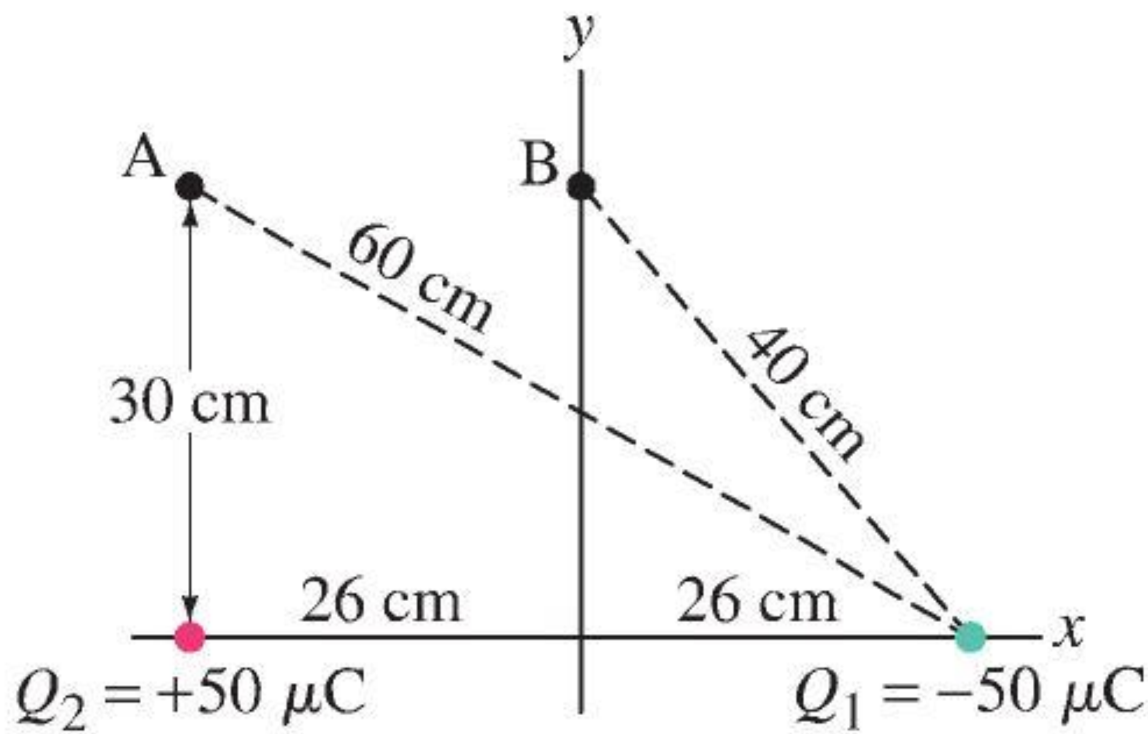
Άσκηση 1: Δυναμικό από δύο φορτία

Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό α) στο σημείο Α του σχήματος εξαιτίας των δύο φορτίων που απεικονίζονται και β) στο σημείο Β.



Άσκηση 1

ΛΥΣΗ: α) Αθροίζουμε τα δυναμικά στο σημείο Α εξαιτίας του καθενός φορτίου Q_1 και Q_2

$$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}2} + V_{\mathrm{A}1}$$

$$= k\frac{Q_2}{r_{2\mathrm{A}}} + k\frac{Q_1}{r_{1\mathrm{A}}}$$ όπου $r_{1\mathrm{A}} = 60\ \mathrm{cm}$ και $r_{2\mathrm{A}} = 30\ \mathrm{cm}$

Τότε:

$$V_{\mathrm{A}} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(5.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{C})}{0.30\ \mathrm{m}} + \frac{(9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(-5.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{C})}{0.60\ \mathrm{m}}$$

$$= 1.50 \times 10^6\ \mathrm{V} - 0.75 \times 10^6\ \mathrm{V}$$

$$= 7.5 \times 10^5\ \mathrm{V}.$$

Άσκηση 1

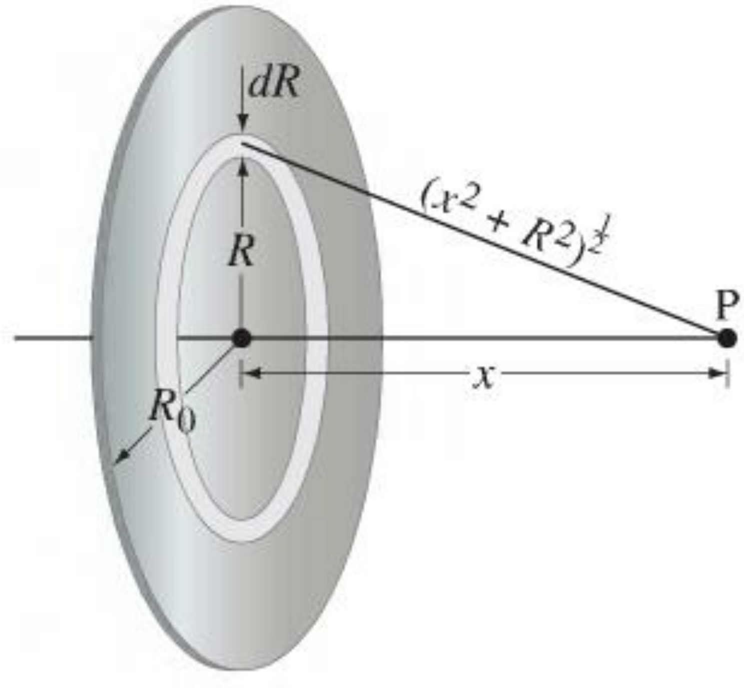
β) Στο σημείο B, $r_{1\mathrm{B}} = r_{2\mathrm{B}} = 0.40\ \mathrm{m}$, οπότε

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{B}} &= V_{\mathrm{B2}} + V_{\mathrm{B1}} \\
&= \frac{(9.0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(5.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{C})}{0.40\ \mathrm{m}} \\
&\quad + \frac{(9.0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(-5.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{C})}{0.40\ \mathrm{m}} \\
&= 0\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

V

Άσκηση 2: Δυναμικό φορτισμένου δίσκου

- Ένας λεπτός, επίπεδος κυκλικός δίσκος ακτίνας R_0, φέρει μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου Q, (βλ.σχήμα). Προσδιορίστε το δυναμικό σε κάποιο σημείο P του άξονα του δίσκου, σε απόσταση x από το κέντρο του.



Άσκηση 2

ΛΥΣΗ:

εμβαδό δίσκου: πR_0 κάθε λεπτός βρόχος: $dA = (2\pi R)(dR)$

Έτσι,

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi R dR}{\pi R_0^2} \Rightarrow dq = Q\frac{(2\pi R)(dR)}{\pi R_0^2} = \frac{2QRdR}{R_0^2}$$

Επομένως, το δυναμικό στο σημείο P, θα είναι:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}\int_0^{R_0} \frac{R\,dR}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_{R=0}^{R=R_0}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}\left[(x^2 + R_0^2)^{\frac{1}{2}} - x\right].$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για $x \gg R_0$

$$V \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}\left[x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_0^2}{x^2}\right) - x\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

(εξίσωση σημειακού φορτίου)

Άσκηση 3

Υποθέστε ότι ο επίπεδος κυκλικός δίσκος της προηγούμενης άσκησης φέρει μία μη ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \mathrm{a}\,R^2$ όπου R η απόσταση από το κέντρο του δίσκου. Βρείτε το δυναμικό $V(x)$ στα σημεία του άξονα x, ως προς το $V=0$ στο $r=\infty$

ΛΥΣΗ: Σε αυτήν την περίπτωση ο λεπτός βρόγχος ακτίνας R και πάχους dR τώρα θα είναι $dq = \sigma dA = \left(\mathrm{a}\,R^2\right)\left(2\pi R dR\right)$.

Για συνεχή κατανομή φορτίου:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R_0} \frac{\left(aR^2\right)\left(2\pi R dR\right)}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{a}{2\varepsilon_0}\int_0^{R_0} \frac{R^3 dR}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

Άσκηση 3

θέτουμε $x^2 + R^2 = \mathrm{u}^2$

$$x^2 + R^2 = \mathrm{u}^2 \rightarrow R^2 = \mathrm{u}^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 2RdR = 2\mathrm{udu}$$

$$V = \frac{a}{2\varepsilon_0}\int_0^{R_0} \frac{R^3 dR}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{a}{2\varepsilon_0}\int_{R=0}^{R=R_0} \frac{\left(u^2 - x^2\right) udu}{u} = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left[\tfrac{1}{3}u^3 - ux^2\right]_{R=0}^{R=R_0}$$

$$= \frac{a}{2\varepsilon_0}\left[\tfrac{1}{3}\left(x^2 + R^2\right)^{3/2} - x^2\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}\right]_{R=0}^{R=R_0}$$

$$= \frac{a}{2\varepsilon_0}\left[\left\{\tfrac{1}{3}\left(x^2 + R_0^2\right)^{3/2} - x^2\left(x^2 + R_0^2\right)^{1/2}\right\} + \tfrac{2}{3}x^3\right]$$

$$= \boxed{\frac{a}{6\varepsilon_0}\left[\left(R_0^2 - 2x^2\right)\left(x^2 + R_0^2\right)^{1/2} + 2x^3\right]}, \; x > 0$$

Άσκηση 4

- Ένα κοίλο σφαιρικό κέλυφος φέρει πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \frac{k}{r^2}$$

στην περιοχή $a \le r \le b$. Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο. (Ως σημείο αναφοράς να ληφθεί το άπειρο)

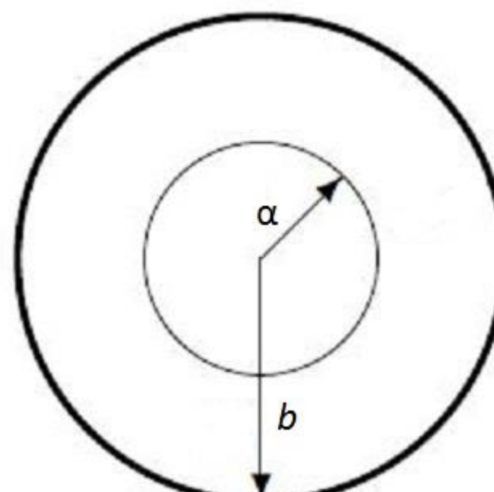
ΛΥΣΗ

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις τρεις διακριτές περιοχές είναι:

$$r < a \rightarrow E = 0$$

$$a < r < b \rightarrow E = \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r-a}{r^2}$$

$$r > b \rightarrow E = \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot \frac{b-a}{r^2}$$



Άσκηση 4

$$V(r=0) = -\int_{\infty}^{0} \vec{E}d\vec{l} = -\left[\int_{\infty}^{b} \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot \frac{b-a}{r^2} dr + \int_{b}^{a} \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r-a}{r^2} dr + 0\right] \Rightarrow$$

$$V(r=0) = -\frac{k}{\varepsilon_0}\left[(b-a)\int_{\infty}^{b} \frac{dr}{r^2} + \int_{b}^{a} \cdot \frac{1}{r} dr - a\int_{b}^{a} \frac{dr}{r^2}\right] \Rightarrow$$

$$V(r=0) = -\frac{k}{\varepsilon_0}\left[\frac{(b-a)}{b} + \ln\frac{a}{b} - a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right] \Rightarrow$$

$$V(r=0) = -\frac{k}{\varepsilon_0}\left[1 - \frac{a}{b} + \ln\frac{a}{b} - 1 + \frac{a}{b}\right] \Rightarrow$$

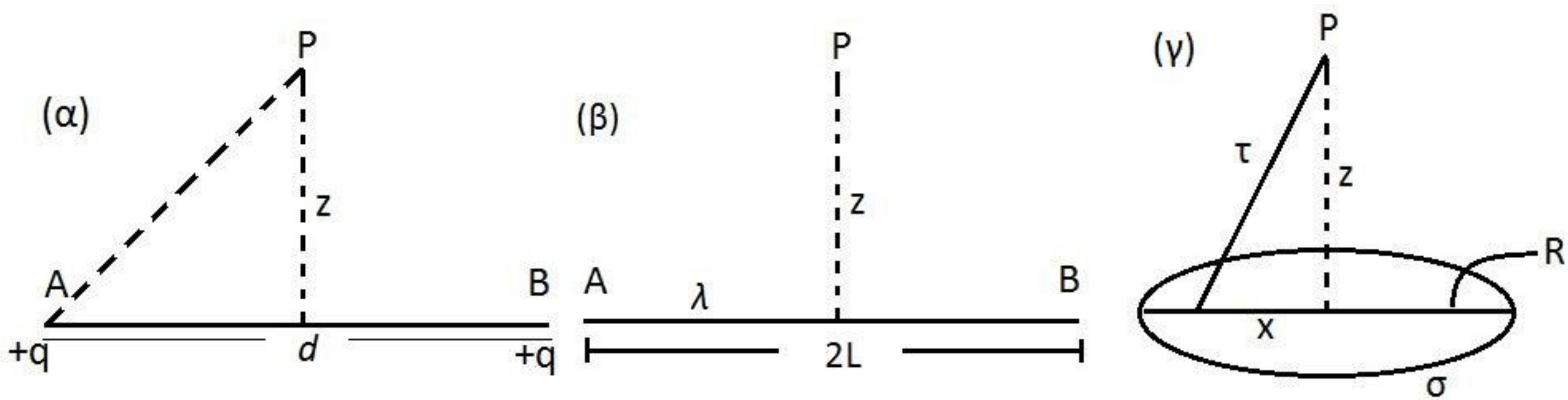
$$V(r=0) = -\frac{k}{\varepsilon_0} \ln\frac{a}{b} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o$$

Άσκηση 5

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση που δίνει το δυναμικό για γραμμικά και επιφανειακά φορτία βρείτε το δυναμικό σε απόσταση z πάνω από το κέντρο των κατανομών φορτίου στις 3 περιπτώσεις* του παρακάτω σχήματος. Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε την ένταση $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$

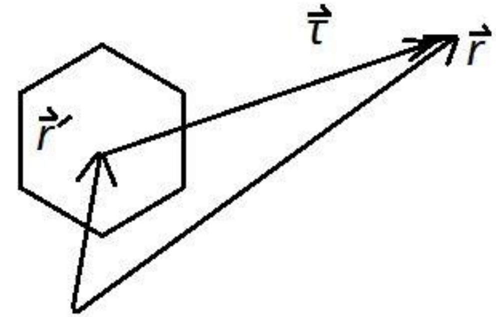
*[α)Δύο σημειακά φορτία, β)Ομοιόμορφο γραμμικό φορτίο,

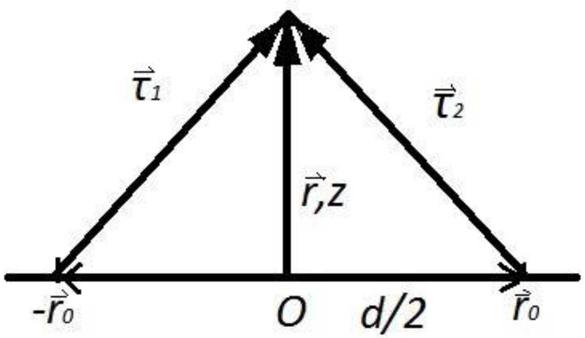
γ) Ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο]



Άσκηση 5

α) περίπτωση: $V\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{\tau}\right|}d\tau'$ όπου $\vec{\tau}=\vec{r}-\vec{r'}$





$$\vec{\tau}_1-\vec{r}_0=\vec{r}\Rightarrow\vec{\tau}_1=\vec{r}+\vec{r}_0$$

$$\vec{\tau}_2+\vec{r}_0=\vec{r}\Rightarrow\vec{\tau}_2=\vec{r}-\vec{r}_0$$

$$\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}$$

$$\rho\left(\vec{r'}\right)=q\delta^{(3)}\left(\vec{r'}-\vec{r}_0\right)+q\delta^{(3)}\left(\vec{r'}+\vec{r}_0\right)$$

$$V\left(\vec{r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\delta^{(3)}\left(\vec{r'}-\vec{r}_0\right)+\delta^{(3)}\left(\vec{r'}+\vec{r}_0\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}d\tau'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}+\frac{1}{\left|\vec{r}+\vec{r}_0\right|}\right]\Rightarrow$$

$$V\left(\vec{r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{\tau}_2\right|}+\frac{1}{\left|\vec{\tau}_1\right|}\right]=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\left|\vec{\tau}\right|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

Άσκηση 5

Συνέχεια..

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}\cdot 2z = \frac{2qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$$

β) περίπτωση:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\frac{\lambda dx}{\tau}$$ όπου $$\tau = \left(z^2+x^2\right)^{1/2}$$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\lambda\int_0^L\frac{dx}{\left(z^2+x^2\right)^{1/2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^L\frac{dx}{\left(z^2+x^2\right)^{1/2}}$$

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^L\frac{dx}{\left(z^2+x^2\right)^{1/2}} = \ln\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{z} = \ln\left(L+\sqrt{L^2+z^2}\right) - \ln z$$

οπότε

$$V(z) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{z}$$

Άσκηση 5

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{L+\sqrt{L^2+z^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2z\cdot\frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}}\right] \Rightarrow$$

$$E_z = -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{\sqrt{\ldots}}{z\sqrt{\ldots}} + \frac{z^2/\left(L+\sqrt{\ldots}\right)}{z\sqrt{\ldots}}\right] = -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z^2/\left(L+\sqrt{\ldots}\right)-\sqrt{\ldots}}{z\sqrt{\ldots}} \Rightarrow$$

$$E_z = -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z\sqrt{\ldots}}\left[\frac{z^2 - L\sqrt{\ldots} - \left(L^2+z^2\right)}{L+\sqrt{\ldots}}\right] = -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z\sqrt{\ldots}}\left(-1\right)\frac{L+\sqrt{\ldots}}{L+\sqrt{\ldots}} \Rightarrow$$

$$E_z = +\frac{2\lambda L}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z\sqrt{z^2+L^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z\left(z^2+L^2\right)^{1/2}}$$

Όπου, φυσικά $q = 2\lambda L$

Άσκηση 5

- γ) περίπτωση:

$$V(z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\frac{\sigma d\alpha}{\tau}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{x=0}^{x=R}\frac{2\pi x dx}{\left(z^2+x^2\right)^{1/2}}\Rightarrow$$

$$V(z)=\frac{\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{x=0}^{x=R}\frac{dx^2}{\left(z^2+x^2\right)^{1/2}}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\cdot\int_{y=z^2}^{y=\left(R^2+z^2\right)}\frac{dy}{y^{1/2}}\Rightarrow \qquad y=x^2+z^2$$

$$V(z)=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\cdot\left(+2y^{1/2}\right)\Big|_{z^2}^{R^2+z^2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\sqrt{z^2+R^2}-z\right]$$

$$V(z)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\left(z^2+R^2\right)^{1/2}-z\right]$$

Ενώ το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$E_z=-\frac{dV}{dz}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 2z\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}-1\right]=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}-1\right]$$

Άσκηση 6

❖ Δίνεται επιφάνεια κώνου της οποίας το ύψος α είναι το ίδιο με αυτό της ακτίνας της βάσης του. Η επιφάνεια φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ. Να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ της κορυφής P και του κέντρου Q της βάσης.

ΛΥΣΗ

Μελετάμε την ένταση του πεδίου στα σημεία P,Q. Για την εφαρμογή του Θ.Gauss κλείνουμε μέρος της επιφάνειας με κύλινδρο ύψους x.

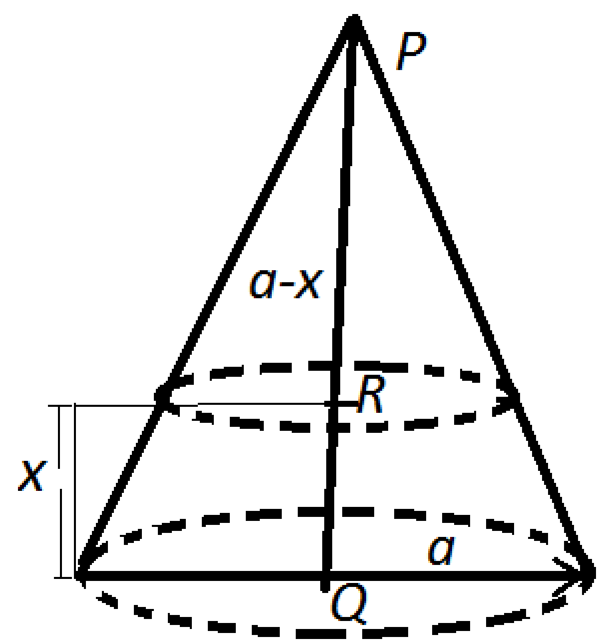
Τότε:

$$\oint \vec{\mathrm{E}} d\vec{a} = \frac{q_{\varepsilon\gamma\kappa.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathrm{E}(x)\cdot \pi\alpha^2 - \mathrm{E}(x=0)\cdot\pi\alpha^2 = \frac{q_{\varepsilon\gamma\kappa.}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{\varepsilon\gamma\kappa.} = \int_0^x \sigma 2\pi(\alpha - x')\cdot\sqrt{2}dx' = 2\sqrt{2}\pi\left(\alpha x - \frac{x^2}{2}\right)\sigma \Rightarrow$$

$$q_{\varepsilon\gamma\kappa.} = 2\sqrt{2}\pi\frac{2\alpha x - x^2}{2}\sigma = \sqrt{2}\pi x(2\alpha - x)\sigma$$

$$\mathrm{E}(x) - \mathrm{E}(0) = \frac{1}{\pi\alpha^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{2}\pi x(2\alpha - x)\sigma$$



Άσκηση 6

$$\frac{dV_{(x)}}{dx}-\frac{dV_{(0)}}{dx}=-\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}x\left(2\alpha-x\right)=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}x\left(x-2\alpha\right)$$

$$V'_{(x)}=V'_{(0)}+\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}x\left(x-2\alpha\right)$$

Αλλά το $V_{(0)}=\sigma\tau\alpha\theta.$ διότι $\mathrm{E}_{(0)}=0$, εκτός αγωγού. Τότε $V'_{(0)}=0$

$$V'_{(x)}=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}x\left(x-2\alpha\right)$$

$$V_{(x)}=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}\left[\frac{x^3}{3}-2a\,\frac{x^2}{2}\right]+C$$

όπου $C=V_{(x=0)}$

Άρα $$V_{(x)}=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}\left[\frac{x^3}{3}-ax^2\right]+V_{(0)}$$

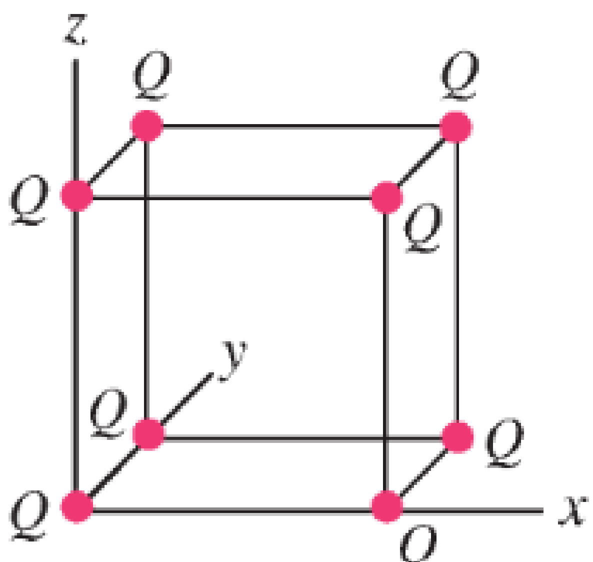
και $$V_{(x=a)}-V_{(x=0)}=-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0\alpha^2}\cdot a^3=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot a$$

☺ Άσκηση για το σπίτι ☺

Σε κάθε κορυφή ενός κύβου πλευράς ℓ τοποθετείται ένα σημειακό φορτίο Q.

i) Ποιο είναι το δυναμικό στο κέντρο του κύβου;*

ii) Ποιο είναι το δυναμικό σε κάθε κορυφή λόγω των επτά άλλων φορτίων;



* $V = 0, r = \infty$

Ηλεκτροστατική Ενέργεια

Άσκηση 1

❖ Να βρεθεί η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο χώρο λόγω του Ηλεκτροστατικού πεδίου που οφείλεται σε μία ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R ολικού φορτίου q.

ΛΥΣΗ

α) $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{E}^2 d\tau$ με πυκνότητα ενέργειας $U = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathrm{E}^2$

Γνωρίζοντας ότι

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \qquad \text{για} \quad r < R$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad r > R$$

Άσκηση 1

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \mathrm{E}^2 d\tau+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \mathrm{E}^2 d\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\int_0^R \frac{\rho^2}{9\varepsilon_0^2}r^2 r^2 dr\int d\Omega+\int_R^\infty \frac{1}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{q^2}{r^4}r^2 dr\int d\Omega\right\}\Rightarrow$$

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\rho^2}{9\varepsilon_0^2}4\pi\frac{R^5}{5}+\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{q^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}4\pi\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty\Rightarrow$$

$$W=\frac{2\pi}{45}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^5+\frac{1}{2}\frac{4\pi q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{R}\Rightarrow$$

$$\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$W=\frac{2\pi}{45\varepsilon_0}\frac{q^2}{\frac{16}{9}\pi^2 R^6}R^5+\frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\Rightarrow$$

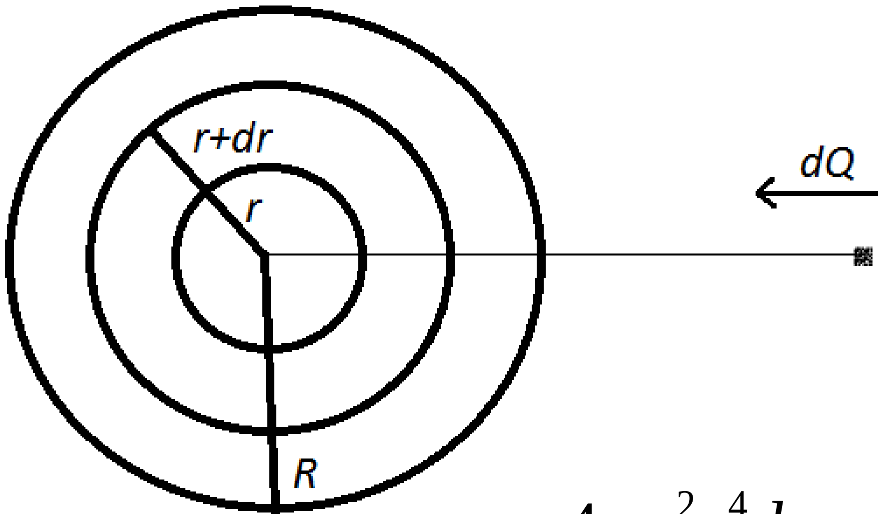
$$W=\frac{1}{2\cdot 5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}+\frac{1}{2\cdot 5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}=\frac{6}{10}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\Rightarrow$$

$$\boxed{W=\frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}}$$

Άσκηση 1

β) 2^{ος} τρόπος :

$$dW = V\left(Q\right)dQ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}dQ$$



$$Q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow dQ = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$dW = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0} \Rightarrow W = \int_0^R dW = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{1}{5}R^5$$

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5 \Rightarrow W = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\frac{q^2}{\frac{16}{9}\pi^2 R^6}R^5$$

$$\boxed{W = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}}$$

Άσκηση 2

- Να βρεθεί η ενέργεια μιάς ομοιόμορφα φορτισμένης σφαιρικής επιφάνειας ολικού φορτίου q και ακτίνας R.

α)
$$W=\frac{1}{2}\int Vdq=\frac{1}{2}\int \sigma V da=\frac{1}{2}\int \sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}da \Rightarrow$$

όπου

$$V(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$W=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int \sigma da=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

β)
$$\vec{\mathbf{E}}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\Rightarrow \mathrm{E}^2=\frac{q^2/r^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}$$ για κάθε $r>R$.

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}\frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{r^4}r^2dr\int_{\Omega}d\Omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}4\pi\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{\infty}\Rightarrow$$

$$W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$