二的 Δ^0_ω）	与"算术理解"类系统自然相容（如 ACA_0 处理算术集合的闭包）	这是解析层级的"零层"：尚未引入对集合/实数的量化。

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
Δ^1_1（超算术）	$\Delta^1_1 = \Sigma^1_1 \cap \Pi^1_1$（lightface）	超算术集合；等价于“沿可计算序数进行超限递归得到的对象”	常与 ATR_0 或 Δ^1_1-CA_0 对应	作为维度二到维度三的连续桥：有效超限构造引入但仍保持“可计算序数”约束。
Σ^1_1（解析，lightface）	$\exists X\, \varphi(X, n)$，其中 φ 为算术谓词	“存在一个集合见证”的断言；典型等价：递归树是否存在无穷分支	为“任意 Σ^1_1 公式成集”通常需要较强理解（如 Σ^1_1-理解方案）	经典完备问题：递归树的“非良基性”（存在无穷路径）。
Π^1_1（共解析，lightface）	$\forall X\, \varphi(X, n)$，$\varphi$ 算术	良基性/良序性范式：递归树是否良基；良序编码是否成立	与 Π^1_1-CA_0 等强理解系统相关	Kleene 的 $\mathcal{O}$、hyperjump 等是 Π^1_1 复杂性的标志对象。
Δ^1_2	$\Sigma^1_2 \cap \Pi^1_2$（lightface）	具有双向二阶描述、相对稳定的二阶性质	与更强理解方案相关（Σ^1_2 / Π^1_2 理解）	常作为“高层二阶断言仍具可控性的一部分”出现。
Σ^1_2	$\exists X\, \forall Y\, \varphi(X, Y, n)$	“存在一个对象可应对所有对象”的结构；可表达更深层策略/对抗式存在性	需要更强理解/选择方案才可系统化处理	与射影绝对性/大基数（在 boldface 语境）存在重要联系，但此处为 lightface 版本。
Π^1_2	$\forall X\, \exists Y\, \varphi(X, Y, n)$	“对任意输入对象都能产生某个回应对象”的结构	同上	常与一致化（uniformization）、选择函数存在性等主题相邻。
Σ^1_n, Π^1_n（$n \geq 1$）	n 次二阶量词交替（以 $\exists X$ 或 $\forall X$ 起始）	二阶算术中更深的可定义性层级	对应 Σ^1_n-理解/选择等方案的强度链	lightface 层级强调“无实参数/有效性”语境；与 boldface 的语义与技术工具不同。

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
$\Sigma^1_\omega, \Pi^1_\omega$（并层）	允许任意有限次二阶交替，但层数不预先固定	“有限但不定深度”的二阶断言并类	通常不作为单一标准系统的核心对象	作为“从有限射影向更高阶算术/集合论”过渡的记号更自然。

维度三.2 射影层级 boldface 与决定性地标

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
Borel 层级 $\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha$（$\alpha < \omega_1$）	通过可数并/交与补集的超限迭代生成	Borel 集分层；许多经典正则性性质在此层可证明	ZFC 内可系统处理	这是“构造复杂度”的层级；与超算术（有效 Borel）是两条平行梯子：一个偏语义，一个偏有效性。
$\mathbf{\Delta}^1_1$（Borel，boldface）	射影记号下的 Borel：$\mathbf{\Delta}^1_1$	Borel 集（允许实参数）	ZFC 足以处理	需与 lightface 的 Δ^1_1 区分：lightface Δ^1_1 是“超算术”，boldface $\mathbf{\Delta}^1_1$ 是“Borel”。
$\mathbf{\Sigma}^1_1$（Analytic，boldface）	可写作 $\exists X\, \varphi(X, x)$，$x$ 为实数参数；也等价于 Borel 的投影	解析集：投影、连续像、存在路径等结构	ZFC 下解析集具备多种正则性（可测性、Baire 性、完美集性质等）	“投影”是射影层级的生成机制之一；该层的许多基础结论属于经典描述集合论核心。
$\mathbf{\Pi}^1_1$（Co-analytic）	解析集的补集；全称实量词范式	良基性/良序/秩函数等主题自然落在此附近	ZFC 下仍可开展大量结构理论	许多“良基性判定”是 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 典型范式。
$\mathbf{\Sigma}^1_2, \mathbf{\Pi}^1_2$	两层实量词交替：$\exists X \forall Y$ / $\forall X \exists Y$	更复杂的存在性/对抗式结构；开始与绝对性与独立性更紧密	在 ZFC 中大量具体断言会出现模型依赖	低层射影断言常出现强绝对性现象（见 Shoenfield）。
Shoenfield 绝对性（定理地标）	适用于 $\mathbf{\Sigma}^1_2/\mathbf{\Pi}^1_2$ 形式的语句（带实参数）	给出“低层射影真值在多种良好模型间稳定”的机制	作为 ZFC 中的重要元定理	常用于解释：为什么许多低层射影命题在强迫扩张/内模型间保持不变。
$\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n$（$n \geq 3$）	更深射影层级	与尺度（scales）、一致化（uniformization）、正则性与决定性等主题强关联	许多“正则性全覆盖”结论通常需额外公理（如决定性或大基数）	在 ZFC 单独框架下，高层射影集合的统一结构性质往往不可完全决定。

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
$\mathbf{\Delta}^1_n$（射影"温和"部分）	$\mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$	同层双向可定义的部分，通常更接近"可控"子类	依赖背景公理（如决定性）可获得更强结构定理	在决定性框架下，$\mathbf{\Delta}^1_n$ 往往表现出类 Borel 的良好性质。
PD（Projective Determinacy）	"所有射影集合对应的无限博弈均决定"	推出射影集合广泛正则性：可测性、Baire 性、完美集性质、尺度等	一致性强度通常与 Woodin 基数家族相关（相对一致性语境）	PD 是连接"射影层级结构理论"与"大基数/内模型"的典型桥梁。
AD 与 $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$（决定性轴）	决定性公理（一般与 $\neg\mathrm{AC}$ 相伴）	实数集极强规整性；常在 $L(\mathbb{R})$ 等环境中研究	一致性强度很高；与多 Woodin 基数等假设密切相关	把"描述集合论的正则性图景"推到极限的一条路线；常作为维度四的核心分支之一。

维度三.3 逆数学系统作为模型强度轴

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
Q	一阶语言 $0, S, +, \times$；有限公理；**无归纳公理**（定理集可枚举）	最弱的常用算术基底之一；足以进行基本算术推演与可表征性/编码讨论	极弱；弱于任何含非平凡归纳的算术片段	Robinson Arithmetic（Robinson 1950）
RFA	一阶算术弱系统；以"rudimentary functions（初等集合论中的基本封闭运算）"的全性/闭包为核心（常在扩展语言中呈现）	用于刻画非常弱的可构造运算闭包与弱归纳环境下的算术可证明性	典型证明论序数常标为 ω^2	常被用作 $I\Delta_0$ 附近的对照弱系统
$I\Delta_0$	一阶语言 $0, S, +, \times$；归纳公理限制为 Δ_0（有界量词）公式	"有界算术/弱归纳"范式；适合研究弱算术与复杂度/可证明全函数的对应	典型证明论序数常标为 ω^2	通常不含"指数函数全性"公理（与 $I\Delta_0 + \exp$ 区分）
PA	一阶语言 $0, S, +, \times$；对任意一阶公式的全归纳	标准一阶皮亚诺算术	典型证明论序数为 ε_0	常作为 ACA_0 的一阶强度参照（在保守性语境下）
RCA_0	二阶语言；Δ^0_1-理解 + 受限归纳（常取 Σ^0_1-归纳）	"可计算数学"基底：只承认可计算集合的存在性闭包	很弱；逆数学常用底座	与维度二"可计算/可判定"直觉对齐

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
WKL_0	RCA_0 + 弱柯尼希引理（无限二叉树有无穷路径）	紧致性/存在性地标（Heine–Borel 等大量等价命题的落点）	强于 RCA_0，但仍较弱	典型“五大系统”之一
ACA_0	RCA_0 + 算术理解（对任意算术公式 $\varphi(n)$ 成集）	获得全部算术集合；与有限跳转闭包直觉相连	典型证明论序数为 ε_0	常视为 $(\Pi^1_0\text{-CA})_0$
ACA	ACA_0 + 二阶语言**全归纳**	在 ACA_0 基础上强化归纳强度（更接近“全二阶算术的算术部分”）	强于 ACA_0（同一集合存在性但归纳更强）	记号“去 0”通常表示加入全归纳
$\mathrm{ACA} + \mathrm{BI}$	ACA +（相应层次的）Bar Induction（BI）公理模式	将“良基树上的归纳/反证式构造”系统化，常用于与高阶递归/函数解释衔接	强于 ACA；强度依 BI 的精确定义层次而变	在证明论与函数解释中常用作中间桥梁
$\Delta^1_1\text{-CR}$	二阶语言；加入 Δ^1_1 **comprehension rule**（理解“规则”版本：由 Σ^1_1/Π^1_1 等价推出集合存在）	以“可证明的 Σ^1_1 与 Π^1_1 等价定义”生成集合；常比对应的 Δ^1_1-CA 弱	典型强度介于 ACA_0 与 $\Delta^1_1\text{-CA}_0$ 一类系统之间（按文献设定）	“CR vs CA”区分：规则版通常弱于公理模式版
$\Delta^1_1\text{-CA}_0$	对 Δ^1_1 公式给出理解（成集）	形成“超算术集合”层面的集合存在性闭包	介于 ACA_0 与 ATR_0 之间的常见中间地标	该系统把“超算术桥”在二阶系统中形式化
$\Delta^1_1\text{-CA}$	$\Delta^1_1\text{-CA}_0$ + 二阶语言全归纳	在同一集合存在性原则下提升归纳强度	强于 $\Delta^1_1\text{-CA}_0$	“去 0”同上：强化归纳而非改变理解层级
ATR_0	算术超限递归：沿可数良序对算术算子做超限递归构造	支撑大量 Borel/序数递归/层级构造相关论证	强于 ACA_0；典型“五大系统”中高阶地标	与“超算术/可计算序数”主题高度对应
ATR	ATR_0 + 二阶语言全归纳	在 ATR_0 的递归构造能力上加强归纳	强于 ATR_0	常用于证明论比较中与 ATR_0 对照
FTR_0	固定点超限递归（fixed point transfinite recursion）的受限归纳版本：允许对适当算子形成（迭代的）最小不动点并做超限递归	用于形式化“归纳定义/不动点构造”的超限迭代	通常强于 ATR_0 邻域的系统（取决于算子类与归纳限制）	在证明论中与“迭代引入不动点/归纳定义理论”紧密相关

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
FTR	FTR_0 + 更强归纳（或更强算子类/迭代允许）	更充分地表达不动点与超限递归的交互构造	强于 FTR_0	具体强度依文献对"允许的算子/良序编码"的设定而变
$\Pi^1_1\text{-}\mathrm{TR}_0$	在 RCA_0 基础上加入 Π^1_1 层次的超限递归（transfinite recursion）原理	允许沿良序对更高复杂度定义（到 Π^1_1）进行递归构造	强于 ATR_0；属于"超越五大系统"的常见增强路线	常与迭代归纳定义/可容许集合论片段发生对应（视具体形式化）
$\Pi^1_1\text{-}\mathrm{TR}$	$\Pi^1_1\text{-}\mathrm{TR}_0$ + 二阶语言全归纳	在相同递归原理下加强归纳	强于 $\Pi^1_1\text{-}\mathrm{TR}_0$	同上
$\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}_0$	对任意 Π^1_1 公式给出理解（成集）	系统化处理 Π^1_1 级对象（良基性、归纳定义等）	明显强于 ATR_0；证明论序数常以塌缩函数表示	典型证明论结果：$(\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA})_0) = \psi_{\Omega_1}(\Omega_\omega)$
$\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}$	$\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}_0$ + 二阶语言全归纳	在同一理解层级下加强归纳	强于 $\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}_0$	典型证明论结果：$(\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}) = \psi_{\Omega_1}(\Omega_\omega \cdot \varepsilon_0)$
$\Delta^1_2\text{-}\mathrm{CR}$	加入 Δ^1_2 comprehension rule（更高射影层的"规则版"理解）	比 Π^1_1 理解更强的集合存在性生成机制之一	证明论强度显著高于 $\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}$ 邻域的一部分系统；典型序数以塌缩函数刻画	SEP 典型结果：$(\Delta^1_2\text{-}\mathrm{CR}) = \psi_{\Omega_1}(\Omega_{\omega^\omega})$
$\Delta^1_2\text{-}\mathrm{TR}_0$	加入 Δ^1_2 层次的超限递归（TR）原理（受限归纳版本）	允许沿良序对更高复杂度算子进行递归定义/构造	强于对应的 Δ^1_2 comprehension 片段（视具体形式化）	常用于刻画"更高阶递归构造"而非仅成集
$\Delta^1_2\text{-}\mathrm{TR}$	$\Delta^1_2\text{-}\mathrm{TR}_0$ + 二阶语言全归纳	同一 TR 原理下加强归纳	强于 $\Delta^1_2\text{-}\mathrm{TR}_0$	同上
$\Pi^2_1\text{-}\mathrm{CA}_0$	对任意 Π^2_1 公式给出理解（成集）	进入更高射影层的强理解公理；常作为"逼近 Z_2"的上层台阶	极强；与可容许集合论/大基数背景下的绝对性议题常有关联（视研究路径）	证明论分析通常比 Δ^1_2 级显著更困难
$\Delta^1_3\text{-}\mathrm{CA}_0$	对任意 Δ^1_3（即 $\Sigma^1_3 \cap \Pi^1_3$）公式给出理解（成集）	更高层的"温和（双向可定义）"理解片段	极强；位于高阶射影理解链上	常与 Σ^1_3/Π^1_3 的绝对性与选择原则相互作用
$\Delta^1_3\text{-}\mathrm{CA}$	$\Delta^1_3\text{-}\mathrm{CA}_0$ + 二阶语言全归纳	同一理解层级下加强归纳	强于 $\Delta^1_3\text{-}\mathrm{CA}_0$	同上
$\Sigma^1_3\text{-}\mathrm{AC}$	Σ^1_3-选择：从 $\forall n, \exists X, \varphi(n, X)$（$\varphi \in \Sigma^1_3$）抽取选择函数/序列	统一化与选择函数存在性在更高射影层的形式化	强度很高；常与高阶理解/递归原理联合讨论	"AC"在这里是二阶算术中的选择模式（非 ZFC 的全局 AC）
$\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_0$	Σ^1_1-选择（从存在性断言中抽取选择函数）	与一致化、选择函数、结构化构造相邻	常与 ATR_0 等搭配出现	作为选择原则的补充系统化工具

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
Z_2	全二阶理解：对任意二阶公式 $\varphi(n)$ 存在集合 $n:\varphi(n)$	二阶算术的“分析上界”：把所有自然数子集（可编码实数）都作为对象	一致性强度低于 ZFC（可由 ZF/ZFC 解释）	常作为从二阶算术走向集合论（维度四）的接口

维度三.4 更高阶延伸

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
Σ^1_ω（射影并层）	允许任意有限层射影量词结构（层数不固定）	作为“有限射影全体”的并类记号	非单一标准公理系统中心对象	常用作从“有限射影”走向“更高阶算术/集合论”的过渡语汇。
三阶算术 Z_3	允许量化“实数的集合”（第三阶对象）	描述“集合的集合”的分析结构；更接近集合论的 $V_{\omega+2}$ 视角	强于 Z_2；与集合论片段关系紧密	是维度三向维度四过渡的自然提升：对象从“实数”升到“实数的集合”。
有限阶算术 Z_n（$n\geq 2$）	第 n 阶量化（逐级提升对象类型）	逐级逼近集合论的秩层级思路	强度随 n 提升	把“分析宇宙”按类型层级展开，可作为维度三到维度四的连续梯子。
$Z_\infty = \Pi^\infty_0\text{-CA}$	L^ω（有限阶类型）并层：允许任意有限阶量词（对自然数、实数、实数的集合、…）的公式 $\varphi(n)$，对每个此类公式断言存在集合 $X\subseteq\omega$ 使 $n\in X\leftrightarrow\varphi(n)$（即“对有限阶公式的理解/成集”）。	作为“有限阶算术（所有 Z_n）的并/极限系统”：统一刻画“允许任意有限阶对象参与定义”的集合存在性闭包；常用作比较从二阶算术 Z_2 向更高阶算术与集合论片段过渡的上界标尺。	严格强于每个固定的 Z_n（$n\geq 2$）；可在集合论的低秩段语义化（通常与若干 $V_{\omega+n}$ / $V_{\omega+\omega}$ 视角相关），整体强度明显低于完整 ZFC，但足以表达大量高阶分析与可定义性闭包现象。	记号与精确定义在不同文献中可能有差异（“Π^∞_0-CA”有时强调对有限阶语言中无界/有界量词的不同限制）；在表格中更适合作为“所有有限阶理解的并类/极限接口”而非单一标准逆数学系统。

层级/系统	逻辑形式 (Analytical)	典型问题 / 含义	一致性 / 模型强度	备注
广义描述集合论（κ^κ 上）	将 Borel/射影等概念推广到不可数基数背景（如 κ^κ、$\mathcal{P}(\kappa)$）	“更大基数上的 Borel/射影/决定性”主题	与大基数与强迫技术高度耦合	这是“射影之后的自然延伸”：把描述集合论从可数世界推广到更大基数。
高阶绝对性与决定性纲领	把“哪些语句在扩张/内模型间保持稳定”系统化	连接强迫、内模型、射影绝对性、决定性	常需要大基数背景	该方向在维度四中通常以“强迫公理/内模型纲领/决定性纲领”出现。

维度四 集合论宇宙与大基数

维度四.1 从二阶算术到集合论的结构桥

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
V_ω（遗传有限集，HF 视角）	只包含遗传有限对象	足以形式化大量有限组合与计算结构	很低（相对 PA/PRA）	作为“尚未进入完成无穷”的集合论秩段地标。
$V_{\omega+1} = \mathcal{P}(\omega)$	加入 ω 的幂集（实数/自然数子集）	与二阶算术的对象域高度对齐	低于 ZFC	是 Z_2 的自然语义背景：二阶对象可视作 $\mathcal{P}(\omega)$ 。
H_{ω_1}（HC，遗传可数集）	所有遗传可数对象	支撑“可数结构的集合论化”；许多分析对象自然在此出现	低于 ZFC	描述集合论中大量对象可在 HC 语境编码，形成三→四过渡的自然栖息地。
$L_{\omega_1^{CK}}$（第一可容许层）	ω_1^{CK} 为第一可容许序数；$L_{\omega_1^{CK}}$ 满足 KP 的核心片段	把超算术/可计算序数现象嵌入 L_α 层级	低于完整 ZFC	这是“超算术 Δ^1_1 ↔ 可容许集合论”的经典对接点。
一般可容许 L_α（Admissible）	α 可容许 $\iff L_\alpha \models \mathrm{KP}$	将递归论/描述集合论中的层级构造转写为内模型层级	随 α 提升	在维度二.3 的“超限递归”与维度四的“内模型/秩层级”之间提供统一语言。

维度四.2A 集合论主干系统与类理论

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
Z（Zermelo 集合论）	分离 + 幂集；通常不含替换（Replacement）	足以发展大量经典分析与基础集合构造	低于 ZFC（通常视作更弱）	缺少替换会限制“沿任意函数推进层级构造”的能力。
KP（Kripke–Platek）	Δ_0-分离 + 收集/集合（受限）；强调可容许性	与递归论、可容许层 L_α 关系紧密	通常弱于 ZF/ZFC	是“可容许集合论/有效层级构造”的标准公理基底。
ZF$^-$（去掉部分公理，如替换或幂集）	以缺替换/缺幂集等方式弱化 ZF	用于刻画“缺少全幂集/全替换”的宇宙	$\leq$ ZF（依删去内容）	常用于分析哪些结果依赖幂集或替换。
ZFC$^-$（常指无幂集或无替换的 ZFC 片段）	在 ZF$^-$ 上加入 AC 或保留 AC 片段	保留选择但削弱层级推进能力	$\leq$ ZFC	在“二阶算术/HC 与集合论片段”的对接中常出现。
ZF	标准集合论公理（不含选择）	现代数学常用基底之一	基准	与决定性、公理化描述集合论常在无 AC 背景更自然。
ZFC	ZF + 选择公理 AC	主流数学常用基底；强迫与大基数的默认舞台	基准（含 AC）	许多独立性现象（CH 等）以 ZFC 为参照框架。
GBC / NBG（类理论弱版本）	集合 + 类；类理解受限；常配合 Global Choice	便于表达“所有序数”“可定义类函数”等全局构造	通常与 ZFC 相近（保守/相对解释语境）	常作为集合论工作语言扩展；避免把“类”当成集合处理的技术负担。
KM（Kelley–Morse / MK 类理论）	强类理解（对类的理解更自由）	可在体系内部谈更强的真值/反射结构	通常强于 GBC/NBG 与 ZFC	与“真值谓词/反射/强类对象”相关的论证更自然落在此处。

维度四.2B 平行基础路线

系统 / 宇宙 (Universe)	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
NFU（New Foundations with urelements）	分层理解/类型化限制；允许“全集”式结构	与 ZFC 路线不同的集合论替代宇宙	与 ZFC 不呈简单线性强弱关系；存在相对一致性研究	作为“非 ZFC 主链”的平行宇宙分支呈现更清晰。
HoTT / UF（含 Univalence 等）	类型论基础；可加入高阶归纳类型等	结构主义基础；可形式化大量数学	强度依所加公理包而定；常通过相对解释比较	更适合作为“基础框架族”而非 ZFC 大基数链条上的一个台阶。

维度四.3 内模型与可定义性宇宙

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
L（可构造宇宙）与 $V = L$	L 为内模型；$V = L$ 强化“所有集合可构造”	可定义性极强；许多独立命题在 L 中取定值	$\mathrm{Con(ZFC)} \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + V = L)$	常用于提供“最小/最可控”宇宙基准；与强大基数存在性常相冲突。
$0^\#$（零尖）	表示 L 之外存在不可构造结构的典型对象	反映 $V \neq L$ 的强信号之一	强于单纯 ZFC（作为额外假设）	常作为“内模型理论”与“大基数迹象”的早期里程碑对象。
HOD	遗传序数可定义对象形成的内模型	聚焦“可定义性与选择/连续统问题”	作为内模型不提升一致性强度	在研究可定义性、强迫后 HOD 行为等问题时常出现。
$L(\mathbb{R})$	由实数与序数生成的内模型	决定性、射影结构与正则性的重要舞台	强度依赖背景（常与 Woodin 基数/AD 关联）	描述集合论中许多“决定性公理”自然在该环境讨论。

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
核模型 K 与 mice（迭代内模型）	在缺少更强大基数时的“最大可构造”内模型框架	用内模型逼近大基数结构，建立相对一致性与精细结构	与所容纳的大基数强度相匹配	作为“内模型纲领”的核心技术体系，连接决定性、绝对性与大基数。

维度四.4 强迫公理与决定性公理

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
ZFC + CH / ZFC + ¬CH	连续统假设取不同真值	改变实数基数与相关结构命题	均相对 ZFC 可一致	作为“强迫独立性”的最典型分叉点。
MA（Martin's Axiom）	一类 c.c.c. 强迫的统一存在性/稠密集相交原则	提高实数结构的规整性（同时与 ¬CH 常并用）	强于 ZFC（相对一致性语境）	作为强迫公理梯子上的早期地标。
PFA（Proper Forcing Axiom）	proper 强迫上的强公理	提供强组合/反射结论	一致性通常需要大型基数背景（相对一致性）	常与“更强的实数结构定值与反射现象”相联系。
MM（Martin's Maximum）	更强的强迫公理族	更强的反射与结构定值	一致性强度通常更高	常作为“强迫公理路线”的高端地标。
PD（射影决定性）	射影集合博弈决定	射影集合获得强正则性结构	与 Woodin 基数家族相联系（相对一致性）	描述集合论中把“射影世界”规整化的核心公理方案。
AD（决定性公理）	全体实数集的博弈决定（通常与 $\neg\mathrm{AC}$ 相容）	极强正则性结论	很强（多在 $L(\mathbb{R})$ 等环境）	作为“决定性路线”的极端端点之一。
强绝对性纲领（generic / projective absoluteness）	强化“某些语句在强迫扩张间不变”的原则	连接大基数、内模型与强迫	常需大基数背景	常与 Woodin 基数与内模型纲领共同出现，形成“稳定真值”的路线。

维度四.5 大基数阶梯

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
ZFC + Inaccessible	存在不可达基数 κ；常有 $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ 直觉	作为“宇宙封闭段”与 Grothendieck 宇宙的抽象来源	强于 ZFC	大基数梯子的常用起点：提供可做“局部 ZFC 宇宙”的秩段。
ZFC + Mahlo	存在 Mahlo 基数	更强反射与闭包现象	$>$ Inaccessible	体现“反射强度提升”的第一批典型里程碑。
ZFC + Weakly Compact	弱紧基数（树性质/不可描述性等价刻画）	与紧致性、树性质、不可描述性关联	通常 $>$ Mahlo	兼具多个等价刻画，常被用作“逻辑紧致性与组合性质”的桥。
ZFC + Ramsey（代表强组合层）	Ramsey 基数等强组合性质	强组合/分割性质	通常 $>$ Weakly Compact	可作为“weakly compact → measurable”之间的平滑中间台阶。
ZFC + Measurable	可测基数：存在 κ-完备非主超滤子；亦与初等嵌入图景相关	引入测度/初等嵌入结构	显著强于前述层级	measurability 与 $V = L$ 不相容（在可构造宇宙中不存在可测基数）。
ZFC + Strong	强基数（初等嵌入覆盖更大秩段）	嵌入覆盖的范围增强	$>$ Measurable	用“嵌入覆盖范围”刻画更平滑，避免依赖某一种等价定义细节。
ZFC + Superstrong（可选平滑台阶）	比 strong 更强的嵌入覆盖	更强嵌入结构	$>$ Strong	常用于在 strong 与 supercompact 之间加细分层。
ZFC + Woodin（有限/可数多个）	Woodin 基数家族	控制射影绝对性、决定性与内模型结构的关键对象	强（随数量增加而增强）	与 PD、$L(\mathbb{R})$ 中的强结构定理密切相关。
ZFC + Supercompact	超紧基数	极强反射/紧致性；强迫与结构定值的重要支点	非常强	许多强迫公理（如 PFA/MM）的相对一致性常以此为背景。
ZFC + Extendible / Vopěnka（高反射端）	可扩张基数、Vopěnka 原理等	更强“全局反射/范畴论式”原则	通常 $\geq$ Supercompact	常用于把“范畴论/全局结构原则”纳入大基数链条。
ZFC + Huge（家族）	huge 等极强嵌入性质	极端强嵌入结构	极强	常被视为 ZFC+AC 框架内极高端区域之一。

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
Rank-into-Rank（$I3, I2, I1, I0$）	存在 $j : V_\lambda \to V_\lambda$ 等局部自嵌入（强度递增）	进入“嵌入公理极限区”	已知相容假设中非常靠上	不同 In 的技术细节差异很大，表格中以“强度递增的家族”呈现更稳健。

维度四.6 无选择背景下的极端嵌入假设

系统 / 宇宙	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
Reinhardt（需 $\neg\mathrm{AC}$）	非平凡初等嵌入 $j : V \to V$（放弃 AC）	“全宇宙嵌入”级别的极端设想	在 ZFC 中不可行（Kunen 型障碍）；在 ZF 中属边界探索	作为“放弃 AC 后的极端可能性”代表对象更合适；避免把其一致性结论表述为已完全定论。
Berkeley（需 $\neg\mathrm{AC}$，更强）	Berkeley 基数等强假设（常以“对任意传递集存在自嵌入”式定义）	极强的局部自嵌入原则	极强且非主流；多用于边界研究	适合表述为“探索 ZF + ¬AC 框架极限”的标志性假设。

终章: 大一统之梦

系统 / 宇宙 (Universe)	典型公理 / 特征	逻辑阶数与能力 (Logic & Power)	一致性强度 (Consistency Strength)	备注
Ultimate-L（纲领/假设族）	目标是构造兼容大基数的“终极内模型”并给出结构定值	内模型纲领与绝对性/决定性路线的汇合点之一	非单一确定强度（研究计划性质）	更适合标注为“纲领/计划”而非已完成的公理系统。
Omni	Ω	Ω	Ω	超越任何形式和非形式系统，所有可能和不可能的逻辑与非逻辑、所有可能和不可能的宇宙。