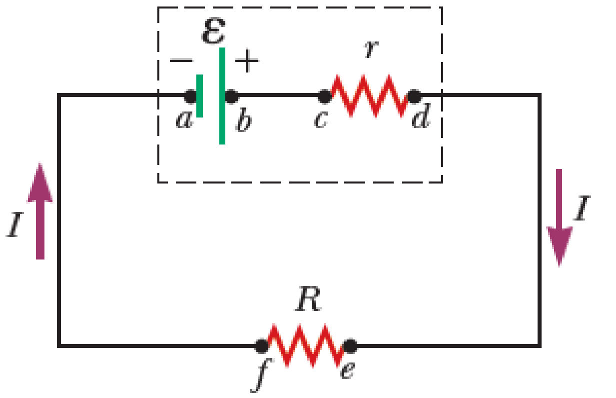
Κυκλώματα

Ηλεκτρεγερτική Δύναμη (ΗΕΔ)

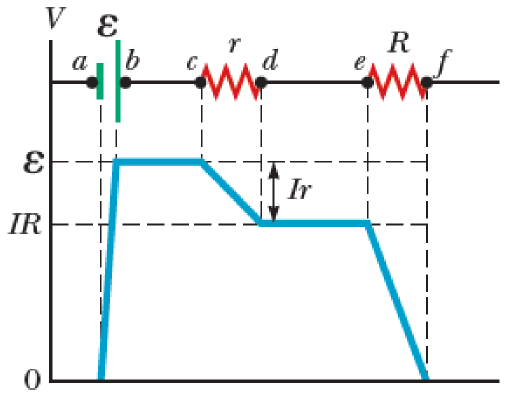


- ΗΕΔ μπαταρίας: η μέγιστη δυνατή τάση που μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα κύκλωμα

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}$$

- μονάδα μέτρησης ΗΕΔ

$$1 Volt = 1 J/C$$



- ιδανική ηλεκτρεγερτική συσκευή: καμία εσωτερική αντίσταση στην εσωτερική κίνηση του φορτίου

- πραγματική ηλεκτρεγερτική συσκευή:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir$$

$$\mathcal{E} = IR + Ir$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$$

Παράδειγμα

- Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12.0 V και εσωτερική αντίσταση 0.050 Ω. Οι ακροδέκτες της είναι συνδεδεμένοι με μια αντίσταση 3.00 Ω.

Α. Να υπολογισθεί το ρεύμα στο κύκλωμα και η τάση στους ακροδέκτες της μπαταρίας.

Β. Να υπολογισθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση και στην εσωτερική αντίσταση καθώς και η ισχύς που προσφέρεται από την μπαταρία.

ΛΥΣΗ:

Το ρεύμα στο κύκλωμα

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\text{V}}{3\Omega + 0.05\Omega} = 3.93\text{A}$$

Τάση ακροδεκτών

$$\Delta\text{V} = \mathcal{E} - Ir = 12V - (3.93\text{A} \cdot 0.05\Omega\ ) = 11.8V$$

Έλεγχος αποτελέσματος μέσω του υπολογισμού της πτώσης τάσης στην αντίσταση

$$\Delta\text{V} = I\text{R} = 3.93\text{A} \cdot 3\Omega$$

Ισχύς

$$\text{P}_\text{R} = I^2 R = (3.93\text{A})^2 \cdot 3\Omega = 46.3\text{W}$$

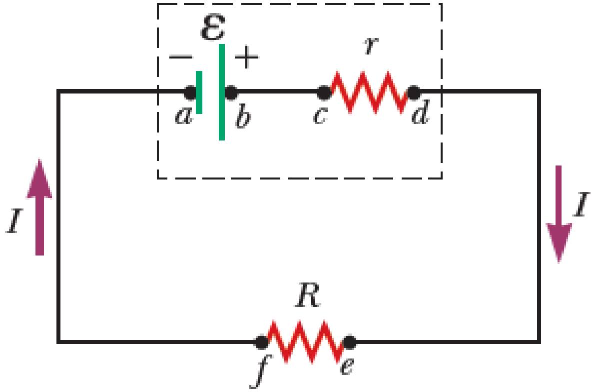
$$\text{P}_\text{r} = I^2 r = (3.93\text{A})^2 \cdot 0.05\Omega = 0.772\text{W}$$

$$\text{P} = \text{P}_\text{R} + \text{P}_\text{r} = 46.3W + 0.772W\ = 47.1W$$

Όσο η μπαταρία ‘γερνάει’, η εσωτερική της αντίσταση αυξάνει. Ας υποθέσουμε ότι η εσωτερική αντίσταση της μπαταρίας φτάνει τα 2Ω. Πως επηρεάζεται η ικανότητα της μπαταρίας να προσφέρει ενέργεια?

Παράδειγμα

Να βρεθεί η μέγιστη αντίσταση για την οποία επιτυγχάνεται κατανάλωση μέγιστης ισχύος στην αντίσταση R.



ΛΥΣΗ:

Η ισχύς στην αντίσταση $$\mathrm{P_R} = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 \mathrm{R}}{(R+r)^2}$$

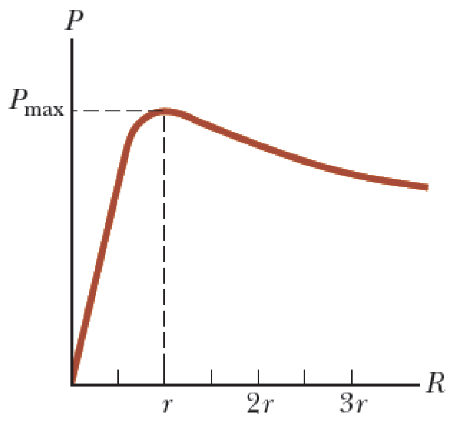
Μέγιστη Ισχύς $$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR}\left[\frac{\mathcal{E}^2 \mathrm{R}}{(R+r)^2}\right] = \frac{d}{dR}\left[\mathcal{E}^2 \mathrm{R}(R+r)^{-2}\right] = 0$$

$$\left[\mathcal{E}^2 (R+r)^{-2}\right] + \left[\mathcal{E}^2 \mathrm{R}(-2)(R+r)^{-3}\right] = 0$$

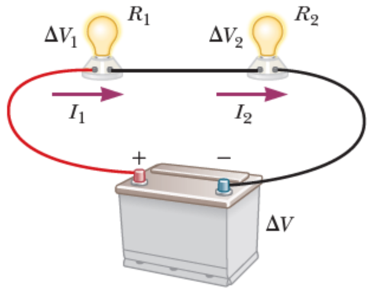
$$\frac{\mathcal{E}^2 (R+r)}{(R+r)^3} - \frac{2\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^3} = \frac{\mathcal{E}^2 (r-R)}{(R+r)^3} = 0$$

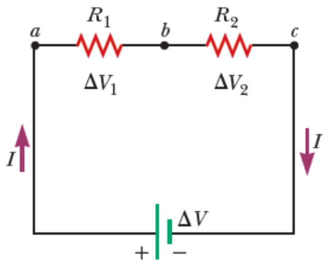
Λύνουμε ως προς R $$R = r$$

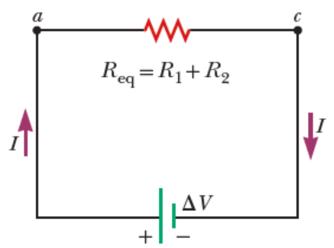
Για έλεγχο φτιάχνουμε τη συνάρτηση *P* v. *R*



Αντιστάσεις σε Σειρά







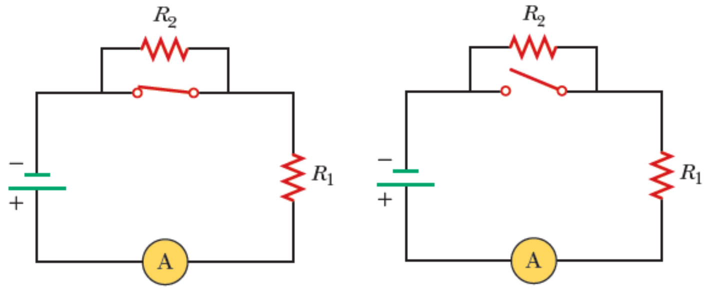
$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$$

$$\Delta\mathrm{V} = \Delta\mathrm{V}_1 + \Delta\mathrm{V}_2 = \mathrm{I}_1\mathrm{R}_1 + \mathrm{I}_2\mathrm{R}_2$$

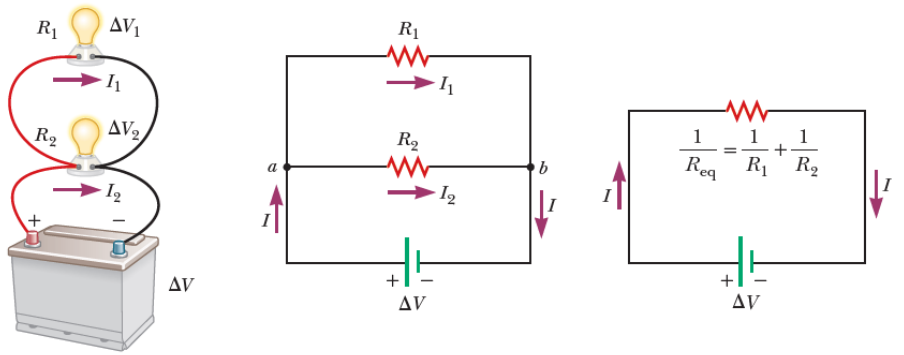
$$\Delta\mathrm{V} = I\mathrm{R}_{eq}$$

$$I\mathrm{R}_{eq} = \mathrm{I}_1\mathrm{R}_1 + \mathrm{I}_2\mathrm{R}_2 \rightarrow \boxed{\mathrm{R}_{eq} = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}$$

Με το διακόπτη του κυκλώματος κλειστό η *R*2 δεν διατρέχεται από ρεύμα (διότι το ρεύμα έχει εναλλακτική διαδρομή μηδενικής αντίστασης). Το ρεύμα που διατρέχει την *R*1 καταγράφεται από ένα αμπερόμετρο. Αν ο διακόπτης ανοίξει το ρεύμα θα περάσει από την *R*2. Τι θα συμβεί με την μέτρηση του αμπερομέτρου? **(a) Το αμπερόμετρο θα καταγράψει υψηλότερη μέτρηση. (b) Το αμπερόμετρο θα καταγράψει χαμηλότερη μέτρηση. (c) Το αμπερόμετρο δεν θα αλλάξει.**



Αντιστάσεις Παράλληλα



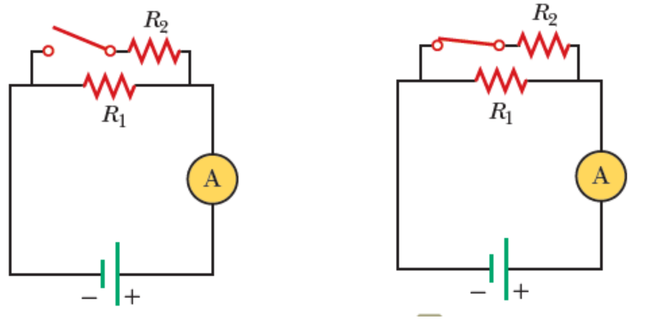
$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

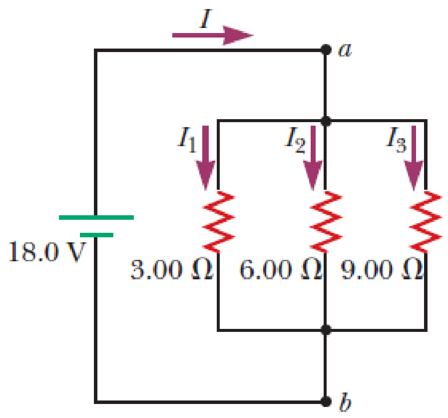
Με το διακόπτη του κυκλώματος κλειστό η *R*2 δεν διατρέχεται από ρεύμα. Το ρεύμα που διατρέχει την *R*1 καταγράφεται από ένα αμπερόμετρο. Αν ο διακόπτης ανοίξει το ρεύμα θα περάσει από την *R*2. Τι θα συμβεί με την μέτρηση του αμπερομέτρου? **(a) Το αμπερόμετρο θα καταγράψει υψηλότερη μέτρηση. (b) Το αμπερόμετρο θα καταγράψει χαμηλότερη μέτρηση. (c) Το αμπερόμετρο δεν θα αλλάξει.**



Παράδειγμα

3 αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα *a* και *b είναι* 18.0 V. Να υπολογιστούν:

- η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος,
- το ρεύμα σε κάθε αντίσταση,
- ο ρυθμός απώλειας της ηλεκτρικής ενέργειας για την κάθε αντίσταση αλλά και για την ισοδύναμη



Παράδειγμα

ΛΥΣΗ:

Α. $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{9\Omega} = \frac{11}{18\Omega} \Rightarrow R_{eq} = \frac{18\Omega}{11} = 1.64\Omega$$

Β. $$\mathrm{I}_1 = \frac{\Delta V}{\mathrm{R}_1} = \frac{18\mathrm{V}}{3\Omega} = 6A$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{\Delta V}{\mathrm{R}_2} = \frac{18\mathrm{V}}{6\Omega} = 3A$$

$$\mathrm{I}_3 = \frac{\Delta V}{\mathrm{R}_3} = \frac{18\mathrm{V}}{9\Omega} = 2A$$

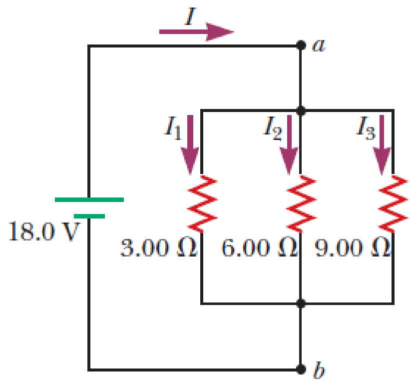
$$\mathrm{P}_1 = I_1^2 R_1 = (6\mathrm{A})^2 \cdot 3\Omega = 108\mathrm{W}$$

$$\mathrm{P}_2 = I_2^2 R_2 = (3\mathrm{A})^2 \cdot 6\Omega = 54\mathrm{W} \qquad \rightarrow \qquad P = \frac{\Delta V^2}{\mathrm{R}_{eq}} = \frac{(18\mathrm{V})^2}{1.64\Omega} = 198\mathrm{W}$$

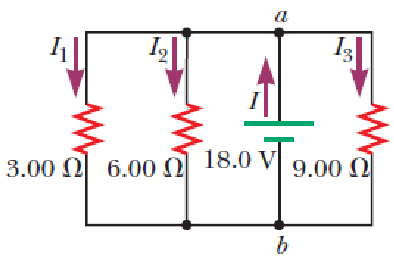
$$\mathrm{P}_3 = I_3^2 R_3 = (2\mathrm{A})^2 \cdot 9\Omega = 36\mathrm{W}$$

Παράδειγμα

Αν το κύκλωμα αποτυπωθεί όπως στο σχήμα β πως θα επηρεαστεί ο προηγούμενος υπολογισμός?



α

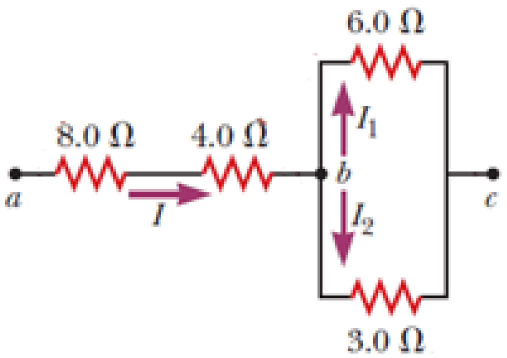


β

Άσκηση

- 4 αντιστάσεις συνδέονται όπως φαίνονται στο σχήμα. Το δυναμικό μεταξύ ων σημείων *a* και *c* είναι 42 V.

Να υπολογιστούν η ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ *a* και *c* *και* το ρεύμα σε κάθε αντίσταση



Άσκηση

Θέλοντας να γλυτώσει λεφτά ένας ιδιοκτήτης σπιτιού που θελει να εγκαταστήσει φωτάκια εξωτερικού χώρου αγοράζει φτηνό καλώδιο διαμέτρου 1mm, το οποίο έχει υψηλή αντίσταση ανά μονάδα μήκους. Το καλώδιο αυτό αποτελείται από δυο σύρματα που χωρίζονται μεταξύ τους από μονωτικό υλικό.

Απλώνει 60 μέτρα καλώδιο από την παροχή μέχρι το σημείο που θα εγκαταστήσει τα φωτάκια. Τοποθετεί φωτάκια συνδεδεμένα παράλληλα στα δυο σύρματα με απόσταση 3 μέτρα το ένα από το άλλο.

Λόγω της μεγάλης αντίστασης του καλωδίου, η φωτεινότητα των λαμπακίων δεν είναι η επιθυμητή. Ποιο από τα παρακάτω προβλήματα αντιμετωπίζει ?

(a) Όλα τα φωτάκια έχουν χαμηλότερη φωτεινότητα από την επιθυμητή? Θα φώτιζαν όλα περισσότερο αν το καλώδιο είχε μικρότερη αντίσταση?

(b) Η φωτεινότητα μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή ρεύματος.

Κανόνες του Kirchhoff

- Κανόνας κόμβων: σε κάθε κόμβο, το άθροισμα όλων των ρευμάτων που φτάνουν στον κόμβο είναι ίσο με το άθροισμα όλων των ρευμάτων που εγκαταλείπουν τον κόμβο

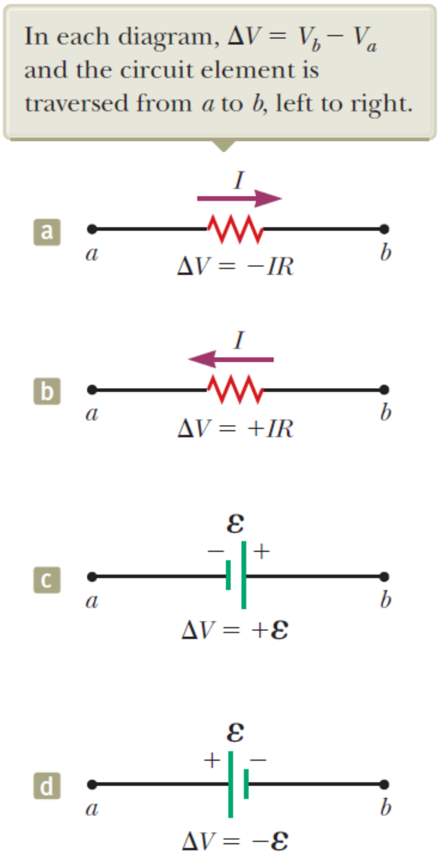
$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0$$

- Κανόνας βρόχων: το αλγεβρικό άθροισμα όλων των μεταβολών του δυναμικού κατά μήκος οποιουδήποτε κλειστού βρόχου ενός κυκλώματος ισούται με μηδέν

$$\sum_{κλειστός\ βρόχος} \Delta \mathrm{V} = 0$$

Κανόνες του Kirchhoff

Υπενθύμιση: Τα φορτία κινούνται από την άκρη υψηλού δυναμικού αντίστασης στην άκρη χαμηλού δυναμικού



- Αν η αντίσταση διατρέχεται στη διεύθυνση του ρεύματος η διαφορά δυναμικού ΔV στα άκρα της αντίστασης είναι $-IR$
- Αν η αντίσταση διατρέχεται στην αντίθετη διεύθυνση του ρεύματος η διαφορά δυναμικού ΔV στα άκρα της αντίστασης είναι $+IR$
- Αν η πηγή ΗΕΔ (υποθέτουμε μηδενική εσωτερική αντίσταση) διατρέχεται στη διεύθυνση της πηγής ΗΕΔ (από το αρνητικό στο θετικό πόλο) η διαφορά δυναμικού ΔV είναι *+ ΗΕΔ*
- Αν η πηγή ΗΕΔ (υποθέτουμε μηδενική εσωτερική αντίσταση) διατρέχεται στη αντίθετη διεύθυνση της πηγής ΗΕΔ (από το θετικό στον αρνητικό πόλο) η διαφορά δυναμικού ΔV είναι *- ΗΕΔ*

Κανόνες του Kirchhoff - Μεθοδολογία

- Σημειώνουμε τα ρεύματα σε κάθε ανεξάρτητο κόμβο του δεδομένου κυκλώματος με διαφορετικό δείκτη το καθένα. Η επιλογή της κατεύθυνσης του ρεύματος είναι αυθαίρετη.

- Καθορίζουμε τόσες εξισώσεις όσους αγνώστους εχουμε

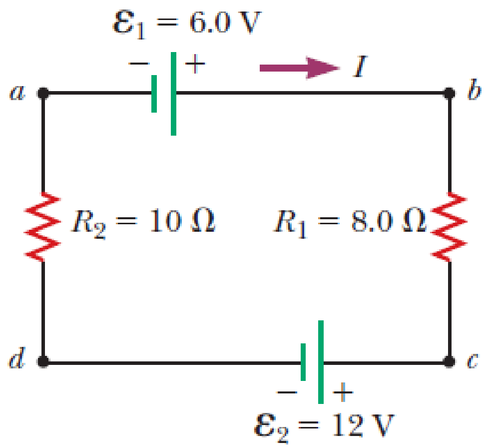
- Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Kirchhoff για τους κόμβους (έναν ή περισσότερους)

- Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Kirchhoff για τους βρόχους (έναν ή περισσότερους) – ο κάθε βρόχος διαγράφεται μόνο προς μια κατεύθυνση

- Επιλύουμε τις εξισώσεις αλγεβρικά ως προς τους αγνώστους – δίνουμε μεγάλη προσοχή στα πρόσημα – μετα την ολοκλήρωση της διαδικασίας ελέγχουμε την απάντηση με τις αρχικές εξισώσεις ή τις εξισώσεις κόμβων ή βρόχων

Παράδειγμα – Κύκλωμα με ένα βρόχο

Δίνεται κύκλωμα με δύο αντιστάσεις και δύο μπαταρίες και
αμελητέα εσωτερική αντίσταση των μπαταριών)



Να βρεθεί το ρεύμα του κυκλώματος.

Παράδειγμα

ΛΥΣΗ:

Κανόνας του Kirchhoff

$$\sum \Delta V = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

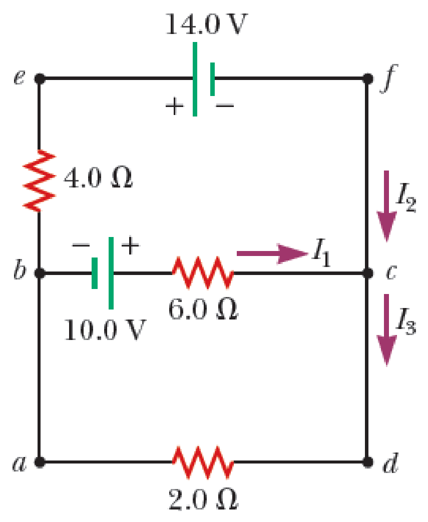
Αντίθετη διεύθυνση

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6V - 12V}{8\Omega + 10\Omega} = \boxed{-0.33\text{A}}$$

Αν αντιστρέψουμε την πολικότητα της 12.0-V μπαταρίας? Πως επηρεάζεται το κύκλωμα?

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα ρεύματα I_1, I_2, και I_3 του κυκλώματος.



Παράδειγμα

ΛΥΣΗ:

Κανόνας του κόμβων

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Κανόνας του βρόχων

$$abcda\text{:}\ \ 10V - (6\Omega)I_1 - (2\Omega)I_3 = 0$$

$$befcb\text{:}\ \ -(4\Omega)I_2 - 14V + (6\Omega)I_1 - 10V = 0$$
$$-24\text{V} - (4\Omega)I_2 + (6\Omega)I_1 = 0$$

Αντικατάσταση I_3

$$10V - (6\Omega)I_1 - (2\Omega)(I_1 + I_2) = 0$$
$$10V - (8\Omega)I_1 - (2\Omega)I_2 = 0$$

Πολλαπλασιασμός 1ης επι 4 και 2ης επι 3

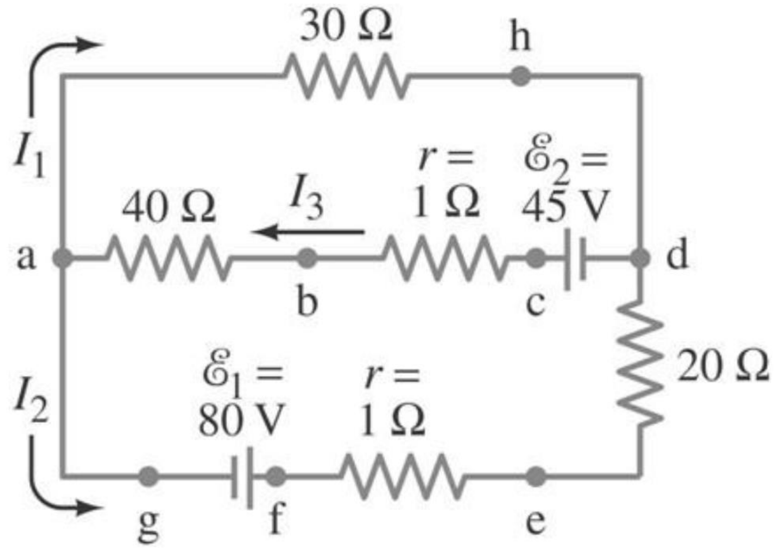
$$-96\text{V} - (16\Omega)I_2 + (24\Omega)I_1 = 0$$
$$30V - (24)I_1 - (6\Omega)I_2 = 0$$

Πρόσθεση κατά μέλη

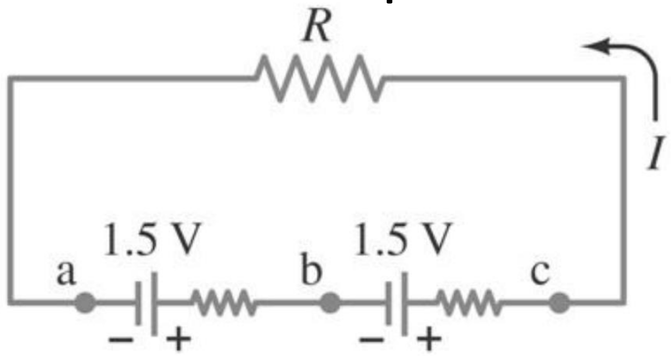
$$-66V - (22\Omega)I_2 = 0$$
$$I_2 = -3\text{A}$$
$$-24\text{V} - (4\Omega)3\text{A} + (6\Omega)I_1 = 0$$
$$I_1 = 2\text{A}$$
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 = 2\text{A} - 3\text{A} = -1\text{A}$$

Παράδειγμα

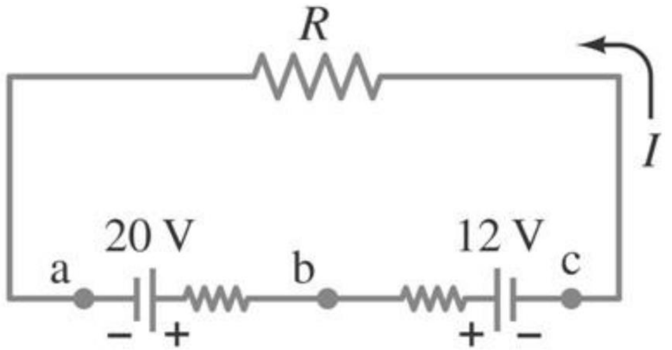
Να υπολογιστούν τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 του κυκλώματος.



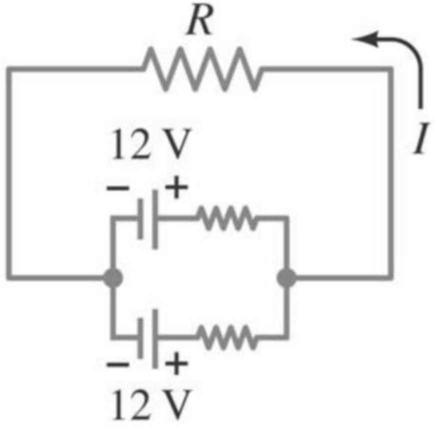
ΗΕΔ σε σειρά και παράλληλα



- ΗΕΔ σε σειρά: η συνολική τάση είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών τάσης



- ΗΕΔ σε σειρά αλλά αντίθετα: προσοχή στα πρόσημα (20V-12V=8V)



- ΗΕΔ παράλληλα: παραγωγή περισσότερης ενέργειας αν οι πηγές έχουν την ιδια τάση ακροδεκτών