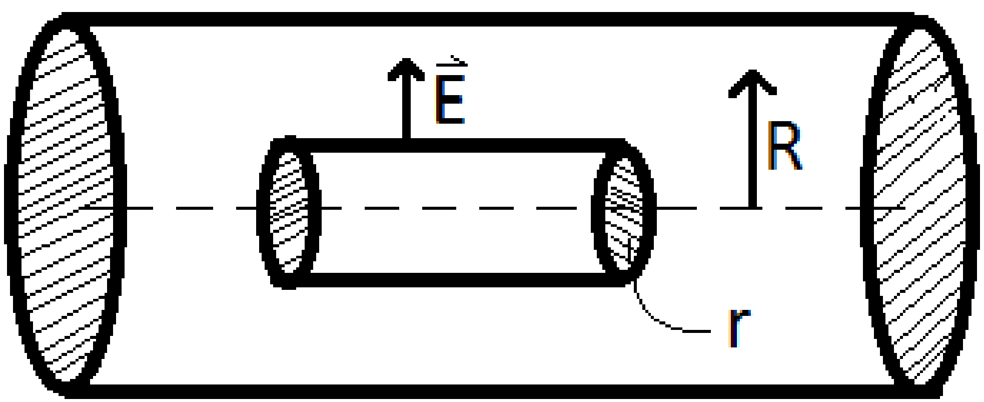
Μέρος Δ: Νόμος του Gauss

- Άσκηση V: Ομοιόμορφα φορτισμένος κύλινδρος
- Άσκηση VI_{α}: Γραμμική κατανομή σε κύλινδρο
- Άσκηση VI_{β}: Άπειρο φορτισμένο επίπεδο
- Άσκηση VII: Σφαιρική επιφάνεια
- Άσκηση VIII: Ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας

Άσκηση $V_α$: Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου κυλίνδρου

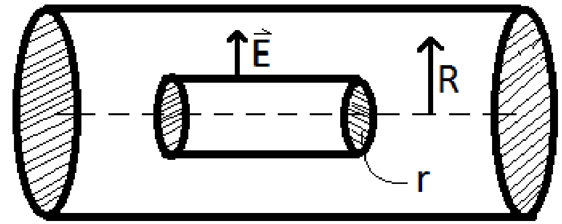
- Να βρεθεί το Ηλεκτρικό Πεδίο στο εσωτερικό και στο εξωτερικό κυλίνδρου ακτίνας R που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου είναι k.



Άσκηση V$_\alpha$: Απάντηση

- α) Στο εσωτερικό $r < R$

$$\int_{S(V)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = 2\pi r \ell E \quad (1),$$



$$\int_{S(V)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0} \quad (2),$$

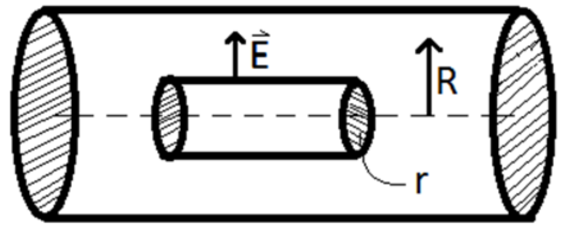
$Q_{o\lambda} = k\ell$ (3) διότι $k = \dfrac{dq}{d\ell} = \sigma\tau\alpha\theta.$

$$\frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{Q_{o\lambda}} = \frac{V_{\varepsilon\gamma\kappa}}{V_{o\lambda}} \Rightarrow \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{k\ell} = \frac{\pi r^2 \ell}{\pi R^2 \ell} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = k\ell \frac{r^2}{R^2}$$

Από (1),(2),(3) $2\pi \cancel{r} \cancel{\ell} E = \dfrac{1}{\varepsilon_0} k \cancel{\ell} \dfrac{r^{\cancel{2}}}{R^2} \Rightarrow$ $\boxed{E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{k}{R^2} \cdot r}$

Άσκηση V_α: Απάντηση

- β) Στο εξωτερικό $r > R$



$$\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = 2\pi r \ell E$$ (4) όπως και πριν

$$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = Q_{o\lambda} = k\ell$$ (5)

Από τις (1),(4),(5) έχουμε $2\pi r \cancel{\ell} E = \frac{1}{\varepsilon_0} k \cancel{\ell} \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{k}{r}}$$

Άσκηση V_β: Γραμμική κατανομή σε κύλινδρο

❖ Να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα (Άσκηση V_α) αλλά με κατανομή που αυξάνει από τον άξονα του κυλίνδρου γραμμικά με την απόσταση, δηλαδή $\rho = kr$, $k = \sigma\tau\alpha\theta.$

- **ΛΥΣΗ:** α) Στο εσωτερικό, $r < R$

Η εξίσωση $\int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = \dfrac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0}$ (1) συνεπάγεται

- Το πρώτο μέλος είναι $\int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = 2\pi r \ell E$
- Ενώ το έγκλειστο φορτίο $Q_{\varepsilon\gamma\kappa}$ είναι

$$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \int \rho d\tau = \int (kr') \cdot \overbrace{r'dr'd\varphi dz}^{d\tau(\sigma\varepsilon\_\kappa\upsilon\lambda.\sigma\upsilon\nu\tau)} = 2\pi k\ell \cdot \int_0^r r'^2 dr' = 2\pi k\ell \frac{r^3}{3}$$

$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \dfrac{2}{3}\pi k\ell r^3$ (3) . Από τις (1),(2),(3) $2\pi r\ell E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{2}{3}\pi k\ell r^3 \Rightarrow$ $\boxed{E = \dfrac{1}{3\varepsilon_0} k r^2}$

Άσκηση V$_\beta$:Απάντηση

- β) Στο εξωτερικό, $r > R$

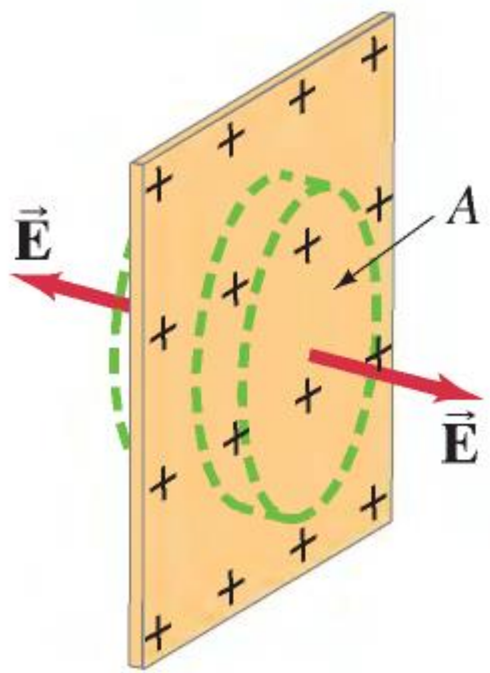
$Q_{o\lambda} = \frac{2}{3}\pi k\ell R^3$ (4).

Από τις (1),(2),(4) προκύπτει $2\pi r\ell E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{2}{3}\pi k\ell R^3 \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{kR^3}{r}}$$

Άσκηση VI: Άπειρο φορτισμένο επίπεδο

- Φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα με επιφανειακή πυκνότητα σ (σ είναι το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας dQ/dA), σε ένα πολύ λεπτό μη αγώγιμο επίπεδο πολύ μεγάλου εμβαδού. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία κοντά στο επίπεδο.



Απάντηση VI: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:**

Η ροή διέρχεται από τις δύο βάσεις του. Οπότε, σύμφωνα με το νόμο του Gauss, έχουμε το φορτίο που περικλείεται από το γκαουσσιανό κύλινδρο.

$$Q_{encl} = \sigma A$$

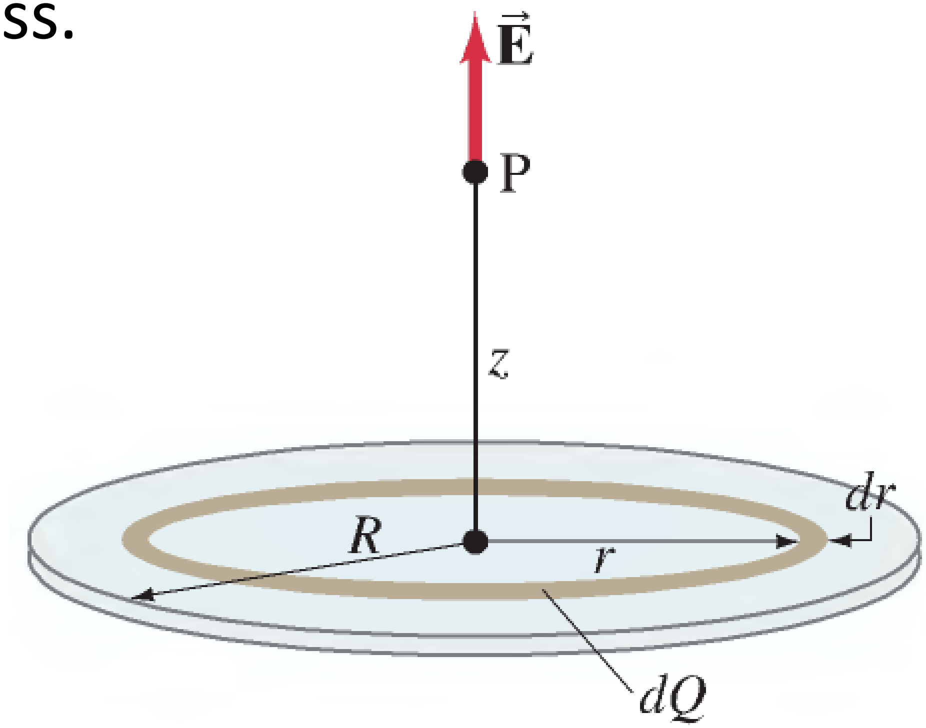
Έτσι, το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 2EA = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Άσκηση V_α : Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής

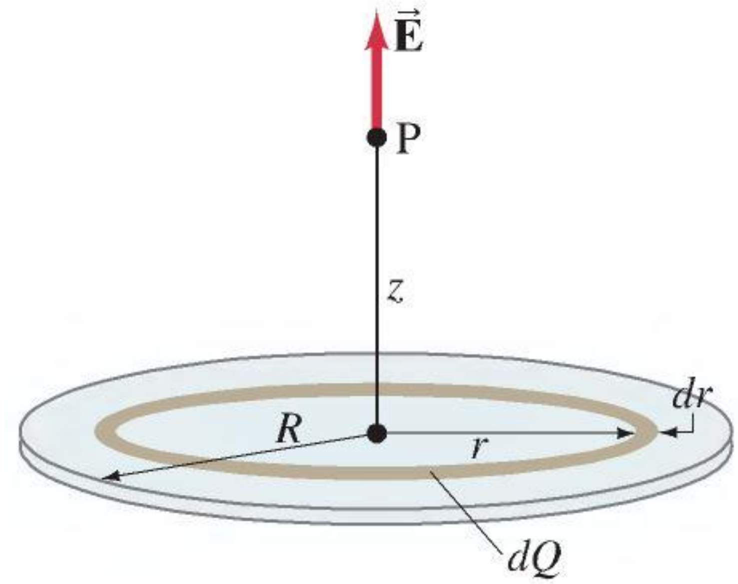
- Ένα φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ενός λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας R . Το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας $\left(C/m^2\right)$ είναι σ. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε τυχαίο σημείο P πάνω στον άξονα του δίσκου σε απόσταση z από το κέντρο του όταν είναι σταθερά φορτισμένο όλο το επίπεδο, με τον νόμο του Gauss.



Άσκηση $V_α$: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του δακτυλίου ακτίνας r που παριστάνεται στο σχήμα έχει μέτρο (βλ. αποτέλεσμα άσκ.III)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zdQ}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



Όπου γράψαμε dE (αντί του E)
Για τον πολύ λεπτό κυκλικό
δακτύλιο συνολικού φορτίου dQ

Επιφάνεια δακτυλίου: $(dr)(2\pi r)$
Φορτίο ανά μονάδα επιφανείας: $\sigma = dQ/(2\pi r dr)$

Άσκηση V_α : Απάντηση

Επιλύοντας αυτή τη σχέση ως προς dE :

$$dQ\left(=\sigma 2\pi r dr\right) \qquad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma r dr}{2\varepsilon_0\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Συνεισφορά όλων των δακτυλίων, από αυτόν με $r = R$ έως τον μεγαλύτερο με $r = 0$:

$$E = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$\vec{\mathbf{E}}$: σε κάθε σημείο του άξονα του δίσκου.

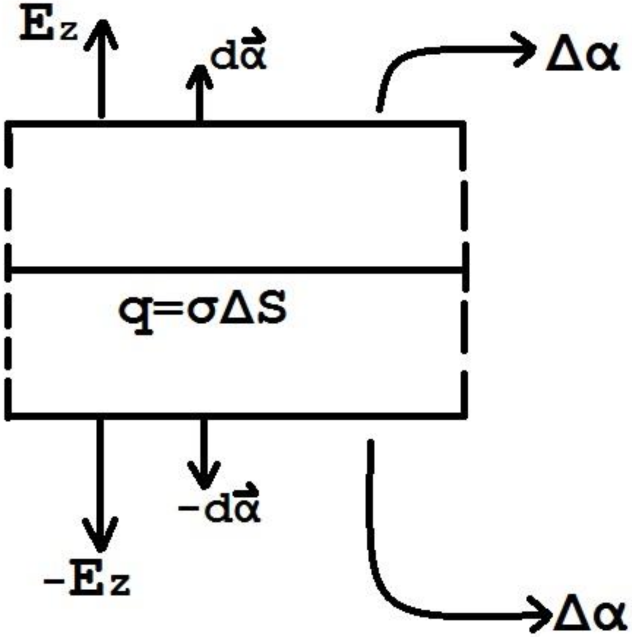
Η διεύθυνση του κάθε $d\vec{\mathbf{E}}$ εξαιτίας του κάθε δακτυλίου είναι παράλληλη στο z και για αυτό το λόγο η διεύθυνση του $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλη του z .

Εάν το Q (και το σ) είναι θετικό, το $\vec{\mathbf{E}}$ έχει φορά που απομακρύνεται από το δίσκο.

Εάν το Q (και το σ) είναι αρνητικό το $\vec{\mathbf{E}}$ έχει φορά προς το δίσκο.

Άσκηση V_β: Απάντηση

- Όταν είναι σταθερά φορτισμένο όλο το επίπεδο, με τον νόμο του Gauss:



$$\oint_s E_z d\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

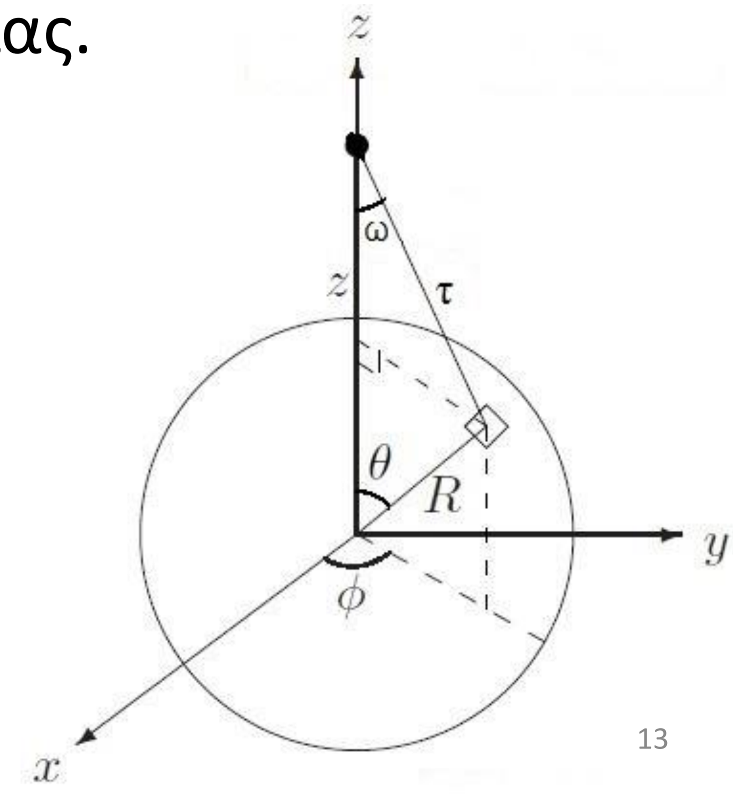
$$E_z \Delta\alpha + \left(-E_z\right)\left(-\Delta\alpha\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$2E_z \Delta\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{q}{2\Delta\alpha\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

Άσκηση V_β : Σφαιρική επιφάνεια

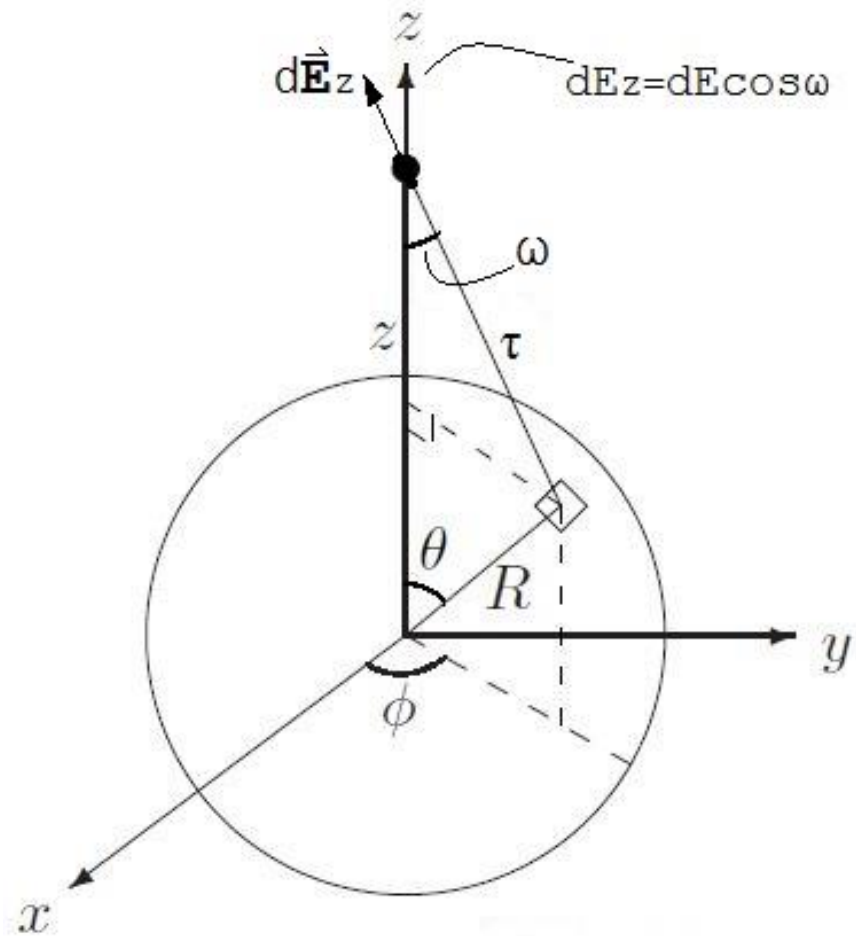
- Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από το κέντρο σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R , που φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ . Να διακρίνεται περιπτώσεις i) $z<R$ (εσωτερικό), ii) $z>R$ (εξωτερικό). Εκφράστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει του ολικού φορτίου q της σφαιρικής επιφάνειας.



Άσκηση V_β : Απάντηση

- i) Για $z > R$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\tau^2} \cdot \cos\omega$$



όπου $\tau^2 = z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta$

ολοκληρώνοντας ως προς τη γωνία φ

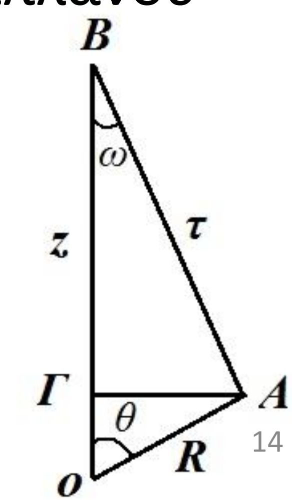
$$dE_z = \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\sigma R^2 \frac{-d\cos\theta \cdot \cos\omega}{z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta}$$

θέτουμε $y = \cos\theta$, τότε με

$\theta \in [0,\pi] \to y \in [1,-1]$

Από τη γεωμετρία του διπλανού σχήματος φαίνεται ότι :

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{z - R\cos\theta}{\tau}$$



Άσκηση V$_\beta$: Απάντηση

Τότε $$dE_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\cdot(-1)\cdot\frac{d\cos\theta\cdot(z-R\cos\theta)}{\left(z^2+R^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$ και

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{dy(z-Ry)}{(A-By)^{3/2}} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{dy(z-Ry)}{(A-By)^{3/2}}$$ όπου $$A = R^2+z^2$$ $$B = 2Rz$$

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $$\int_{-1}^{+1}\frac{dy(z-Ry)}{(A-By)^{3/2}} = \ldots = \frac{2}{z^2} \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}}$$

Με το Θεώρημα του Gauss:

$$\oint_{S(z)}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{a}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_z\cdot 4\pi z^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}}$$

Άσκηση V_β : Απάντηση

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{+1} \frac{(z - Ry)}{(A - By)^{3/2}} dy = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{\sqrt{(R+z)^2}} + \frac{z-R}{\sqrt{(R-z)^2}}\right]$$

Για $z > R$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{R+z} + \frac{z-R}{z-R}\right] = \frac{2}{z^2}$$

Για $z < R$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{R+z} + \frac{z-R}{R-z}\right] = \frac{1}{z^2}(1-1) = 0$$

Άσκηση V_β : Απάντηση

ii) Για $z < R$ καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα της ίδιας μορφής,δηλαδή :

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dy\left(z - Ry\right)}{\left(A - By\right)^{3/2}}$$

με

$$A = R^2 + z^2$$
$$B = 2Rz$$

Αλλά για $z < R$ το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν.

Οπότε $E_z = 0$

Με το θεώρημα του Gauss: $\oint_{S(z)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0} = 0$

Άσκηση V_β : Απάντηση

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{\varepsilon\sigma\omega}}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Εξωτερικά της σφαίρας όλο το φορτίο είναι εσωτερικά

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}.}$$

Εσωτερικά της σφαίρας χρησιμοποιούμε μόνο το ποσοστό του φορτίο που βρίσκεται εσωτερικά στην συγκεκριμένη επιφάνεια

$$Q_{\text{int}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}Q = \frac{r^3}{R^3}Q, \text{ άρα } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3}Q\frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\mathbf{r}.}$$

Άσκηση VII: Ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας

❖ Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}} = kr^3\hat{r}, \quad k = \sigma\tau\alpha\theta.$

α) Να βρεθεί η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial\left(\sin\theta E_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial \mathrm{E}_\varphi}{\partial\varphi} \right] \Rightarrow$$

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[kr^5\right] = \frac{5\varepsilon_0 kr^4}{r^2} \Rightarrow$$

$$\rho = 5\varepsilon_0 kr^2$$

β) Να βρεθεί το ολικό φορτίο q που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας R

$$q = \int_0^R \rho d\tau = 5\varepsilon_0 k \int_0^R r^2 d\tau = 5\varepsilon_0 k \int_0^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$q = 5\varepsilon_0 k \cdot 2\pi \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cdot \int_0^R r^4 dr = 5\varepsilon_0 k \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\pi + \cos 0\right) \cdot \frac{R^5}{5} \Rightarrow$$

$$q = 4\pi k \varepsilon_0 R^5$$

Μέρος Ε: Δυναμικό

- Άσκηση Ι: Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα
- Άσκηση ΙΙ: Κλίση Δυναμικού - Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα
- Άσκηση ΙΙΙ: Άπειρο φορτισμένο σύρμα
- Άσκηση IV: Κυλινδρική επιφάνεια

Άσκηση Ι

❖ Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό και το εξωτερικό μιάς σφαίρας ακτίνας R, που φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένα επιφανειακό φορτίο q

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος: α) Για $r > R$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r}$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{\mathbf{E}}d\vec{\ell} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad , \qquad r > R$$

β) Για $r < R$, εντός της σφαιρικής επιφάνειας $\vec{\mathbf{E}} = 0$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{\mathbf{E}}d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R}\vec{\mathbf{E}}d\vec{\ell} - \int_{R}^{r}\vec{\mathbf{E}}d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R}\vec{\mathbf{E}}d\vec{\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = const.$$

για $\forall r < R$

Άσκηση Ι

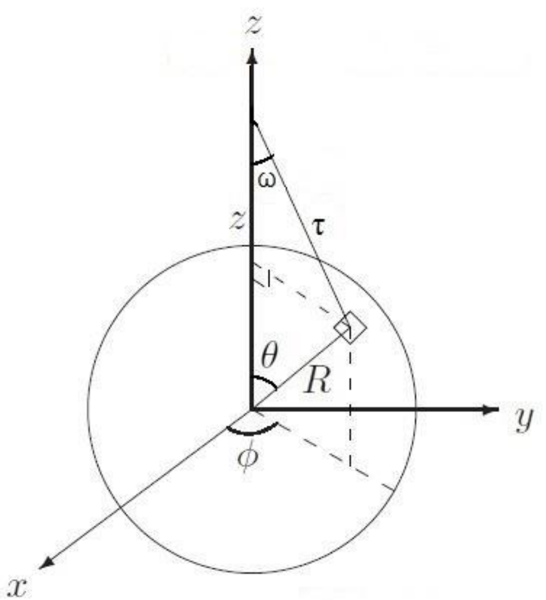
$2^{ος}$ τρόπος: Με την χρήση της σχέσης : $V(z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\sigma da}{\tau}$

Όπου $\tau = \left(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta\right)^{1/2}$

$$4\pi\varepsilon_0 V(z) = \sigma \int \frac{R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\left(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta\right)^{1/2}}$$

όπου το μηδέν του δυναμικού είναι στο άπειρο

$$4\pi\varepsilon_0 V(z) = 2\pi R^2 \sigma \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}} = 2\pi R^2 \sigma \left(\frac{1}{Rz}\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta} \right)_0^{\pi}$$



$$\Rightarrow V(z) = \frac{R\sigma}{2\varepsilon_0 z} \cdot \left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right]$$

i) $z > R \rightarrow V(z) = \dfrac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 z} = \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 z} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}$

ii) $z < R \rightarrow V(z) = \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{R}$

Άσκηση ΙΙ

- Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό και το εξωτερικό μιάς ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας ακτίνας R , της οποίας το ολικό φορτίο είναι q. Να υπολογίσετε την κλίση του V σε κάθε περιοχή και ελέγξετε αν δίνει το σωστό πεδίο.

ΛΥΣΗ

α) Για $r > R \rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ τότε

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}} d\vec{\ell} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} , \qquad r > R$$

Άσκηση ΙΙ

β) Για $r < R \rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{r}$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}} d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R} \vec{\mathbf{E}} d\vec{\ell} - \int_{R}^{r} \vec{\mathbf{E}} d\vec{\ell}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{R}^{r} \vec{r} d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r}^{R} \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^2 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2$$

Άσκηση II

Ας υπολογίσουμε, παρακάτω, την κλίση του δυναμικού:

α) για $r > R \rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$

β) για $r < R \rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \hat{r} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot 2r \cdot \hat{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$

Άσκηση III

- Να βρεθεί το δυναμικό σε απόσταση r από ένα απείρως μακρύ ευθύγραμμο σύρμα που φέρει ομοιόμορφο γραμμικό φορτίο λ. Να υπολογίσετε κατόπιν την κλίση του δυναμικού σας και να ελέγξετε αν δίνει το σωστό πεδίο.

ΛΥΣΗ

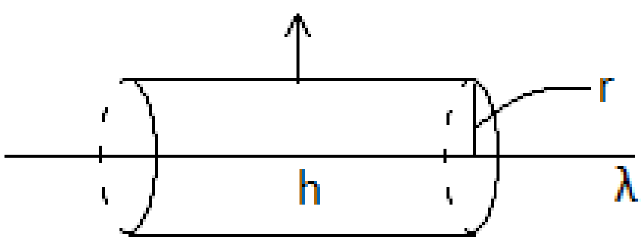
$$\mathrm{E} = \frac{2\lambda z}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{z^2\left(z^2+L^2\right)^{1/2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z\left(\frac{z^2}{L^2}+1\right)^{1/2}}$$

, όταν $L\rightarrow\infty$ τότε

$$\mathrm{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z}$$

οπου $z\equiv r$

Με το Θ.Gauss:



$$\oint \vec{E}d\vec{a} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2\pi r\cdot h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

Άσκηση III

Έυρεση του δυναμικού:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}} d\vec{\ell} = -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{1}{\tau'}d\tau' = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{\infty}\frac{1}{r'}dr' = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln r'\Big|_{r}^{\infty} = \infty - \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln r$$

. Έτσι:

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{\mathbf{E}} d\vec{\ell} \quad \text{όπου} \quad V(r_0) = 0 \,.$$

Το r_0 μπορεί να είναι η ακτίνα του σύρματος, ή όχι.

Τότε

$$V(r) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{r_0}\frac{1}{r'}dr' = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{r}^{r_0} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln r_0 - \ln r\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{V(r) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}}$$

Δηλαδή αντιμετωπίσαμε το σύρμα σαν κύλινδρο ακτίνας r_0 και βρήκαμε το δυναμικό στο εξωτερικό του

Άσκηση III

*Αν το σημείο είναι μέσα στον κύλινδρο ακτίνας R

$$V(r) = -\int_{R'}^{r} \ldots = -\int_{R'}^{R} \ldots - \int_{R}^{r} \ldots = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{R'}{R} - \int_{R}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R^2} r dr \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{R'}{R} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{r^2 - R^2}{R^2}\right)$$

Άσκηση ΙΩ

- Κυλινδρική επιφάνεια, απείρου μήκους είναι φορτισμένη με σταθερή γραμμική πυκνότητα k (φορτίο ανά μονάδα μήκους). Η επιφάνεια έχει ακτίνα R. Να βρεθεί η ένταση καθώς και το δυναμικό σε ολόκληρο το χώρο.

ΛΥΣΗ

1) $r > R$

$$\mathrm{E}\cdot 2\pi r\cdot L = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{kL}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{k}{r}\hat{r}$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r}\vec{\mathbf{E}}(r)\cdot d\vec{r} = -\frac{k}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = \frac{k}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} \Rightarrow V(r) = \frac{k}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

2) $r < R \rightarrow E = 0$ (διότι το $q_{\varepsilon\gamma\kappa} = 0$)

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r}\ldots = -\int_{r_0}^{R}\vec{\mathbf{E}}dr - \int_{R}^{r}\emptyset\cdot dr = \frac{k}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{R} \Rightarrow \quad V(r) = \frac{k}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{R}$$