Ασκήσεις I
Ηλεκτροστατική

ΦΥΣΙΚΗ III (PHYS113)

https://eclass.uoa.gr/courses/PHYS113/

Παραδόσεις

Δευτέρα : **13.00' – 15.00'** αμφιθέατρο **Ίππαρχος.**
Τετάρτη : **11.00' – 13.00'** αμφιθέατρο **Δημόκριτος.**
Παρασκευή: **13.00' – 15.00'** αμφιθέατρο **Δημόκριτος.**

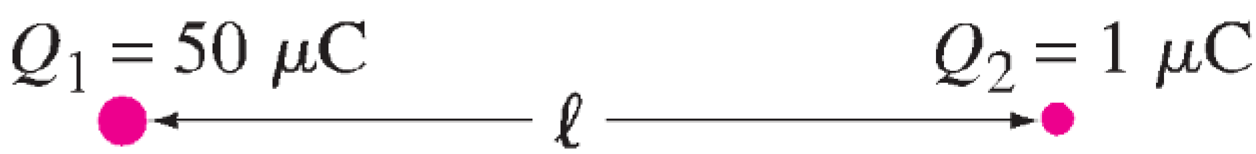
Μαργαρίτα Νίκη Ασημακοπούλου
masim@phys.uoa.gr

Μέρος Α: Νόμος του Coulomb

- Άσκηση Ι: Ποιο φορτίο ασκεί την μεγαλύτερη δύναμη;
- Άσκηση ΙΙ:Τρία φορτία σε ευθεία
- Άσκηση ΙΙΙ:Υπολογισμός ηλεκτρικής δύναμης με βάση τις συνιστώσες
- Άσκηση IV: Μηδενισμός της δύναμης
- Άσκηση V: Η δύναμη στο κέντρο κανονικών ν-πλεύρων

Άσκηση I: Ποιο φορτίο ασκεί την μεγαλύτερη δύναμη;

❖ Δύο θετικά σημειακά φορτία $Q_1 = 50\mu C$ και $Q_2 = 1\mu C$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση ℓ. Ποια δύναμη έχει μεγαλύτερο μέτρο, αυτή που ασκεί το Q_1 στο Q_2 ή αυτή που ασκεί το Q_2 στο Q_1 ;



Άσκηση Ι: Απάντηση

- Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, η δύναμη που ασκεί το Q_1 στο Q_2 είναι

$$F_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{\ell^2}$$

Η δύναμη στο Q_2 εξαιτίας του Q_1 είναι αντίστοιχα

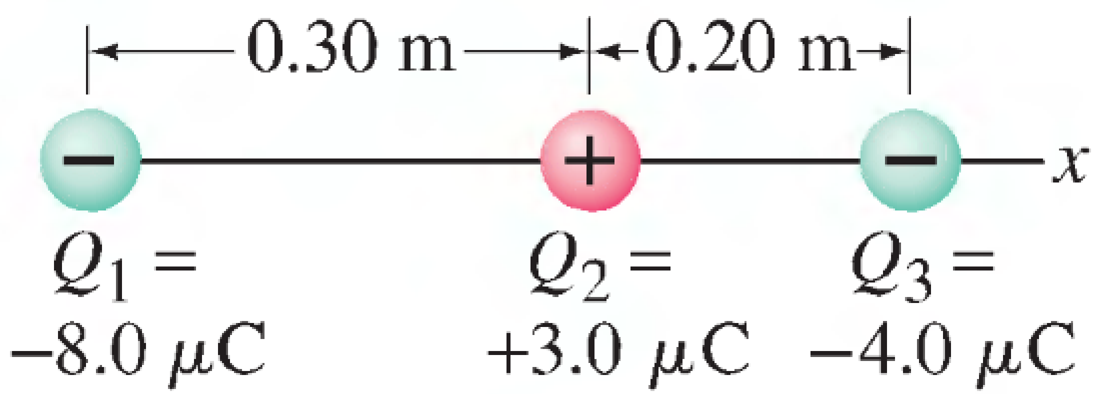
$$F_{21} = k\frac{Q_2 Q_1}{\ell^2}$$

Η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς τα δύο φορτία

$$F_{21} = F_{12}$$

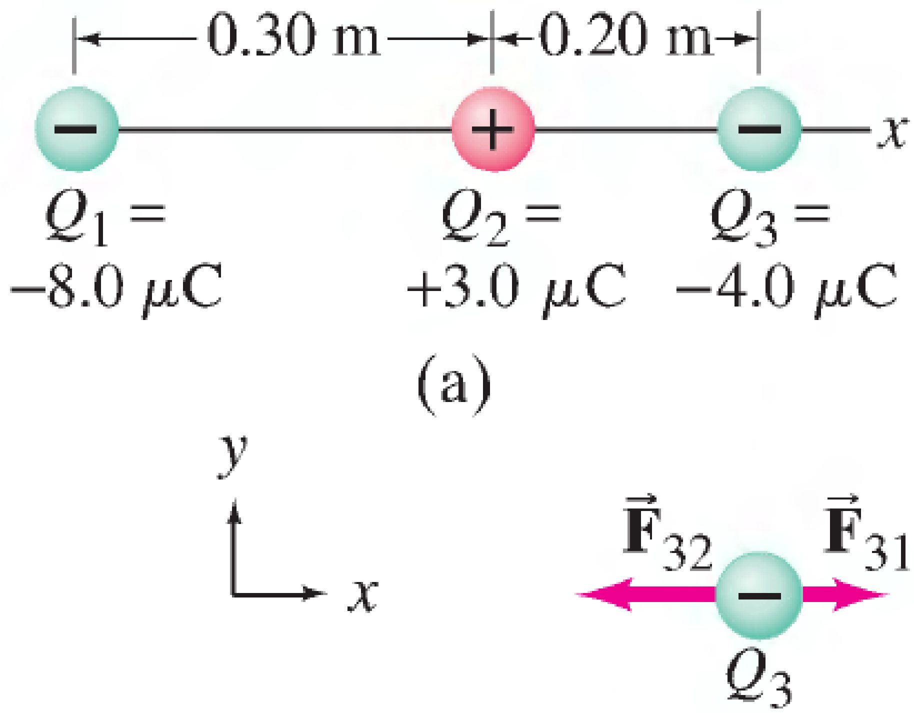
Άσκηση ΙΙ:Τρία φορτία σε ευθεία

- Τρία φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται διατεταγμένα πάνω σε μια ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε τη συνισταμένη ηλεκτροστατική δύναμη στο σωματίδιο 3 (αυτό με τιμή $-4{,}0\mu C$ στα δεξιά) εξαιτίας των υπόλοιπων δύο φορτίων.



Άσκηση II: Μεθοδολογία

•



$$\vec{F} = ?$$

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

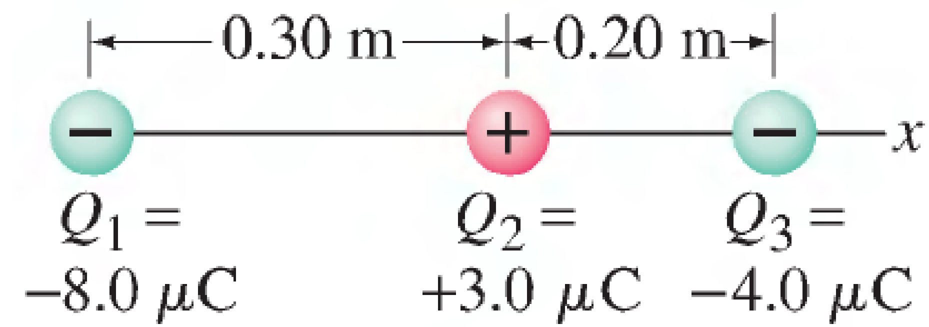
- Τα μέτρα των δύο αυτών δυνάμεων, όπως προκύπτουν από το νόμο του Coulomb είναι:

$$F_{31} = k\frac{Q_3 Q_1}{r_{31}^2} = \frac{\left(9,0\times 10^9\, N\cdot m^2/C^2\right)\left(4,0\times 10^{-6} C\right)\left(8,0\times 10^{-6} C\right)}{\left(0,50m\right)^2} = 1,2N$$

Όπου $r_{31} = 0,50m$ είναι η απόσταση από το Q_3 στο Q_1. Ομοίως

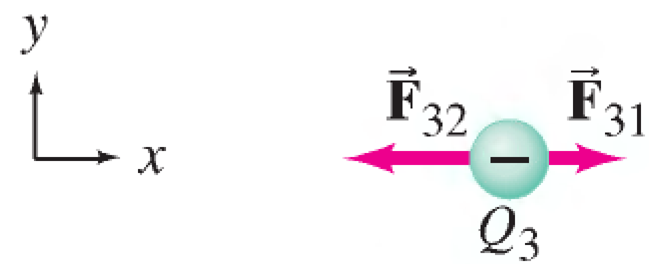
$$F_{32} = k\frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} = \frac{\left(9,0\times 10^9\, N\cdot m^2/C^2\right)\left(4,0\times 10^{-6} C\right)\left(3,0\times 10^{-6} C\right)}{\left(0,20m\right)^2} = 2,7N$$

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση



- Κατεύθυνση Συνισταμένης Δύναμης

επειδή η x είναι απωστική & η $\vec{F}_{31}$ ελκτική, οι κατευθύνσεις των δυνάμεων είναι αυτές που δίνονται στο σχήμα:



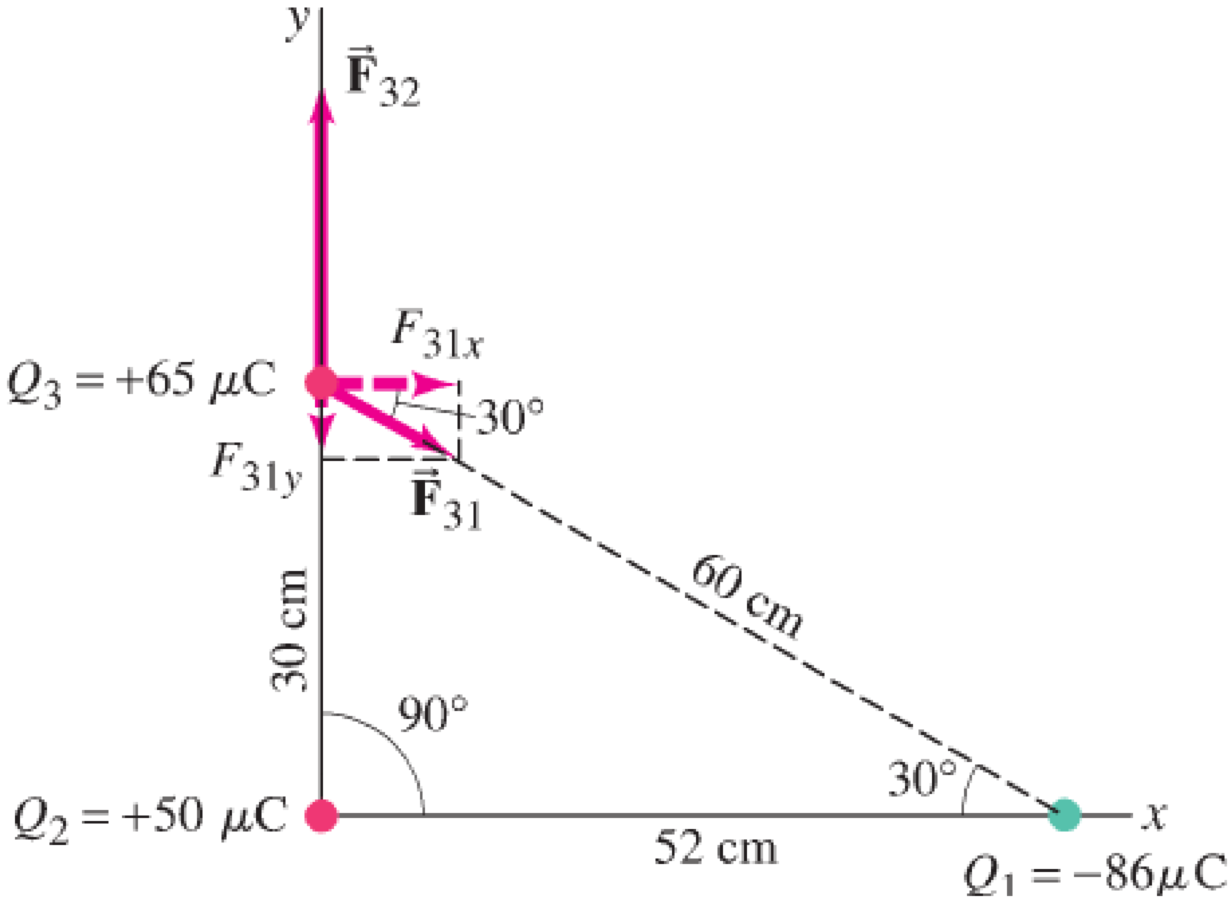
$\vec{F}_{32}$

Η $\vec{F}_{31}$ έχει φορά προς τα θετικά του x και η $\vec{F}_{32}$ προς τα αρνητικά του x . Η συνισταμένη δύναμη στο σωματίδιο 3 ισούται τότε με

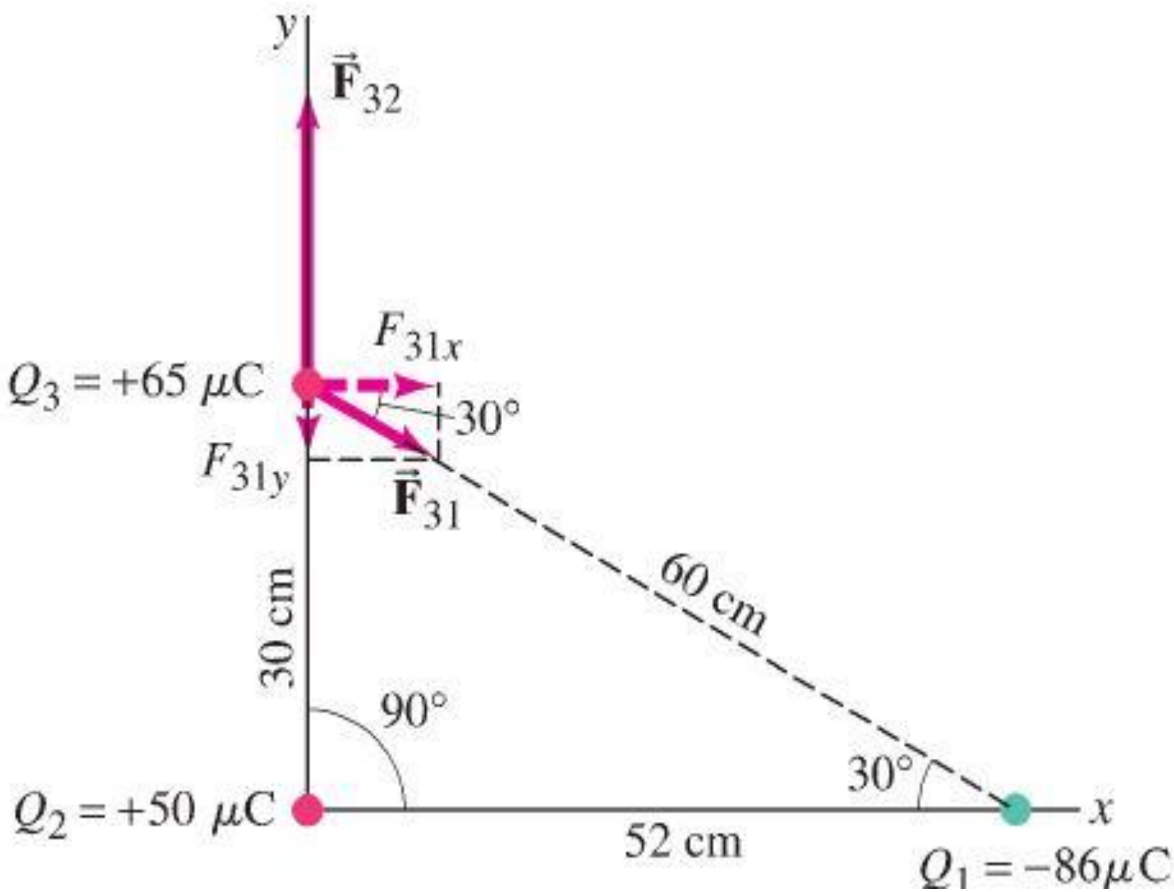
$$F = -F_{32} + F_{31} = -2,7\text{N} + 1,2\text{N} = -1,5\text{N}$$

Άσκηση III:Υπολογισμός ηλεκτρικής δύναμης με βάση τις συνιστώσες

- Υπολογίστε τη συνισταμένη ηλεκτροστατική δύναμη στο φορτίο Q_3, εξαιτίας των φορτίων Q_1 και Q_2



Άσκηση ΙΙΙ: Μεθοδολογία



Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

- Τα μέτρα των $\vec{F}_{31}$ και $\vec{F}_{32}$ είναι

$$F_{31} = k\frac{Q_3 Q_1}{r_{31}^2} = \frac{\left(9,0\times10^9\,N\cdot m^2/C^2\right)\left(6,5\times10^{-5}C\right)\left(8,6\times10^{-5}C\right)}{\left(0,60m\right)^2} = 140N$$

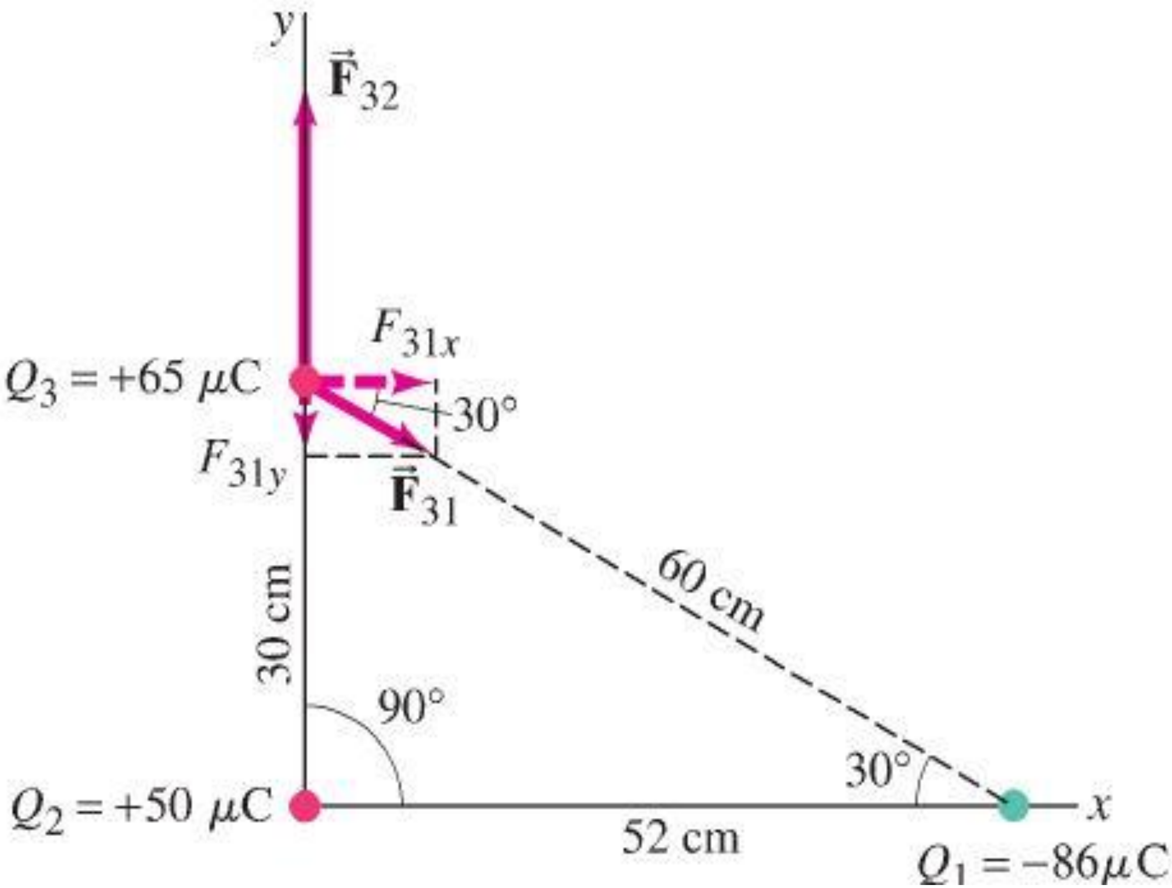
$$F_{32} = k\frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} = \frac{\left(9,0\times10^9\,N\cdot m^2/C^2\right)\left(6,5\times10^{-5}C\right)\left(5,0\times10^{-5}C\right)}{\left(0,30m\right)^2} = 330N$$

Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

Αναλύουμε την $\vec{\mathrm{F}}_{31}$ στις συνιστώσες της κατά τους άξονες x και y

$$F_{31x} = F_{31}\cos 30 = \left(140\mathrm{N}\right)\cos 30 = 120N$$

$$F_{31y} = -F_{31}\sin 30 = -\left(140\mathrm{N}\right)\sin 30 = -70N$$



Άσκηση III: Απάντηση

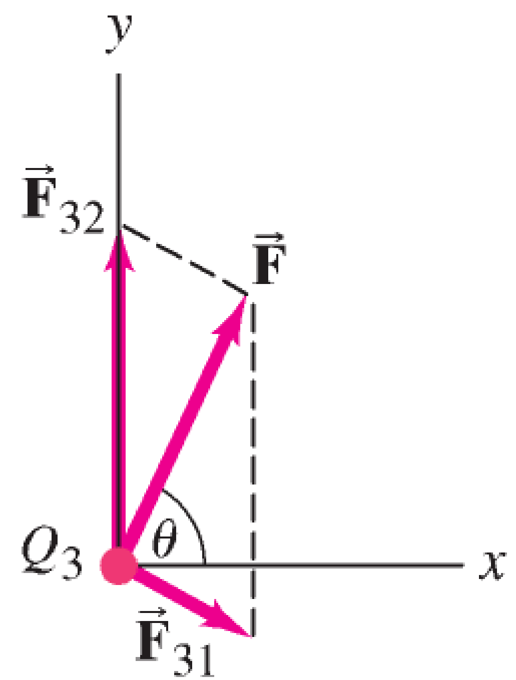
Η δύναμη $\vec{F}_{32}$ έχει μόνο y συνιστώσα. Οπότε η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ στο Q_3 έχει συνιστώσες

$$F_x = F_{31x} = 120N$$

$$F_y = F_{32} + F_{31y} = 330N - 70N = 260N$$

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(120N)^2 + (260N)^2} = 290N$$



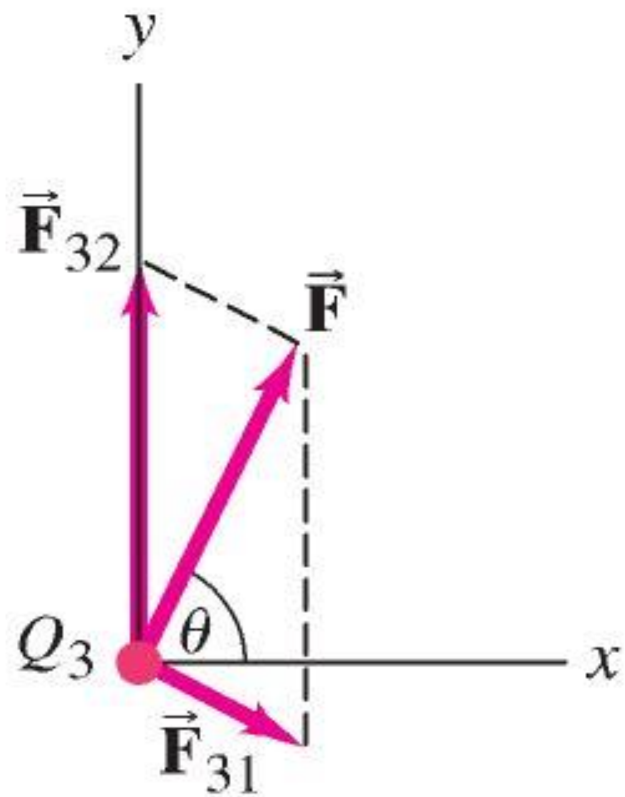
Και σχηματίζει γωνία θ που δίνεται από την

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{260N}{120N} = 2,2$$

Οπότε $\theta = \tan^{-1}(2,2) = 65°$

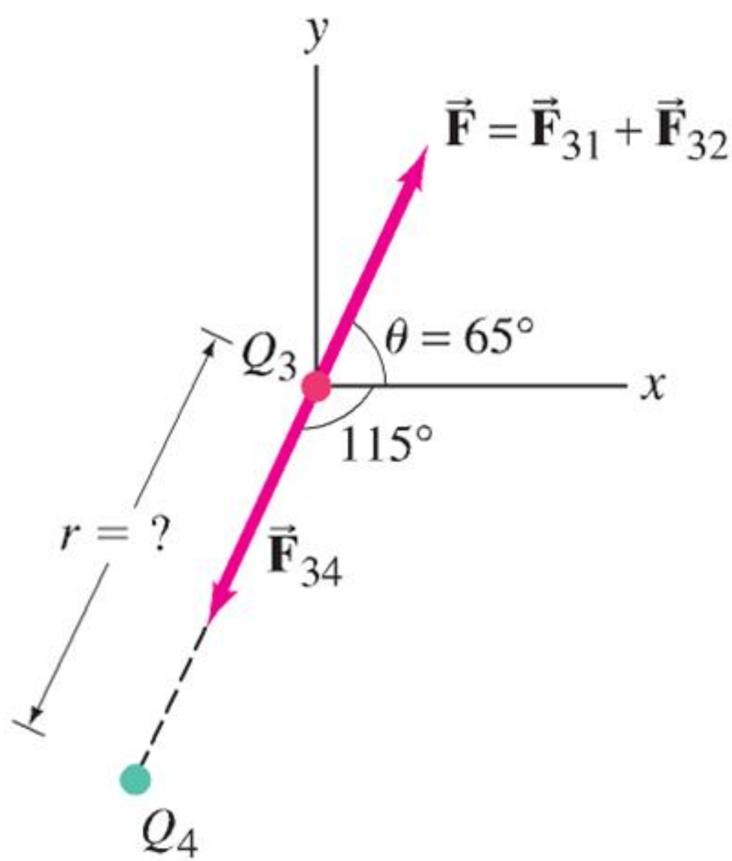
Άσκηση IV: Μηδενισμός της δύναμης

- Πού θα πρέπει να τοποθετηθεί ένα τέταρτο φορτίο $Q_4 = -50\mu C$, ώστε η συνισταμένη δύναμη στο Q_3 να είναι μηδενική;



Άσκηση IV: Απάντηση

- Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, χρειαζόμαστε μία δύναμη με κατεύθυνση ακριβώς αντίθετη αυτής της συνισταμένης $\vec{F}$ εξαιτίας των Q_2 και Q_1 που υπολογίσαμε στην προηγούμενη άσκηση [βλ. Άσκηση III]. Η δύναμη που αναζητούμε θα πρέπει να έχει μέτρο 290N και φορά προς τα αριστερά του Q_3 στο σχήμα της εκφώνησης. Οπότε το Q_4 θα πρέπει να τοποθετηθεί κατά μήκος αυτής της ευθείας, βλ.Σχ.2



Σχήμα 2

Άσκηση V: Η δύναμη στο κέντρο κανονικών ν-πλεύρων

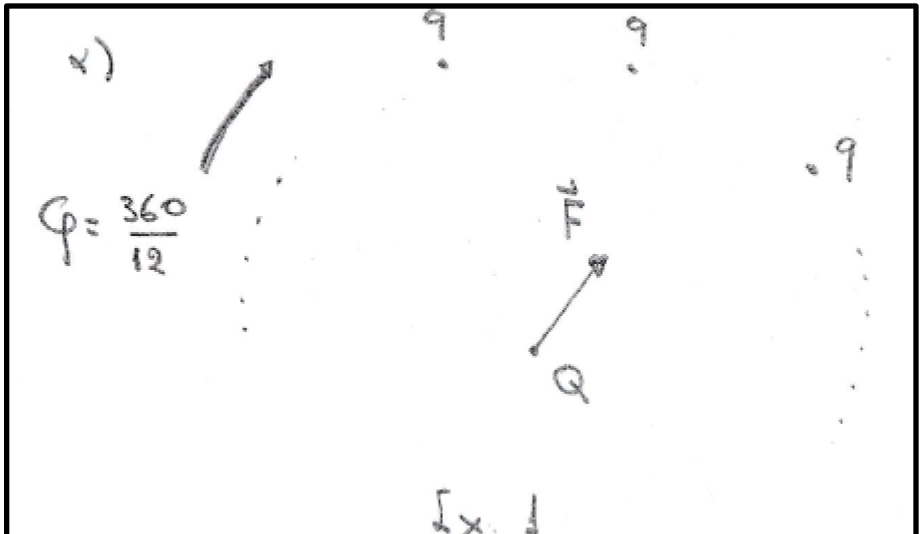
- α) Δώδεκα ίσα φορτία, q, βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού 12-πλεύρου. Ποια είναι η συνολική δύναμη σ’ένα δοκιμαστικό φορτίο Q που βρίσκεται στο κέντρο του πολυγώνου;

- β) Υποθέστε ότι ένα από τα 12 q απομακρύνεται. Ποια είναι η δύναμη στο Q;

- γ) Να επαναληφθούν τα ίδια ερωτήματα με 13 ίσα φορτία που είναι τοποθετημένα στις κορυφές κανονικού 13-πλεύρου

Άσκηση V: Απάντηση

α) Έστω ότι η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται το φορτίο Q είναι μη μηδενική. Τότε θα έχει κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση. Έστω αυτή του σχήματος 1.



Περιστρέφω το σύστημα των φορτίων κατά γωνία $\varphi = \left(\frac{360}{12}\right)^{\circ}$
Τότε,κατά την ίδια γωνία θα περιστραφεί και η συνισταμένη $\vec{F}$

Αλλά όταν το πολύγωνο περιστραφεί κατά γωνία φ έρχεται σε θέση που είναι απόλυτα ισοδύναμη με την προηγούμενη, αυτό λόγω της κανονικότητας του σχήματος και της ισότητας των φορτίων.

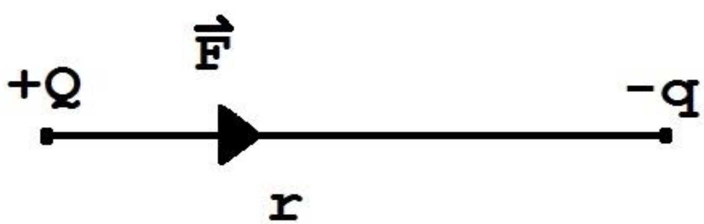
Αυτή η συμμετρία οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι το άνυσμα $\vec{F}$ πρέπει να παραμείνει αναλλοίωτο. Το οποίο είναι άτοπο εκτός κι αν το άνυσμα $\vec{F} = 0$

Πράγματι λόγω συμμετρίας, $\vec{F} = 0$

Άσκηση V: Απάντηση

β) Αν αφαιρέσουμε ένα φορτίο q από μία μόνο κορυφή τότε το αποτέλεσμα είναι αυτό της δράσης όλων των υπολοίπων πάνω στο κεντρικό Q. Τα 12 φορτία δίνουν συνισταμένη $\vec{\mathrm{F}}=0$.

Ομοίως, αν σε μία θέση έχουμε δύο φορτία $+q$ και $-q$ (όλες οι άλλες είναι κενές) πάλι θα έχουμε $\vec{\mathrm{F}}=0$. Αφαιρούμε το $+q$ τότε το αποτέλεσμα είναι αυτό που προκαλεί το φορτίο $-q$



$$\boxed{F = k\,\frac{qQ}{r^2}}$$

γ) Ισχύουν ακριβώς τα ίδια για 13 ίσα φορτία, αλλά και για οποιοδήποτε σύστημα ν- ίσων φορτίων, διατεταγμένων στις κορυφές ενός κανονικού ν-πλεύρου

Μέρος Β1: Ηλεκτρικό Πεδίο Απομονωμένου Σημείου

- Άσκηση Ι: Ηλεκτρικό πεδίο απομονωμένου σημειακού φορτίου
- Άσκηση $II_α$: Το Ε από δύο σημειακά φορτία
- Άσκηση $II_β$: το Ε στη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει δύο φορτία

Άσκηση Ι: Ηλεκτρικό πεδίο απομονωμένου σημειακού φορτίου

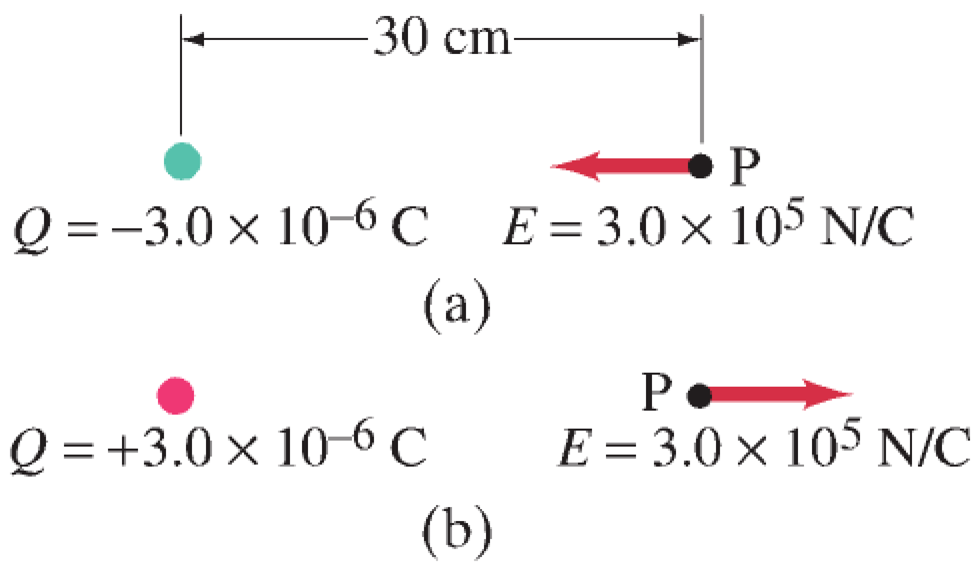
- Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο P, το οποίο απέχει 30 cm προς τα δεξιά ενός σημειακού φορτίου $Q = -3{,}0 \times 10^{-6} C$

‘Ασκηση Ι: Απάντηση

- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

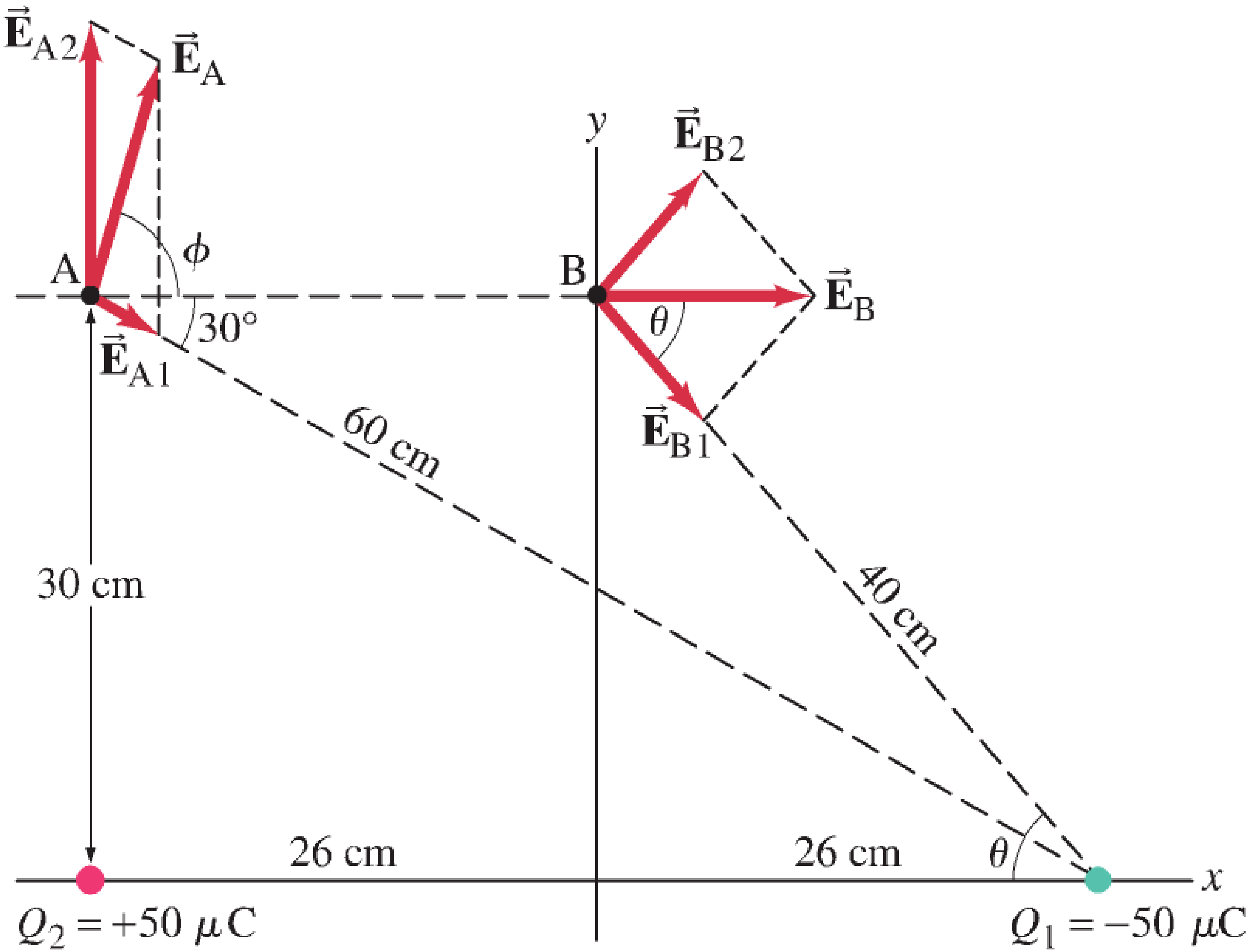
$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{\left(9{,}0\times10^9\, N\cdot m^2/C^2\right)\left(3{,}0\times10^{-6} C\right)}{\left(0{,}30m\right)^2} = 3{,}0\times10^5\, N/C$$

- Η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι *προς* το φορτίο Q.
- Εάν το Q ήταν θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο θα είχε φορά προς το άπειρο, όπως στο σχημα (b)



Άσκηση II$_\alpha$: Το E από δύο σημειακά φορτία

- Υπολογίστε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο α) στο σημείο A και β) στο σημείο B στο σχήμα, εξαιτίας και των δύο φορτίων Q_1 και Q_2



Άσκηση II$_{\alpha}$: Απάντηση

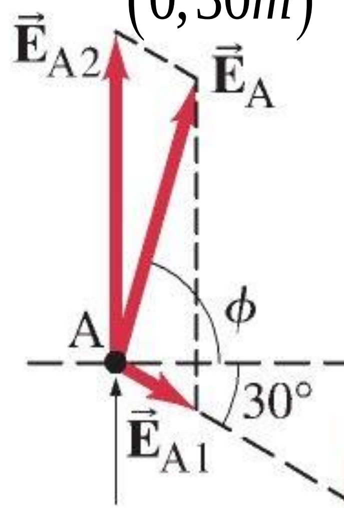
- **Μεθοδολογία**: Η προσέγγιση είναι παρόμοια με αυτήν της άσκησης III (νόμος Coulomb, σελ.9), με τη διαφορά ότι τώρα ζητείται το ηλεκτρικό πεδίο αντί της δύναμης.

Άσκηση II$_α$: Απάντηση

α) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A

$$E_{A1} = \frac{\left(9,0\times10^{9}\,N\cdot m^{2}/C^{2}\right)\left(50\times10^{-6}C\right)}{\left(0,60m\right)^{2}} = 1,25\times10^{6}\,N/C$$

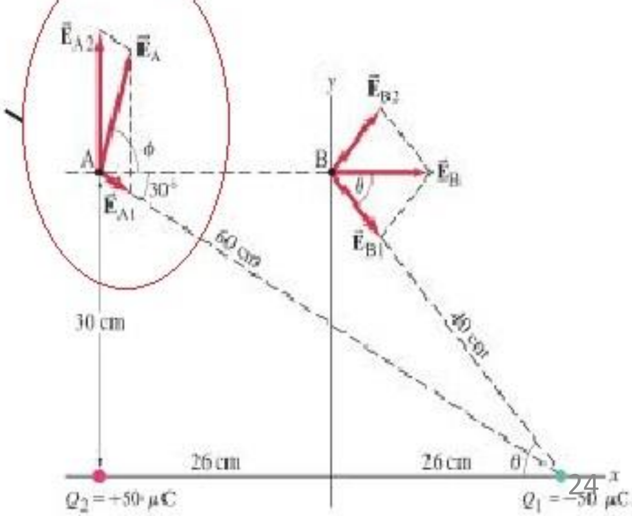
$$E_{A2} = \frac{\left(9,0\times10^{9}\,N\cdot m^{2}/C^{2}\right)\left(50\times10^{-6}C\right)}{\left(0,30m\right)^{2}} = 5,0\times10^{6}\,N/C$$



Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο A, E_A, έχει συνιστώσες:

$$E_{Ax} = E_{A1}\cos 30 = 1,1\times10^{6}\,N/C$$

$$E_{Ay} = E_{A2} - E_{A1}\sin 30 = 4,4\times10^{6}\,N/C$$



Άσκηση II_α: Απάντηση

Το μέτρο του E_A είναι $\mathrm{E}_A = \sqrt{(1{,}1)^2 + (4{,}4)^2} \times 10^6\, N/C = 4{,}5 \times 10^6\, N/C$

και η κατεύθυνση του ϕ :

$\tan\phi = E_{Ay}/E_{Ax} = 4{,}4/1{,}1 = 4{,}0$ έτσι ϕ =76°

β) Επειδή το Β ισαπέχει από τα δύο ίσα φορτία τα μέτρα των E_{B1} και E_{B2} θα είναι ίσα

$$E_{B1} = E_{B2} = \frac{kQ}{r^2} = \frac{\left(9{,}0\times 10^9\, N\cdot m^2/C^2\right)\left(50\times 10^{-6} C\right)}{(0{,}40m)^2} = 2{,}8\times 10^6\, N/C$$

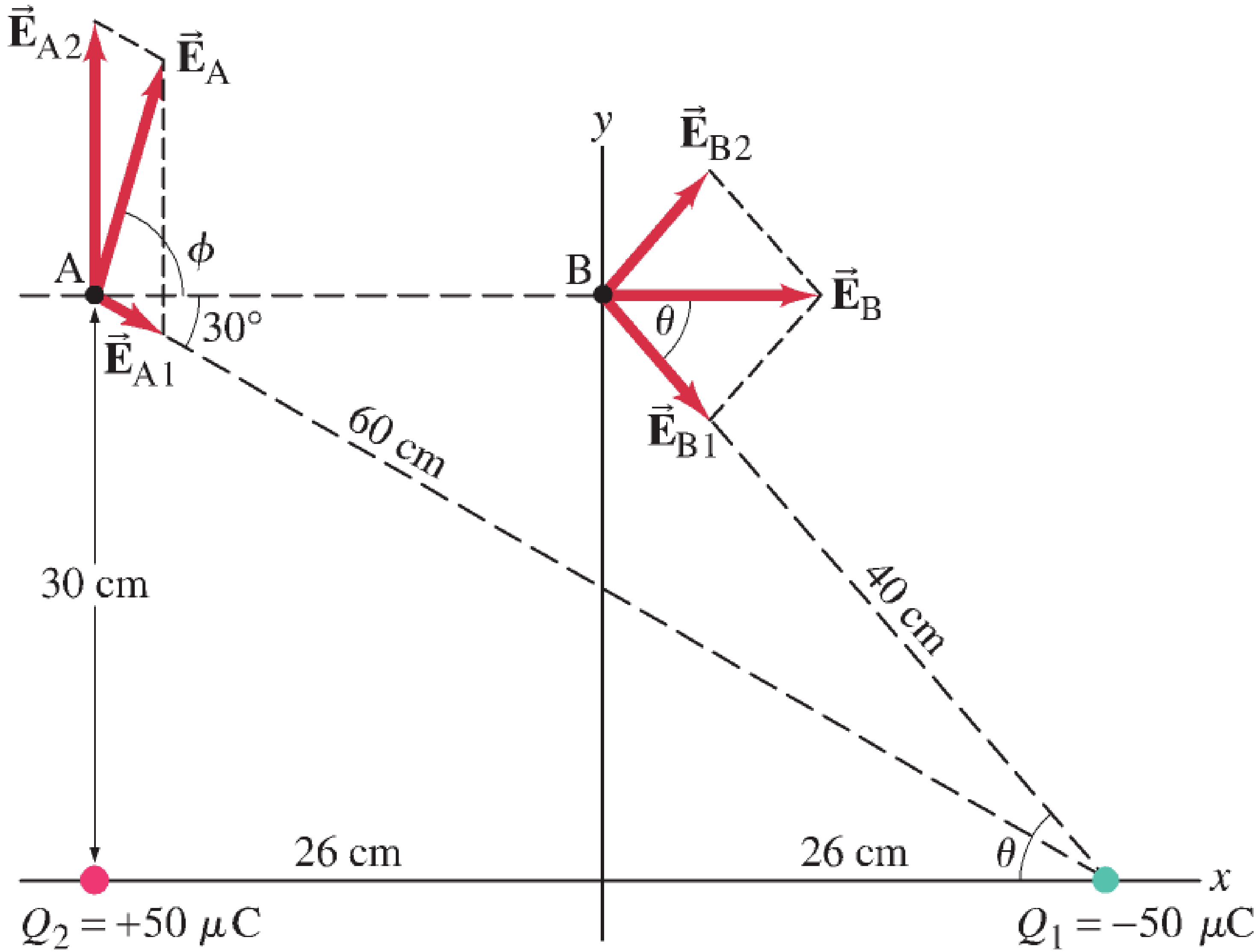
λόγω της συμμετρίας, οι y συνιστώσες είναι ίσες και αντίθετες οπότε αλληλοαναιρούνται. Το συνολικό πεδίο E_B είναι οριζόντιο και ισούται με: $E_B = E_{B1}\cos\theta + E_{B2}\cos\theta = 2E_{B1}\cos\theta$

Από το διάγραμμα, $\cos\theta = 26cm/40cm = 0{,}65$

$$E_B = 2E_{B1}\cos\theta = 2\left(2{,}8\times 10^6\, N/C\right)\left(0{,}65\right) = 3{,}6\times 10^6\, N/C$$

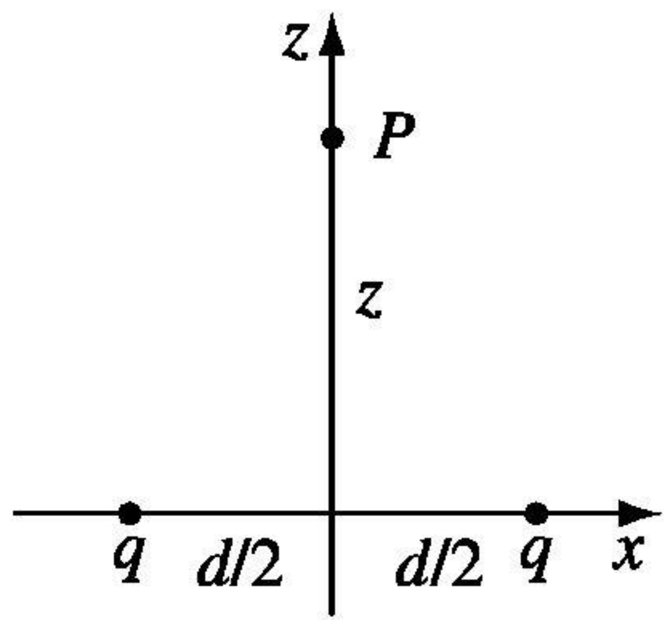
και η κατεύθυνση του E_B είναι κατά τα θετικά του $+x$.

Άσκηση II$_α$: Το E από δύο σημειακά φορτία



Άσκηση II_β: το E στη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει δύο φορτία

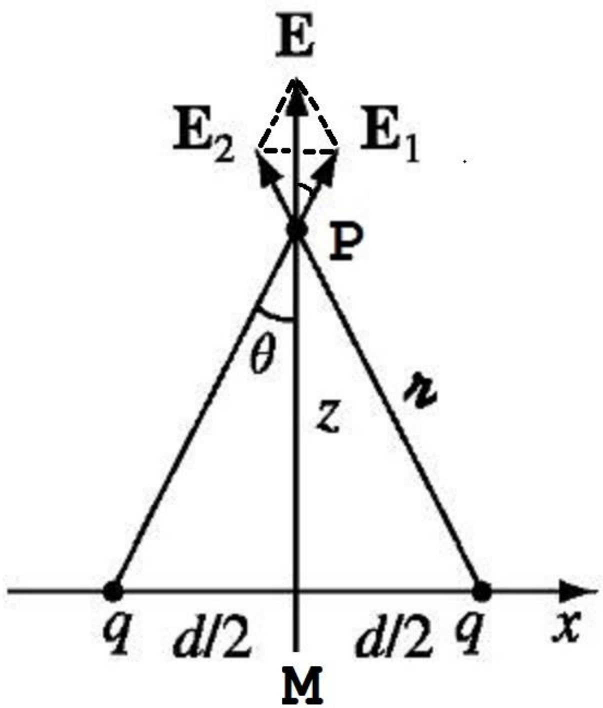
- α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z επί της μεσοκαθέτου σε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο ίσα φορτία q σε απόσταση d. Το αποτέλεσμά σας συμφωνεί μ’αυτό που περιμένετε για $z >> d$;
- β) Επαναλάβετε το ίδιο αν τα φορτία είναι αντίθετα, δηλαδή $q, -q$



Άσκηση II_β: Απάντηση

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{z^2+\frac{d^2}{4}}$$

Το PE_1EE_2 είναι ρόμβος $\Rightarrow$ $E = 2\cdot E_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 2\cdot \mathrm{E}_1\cdot\frac{z}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$



$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2zq}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}}$$

Αν $z \gg d$ τότε $(d \simeq 0)$

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2zq}{z^3} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Δηλαδή το αποτέλεσμα ταυτίζεται με αυτό που θα είχαμε αν ($z \approx d$) τα δύο ισα φορτία βρίσκονταν στη θέση M

Άσκηση II_β: Απάντηση

- β) $$E = 2 \cdot E_1 \cdot \eta\mu\theta = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2 + \frac{d^2}{4}} \cdot \frac{d/2}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qd}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}}$$