ΦΥΣΙΚΗ III

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL — ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

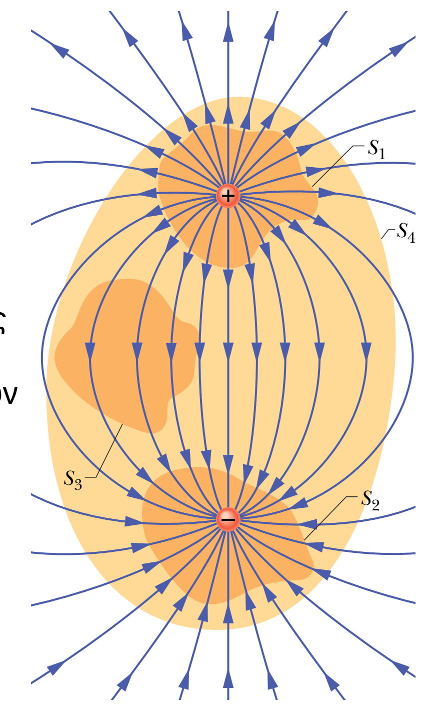
2019 — 2020

Ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο.

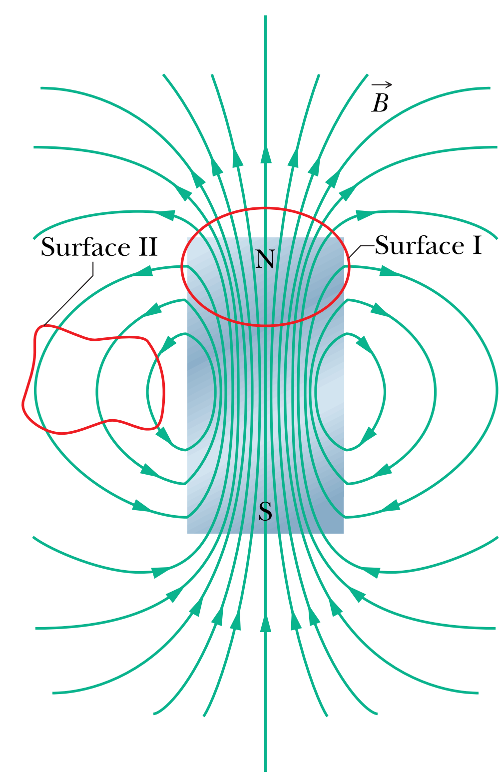
Πηγές ροής του πεδίου είναι τα ηλεκτρικά μονόπολα (φορτία).



$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \equiv 0$$

Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο.

Δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα.



Ο νόμος Ampère-Maxwell

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Νόμος του Faraday.

$$V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0 \ !$$

Εξαλείφει το φυσικό νόημα του ηλεκτρικού δυναμικού: μόνο το στατικό ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό.

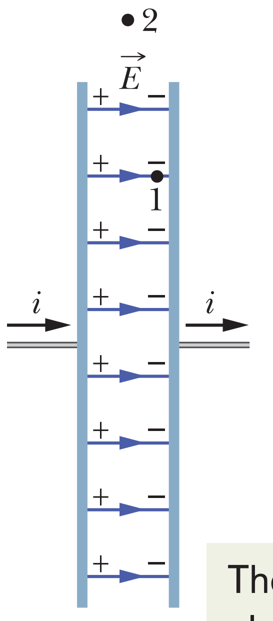
Νόμος του Ampère.

$$\left.\begin{aligned} &\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C \\ &\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Διόρθωση του Maxwell από συμμετρία προς το νόμο του Faraday.

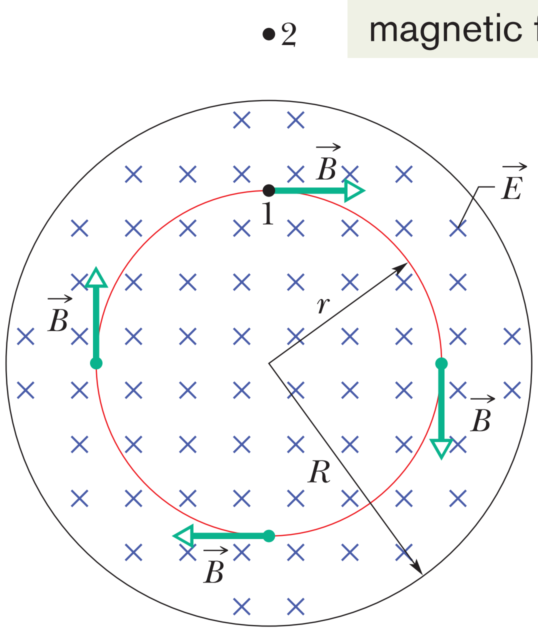
Νόμος Ampère-Maxwell.

Η Φύση “αντιδρά” στις αλλαγές ροής των πεδίων



(a)

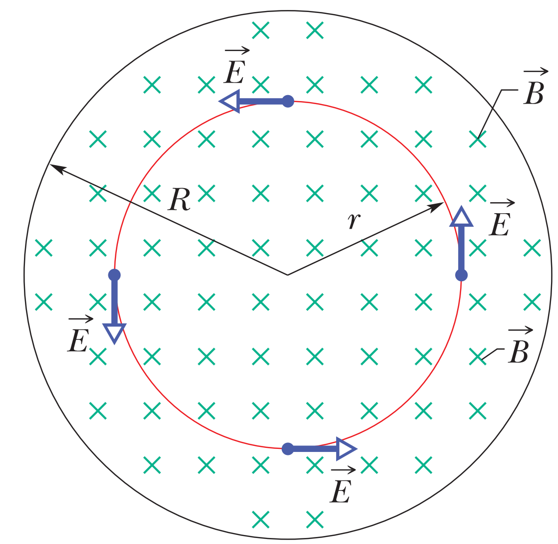
The changing of the electric field between the plates creates a magnetic field.



(b)

Εφαρμογή του νόμου Ampère-Maxwell κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή.

The induced $\vec{E}$ direction here is opposite the induced $\vec{B}$ direction in the preceding figure.



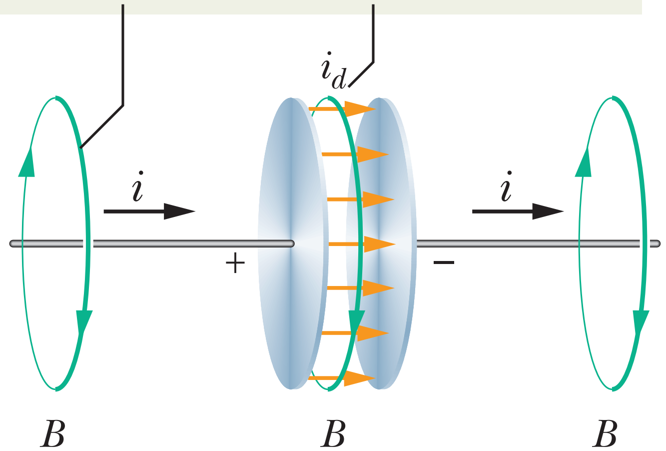
Εφαρμογή του νόμου Faraday: η φορά του ηλεκτρικού πεδίου είναι αντίθετη στη φορά των δεικτών του ρολογιού, λόγω του αρνητικού προσήμου στη χρονική παράγωγο της ροής του μαγνητικού πεδίου.

Το ρεύμα μετατόπισης

$$\boxed{J_C = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 (I_C + J_C)$$

Ο νόμος Ampère-Maxwell με τις πηγές εκφρασμένες σε ρεύματα.

During charging, magnetic field is created by both the real and fictional currents.



$$\left.\begin{array}{lll} q = \varepsilon_0 EA & \Rightarrow & I_C = \dfrac{dq}{dt} = \varepsilon_0 A \dfrac{dE}{dt} \\ \Phi_E = EA & \Rightarrow & J_C = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 A \dfrac{dE}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J_C = I_C}$$

Εφαρμογή του νόμου Ampère-Maxwell κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή.

Οι εξισώσεις του Maxwell (ολοκληρωτική μορφή)

Συγκεντρώνοντας τα γενικά αποτελέσματα:

Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Νόμος του Faraday:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Νόμος των Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell (διαφορική μορφή)

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις που έχουμε ήδη αποδείξει για τυχαίες κλειστές επιφάνειες S και κλειστούς βρόχους C:

Θεώρημα Gauss: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V(S)} \nabla \cdot \mathbf{E}\, d\tau$

Θεώρημα Stokes: $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{S(C)} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$

και για το ηλεκτρικό και για το μαγνητικό πεδίο.

Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Νόμος του Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Νόμος των Ampère-Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Πώς προκύπτει η διόρθωση του Maxwell στο νόμο του Ampère

Από την απόκλιση του νόμου Faraday: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \equiv 0$

Από την απόκλιση του νόμου Ampère: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$

Αλλά η απόκλιση του στροβιλισμού είναι πάντα 0: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{A}$

$\Rightarrow$

Νόμος Faraday → **OK**.

Νόμος Ampère → **Λάθος** (για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία).

Από τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου: $-\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$

Από το νόμο Gauss: $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \equiv 0$$

$\Rightarrow$ Νόμος Ampère-Maxwell → **OK**: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Το μαγνητικό δυναμικό

Είδαμε ότι το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό, άρα δεν αρκεί μόνο το ηλεκτρικό δυναμικό V (που προσδιορίζει το στατικό πεδίο) για να προσδιορίσει γενικά το πεδίο:

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \cdots$$

Ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο μας λέει ότι αυτό μπορεί να εκφραστεί σαν ο στροβιλισμός ενός άλλου διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$, το οποίο είναι μια συνάρτηση δυναμικού (εφόσον οι χωρικές του παράγωγοι δίνουν ένα πεδίο δύναμης) με τρεις συνιστώσες:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

Τότε, από το νόμο του Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Εφόσον $\nabla \times \nabla V \equiv \mathbf{0}$ για οποιαδήποτε συνάρτηση V, ο νόμος του Faraday ικανοποιείται όταν το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται στην πιο γενική του μορφή και από τα δύο δυναμικά, το ηλεκτρικό δυναμικό V και το μαγνητικό δυναμικό $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

Οι εξισώσεις Maxwell χωρίς πηγές

Χωρίς πηγές (φορτία και ρεύματα), οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν συμμετρική μορφή:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Η συμμετρία τους φαίνεται καθαρότερα όταν αποσυνδέσουμε τα πεδία, ανεβάζοντας την τάξη των εξισώσεων από πρώτη σε δεύτερη:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}\right. \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$$

Τα δυναμικά με και χωρίς πηγές

Από το νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -(\nabla V + \partial \mathbf{A}/\partial t)$:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Από το νόμο των Ampère-Maxwell για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -(\nabla V + \partial \mathbf{A}/\partial t)$ και το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Επιβάλλουμε στα δυναμικά τη **συνθήκη βαθμίδας Lorenz**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases}$$

και χωρίς πηγές:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας των δυναμικών

Μπορούμε να προσθέσουμε στο μαγνητικό δυναμικό τη βαθμίδα μιας συνάρτησης χωρίς να αλλάξει το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \to \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\phi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Για να μην αλλάξει και το ηλεκτρικό πεδίο με την αλλαγή του μαγνητικού δυναμικού, πρέπει να αφαιρέσουμε από το ηλεκτρικό δυναμικό τη χρονική παράγωγο της ίδιας συνάρτησης:

$$V \to V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}' = -\left(\nabla V' + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}\right) = -\left(\nabla V - \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}\right)$$

$$= -\left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{E}$$

Οι μετασχηματισμοί των δυναμικών:

$$\boxed{V \to V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi}$$

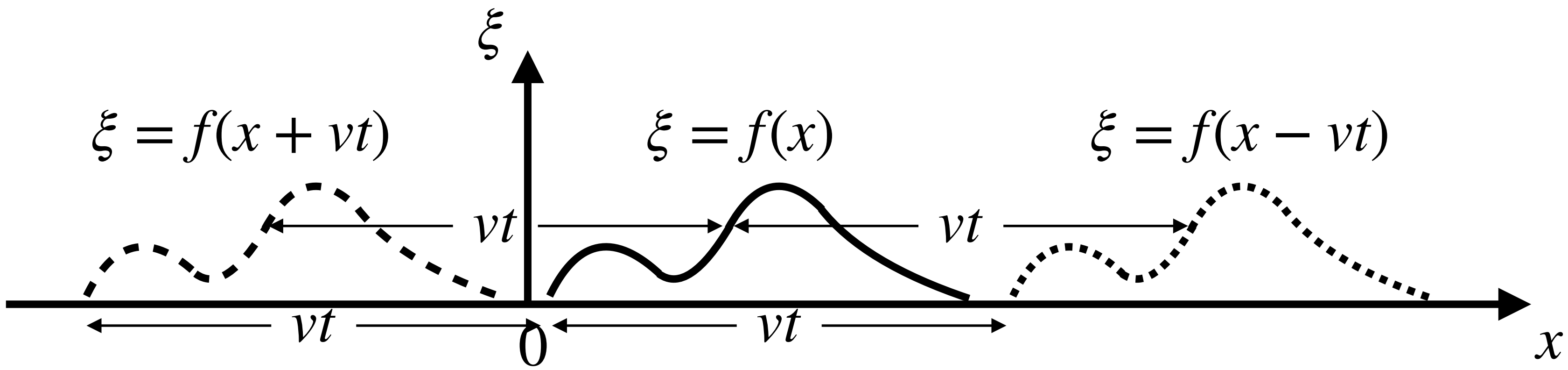
λέγονται **μετασχηματισμοί βαθμίδας** και επιτρέπουν την επιβολή μιας αυθαίρετης συνθήκης στα δυναμικά, όπως η συνθήκη βαθμίδας του Lorenz:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

η οποία ικανοποιείται όταν η συνάρτηση ϕ είναι λύση της εξίσωσης:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

Κυματική διάδοση



$$\xi = f(u), \qquad u = x \pm vt \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 \xi}{du^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{d^2 \xi}{du^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Γενική λύση:

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Περιοδική λύση:

$$\xi = A\cos(x - vt) + B\sin(x + vt)$$

$$= A\cos\left[(kx - \omega t)\cdot \lambda/(2\pi)\right] + B\left[\sin(kx - \omega t)\cdot \lambda/(2\pi)\right]$$

$$k = 2\pi/\lambda \qquad \omega = 2\pi v/\lambda = 2\pi\nu = 2\pi/T$$

Σε τρεις διαστάσεις:

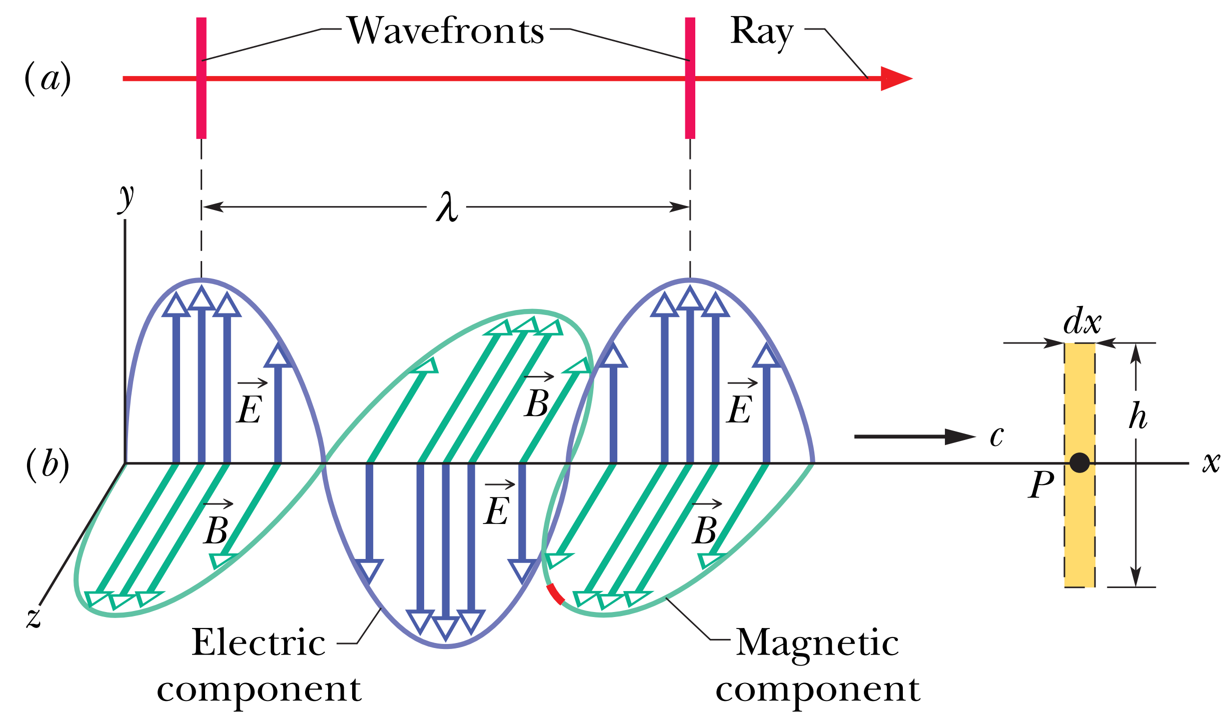
$$\mathbf{u} = \mathbf{r} \pm \mathbf{v}t \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad\qquad \mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{r} \pm \mathbf{v}t \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{a} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}B_0 \sin(kx - \omega t)$$

Πεδία κάθετα μεταξύ τους και στη διεύθυνση διάδοσης.



$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \hat{\mathbf{z}}kE_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{y}}\omega E_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\hat{\mathbf{y}}kB_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{z}}\omega B_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1),\ (4),\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad kE_0 = \omega B_0 \\ (2),\ (3),\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mu_0\varepsilon_0\omega E_0 = kB_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \pm c \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0}{B_0} = c$$

Μεταφορά ενέργειας από Η/Μ κύματα

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

Πυκνότητα ενέργειας Η/Μ πεδίου.

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathbf{E} + \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{B} = \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E} - \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B} \\ \\ \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\nabla\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \\ \\ \quad \mathbf{S} \equiv \dfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0$$

Διατήρηση ενέργειας.

Διάνυσμα Poynting.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$$

Διατήρηση ηλεκτρικού φορτίου.

Εξισώσεις “συνέχειας”.

Μεταφορά ορμής και στροφορμής από Η/Μ κύματα

Η μεταφορά ενέργειας από ένα Η/Μ κύμα συνεπάγεται και μεταφορά ορμής:

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = -d\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{v}\cdot d\mathbf{p} = -c\,dp$$

Για επίπεδο Η/Μ κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση z:

$$dU = -\int_a \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}\,dt = -\int_a S_z\,dx\,dy\,dt \quad\Rightarrow\quad c\,dp = \int_a S_z\,dx\,dy\,dt \quad\Rightarrow\quad c\frac{dz}{dt}\,\frac{d^3p}{dx\,dy\,dz} = c^2 g_z = S_z$$

όπου g_z είναι η z-συνιστώσα ενός διανύσματος $\mathbf{g}$ που περιγράφει την πυκνότητα της ορμής η οποία μεταφέρεται από το κύμα. Γενικεύοντας το αποτέλεσμα για τυχαία διεύθυνση διάδοσης, αυτή η πυκνότητα δίνεται από το διάνυσμα Poynting διαιρεμένο με c^2:

$$\boxed{\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}}$$

Επίσης, η πυκνότητα μεταφερόμενης στροφορμής μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{g} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{S}}{c^2}}$$

Πίεση ακτινοβολίας

Για ένα κύμα που απορροφάται από την επιφάνεια εμβαδού A ενός σώματος, η ορμή που μεταφέρει στο σώμα είναι ανάλογη της ενέργειας που απορροφάται, $\Delta p = \Delta U / c$, ενώ για ένα κύμα που ανακλάται κάθετα στην επιφάνεια, οπότε το διάνυσμα της ορμής του αντιστρέφεται, η μεταφερόμενη ορμή είναι $\Delta p = 2\Delta U / c$. Επομένως, το κύμα ασκεί μια δύναμη στο σώμα ανάλογη με την ορμή που του μεταφέρει στο χρόνο Δt:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{\Delta U}{\Delta t}$$ Πλήρης απορρόφηση.

$$F = \frac{2}{c}\frac{\Delta U}{\Delta t}$$ Πλήρης ανάκλαση.

Η δύναμη αυτή συνεπάγεται μια πίεση της ακτινοβολίας πάνω στην επιφάνεια του σώματος, $p_r = F/A$.

$$\Delta U = \frac{\Delta U}{A\Delta t} A\Delta t = IA\Delta t$$

όπου: $$I = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt}$$

η ένταση της ακτινοβολίας (ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας).

$$\Rightarrow \begin{cases} p_r = \dfrac{I}{c} & \text{Πλήρης απορρόφηση.} \\ p_r = \dfrac{2I}{c} & \text{Πλήρης ανάκλαση.} \end{cases}$$

Γενικά: $$\frac{I}{c} \le p_r \le 2\frac{I}{c}$$