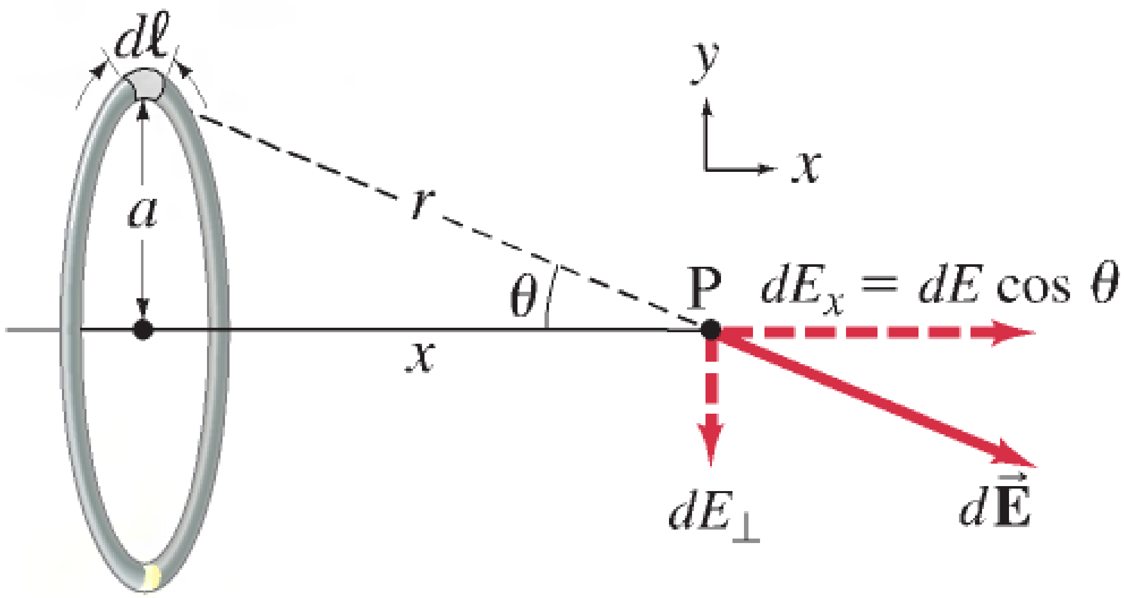
Μέρος Β2: Ηλεκτρικό Πεδίο σε συνεχείς κατανομές – Ηλεκτρικά Δίπολα

- Άσκηση ΙΙΙ: Φορτίο σε κυκλικό βρόχο
- Άσκηση ΙV: Φορτισμένη γραμμή μεγάλου μήκους
- Άσκηση V_{α} : Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής
- Άσκηση V_{β}: Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής
- Άσκηση VI: Ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο
- Άσκηση VII - IX: Ηλεκτρικά δίπολα

Άσκηση ΙΙΙ: Φορτίο σε κυκλικό βρόχο

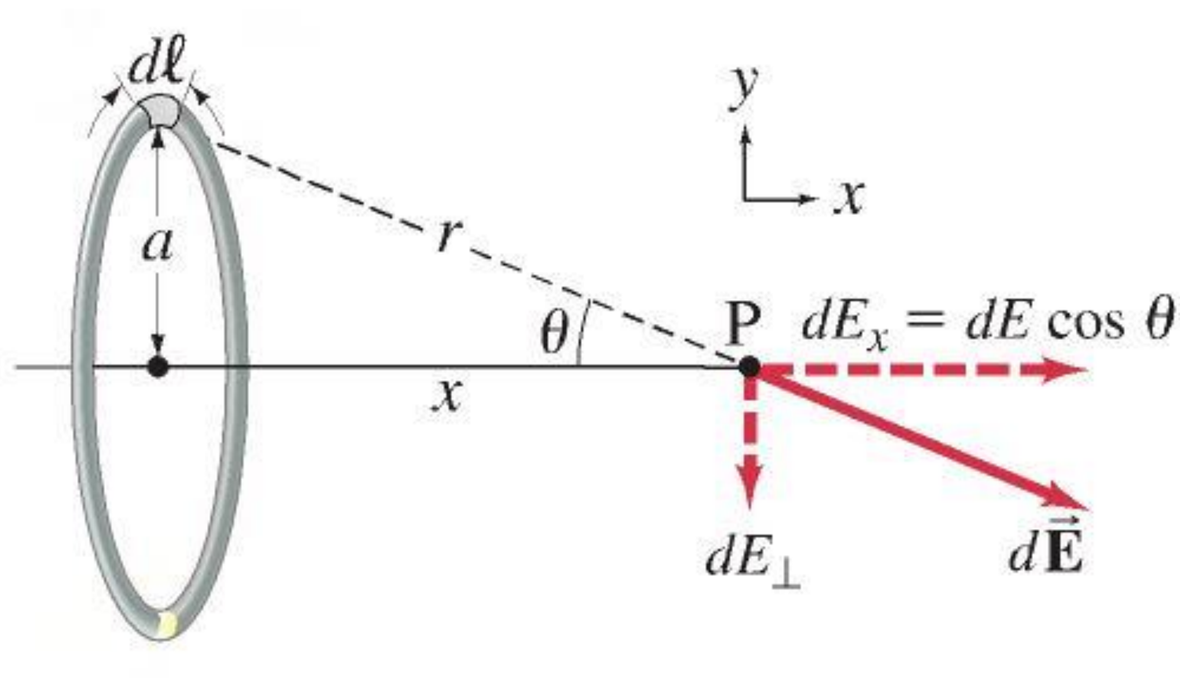
❖ Ένα λεπτό, δακτυλιοειδές σώμα ακτίνας α φέρει συνολικό φορτίο $+Q$ που κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος του. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο P πάνω στον άξονά του, σε απόσταση x από το κέντρο του. Δίνεται η κατανομή του φορτίου ανά μονάδα μήκους, $\lambda(C/m)$



Άσκηση III: Απάντηση

- **Μεθοδολογία και Λύση:**

1. **Σχεδίαση διαγράμματος**



Άσκηση III: Απάντηση

2. **Εφαρμογή του νόμου του Coulomb**

Το ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ που οφείλεται σε αυτό το τμήμα του βρόχου μήκους $d\ell$ έχει μέτρο

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2}$$

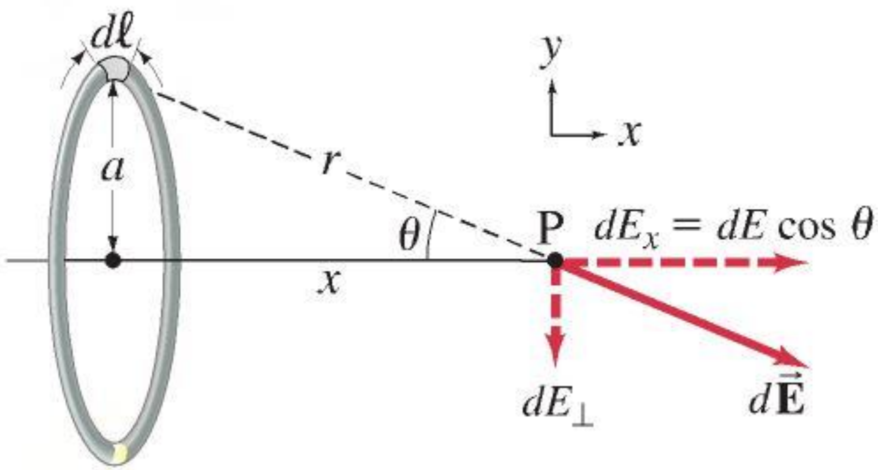
$$dQ = Q\left(\frac{d\ell}{2\pi\alpha}\right) = \lambda d\ell$$

Όπου $\lambda = Q/2\pi\alpha$ είναι η κατανομή ανά μονάδα μήκους. Έπειτα, γράφουμε το dE ως

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda d\ell}{r^2}$$

Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

3. **Διανυσματική** πρόσθεση και χρήση της **συμμετρίας**



Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

Το συνολικό πεδίο θα είναι τότε

$$E = E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int\frac{d\ell}{r^2}\cos\theta$$

Αφού $\cos\theta = x/r$, όπου $r = \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}$, έχουμε

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi\alpha} d\ell = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x\left(2\pi\alpha\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Άσκηση III: Απάντηση

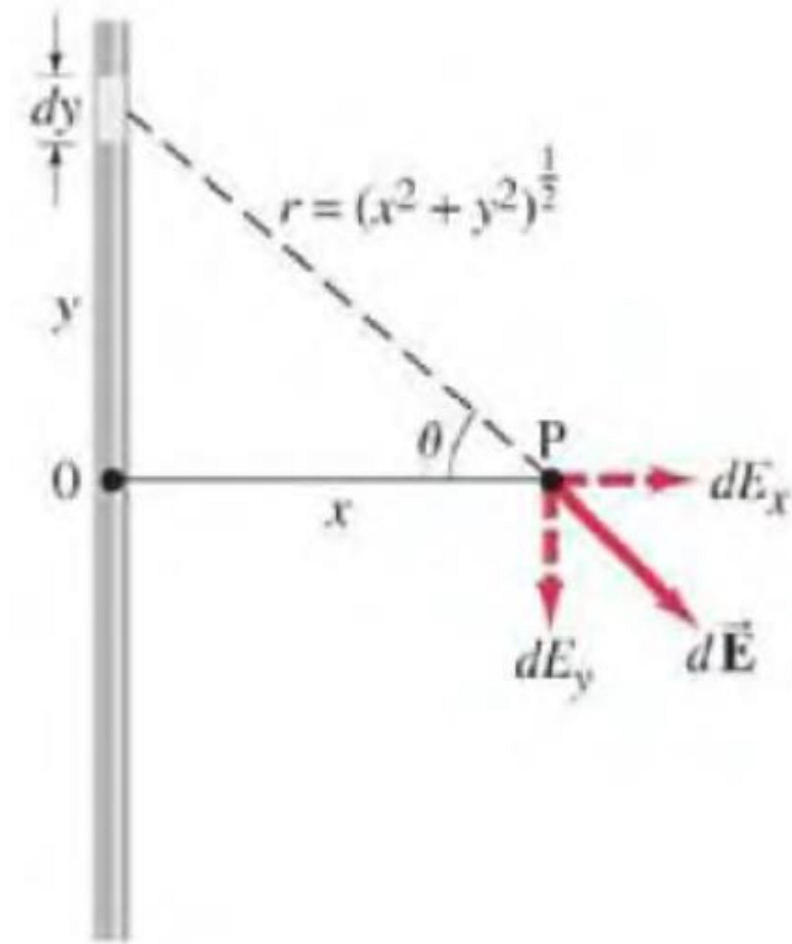
4.Έλεγχος λογικών αποτελεσμάτων

Παρατηρούμε, ότι για μεγάλες αποστάσεις *x* >> *α* ο τύπος, στον οποίο καταλήξαμε, ανάγεται στον $E = Q\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 x^2\right)$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, αφού σε μεγάλες αποστάσεις, ο βρόχος θα φαίνεται ως σημειακό φορτίο (εξάρτηση από $1/r^2$). Επίσης, για $x = 0$ προκύπτει $E = 0$, όπως αναμενόταν, στο κέντρο του κυκλικού βρόχου αφού όλες οι συνιστώσες αλληλλοαναιρούνται.

Άσκηση IV: Φορτισμένη γραμμή μεγάλου μήκους

- Καθορίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε τυχαίο σημείο P σε απόσταση x από το μέσο 0 μιας γραμμής πολύ μεγάλου μήκους (π.χ. ενός καλωδίου), η οποία φέρει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου. Υποθέστε, ότι το x είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του καλωδίου και έστω λ η κατανομή ανά μονάδα μήκους (C/m).

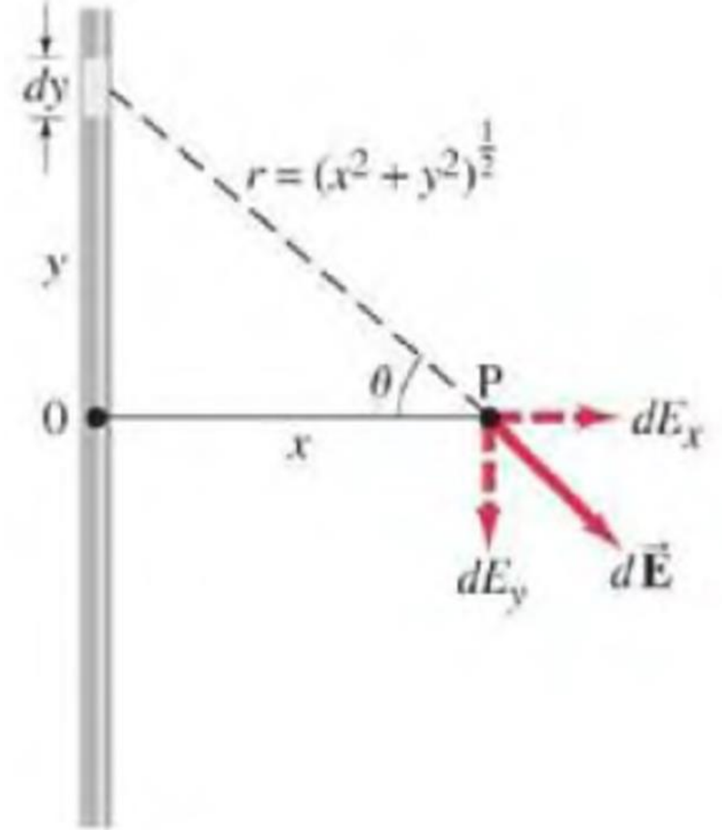


Άσκηση IV: Απάντηση

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{\left(x^2+y^2\right)}$$

Όπου $r = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ όπως προκύπτει από το σχήμα. Το διάνυσμα $d\vec{\mathbf{E}}$ έχει συνιστώσες dE_x και dE_y όπως φαίνεται στο σχήμα, με $dE_x = dE\cos\theta$ και $dE_y = dE\sin\theta$



Άσκηση IV: Απάντηση

ΛΥΣΗ: :

$$E_y = \int dE_y$$

$$E_y = \int dE \sin\theta = 0$$

$$E = E_x = \int dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cos\theta dy}{x^2 + y^2}$$

Το ολοκλήρωμα εδώ είναι κατά y , και το x παίζει το ρόλο σταθεράς.

αφού $y = x\tan\theta$, θα είναι $dy = xd\theta / \cos^2\theta$ και

$$\cos\theta = x / \sqrt{x^2 + y^2} \qquad 1\big/\left(x^2 + y^2\right) = \cos^2\theta \big/ x^2$$

οπότε

$$\left(\cos\theta\right)\left(xd\theta \big/ \cos^2\theta\right)\left(\cos^2\theta \big/ x^2\right) = \cos\theta d\theta \big/ x$$

Άσκηση IV: Απάντηση

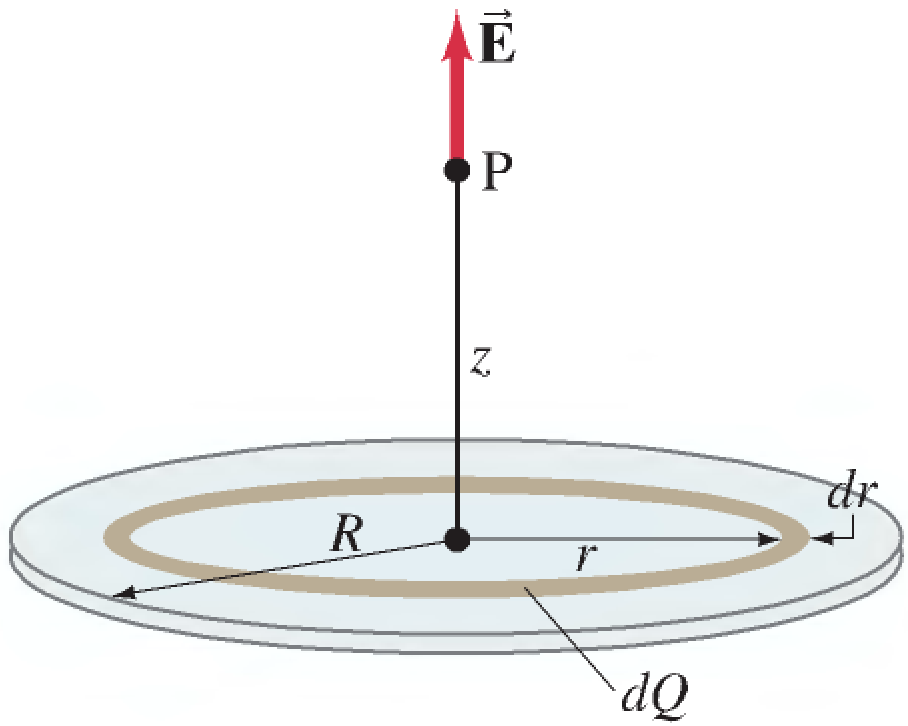
- Έτσι,

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(\sin\theta\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x}$$

Μεγάλο μήκος καλωδίου $\left(y \to \pm\infty\right)$ και για τις δύο κατευθύνσεις οπότε οι οριακές τιμές είναι $\theta = \pm\pi/2$

Άσκηση V_α : Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής

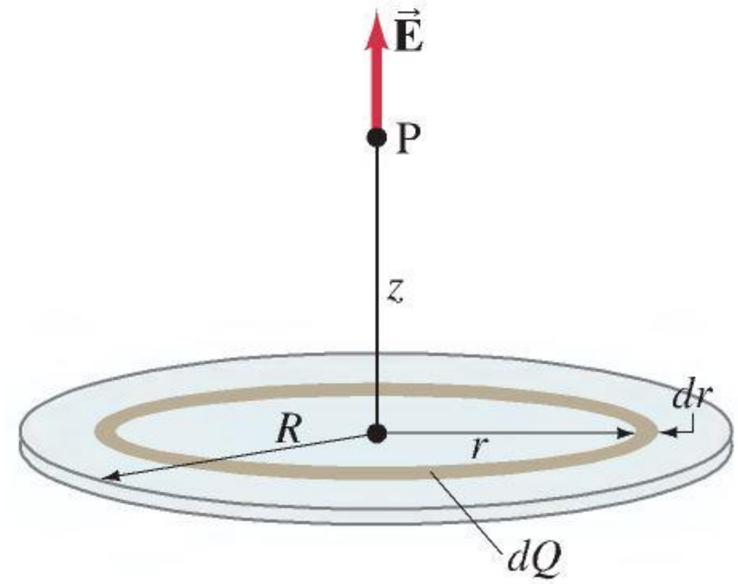
- Ένα φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ενός λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας R . Το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας $\left(C/m^2\right)$ είναι σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε τυχαίο σημείο P πάνω στον άξονα του δίσκου σε απόσταση z από το κέντρο του.



Άσκηση V$_\alpha$: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του δακτυλίου ακτίνας r που παριστάνεται στο σχήμα έχει μέτρο (βλ. αποτέλεσμα άσκ.ΙΙΙ)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zdQ}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



Όπου γράψαμε dE (αντί του E)
Για τον πολύ λεπτό κυκλικό
δακτύλιο συνολικού φορτίου dQ

Επιφάνεια δακτυλίου: $(dr)(2\pi r)$
Φορτίο ανά μονάδα επιφανείας: $\sigma = dQ/(2\pi r dr)$

Άσκηση V_α : Απάντηση

Επιλύοντας αυτή τη σχέση ως προς dE :

$$dQ\left(=\sigma 2\pi r dr\right) \qquad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma r dr}{2\varepsilon_0\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Συνεισφορά όλων των δακτυλίων, από αυτόν με $r = R$ έως τον μεγαλύτερο με $r = 0$:

$$E = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$\vec{\mathbf{E}}$: σε κάθε σημείο του άξονα του δίσκου.

Η διεύθυνση του κάθε $d\vec{\mathbf{E}}$ εξαιτίας του κάθε δακτυλίου είναι παράλληλη στο z και για αυτό το λόγο η διεύθυνση του $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλη του z .

Εάν το Q (και το σ) είναι θετικό, το $\vec{\mathbf{E}}$ έχει φορά που απομακρύνεται από το δίσκο.

Εάν το Q (και το σ) είναι αρνητικό το $\vec{\mathbf{E}}$ έχει φορά προς το δίσκο.

Άσκηση V_β: Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής

- Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση. Επιπροσθέτως, διερευνήστε πως θα διαμορφωθεί το ηλεκτρικό πεδίο στις περιπτώσεις :

- 1) $R \to \infty$
- 2) $z >> R$ και $R = \sigma\tau\alpha\theta.$

Άσκηση V_β: Απάντηση

- Υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

$$dE = dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi dr^2 \sigma z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{bmatrix} dQ = \sigma da \Rightarrow \\ dQ = \sigma r d\theta dr \Rightarrow \\ dQ = 2\pi\sigma r dr \Rightarrow \\ dQ = \sigma dr^2 \end{bmatrix}$$

Όπου da η στοιχειώδης επιφάνεια

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\pi\sigma z \cdot \int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\pi\sigma z\cdot(-2)\cdot y^{-\frac{1}{2}}\Big|_{y=z^2}^{y=z^2+R^2} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\pi\sigma z\cdot(-2)\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{1}{z}\right\} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z}-\frac{1}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Άσκηση V$_{\beta}$: Απάντηση

- 1) αν $R \to \infty$, δηλαδή ο δίσκος καταλαμβάνει όλο το επίπεδο, τότε:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + R^2/z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \xrightarrow{R \to \infty} E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

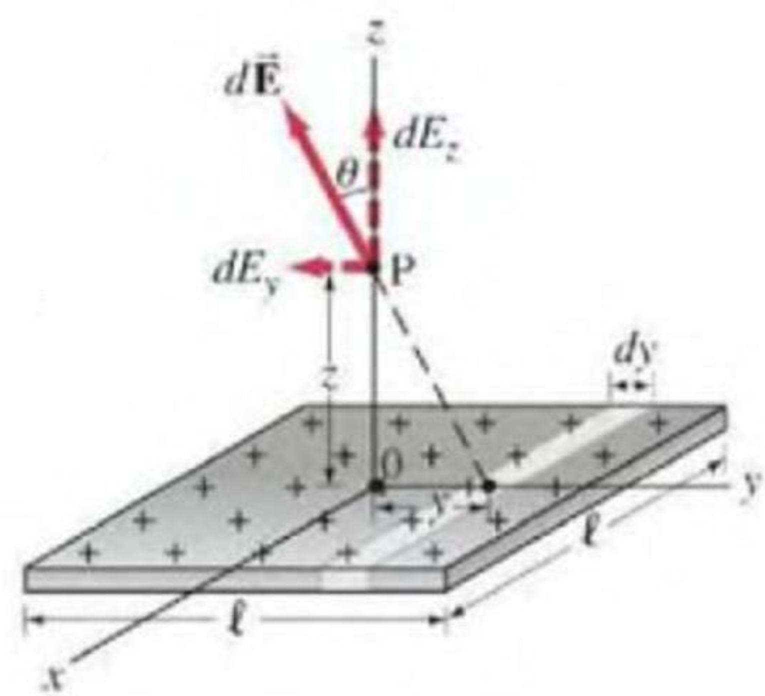
για $z > 0$

- 2) αν $R = \sigma\tau\alpha\theta.$ και $z >> R$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + R^2/z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \xrightarrow{\frac{R^2}{z^2} \to 0} E_z = 0$$

Άσκηση VI: Ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο

- Φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω σε μεγάλο επίπεδο τετράγωνο πλευράς l. Το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας (C/m2) είναι σ. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P σε μια απόσταση z πάνω από το κέντρο του επιπέδου, στο όριο $l \to \infty$.



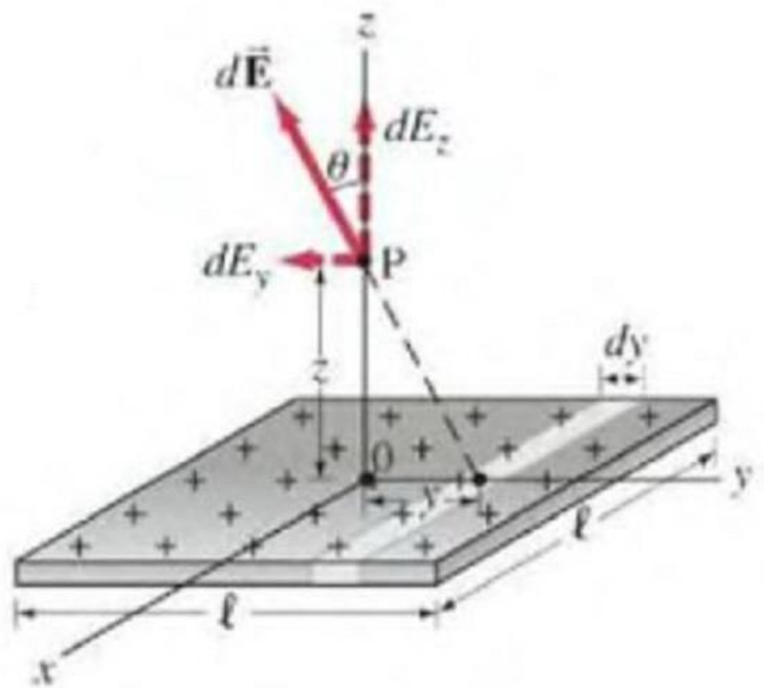
Το φορτίο σε μία λωρίδα είναι $dq = \sigma \ell dy$

Το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην λωρίδα είναι $\lambda = \frac{dq}{\ell} = \sigma dy$

Το πεδίο εξαιτίας αυτής της στενής λωρίδας είναι :

$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \left(y^2 + z^2\right)} = \frac{\sigma dy}{2\pi\varepsilon_0 \left(y^2 + z^2\right)}$$

το πεδίο δεν είναι κάθετο



ολοκληρώνουμε κατά μήκος της y διεύθυνσης για το συνολικό φορτίο

$$dE = \frac{\sigma dy}{2\pi\varepsilon_0 \left(y^2 + z^2\right)} \qquad dE_z = dE\cos\theta = \frac{\sigma z dy}{2\pi\varepsilon_0 \left(y^2 + z^2\right)}$$

$$E = E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z dy}{2\pi\varepsilon_0 \left(y^2 + z^2\right)} = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(y^2 + z^2\right)} = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{z} \left(\tan^{-1} \frac{y}{z} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty) \right] = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Άσκηση VII: Ηλεκτρικά δίπολα

- Ένα δίπολο αποτελείται από φορτία *+e* και *–e* σε απόσταση *0.68nm* και βρίσκεται εντός ηλεκτρικού πεδίου $E = 2.2 \times 10^4$ *N/C*. α) Ποια είναι η τιμή της ορμής του διπόλου? β) ποια είναι η ροπή στο δίπολο όταν είναι κάθετο στο πεδίο? γ) Ποια είναι η ροπή στο δίπολο όταν σχηματίζει γωνία 45° με το πεδίο? δ) Ποιο είναι το απαιτούμενο έργο για την περιστροφή του διπόλου από μια θέση παράλληλα στο πεδίο σε μια θέση αντι-παράλληλα σε αυτό?

α)Η διπολική ροπή δίνεται από

$$p = Q\ell = \left(1.60\times10^{-19}C\right)\left(0.68\times10^{-9}m\right) = 1.088\times10^{-28}C\cdot m \approx 1.1\times10^{-28}C\cdot m$$

β) Η ροπή στο δίπολο δίνεται από

$$\tau = pE\sin\theta = \left(1.088\times10^{-28}C\cdot m\right)\left(2.2\times10^{4}\ N/C\right)\left(\sin 90°\right) = 2.4\times10^{-24}N\cdot m$$

γ)

$$\tau = pE\sin\theta = \left(1.088\times10^{-28}C\cdot m\right)\left(2.2\times10^{4}\ N/C\right)\left(\sin 45°\right) = 1.7\times10^{-24}N\cdot m$$

δ) Το έργο μιάς εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή στην δυναμική ενέργεια

$$W = \Delta U = \left(-pE\cos\theta_{final}\right) - \left(-pE\cos\theta_{initial}\right) = pE\left(\cos\theta_{initial} - \cos\theta_{final}\right)$$

$$= \left(1.088\times10^{-28}C\cdot m\right)\left(2.2\times10^{4}\ N/C\right)\left[1-\left(-1\right)\right] = 4.8\times10^{-24}J$$

Άσκηση VIII: Ηλεκτρικά δίπολα

- Έστω ότι ένα δίπολο *p* εισάγεται σε ένα μη ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο *E = Eî* που έχει φορά κατά τον άξονα *x*. Εάν το *E* εξαρτάται μόνο από το *x*, δείξτε ότι η συνισταμένη δύναμη στο δίπολο είναι

$$F = \left(p \cdot \frac{dE}{dx}\right)\hat{\imath}$$

όπου *dE/dx* είναι η κλίση του πεδίου στην κατεύθυνση *x*.

Εάν το δίπολο είναι πολύ μικρής έκτασης, τότε η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση της θέσης, οπότε $U(x) = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}(x)$.
Δεδομένου ότι η δυναμική ενέργεια είναι γνωστή, τότε:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[-\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}(x)\right] = \vec{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dx}$$

Αφού το πεδίο δεν εξαρτάται από τις y ή z συντεταγμένες, όλες οι άλλες συνισταμένες της δύναμης θα είναι 0. Οπότε,

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \hat{\mathbf{i}} = \left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dx}\right)\hat{\mathbf{i}}.$$

Άσκηση IX: Ηλεκτρικά δίπολα

- α) Δείξτε ότι στα σημεία κατά μήκος του άξονα ενός διπόλου (κατά μήκος της ευθείας που περιέχει τα +Q και –Q), το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

για r>>l , όπου το r είναι η απόσταση από ένα σημείο στο κέντρο του διπόλου. β) Ποια είναι η φορά του Ε ?

α) κατά μήκος του άξονα x τα πεδία από τα δύο φορτία είναι παράλληλα οπότε το μέγεθος υπολογίζεται ως ακολούθως

$$E_{net} = E_{+Q} + E_{-Q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2} + \frac{(-Q)}{4\pi\varepsilon_0\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2}$$

$$E_{net} = \frac{Q\left[\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2 - \left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2\right]}{4\pi\varepsilon_0\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2\left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2}$$

$$E_{net} = \frac{Q(2r\ell)}{4\pi\varepsilon_0\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2\left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2} \approx \frac{Q(2r\ell)}{4\pi\varepsilon_0 r^4} = \frac{2Q\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται εάν το σημείο ήταν στα αριστερά του $-Q$.

β) Το ηλεκτρικό πεδίο «δείχνει» στην ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα της διπολικής ροπής.