

ΦΥΣΙΚΗ III
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ΜΕΣΑ ΣΕ ΥΛΙΚΑ
ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ
2019 – 2020

Ανακεφαλαίωση των εξισώσεων Maxwell

- Συνοδεύονται από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και καθορίζουν πλήρως τα H/M πεδία από τις πηγές τους.

(Θεώρημα Helmholtz: $\{\nabla \cdot \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}\} \rightarrow \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

- Συνεπάγονται την εξίσωση συνέχειας (διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ή σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_S}{dt}$$

- Μαζί με την εξίσωση **δύναμης του Lorentz** που ορίζει τα πεδία: περιγράφουν όλη την κλασική ηλεκτροδυναμική θεωρία.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Οι πηγές των πεδίων είναι χρονο-εξαρτώμενες κατανομές πυκνότητας φορτίων $\rho(\mathbf{r}, t)$ και ρευμάτων $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Μέσα στην ύλη, τα φορτία μπορούν να κινούνται είτε “ελεύθερα” (π.χ. σε αγωγούς) είτε “δέσμια” (π.χ. σε διηλεκτρικά ή μέσα στα άτομα). Οι εξισώσεις Maxwell μπορούν να γραφτούν με τέτοιο τρόπο που να διακρίνουν τις πηγές ελεύθερων φορτίων από αυτές των δέσμιων.

Εξισώσεις Maxwell μέσα σε υλικά

Στην περίπτωση των διηλεκτρικών υλικών μέσα σε πυκνωτές, είχαμε δει την αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου από τα επαγόμενα “δέσμια” φορτία να περιγράφεται από την ηλεκτρική μετατόπιση \mathbf{D} στη θέση της έντασης \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_S \quad \text{ή} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

Νόμος του Gauss με πηγή την πυκνότητα **ελεύθερου** φορτίου.
($\mathbf{j}_d = \partial \mathbf{D} / \partial t$ το ρεύμα “μετατόπισης”)

Όμοια, στην περίπτωση των μαγνητικών υλικών ορίζεται το βοηθητικό πεδίο: $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\kappa_m \mu_0}$

έτσι, ώστε:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_c$$

Νόμος Ampère-Maxwell με πηγή την πυκνότητα ρεύματος **αγωγιμότητας**.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}_c \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} & \epsilon &= \kappa_e \epsilon_0 \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu} & \mu &= \kappa_m \mu_0 \end{aligned}$$

σε “**γραμμικά**” μέσα.

Μαγνητική διπολική ροπή και στροφορμή

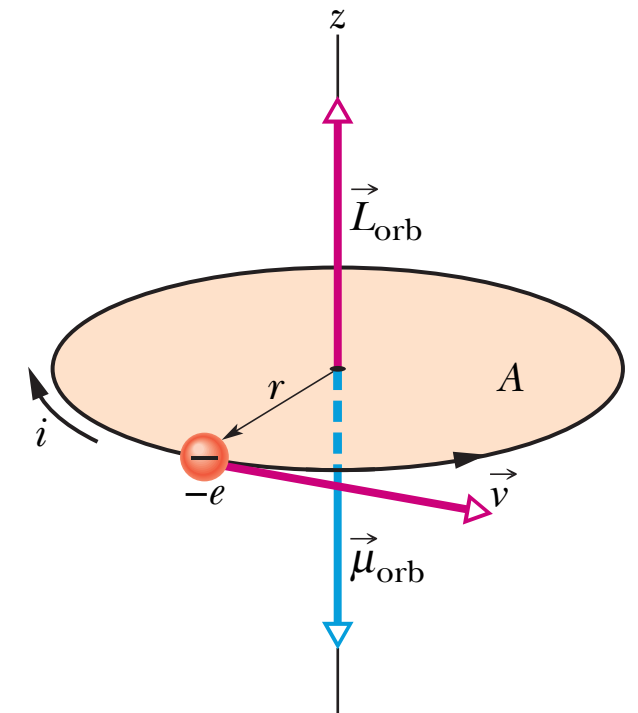
Κλασσική μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου:

$$\mu = IA = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 = \frac{e}{2\pi r/v} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (1)$$

Κλασσική τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \Rightarrow L = mvr \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \mu = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}$$



Ενέργεια του μαγνητικού διπόλου μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο: $U = -\mu \cdot \mathbf{B}$

Το πεδίο τείνει να ευθυγραμμίσει τη ροπή προς την κατεύθυνση του.

Η πραγματική τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι **κβαντισμένη** με z -συνιστώσα:

$$L_z = m_l \frac{h}{2\pi} = m_l \hbar \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad \begin{array}{l} m_l = \text{μαγνητικός κβαντικός αριθμός.} \\ l = \text{κβαντικός αριθμός τροχιακής στροφορμής.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu_z = -m_l \frac{e\hbar}{2m} = -m_l \mu_B$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

Μαγνητόνη του Bohr.

Μαγνητική διπολική ροπή και ιδιοστροφορμή

Το ηλεκτρόνιο έχει επίσης και **ιδιοστροφορμή** που παράγει και αυτή μια μαγνητική διπολική ροπή:

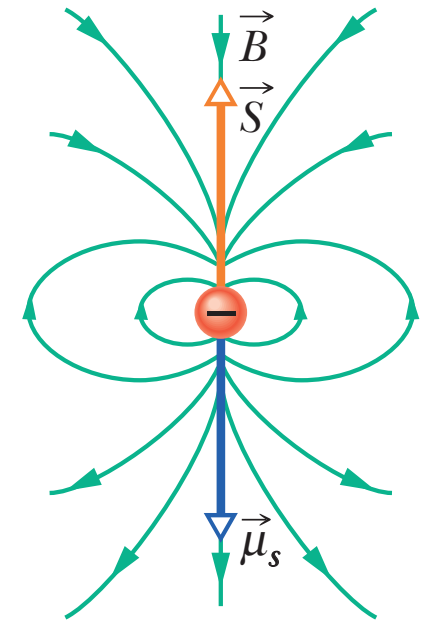
$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{S}$$

Η ιδιοστροφορμή είναι επίσης κβαντισμένη, με ιδιοτιμές προβολής στον άξονα z $\pm 1/2$:

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad \mu_{s,z} = \pm 1\mu_B$$

Η τροχιακή στροφορμή και η ιδιοστροφορμή του ηλεκτρονίου, όπως και οι αντίστοιχες επαγόμενες μαγνητικές διπολικές ροπές, προσθέτονται διανυσματικά.

Η συνισταμένη μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου δρα σαν στοιχειώδης μαγνήτης, παράγοντας μαγνητικό πεδίο κατά τη διεύθυνση της.



Μαγνητικά υλικά

- Η διανυσματική πρόσθεση των μαγνητικών διπολικών ροπών των ηλεκτρονίων δίνει μια συνισταμένη ροπή στο άτομο, η οποία, αν δεν μηδενίζεται, παράγει ένα μαγνητικό πεδίο γύρω του.
- Η πρόσθεση των ροπών των ατόμων ενός υλικού μπορεί να συνθέσει ένα μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο στο υλικό που αποτελείται από αυτά τα άτομα.
- Ανάλογα με τις ροπές που έχουν ή δεν έχουν τα άτομα ενός υλικού και τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να δημιουργηθούν ή να προσανατολιστούν με την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, διακρίνονται τρεις κατηγορίες υλικών:
- ♦ **Διαμαγνητικά υλικά:** Τα άτομα αποκτούν ροπές με την επίδραση εξωτερικού πεδίου, δημιουργώντας ένα επαγόμενο μαγνητικό πεδίο στην αντίθετη κατεύθυνση. Οι ροπές μηδενίζονται μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου και το επαγόμενο πεδίο σβήνει. Όλα τα υλικά έχουν διαμαγνητικές ιδιότητες.
- ♦ **Παραμαγνητικά υλικά:** Τα άτομα έχουν μόνιμες ροπές που ευθυγραμμίζονται σε κάποιο βαθμό με την επίδραση εξωτερικού πεδίου, δημιουργώντας επαγόμενο πεδίο στην ίδια κατεύθυνση. Οι ροπές αποπροσανατολίζονται θερμικά μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου και το επαγόμενο πεδίο σβήνει. (Σπάνιες γαίες, ακτινίδες.)
- ♦ **Σιδηρομαγνητικά υλικά:** Ομάδες ηλεκτρονίων έχουν παράλληλες ροπές που ευθυγραμμίζονται συλλογικά με την επίδραση εξωτερικού πεδίου, δημιουργώντας επαγόμενο πεδίο, και παραμένουν σε κάποιο βαθμό ευθυγραμμισμένες μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου. Τα σιδηρομαγνητικά υλικά, μετά από κάποια ψηλή χαρακτηριστική τους θερμοκρασία (**Curie**), γίνονται παραμαγνητικά. (Σίδηρος, κοβάλτιο, νικέλιο και τα κράματα τους.)

Μαγνήτιση

Μπορούμε να μετρήσουμε την πυκνότητα ενέργειας $-\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$ σε ένα παραμαγνητικό υλικό από τη συνολική μαγνητική ροπή που δημιουργεί σε αυτό ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad \text{σε μονάδες A/m.}$$

Η μέγιστη μαγνήτιση επιτυγχάνεται όταν όλες οι N ατομικές μαγνητικές ροπές μ_{at} του υλικού ευθυγραμμίζονται:

$$M_{\text{max}} = \frac{N\mu_{\text{at}}}{V} \quad \text{Μαγνήτιση κορεσμού.}$$

Για $M \ll M_{\text{max}}$ η μαγνήτιση των παραμαγνητικών υλικών ακολουθεί το νόμο του Curie:

$$M = C \frac{B}{T}$$

όπου B το εξωτερικό πεδίο, T η θερμοκρασία (σε $^{\circ}\text{K}$) και C η **σταθερή Curie** του υλικού.

Υστέρηση

Η μόνιμη μαγνήτιση των σιδηρομαγνητικών υλικών μετά την επίδραση εξωτερικού πεδίου επηρεάζει την καμπύλη του κύκλου μαγνήτισης-απομαγνήτισης στο διάγραμμα του επαγόμενου πεδίου B_M συναρτήσει του εξωτερικού πεδίου B_0 :

- Η αρχική διαδικασία μαγνήτισης ακολουθεί την πορεία ab , καθώς το B_0 αυξάνεται.
- Στη συνέχεια, καθώς το B_0 μειώνεται προς το 0 και μετά προς αρνητικές τιμές (δηλ. εφαρμόζεται στην αντίθετη φορά), ακολουθείται η πορεία bcd : για $B_0=0$ το B_M δεν είναι 0 (σημείο c) → μόνιμη μαγνήτιση.
- Όμοια, όταν το B_0 αυξάνεται και πάλι προς τις θετικές τιμές, ακολουθείται η πορεία deb , όπου το B_M πάλι δεν είναι 0 όταν το B_0 μηδενίζεται (σημείο e) → μόνιμη μαγνήτιση.
- Η καμπύλη του κύκλου μαγνήτισης-απομαγνήτισης ενός σιδηρομαγνητικού υλικού λέγεται **βρόχος υστέρησης**.

