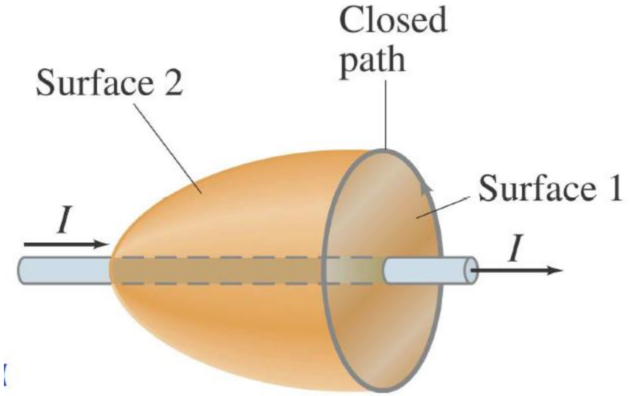
Εξισώσεις Maxwell

Νόμος Ampère

- Μαγνητικό πεδίο παράγεται από ηλεκτρικό ρεύμα

$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \mathrm{I}_{encl}$$



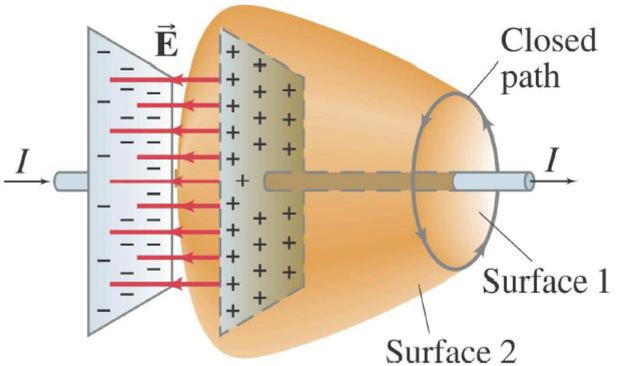
- Ισχύει το αντίθετο?

$$V = Ed \qquad\qquad C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$Q = CV = \left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right)(Ed) = \varepsilon_0 AE$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \mathrm{I}_{encl} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$



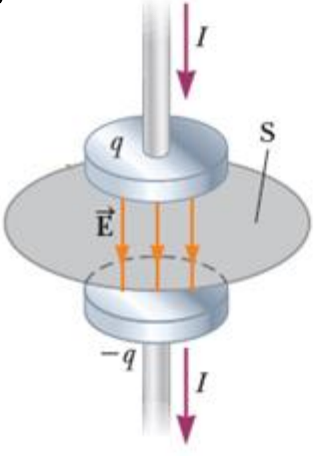
Ρεύμα μετατόπισης

- Ισοδύναμο με ένα ηλεκτρικό ρεύμα

$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left(I + I_D \right)_{encl}$$

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

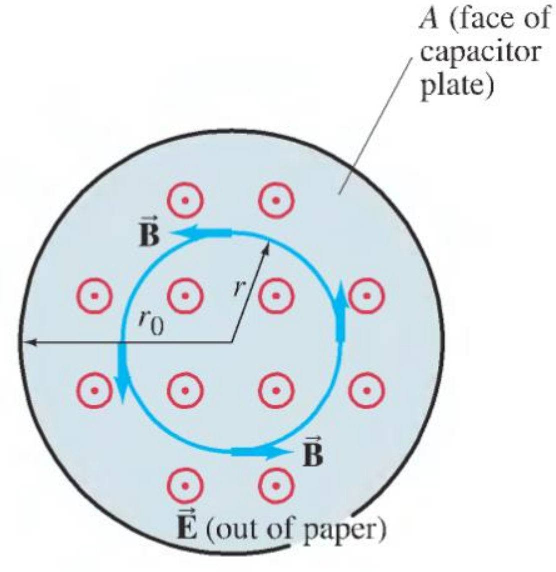
- Ρεύμα αγωγιμότητας (συνηθισμένο ρεύμα)



Παράδειγμα

Ένας πυκνωτής 30 pF κενού αέρα έχει κυκλικές πλάκες επιφάνειας A=100 cm2. Φορτίζεται από μια πηγή τάσης 70 V μέσω αντίστασης 2 Ω. Τη στιγμή που η πηγή συνδέεται, το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών μεταβάλλεται πολύ γρήγορα. Τη στιγμή αυτή υπολογίστε

Α) την τιμή του ρεύματος μέσα στις πλάκες
Β) το ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών
Γ) το μαγνητικό πεδίο που προκαλείται μεταξύ των πλακών
Υποθέτουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών είναι ομοιόμορφη σε κάθε στιγμή και είναι 0 σε όλα τα σημεία εκτός των πλακών.



Παράδειγμα

ΛΥΣΗ:

Α) Τιμή του ρεύματος μέσα στις πλάκες

Για χρόνο t=0

$$\frac{dQ}{dt}\Bigg\|^{t=0} = \frac{CV_0}{RC}e^{-t/RC}\Bigg\|^{t=0} = \frac{V_0}{R} = \frac{70V}{2\Omega} = 35A$$

Β) Ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q/A}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ/dt}{\varepsilon_0 A} = \frac{35A}{\left(8{,}85\times10^{-12}\,C^2/N\,m^2\right)\left(1\times10^{-2}\,m^2\right)} = 4\times10^{14}\,V/ms$$

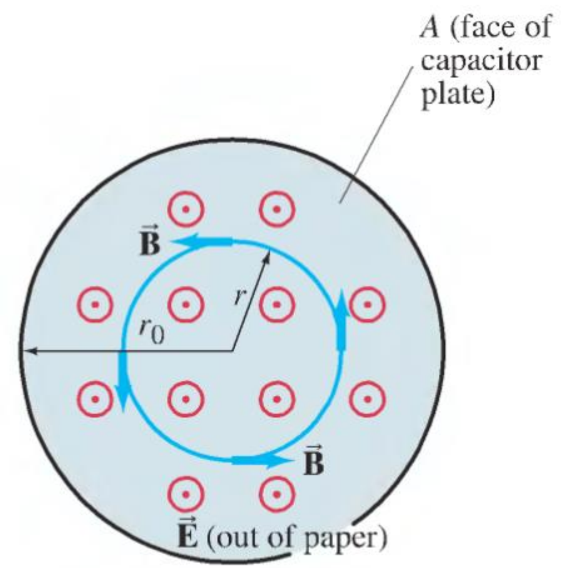
Παράδειγμα

ΛΥΣΗ:

Γ) Μαγνητικό πεδίο μεταξύ των πλακών

Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου, λόγω συμμετρίας, είναι κύκλοι κάθετοι στο Ε.

Νόμος Ampère με I_{encl}=0



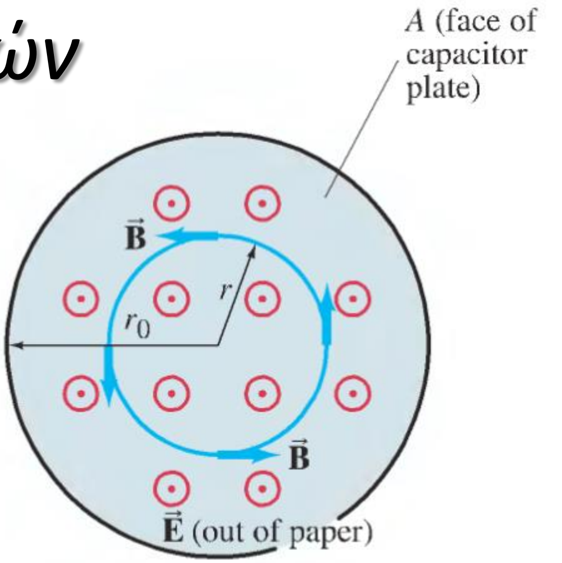
$$[r \le r_0] \qquad \oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\pi r^2 E\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

Παράδειγμα
ΛΥΣΗ:

Β) Μαγνητικό πεδίο μεταξύ των πλακών



Υποθέτουμε ότι Ε=0 για $\left[r \geq r_0\right]$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\pi r_0{}^2 E\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r_0{}^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r_0^2}{2r} \frac{dE}{dt}$$

B_{max} για $\left[r = r_0\right]$

$$B_{max} = \tfrac{1}{2}\left(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}\right)\left(8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}\right)\left(5.6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)\left(4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{V/m\cdot s}\right)$$
$$= 1.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}.$$

για $r > r_0$ $\qquad B = \dfrac{\mu_0 \varepsilon_0 r_0^2}{2r} \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{\mu_0 \varepsilon_0 r_0^2}{2r} \dfrac{I}{\varepsilon_0 \pi r_0^2} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Νόμος Gauss (μαγνητισμός)

- Μαγνητικό ισοδύναμο του Gauss
  - Η ηλεκτρική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

  - Η μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

  - Νόμος Gauss για τον ηλεκτρισμό

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

  - Νόμος Gauss για τον μαγνητισμό

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Εξισώσεις Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Νόμος Gauss

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Νόμος Gauss για μαγνητισμό- ανώνυμος

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Νόμος Faraday

$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \mathrm{I}_{encl} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Νόμος Ampère – τροποποίηση Maxwell

Εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Νόμος Gauss

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Νόμος Gauss για μαγνητισμό- ανώνυμος

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Νόμος Faraday

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

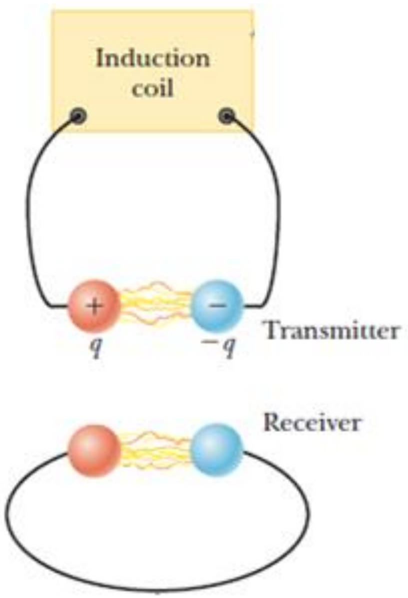
Νόμος Ampère – τροποποίηση Maxwell

Νόμος Lorentz

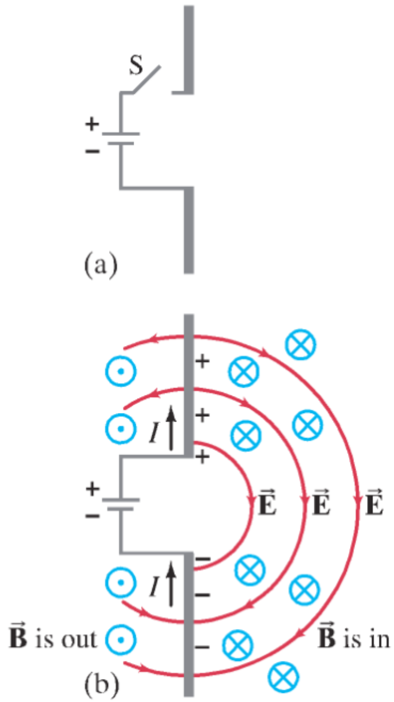
$$\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{E}} + q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}$$

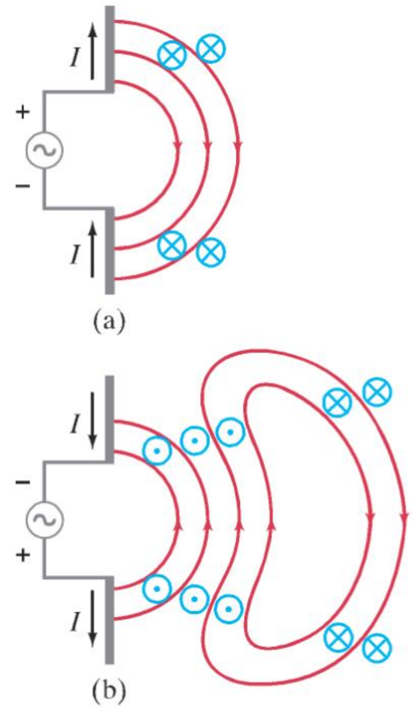
Νόμοι Maxwell και Νόμος Lorentz: περιγράφουν επακριβώς τις κλασικές ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις στο κενό.

Πείραμα Hertz



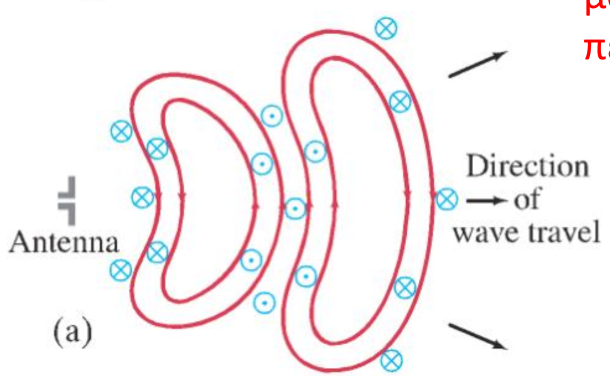
Παραγωγή Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

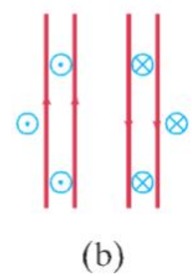




Εγγύς πεδίο

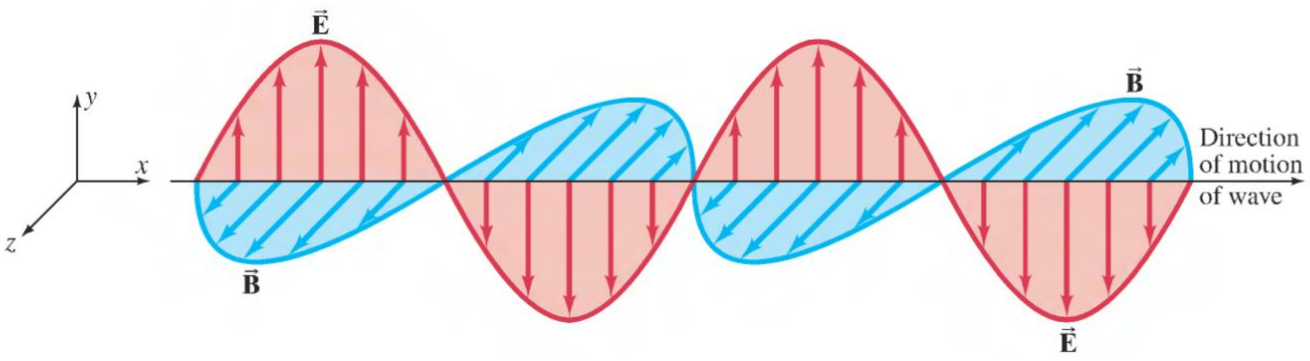
μακρινό πεδίο η
πεδίο ακτινοβολίας





Παραγωγή Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

- Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- Τα πεδία εναλλάσσονται σε κατεύθυνση
- Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι σε φάση
- Πολύ μακριά οι γραμμές πεδίου είναι αρκετά επίπεδες (σε μεγάλη περιοχή) – Επίπεδα κύματα
- Ηλεκτρομαγνητικά κύματα: εγκάρσια κύματα
- Επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία προκαλούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα



Παράδειγμα

Σε δεδομένη χρονική στιγμή, το ηλεκτρικό πεδίο ενός κύματος δείχνει προς τα βόρεια και το μαγνητικό του πεδίο δείχνει προς τα πάνω. Ποια είναι η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος?

α. νότια

β. δυτικά

γ. ανατολικά

δ. προς τα κάτω

ε. δεν υπάρχουν αρκετές πληροφορίες

Ταχύτητα Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

- Θεώρηση περιοχής ελευθέρου χώρου – επίπεδα κύματα

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

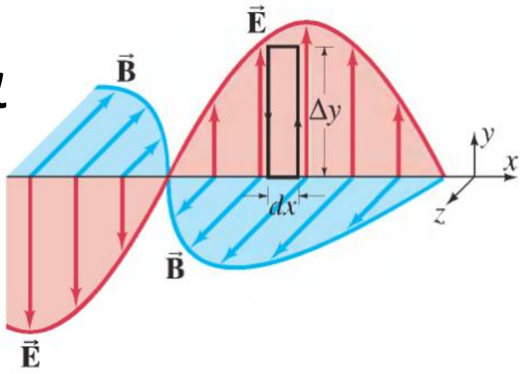
$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- Αν το κύμα είναι ημιτονοειδές

$$E = E_y = E_0 \sin(kx - \omega t) \qquad B = B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi f, \; f\lambda = \frac{\omega}{k} = v$$

Ταχύτητα Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων



- Προσανατολισμός των E, B, v σύμφωνα με το Νόμο Lenz

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

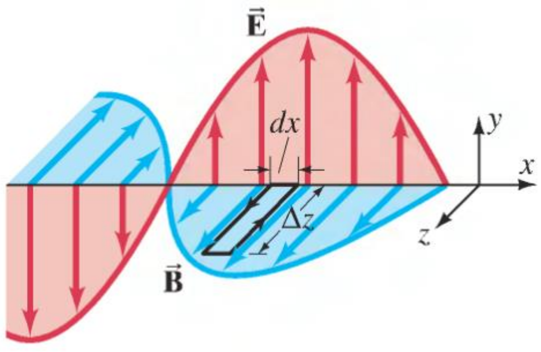
$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = (E + dE)\Delta y - E\Delta y = dE\Delta y$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} dx\Delta y$$

$$dE\Delta y = -\frac{dB}{dt} dx\Delta y$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Ταχύτητα Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων



$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

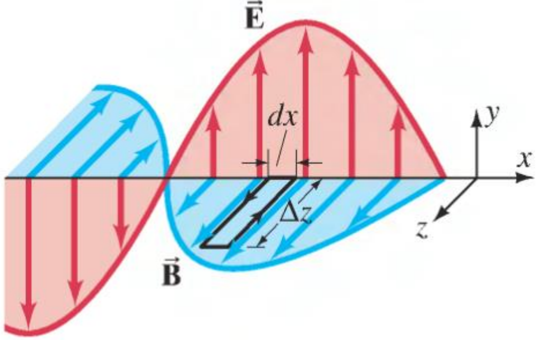
$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = B\Delta z - (B + dB)\Delta z = -dB\Delta z$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} dx\Delta z$$

$$-dB\Delta z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} dx\Delta z$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Ταχύτητα Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων



- Σχέση μεταξύ των E_0 , B_0 και v

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$kE_0 \cos(kx - \omega t) = \omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v \Rightarrow \frac{E}{B} = v$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$kB_0 \cos(kx - \omega t) = \omega E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{k} = \mu_0 \varepsilon_0 v$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 v = \frac{1}{v} \Rightarrow v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(8{,}85 \times 10^{-12}\, C^2/N \cdot m^2\right)\left(4\pi \times 10^{-7}\, T \cdot m/A\right)}} = 3{,}00 \times 10^8\, m/s$$

Υπολογισμός της Ταχύτητας του Φωτός

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

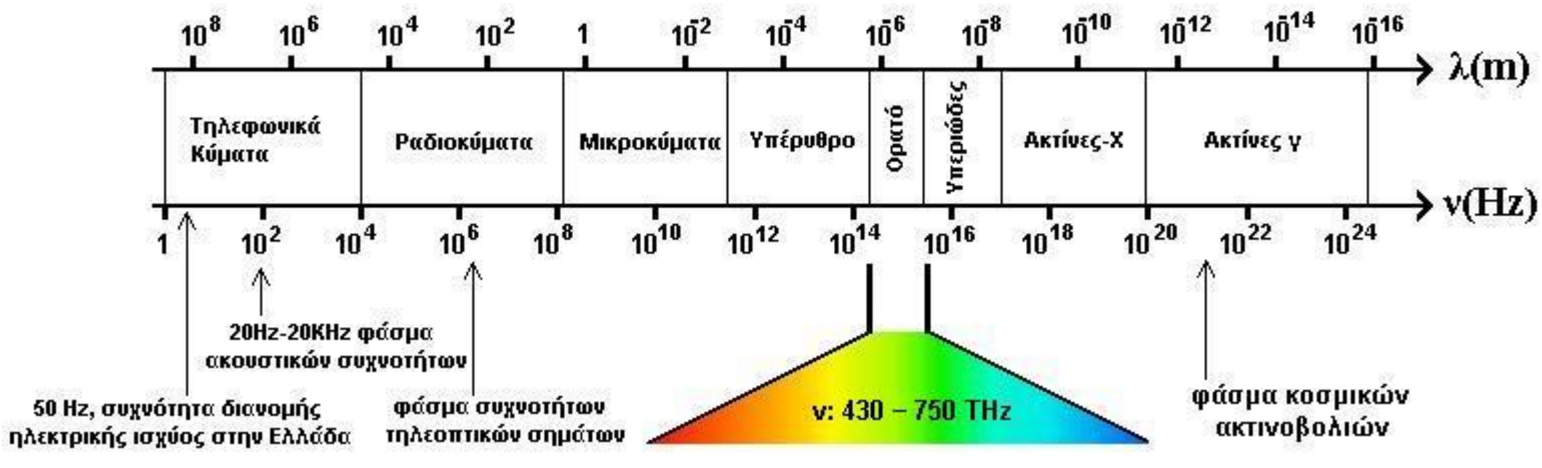
$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

Ηλεκτρομαγνητικό φασμα

- Η ταχύτητα των ΗΜ κυμάτων στο κενό

$$c = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 m/s$$

$$c = \lambda f$$



Παράδειγμα

Η κεραία ενός κινητού τηλεφώνου έχει συχνά μήκος ίσο με ¼ μήκους κύματος. Ένα ιδιαίτερο κινητό τηλέφωνο έχει μια ευθεία ράβδο μήκους 8,5 cm για κεραία. Εκτιμήστε την συχνότητα λειτουργίας αυτού του τηλεφώνου.

ΛΥΣΗ: Η κεραία έχει μήκος $\frac{1}{4}\lambda$, οπότε

$\lambda = 4(8,5cm) = 34cm = 0,34m$. Συνεπώς

$$f = c/\lambda = \left(3,0\times10^{8}\,m/s\right)/\left(0,34m\right) = 8,8\times10^{8}\,Hz = 880MHz$$

Παράδειγμα

Κάνετε μια τηλεφωνική κλήση από τη Νέα Υόρκη σε ένα φίλο στο Λονδίνο. Υπολογίστε πόσο καιρό θα χρειαστεί το ηλεκτρικό σήμα που παράγεται από τη φωνή σας να φτάσει στο Λονδίνο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα α) μεταφέρεται μέσω ενός τηλεφωνικού καλωδίου κάτω από τον Ατλαντικό Ωκεανό και β) αποστέλλεται μέσω δορυφόρου 36.000 χιλιόμετρα πάνω από τον ωκεανό. Θα προκαλέσει σημαντική καθυστέρηση σε κάθε περίπτωση;

Παράδειγμα

ΛΥΣΗ: Η απόσταση από τη Νέα Υόρκη στο Λονδίνο είναι περίπου 5000 km.

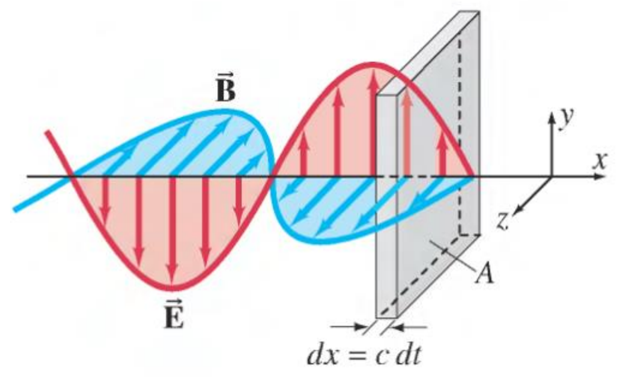
Α) Η χρονική καθυστέρηση μέσω καλωδίου είναι

$$t = d/c \approx (5 \times 10^{6}\,\mathrm{m})/(3.0 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}) = 0.017\,\mathrm{s}.$$

Β) Μέσω δορυφόρου η χρονική καθυστέρηση θα είναι μεγαλύτερη λόγω ύψους 36.000 km.

$$t = d/c \approx 7.2 \times 10^{7}\,\mathrm{m}/(3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}) = 0.24\,\mathrm{s}.$$

Διάνυσμα Poynting



$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \mu_0 E^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E c^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 EcB = \frac{\varepsilon_0 EB}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB$$

Η ενέργεια που μεταφέρει το κύμα ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφανείας (διάνυσμα S – W/m²)

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 c E^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}$$

Διάνυσμα Poynting

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c {E_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{\mu_0}{B_0}^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\mu_0}$$

Παράδειγμα

Η ακτινοβολία από τον Ήλιο φτάνει στη Γη (πάνω από την ατμόσφαιρα), με ρυθμό περίπου $1350\,J/sm^2\left(=1350\,W/m^2\right)$. Υποθέτουμε ότι αυτή είναι ένα μόνο ηλεκτρομαγνητικό κύμα και υπολογίστε τις μέγιστες τιμές των E και B.

ΛΥΣΗ:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\overline{S}}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2\left(1350\ \mathrm{J/s\cdot m^2}\right)}{\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}\right)\left(3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)}}$$

$$= 1.01\times10^{3}\ \mathrm{V/m}.$$

Από την $B = E/c$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.01\times10^{3}\ \mathrm{V/m}}{3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}} = 3.37\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

Πίεση Ακτινοβολίας

- Αν τα ΗΜ κύματα μεταφέρουν ενέργεια, μήπως μεταφέρουν και γραμμική ορμή?

πλήρης απορρόφηση ακτινοβολίας

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c}$$

πλήρης ανάκλαση ακτινοβολίας

$$\Delta p = \frac{2\Delta U}{c}$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \bar{S}A$$

πλήρης απορρόφηση ακτινοβολίας

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{Ac}\frac{dU}{dt} = \frac{\bar{S}}{c}$$

πλήρης ανάκλαση ακτινοβολίας

$$P = \frac{2\bar{S}}{c}$$

Πίεση ακτινοβολίας: η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας που ασκείται από τα κύματα

Παράδειγμα

Για την διευκόλυνση παρακολούθησης μιας παρουσίασης συνήθως χρησιμοποιούμε ένα laser pointer. Αν ένα 3.0 mW laser pointer (μέση τιμή) δημιουργεί στην οθόνη σημείο διαμέτρου 2mm να υπολογιστεί η πίεση ακτινοβολίας σε οθόνη που ανακλά το 70% του φωτός που δέχεται στην επιφάνεια της.

ΛΥΣΗ:

Διάνυσμα Poynting

$$S_{avg} = \frac{(Power)_{avg}}{A} = \frac{(Power)_{avg}}{\pi r^2} = \frac{3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{W}}{\pi\left(\frac{2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{2}\right)^2} = 955\ \mathrm{W/m^2}$$

Η ακτινοβολία που απορροφάται και που εκπέμπεται από την οθόνη θα είναι

$$P_{avg} = \frac{S_{avg}}{c} + f\,\frac{S_{avg}}{c} = (1 + f)\frac{S_{avg}}{c}$$

$$P_{avg} = (1 + 0.70)\frac{955\ \mathrm{W/m^2}}{3.0 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = \boxed{5.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}}$$