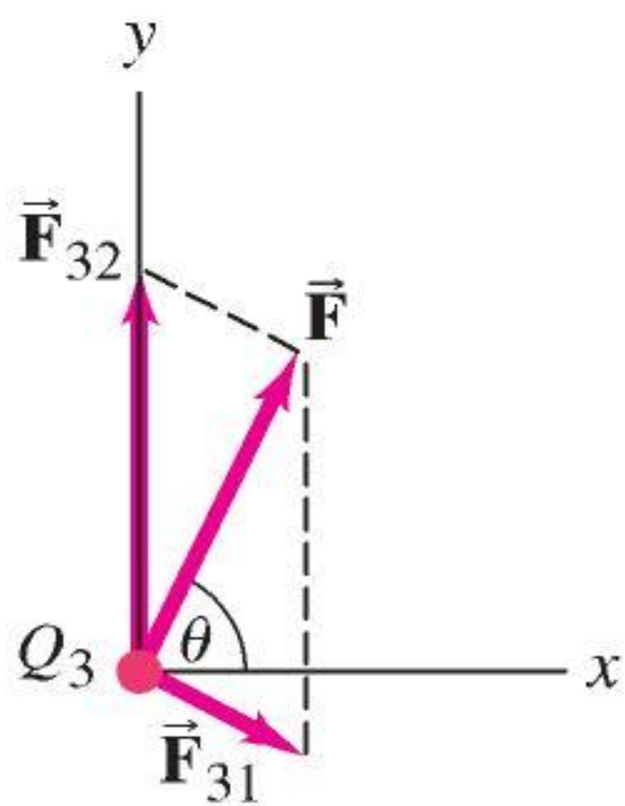
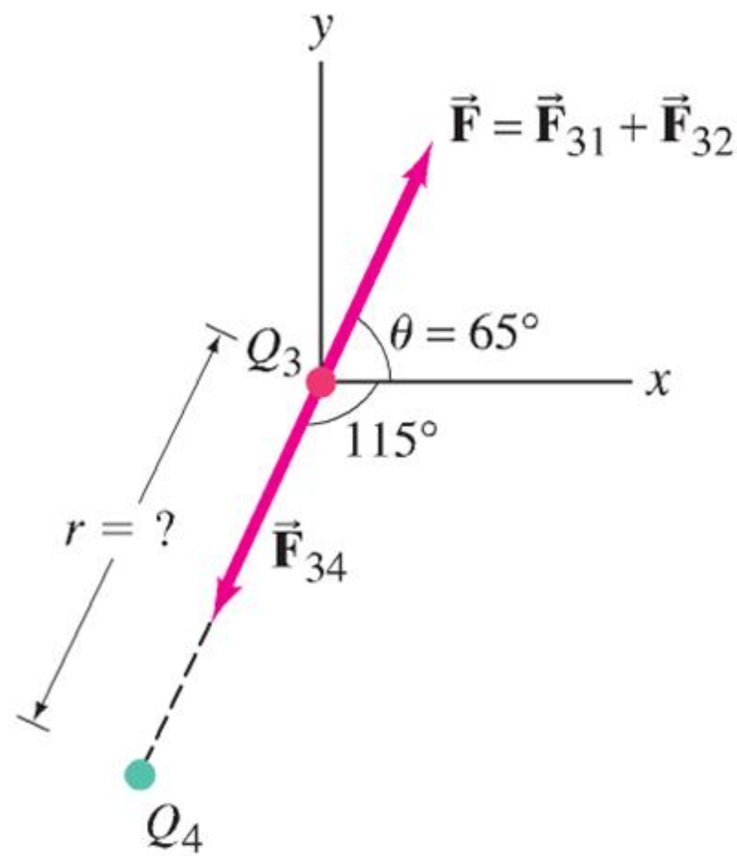
Άσκηση Ι: Μηδενισμός της δύναμης

- Πού θα πρέπει να τοποθετηθεί ένα τέταρτο φορτίο $Q_4 = -50\mu C$, ώστε η συνισταμένη δύναμη στο Q_3 να είναι μηδενική;



Άσκηση Ι: Απάντηση

- Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, χρειαζόμαστε μία δύναμη με κατεύθυνση ακριβώς αντίθετη αυτής της συνισταμένης $\vec{\mathrm{F}}$ εξαιτίας των Q_2 και Q_1 που υπολογίσαμε στην προηγούμενη άσκηση [βλ. Άσκηση ΙΙΙ]. Η δύναμη που αναζητούμε θα πρέπει να έχει μέτρο 290N και φορά προς τα αριστερά του Q_3 στο σχήμα της εκφώνησης. Οπότε το Q_4 θα πρέπει να τοποθετηθεί κατά μήκος αυτής της ευθείας, βλ.Σχ.2



Σχήμα 2

Άσκηση ΙΙ: Η δύναμη στο κέντρο κανονικών ν-πλεύρων

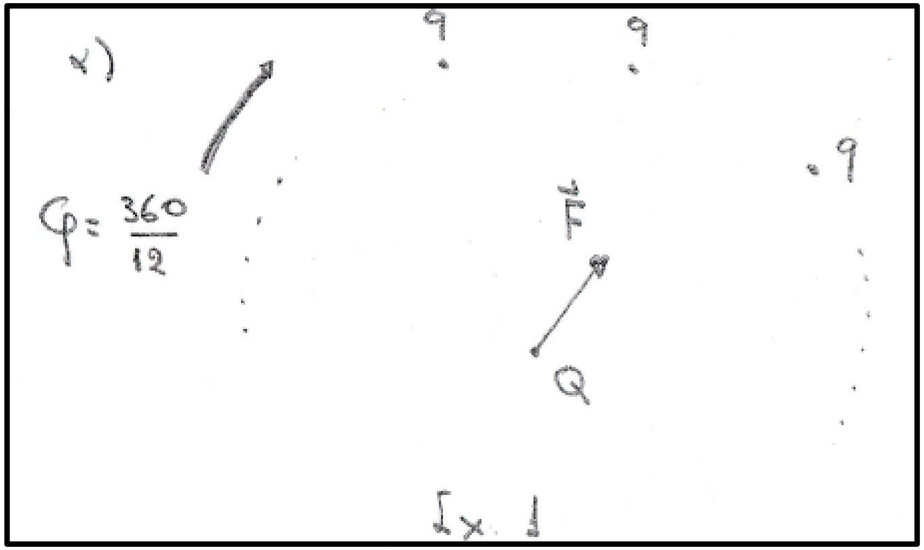
- α) Δώδεκα ίσα φορτία, q, βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού 12-πλεύρου. Ποια είναι η συνολική δύναμη σ'ένα δοκιμαστικό φορτίο Q που βρίσκεται στο κέντρο του πολυγώνου;

- β) Υποθέστε ότι ένα από τα 12 q απομακρύνεται. Ποια είναι η δύναμη στο Q;

- γ) Να επαναληφθούν τα ίδια ερωτήματα με 13 ίσα φορτία που είναι τοποθετημένα στις κορυφές κανονικού 13-πλεύρου

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

α) Έστω ότι η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται το φορτίο Q είναι μη μηδενική. Τότε θα έχει κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση. Έστω αυτή του σχήματος 1.



Περιστρέφω το σύστημα των φορτίων κατά γωνία $\varphi = \left(\frac{360}{12}\right)^\circ$

Τότε,κατά την ίδια γωνία θα περιστραφεί και η συνισταμένη $\vec{F}$

Αλλά όταν το πολύγωνο περιστραφεί κατά γωνία φ έρχεται σε θέση που είναι απόλυτα ισοδύναμη με την προηγούμενη, αυτό λόγω της κανονικότητας του σχήματος και της ισότητας των φορτίων.

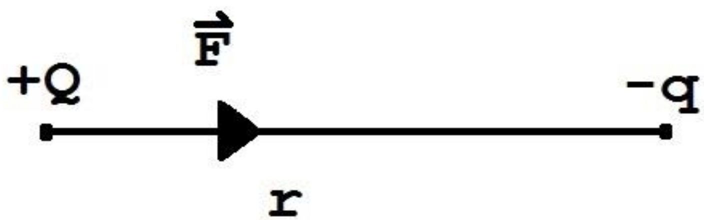
Αυτή η συμμετρία οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι το άνυσμα $\vec{F}$ πρέπει να παραμείνει αναλλοίωτο. Το οποίο είναι άτοπο εκτός κι αν το άνυσμα $\vec{F} = 0$

Πράγματι λόγω συμμετρίας, $\vec{F} = 0$

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

β) Αν αφαιρέσουμε ένα φορτίο q από μία μόνο κορυφή τότε το αποτέλεσμα είναι αυτό της δράσης όλων των υπολοίπων πάνω στο κεντρικό Q. Τα 12 φορτία δίνουν συνισταμένη $\vec{\mathrm{F}}=0$.

Ομοίως, αν σε μία θέση έχουμε δύο φορτία $+q$ και $-q$ (όλες οι άλλες είναι κενές) πάλι θα έχουμε $\vec{\mathrm{F}}=0$. Αφαιρούμε το $+q$ τότε το αποτέλεσμα είναι αυτό που προκαλεί το φορτίο $-q$



$$\boxed{F = k\frac{qQ}{r^2}}$$

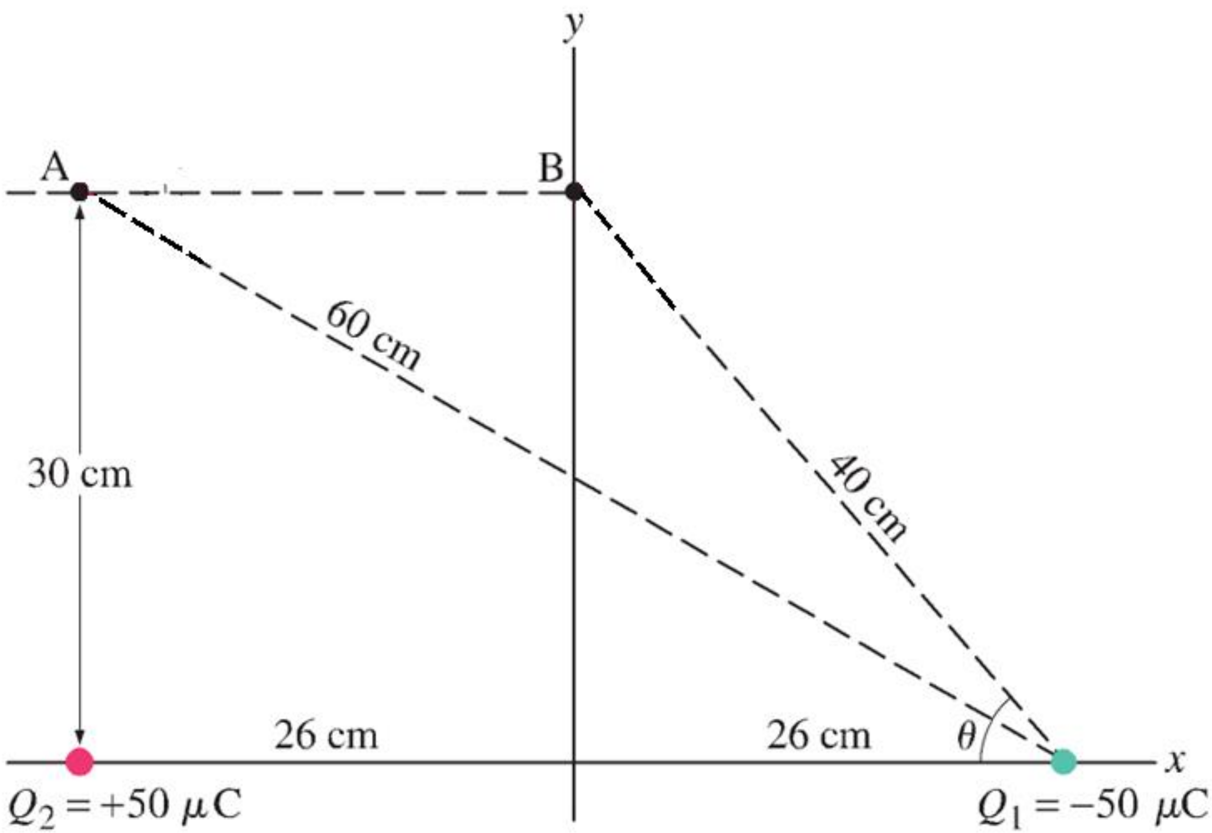
γ) Ισχύουν ακριβώς τα ίδια για 13 ίσα φορτία, αλλά και για οποιοδήποτε σύστημα ν- ίσων φορτίων, διατεταγμένων στις κορυφές ενός κανονικού ν-πλεύρου

Ηλεκτρικό Πεδίο Απομονωμένου Σημείου

- Άσκηση I_{α}: Το Ε από δύο σημειακά φορτία
- Άσκηση I_{β}: το Ε στη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει δύο φορτία

Άσκηση I_α: Το E από δύο σημειακά φορτία

❖ Υπολογίστε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο α) στο σημείο A και β) στο σημείο B στο σχήμα, εξαιτίας και των δύο φορτίων Q_1 και Q_2

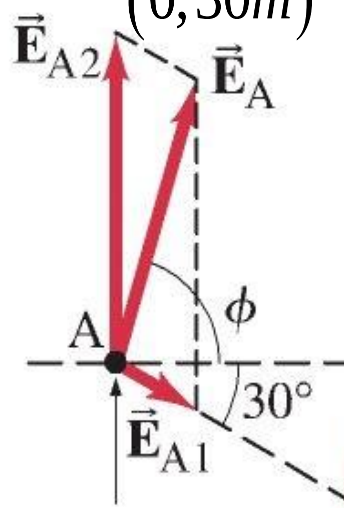


Άσκηση I_α: Απάντηση

α)

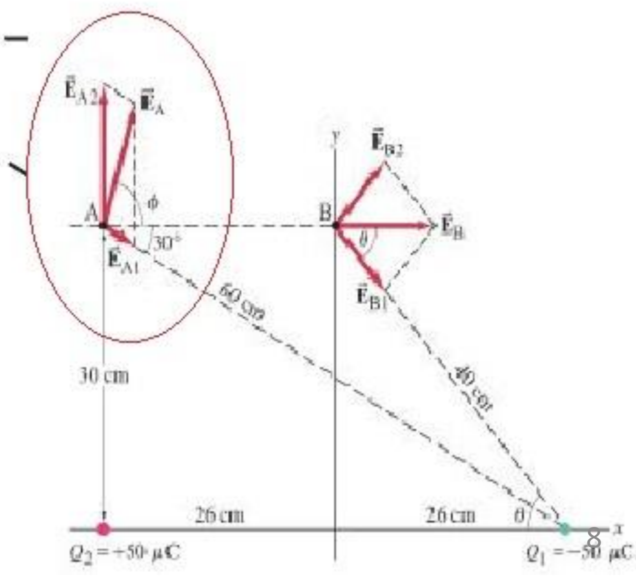
$$E_{A1} = \frac{\left(9{,}0\times10^{9}\,N\cdot m^{2}/C^{2}\right)\left(50\times10^{-6}C\right)}{\left(0{,}60m\right)^{2}} = 1{,}25\times10^{6}\,N/C$$

$$E_{A2} = \frac{\left(9{,}0\times10^{9}\,N\cdot m^{2}/C^{2}\right)\left(50\times10^{-6}C\right)}{\left(0{,}30m\right)^{2}} = 5{,}0\times10^{6}\,N/C$$



$$E_{Ax} = E_{A1}\cos 30 = 1{,}1\times10^{6}\,N/C$$

$$E_{Ay} = E_{A2} - E_{A1}\sin 30 = 4{,}4\times10^{6}\,N/C$$



Άσκηση I_{α}: Απάντηση

$$E_A = \sqrt{(1,1)^2 + (4,4)^2} \times 10^6\, N/C = 4,5 \times 10^6\, N/C$$

$$\tan\phi = E_{Ay}/E_{Ax} = 4,4/1,1 = 4,0$$

έτσι ϕ =76°

β) Επειδή το B ισαπέχει από τα δύο ίσα φορτία τα μέτρα των E_{B1} και E_{B2} θα είναι ίσα

$$E_{B1} = E_{B2} = \frac{kQ}{r^2} = \frac{\left(9,0\times10^9\, N\cdot m^2/C^2\right)\left(50\times10^{-6}C\right)}{(0,40m)^2} = 2,8\times10^6\, N/C$$

Το συνολικό πεδίο E_B είναι οριζόντιο και ισούται με:

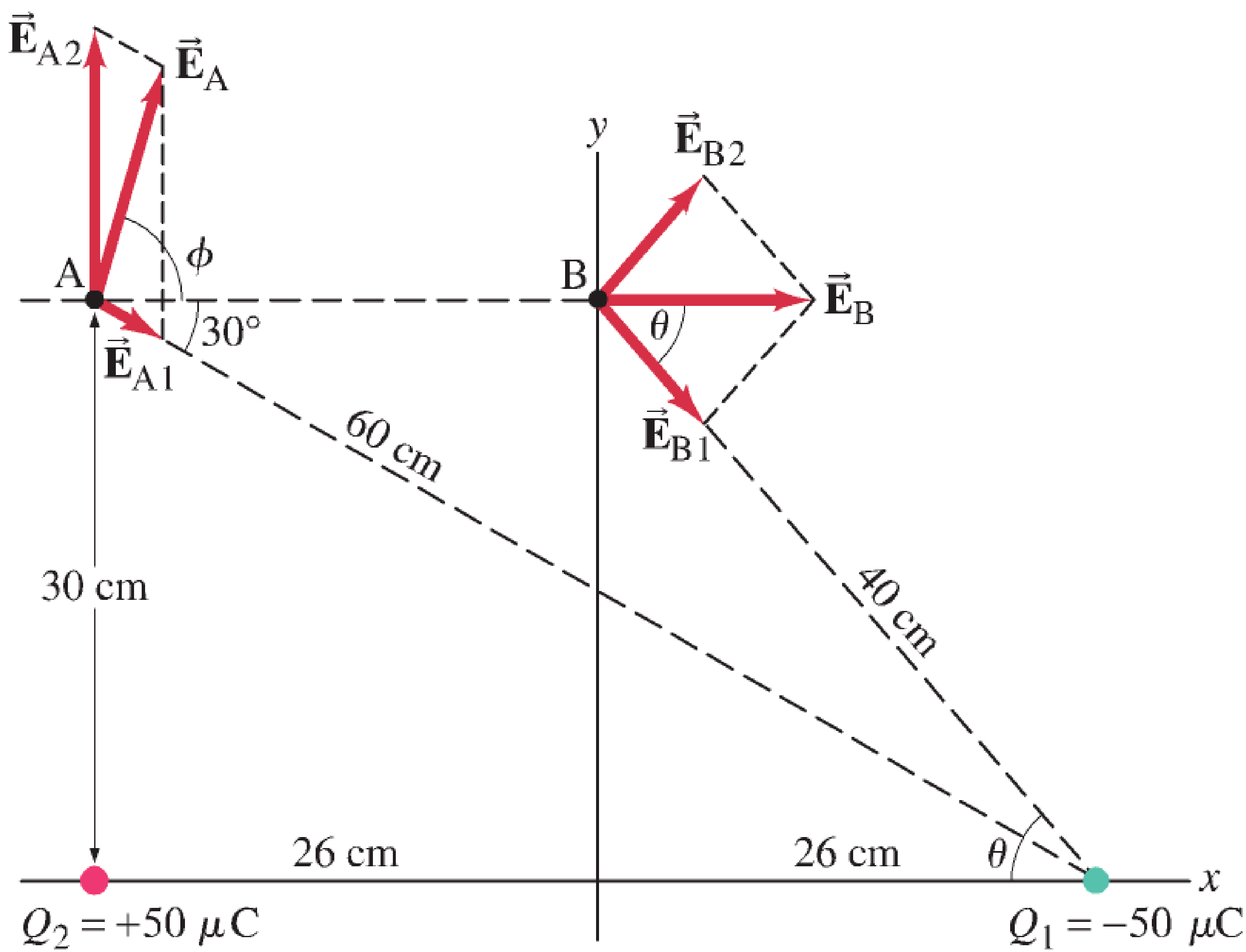
$$E_B = E_{B1}\cos\theta + E_{B2}\cos\theta = 2E_{B1}\cos\theta$$

$$\cos\theta = 26cm/40cm = 0,65$$

και η κατεύθυνση του E_B είναι κατά τα θετικά του $+x$.

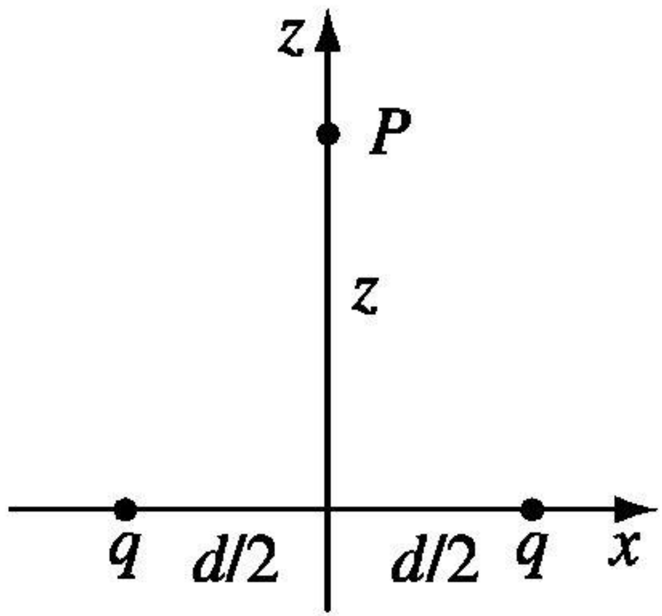
$$E_B = 2E_{B1}\cos\theta = 2\left(2,8\times10^6\, N/C\right)(0,65) = 3,6\times10^6\, N/C$$

Άσκηση I$_\alpha$: Το E από δύο σημειακά φορτία



Άσκηση I_β: το Ε στη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει δύο φορτία

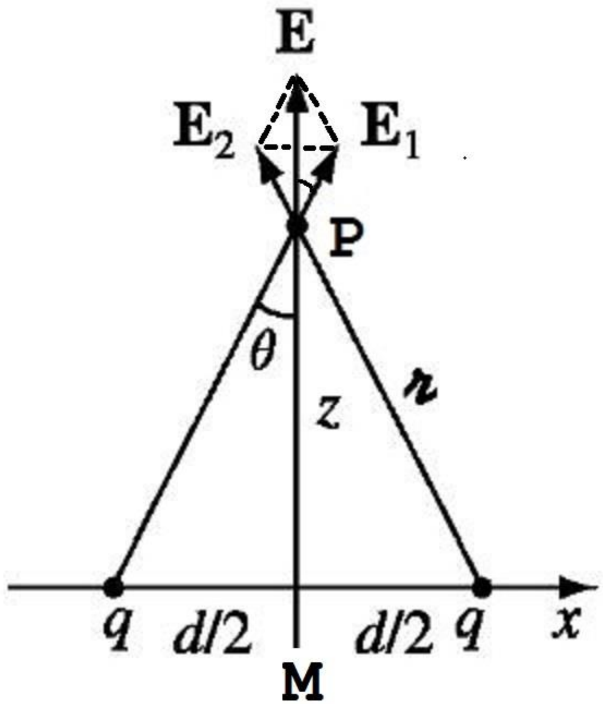
- α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z επί της μεσοκαθέτου σε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο ίσα φορτία q σε απόσταση d. Το αποτέλεσμά σας συμφωνεί μ'αυτό που περιμένετε για $z >> d$;
- β) Επαναλάβετε το ίδιο αν τα φορτία είναι αντίθετα, δηλαδή $q, -q$



Άσκηση $I_β$: Απάντηση

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{z^2+\frac{d^2}{4}}$$

Το PE_1EE_2 είναι ρόμβος ⇒ $E = 2\cdot E_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 2\cdot E_1\cdot\dfrac{z}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$



$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2zq}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}}$$

Αν $z >> d$ τότε $(d \simeq 0)$

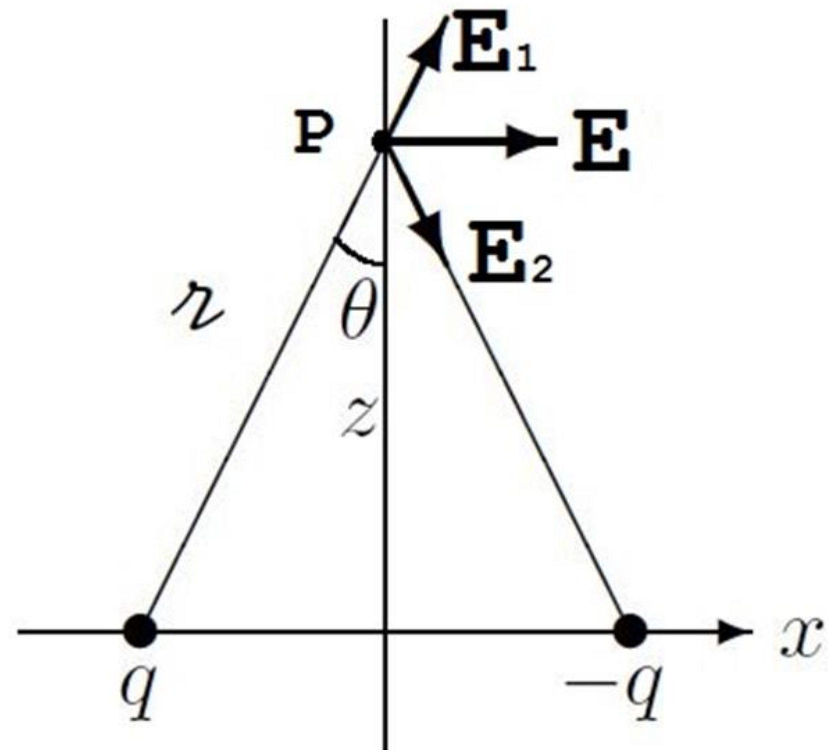
$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2zq}{z^3} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Δηλαδή το αποτέλεσμα ταυτίζεται με αυτό που θα είχαμε αν ($z \approx d$) τα δύο ισα φορτία βρίσκονταν στη θέση M

Άσκηση I_β: Απάντηση

- β) $$E = 2 \cdot E_1 \cdot \eta\mu\theta = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2 + \frac{d^2}{4}} \cdot \frac{d/2}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qd}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}}$$

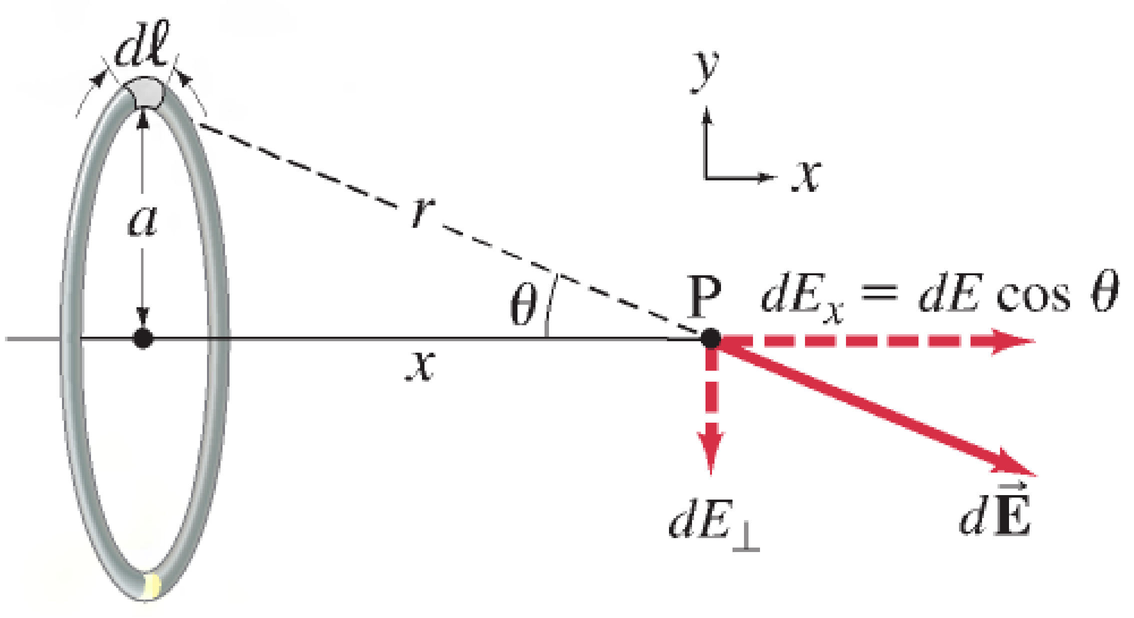


Ηλεκτρικό Πεδίο σε συνεχείς κατανομές

- Άσκηση Ι: Φορτίο σε κυκλικό βρόχο
- Άσκηση ΙΙ: Φορτισμένη γραμμή μεγάλου μήκους
- Άσκηση ΙΙΙ : Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής
- Άσκηση IV: Ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας

Άσκηση I: Φορτίο σε κυκλικό βρόχο

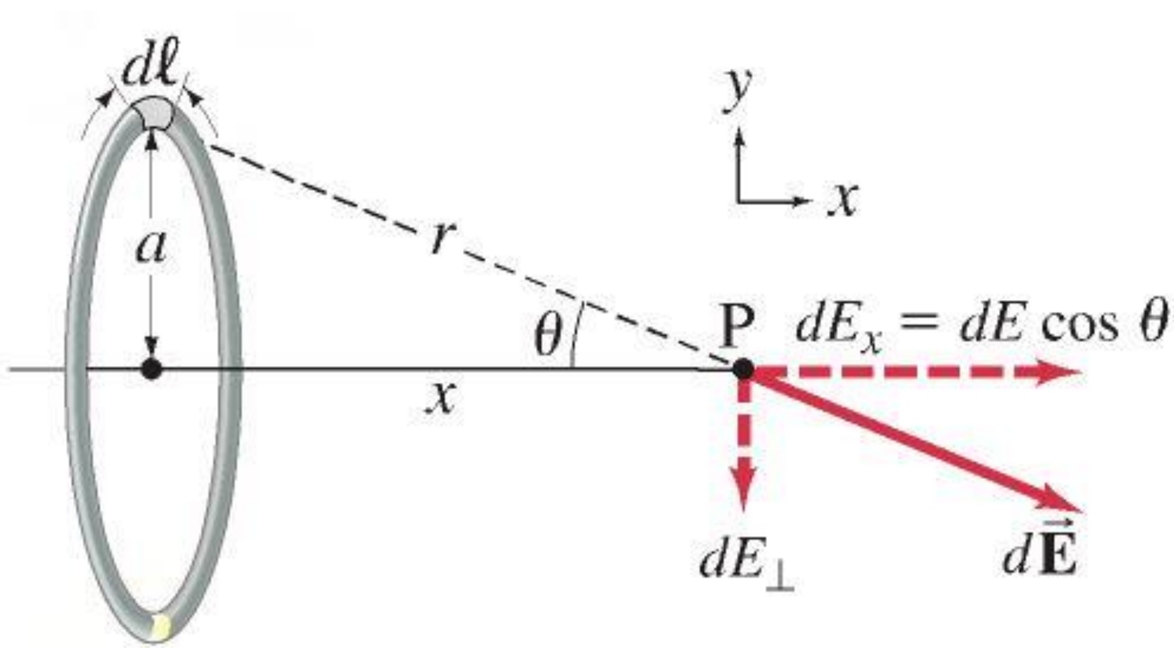
- Ένα λεπτό, δακτυλιοειδές σώμα ακτίνας α φέρει συνολικό φορτίο $+Q$ που κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος του. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο P πάνω στον άξονά του, σε απόσταση x από το κέντρο του. Δίνεται η κατανομή του φορτίου ανά μονάδα μήκους, $\lambda(C/m)$



Άσκηση Ι: Απάντηση

- **Μεθοδολογία και Λύση:** *Ακολουθούμε κατά βήμα τη Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων*

1. **Σχεδίαση διαγράμματος.**



Άσκηση I: Απάντηση

2. **Εφαρμογή του νόμου του Coulomb.**

Το ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ που οφείλεται σε αυτό το τμήμα του βρόχου μήκους $d\ell$ έχει μέτρο

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2}$$

$$dQ = Q\left(\frac{d\ell}{2\pi\alpha}\right) = \lambda d\ell$$

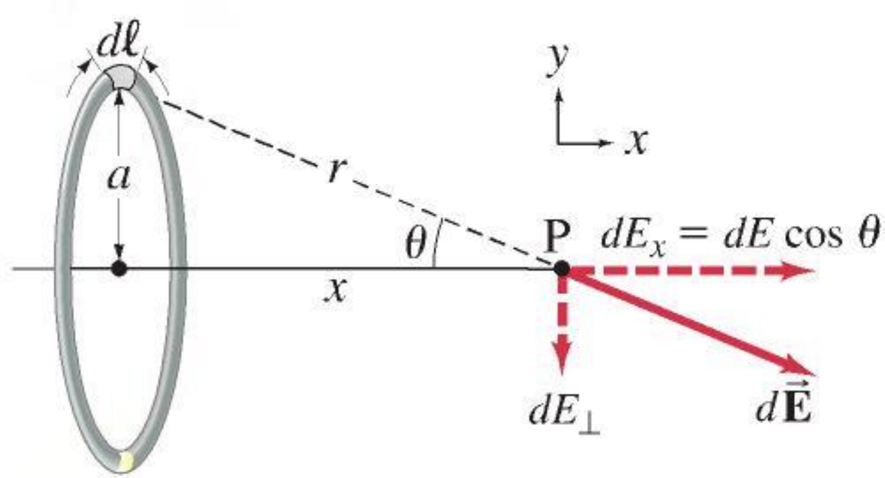
Όπου $\lambda = Q/2\pi\alpha$ είναι η κατανομή ανά μονάδα μήκους. Έπειτα, γράφουμε το ωs

$$dE$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda d\ell}{r^2}$$

Άσκηση Ι: Απάντηση

3. **Διανυσματική** πρόσθεση και χρήση της **συμμετρίας**: το διάνυσμα $d\vec{E}$ έχει συνιστώσες dE_x παράλληλα στον άξονα x και $dE_{\perp}$ κάθετα στον άξονα x. Θα αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) κατά μήκος του βρόχου.



Άσκηση Ι: Απάντηση

Το συνολικό πεδίο θα είναι τότε

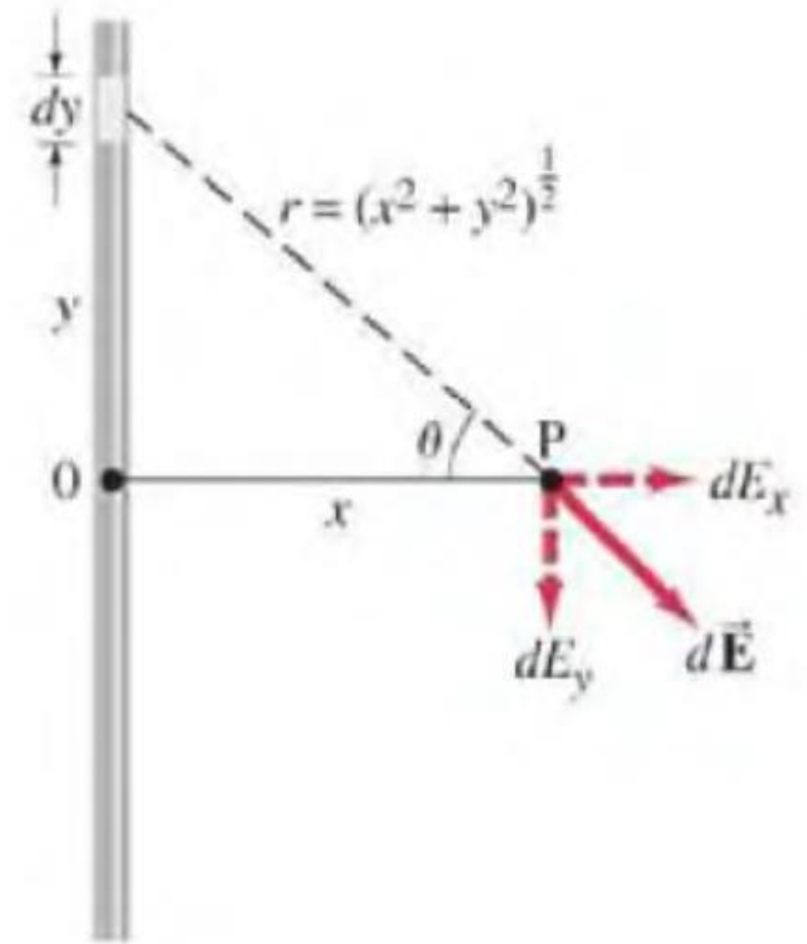
$$E = E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int\frac{d\ell}{r^2}\cos\theta$$

Αφού $\cos\theta = x/r$, όπου $r = \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}$, έχουμε

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi\alpha} d\ell = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x\left(2\pi\alpha\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Άσκηση ΙΙ: Φορτισμένη γραμμή μεγάλου μήκους

- Καθορίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε τυχαίο σημείο P σε απόσταση x από το μέσο 0 μιας γραμμής πολύ μεγάλου μήκους (π.χ. ενός καλωδίου), η οποία φέρει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου. Υποθέστε, ότι το x είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του καλωδίου και έστω λ η κατανομή ανά μονάδα μήκους (C/m).



Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

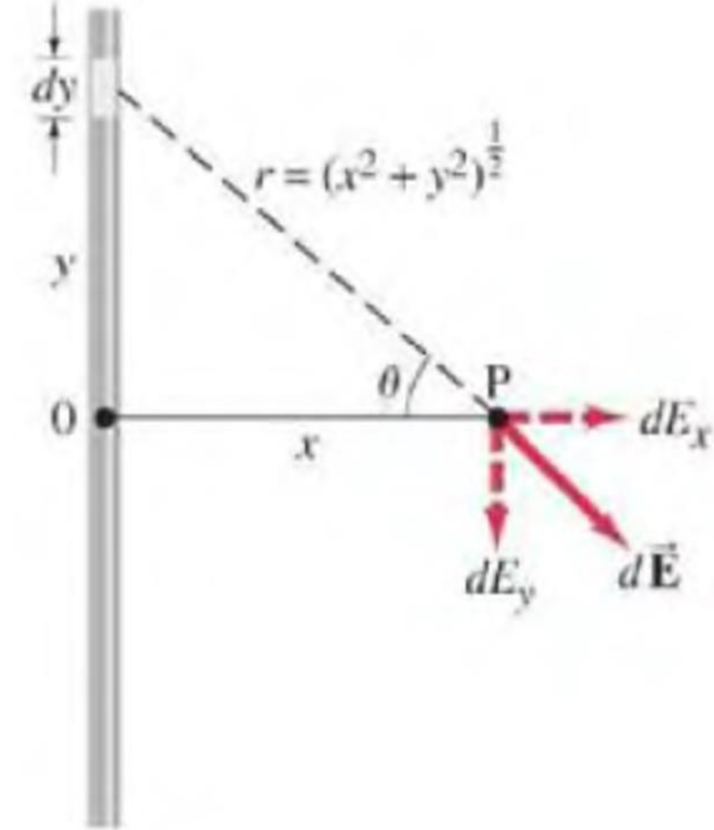
Ένα τμήμα dy του καλωδίου έχει φορτίο $dQ = \lambda dy$. Το πεδίο $d\vec{\mathbf{E}}$ στο σημείο P, εξαιτίας του στοιχειωδους αυτού μήκους dy έχει μέτρο

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{\left(x^2+y^2\right)}$$

Όπου $r = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Το $d\vec{\mathbf{E}}$ αναλύεται σε

$$dE_y = dE\sin\theta \qquad dE_x = dE\cos\theta$$



Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

ΛΥΣΗ:

$$E_y = \int dE \sin\theta = 0$$

Έτσι θα έχουμε $E = E_x = \int dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cos\theta dy}{x^2 + y^2}$

αφού $y = x\tan\theta$, θα είναι $dy = xd\theta / \cos^2\theta$

Επιπλέον, επειδή $\cos\theta = x / \sqrt{x^2 + y^2}$

ισχύει $1\big/\left(x^2 + y^2\right) = \cos^2\theta\big/x^2$

$$(\cos\theta)\left(xd\theta\big/\cos^2\theta\right)\left(\cos^2\theta\big/x^2\right) = \cos\theta d\theta\big/x$$

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

- Έτσι,

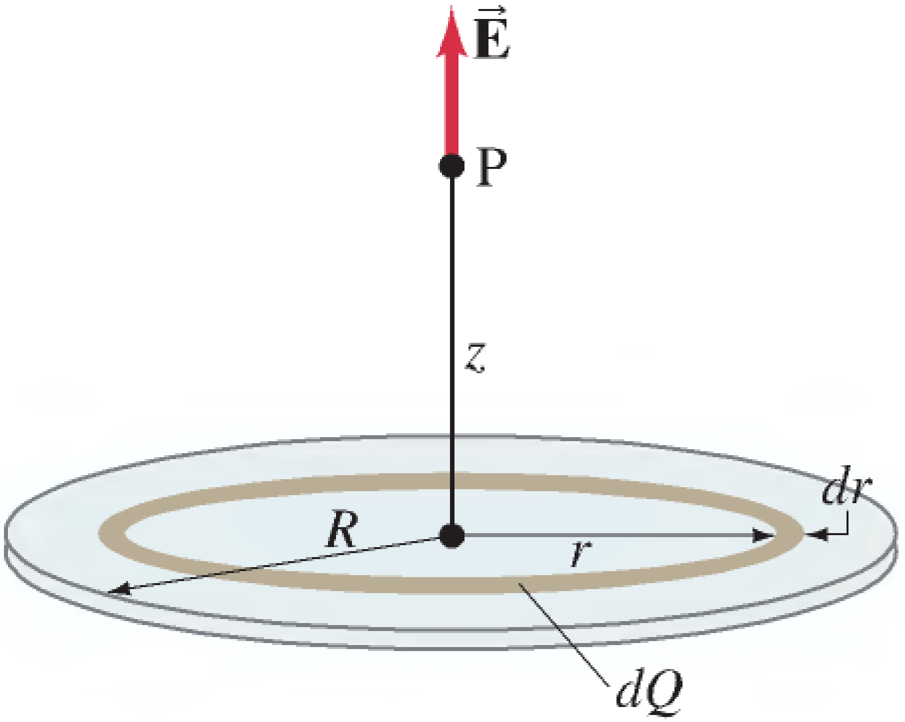
$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(\sin\theta\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x}$$

Υπόθεση: το καλώδιο είναι εξαιρετικά μακρύ και κατά τις δύο κατευθύνσεις $\left(y \to \pm\infty\right)$ άρα οι οριακές τιμές θα είναι $\theta = \pm\pi/2$

Συνεπώς, το πεδίο κοντά σε ένα ευθύγραμμο καλώδιο μεγάλου μήκους ομοιόμορφης κατανομής φορτίου ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα της πρώτης δύναμης της απόστασης από το καλώδιο.

Άσκηση ΙΙΙ : Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής

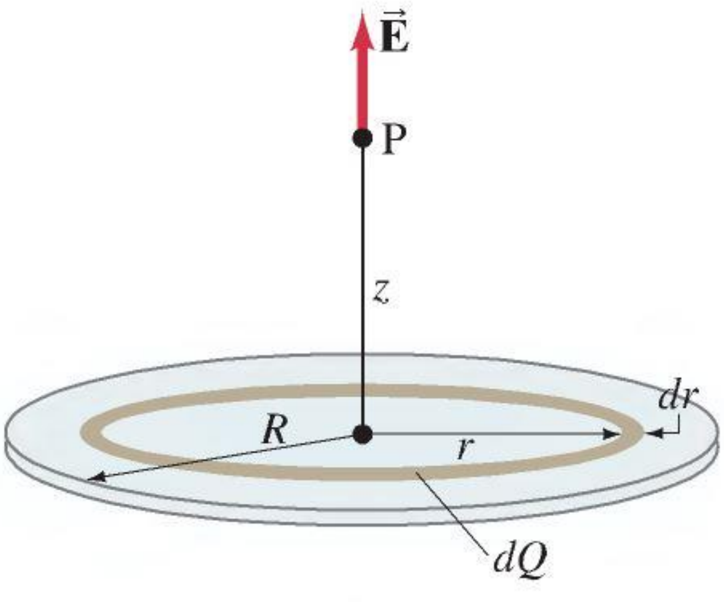
- Ένα φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ενός λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας R . Το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας $\left(C/m^2\right)$ είναι σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε τυχαίο σημείο P πάνω στον άξονα του δίσκου σε απόσταση z από το κέντρο του.



Άσκηση III: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του δακτυλίου ακτίνας r που παριστάνεται στο σχήμα έχει μέτρο

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zdQ}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



Άσκηση III : Απάντηση

Ο δακτύλιος έχει επιφάνεια $(dr)(2\pi r)$ και φορτίο ανά μονάδα επιφανείας $\sigma = dQ/(2\pi r dr)$.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma r dr}{2\varepsilon_0\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Η τελευταία σχέση δίνει το μέτρο του $\vec{\mathbf{E}}$ σε κάθε σημείο του άξονα του δίσκου. Η διεύθυνση του κάθε $d\vec{\mathbf{E}}$ εξαιτίας του κάθε δακτυλίου είναι παράλληλη στον άξονα z και για αυτό το λόγο η διεύθυνση του $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλη του z .

Άσκηση III_{β}: Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής

- Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση. Επιπροσθέτως, διερευνήστε πως θα διαμορφωθεί το ηλεκτρικό πεδίο στις περιπτώσεις :

- 1) $R \to \infty$
- 2) $z >> R$ και $R = \sigma\tau\alpha\theta.$

- Στη συνέχεια επαναλάβετε τον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, όταν είναι σταθερά φορτισμένο όλο το επίπεδο, με τον νόμο του Gauss.

Άσκηση III_{β}: Απάντηση

- Υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

$$dE = dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi dr^2 \sigma z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{bmatrix} dQ = \sigma da \Rightarrow \\ dQ = \sigma r d\theta dr \Rightarrow \\ dQ = 2\pi\sigma r dr \Rightarrow \\ dQ = \sigma dr^2 \end{bmatrix}$$

Όπου da η στοιχειώδης επιφάνεια

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\pi\sigma z \cdot \int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\pi\sigma z\cdot(-2)\cdot y^{-\frac{1}{2}}\Big|_{y=z^2}^{y=z^2+R^2} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\pi\sigma z\cdot(-2)\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{1}{z}\right\} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z}-\frac{1}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Άσκηση III$_\beta$: Απάντηση

- 1) αν $R \to \infty$, δηλαδή ο δίσκος καταλαμβάνει όλο το επίπεδο, τότε:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + R^2/z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \xrightarrow{R \to \infty} E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

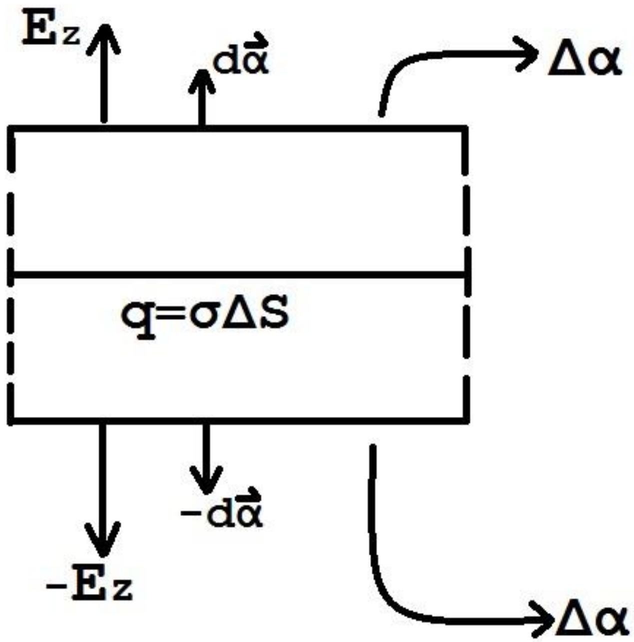
για $z > 0$

- 2) αν $R = \sigma\tau\alpha\theta.$ και *z >> R*

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + R^2/z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \xrightarrow{\frac{R^2}{z^2} \to 0} E_z = 0$$

Άσκηση III$_\beta$: Απάντηση

- 3) Όταν είναι σταθερά φορτισμένο όλο το επίπεδο, με τον νόμο του Gauss:



$$\oint_s E_z d\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_z \Delta\alpha + \left(-E_z\right)\left(-\Delta\alpha\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$2E_z \Delta\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{q}{2\Delta\alpha\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

- Η σταθερότητα του E_z οφείλεται στο ότι δεν υπάρχει παράπλευρη ροή, λόγω του απείρου επιπέδου.

Άσκηση IV: Ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας

- Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}} = kr^3\hat{r}, \quad k = \sigma\tau\alpha\theta.$

α) Να βρεθεί η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$

Δίδεται ο νόμος του Gauss σε διαφορική μορφή: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\theta E_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \mathrm{E}_\varphi}{\partial\varphi}\right] \Rightarrow$$

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[kr^5\right] = \frac{5\varepsilon_0 kr^4}{r^2} \Rightarrow$$

$$\rho = 5\varepsilon_0 kr^2$$

β) Να βρεθεί το ολικό φορτίο q που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας R

$$q = \int_0^R \rho d\tau = 5\varepsilon_0 k\int_0^R r^2 d\tau = 5\varepsilon_0 k\int_0^R\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\cdot r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$q = 5\varepsilon_0 k\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cdot\int_0^R r^4 dr = 5\varepsilon_0 k\cdot 2\pi\cdot\left(-\cos\pi+\cos 0\right)\cdot\frac{R^5}{5} \Rightarrow$$

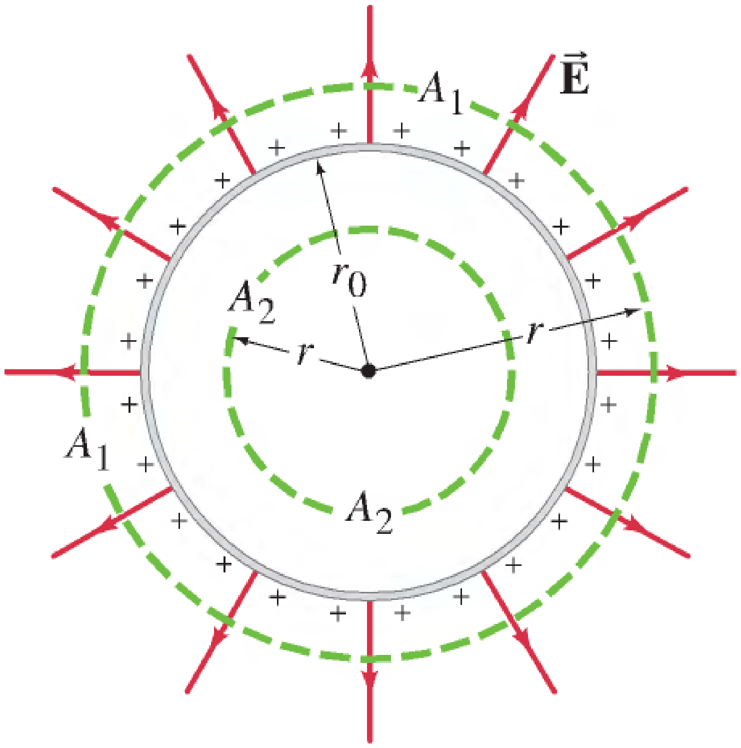
$$q = 4\pi k\varepsilon_0 R^5$$

Νόμος του Gauss

- Άσκηση I: Σφαιρικός αγωγός
- Άσκηση II: Σφαιρική επιφάνεια
- Άσκηση III: Φορτίο σε συμπαγή σφαίρα
- Άσκηση IV: Μη ομοιόμορφα φορτισμένη συμπαγής σφαίρα
- Άσκηση V: Σφαίρα με κοιλότητα

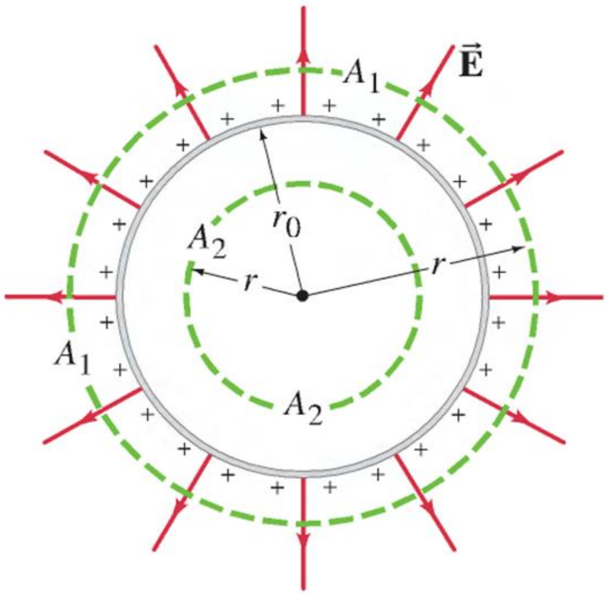
Άσκηση I: Σφαιρικός αγωγός

- Ένα λεπτό, σφαιρικό κέλυφος ακτίνας r_0 περικλείει ένα συνολικό φορτίο Q, το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε αυτό. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία α) εξωτερικά του κελύφους, β) εντός του κελύφους. γ) Τι θα άλλαζε στο πρόβλημα εάν ο αγωγός ήταν συμπαγής σφαίρα;



‘Ασκηση I: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** α) Το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία της υποθετικής γκαουσσιανής επιφάνειας, εάν επιλέξουμε την επιφάνεια αυτή ως μια σφαίρα ακτίνας r ($r > r_0$) ομόκεντρη με το κέλυφος, όπως απεικονίζεται στο σχήμα με το διακεκομμένο κύκλο A_1.



‘Ασκηση I: Απάντηση

Ο νόμος του Gauss δίνει για αυτήν την περίπτωση

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου $4\pi r^2$ είναι το εμβαδό της επιφάνειας της εν λόγω σφαίρας (γκαουσσιανή επιφάνεια) ακτίνας r . Έτσι,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \left[r > r_0\right]$$

Ασκηση I: Απάντηση

- β) Στο εσωτερικό του κελύφους, το ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει να είναι επίσης συμμετρικό.

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = 0$$

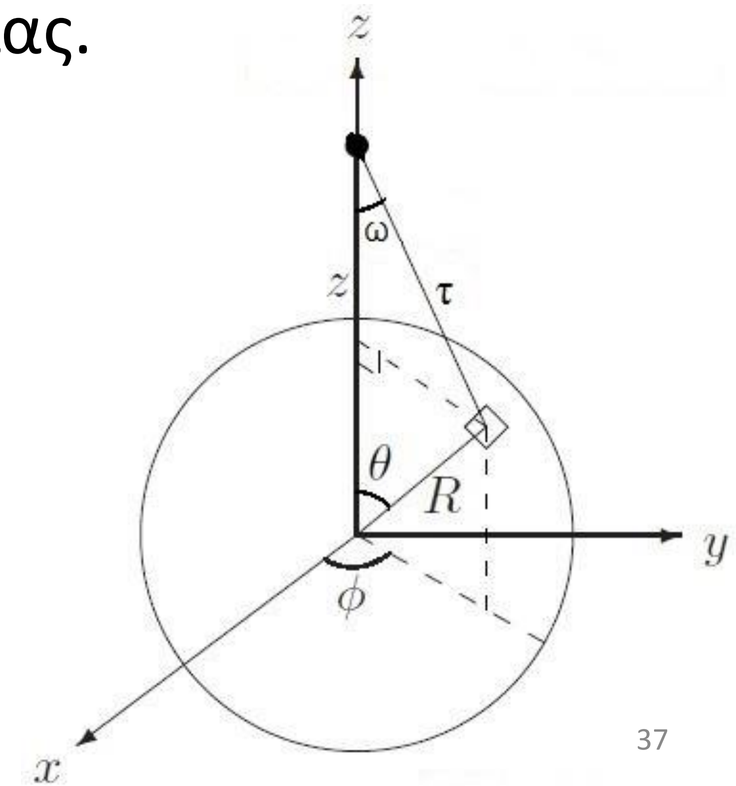
Συνεπώς, $E = 0$ $\qquad [r < r_0]$

στο εσωτερικό ενός σφαιρικού κελύφους με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου.

- γ)Τα ίδια αποτελέσματα θα ισχύουν και για έναν συμπαγή σφαιρικό αγωγό με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, αφού όλο το το φορτίο θα εντοπίζεται σε ένα λεπτό στρώμα στην επιφάνειά του

Άσκηση ΙΙ: Σφαιρική επιφάνεια

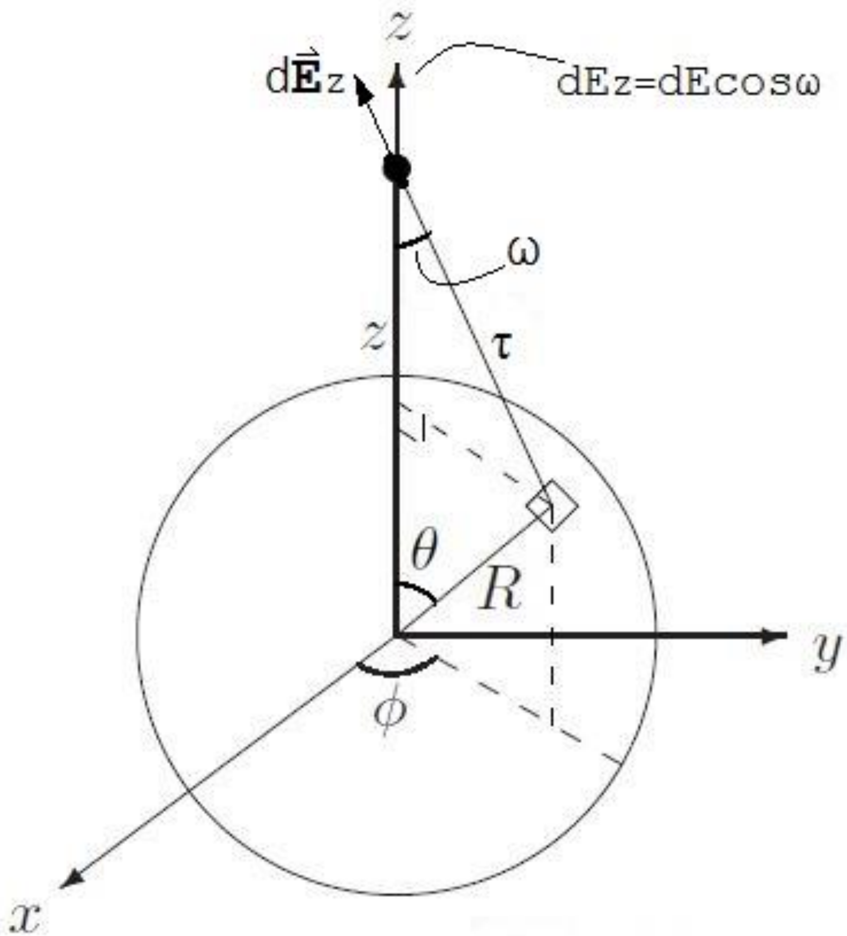
- Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από το κέντρο σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R , που φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ . Να διακρίνεται περιπτώσεις i) $z<R$ (εσωτερικό), ii) $z>R$ (εξωτερικό). Εκφράστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει του ολικού φορτίου q της σφαιρικής επιφάνειας.



Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

- i) Για $z > R$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\tau^2}\cdot\cos\omega$$



όπου $\tau^2 = z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta$

ολοκληρώνοντας ως προς τη γωνία φ

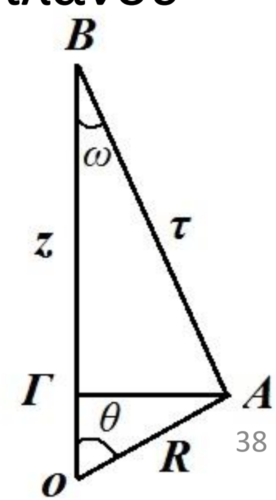
$$dE_z = \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\sigma R^2 \frac{-d\cos\theta\cdot\cos\omega}{z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta}$$

θέτουμε $y = \cos\theta$, τότε με

$\theta\in[0,\pi]\rightarrow y\in[1,-1]$

Από τη γεωμετρία του διπλανού σχήματος φαίνεται ότι :

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{z - R\cos\theta}{\tau}$$



Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

Τότε $dE_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \cdot (-1) \cdot \frac{d\cos\theta \cdot (z - R\cos\theta)}{(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$ και

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dy(z - Ry)}{(A - By)^{3/2}} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dy(z - Ry)}{(A - By)^{3/2}}$$ όπου $$A = R^2 + z^2 \quad B = 2Rz$$

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $$\int_{-1}^{+1} \frac{dy(z - Ry)}{(A - By)^{3/2}} = \ldots = \frac{2}{z^2} \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2}}$$

Όπου το q είναι το «έγκλειστο φορτίο» σε σφαίρα ακτίνας $z > R$

<u>*Με το Θεώρημα του Gauss:*</u> $\oiint_{S(z)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{a}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_z \cdot 4\pi z^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2}}$$

Δηλαδή, η ένταση είναι σαν να έχουμε το φορτίο q στο κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας.

Άσκηση II: Απάντηση

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{+1} \frac{(z - Ry)}{(A - By)^{3/2}} dy = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{\sqrt{(R+z)^2}} + \frac{z-R}{\sqrt{(R-z)^2}}\right]$$

Για $z > R$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{R+z} + \frac{z-R}{z-R}\right] = \frac{2}{z^2}$$

Για $z < R$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{R+z} + \frac{z-R}{R-z}\right] = \frac{1}{z^2}(1-1) = 0$$

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

ii) Για $z < R$ καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα της ίδιας μορφής,δηλαδή :

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dy\left(z - Ry\right)}{\left(A - By\right)^{3/2}}$$

με

$$A = R^2 + z^2$$
$$B = 2Rz$$

Αλλά για $z < R$ το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν.

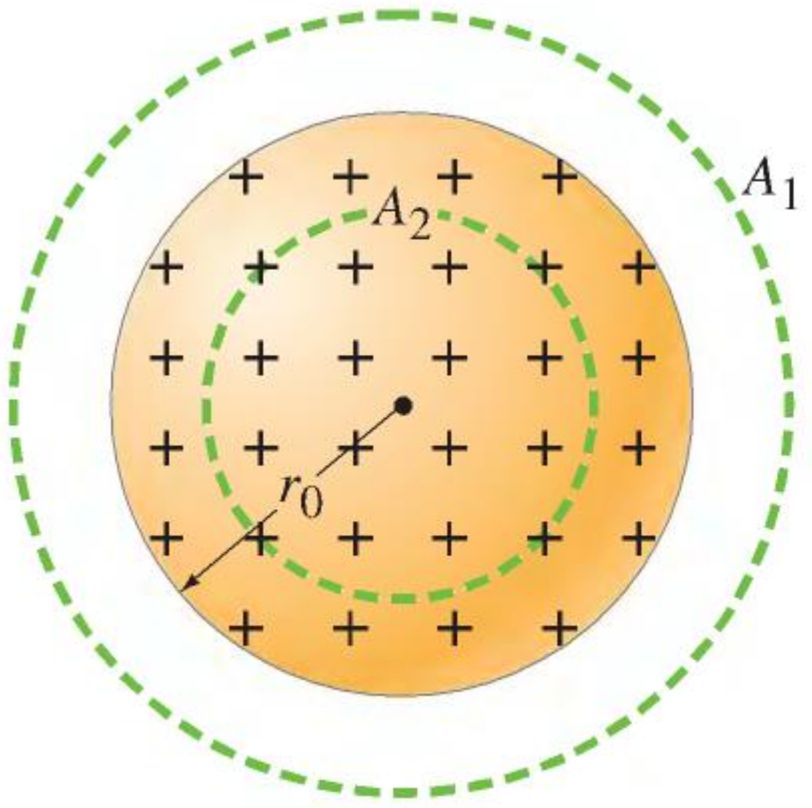
Οπότε $E_z = 0$

Με το θεώρημα του Gauss: $\oint\!\!\oint_{S(z)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0} = 0$

Διότι για $z < R$ το $q_{\varepsilon\gamma\kappa} = 0$

Άσκηση ΙΙΙ: Φορτίο σε συμπαγή σφαίρα

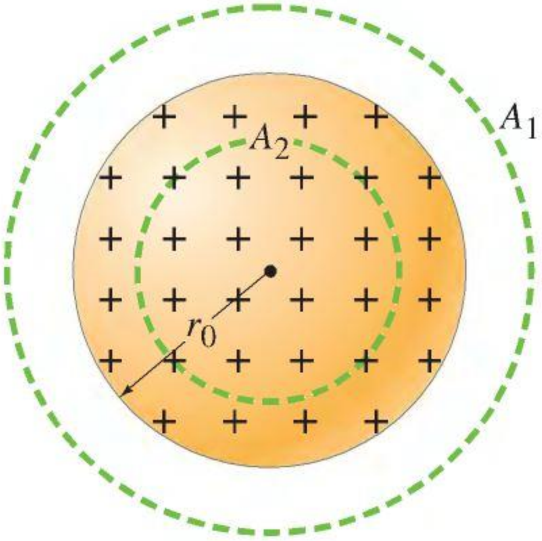
- Ένα ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο μιας μη αγώγιμης σφαίρας ακτίνας r_0 Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο α) εξωτερικά της σφαίρας ($r > r_0$) και β) εσωτερικά της σφαίρας ($r < r_0$)



Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** α) Ως γκαουσσιανή επιφάνεια επιλέγουμε μια σφαίρα ακτίνας r $\left(r > r_0\right)$, που σημειώνεται με A_1 στο σχήμα. Επειδή το εξαρτάται μόνο από το r, ο νόμος του Gauss δίνει, με $Q_{encl} = Q$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{ή} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$



Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

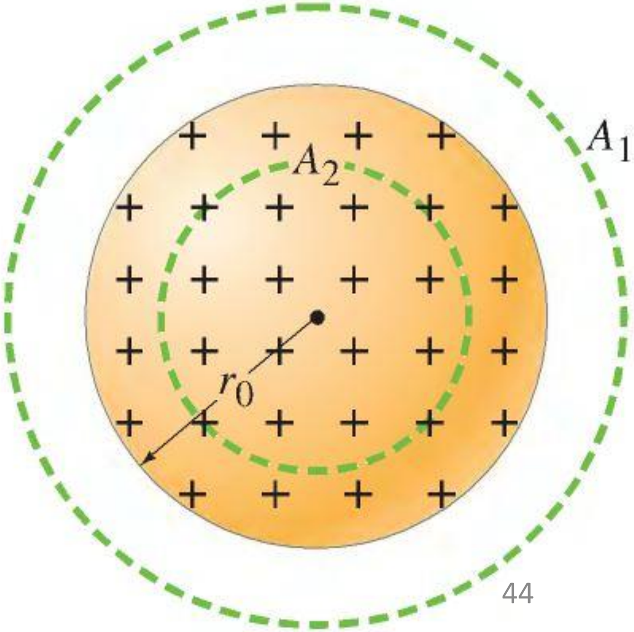
β) Εσωτερικά της σφαίρας $\left(r < r_0\right)$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = Q_{encl}/\varepsilon_0$$

πυκνότητα φορτίου, ρ_E , $\left(\rho_E = dQ/dV\right)$

Άρα το φορτίο που περικλείεται από τη γκαουσσιανή επιφάνεια A_2, μιας σφαίρας ακτίνας r , είναι

$$Q_{encl} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E}{\frac{4}{3}\pi {r_0}^3 \rho_E}\right) Q = \frac{r^3}{{r_0}^3} Q$$



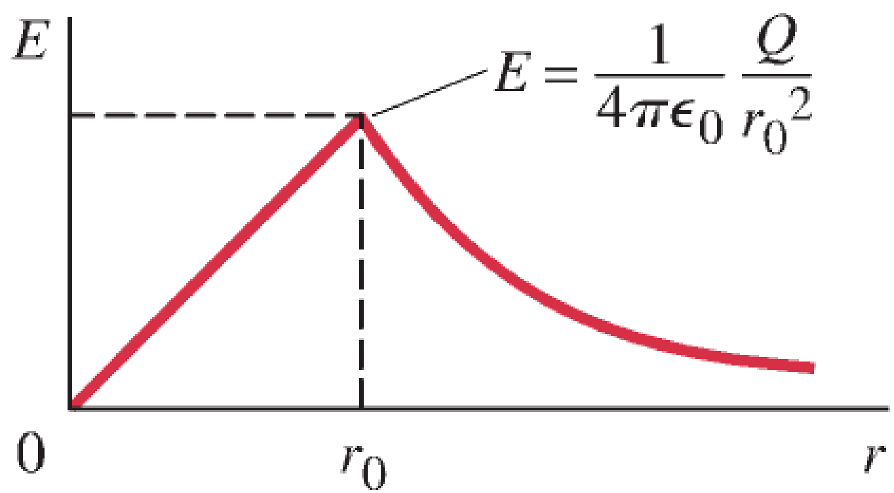
Άσκηση III: Απάντηση

Οπότε από το νόμο του Gauss έχουμε

$$E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}=\frac{r^3}{r_0^{\,3}}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

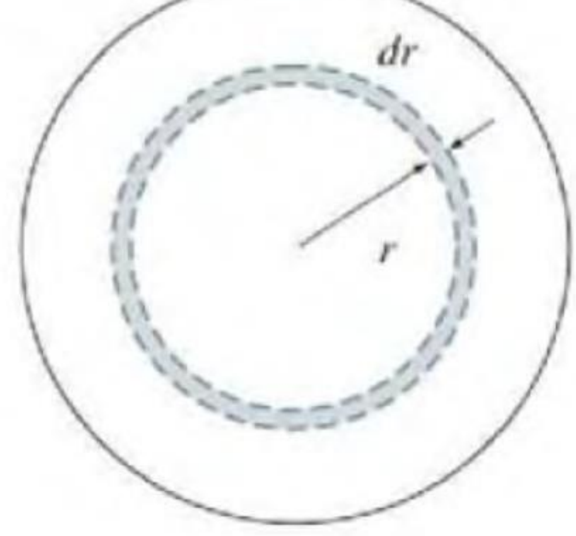
ή
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^{\,3}}r \qquad \left[r<r_0\right]$$

το πεδίο αυξάνεται γραμμικά με το r, μέχρι την απόσταση $r=r_0$, στη συνέχεια ελαττώνεται με ρυθμό $1/r^2$



Άσκηση IV: Μη ομοιόμορφα φορτισμένη συμπαγής σφαίρα

- Υποθέστε ότι η πυκνότητα φορτίου της στερεάς σφαίρας στο σχήμα, δίνεται από τη σχέση $\rho_E = \mathrm{a} r^2$ σταθερά. α) Βρείτε το a σε σχέση με το συνολικό φορτίο Q της σφαίρας και της ακτίνας της r_0 .
β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο ως συνάρτηση του r στο εσωτερικό της σφαίρας.

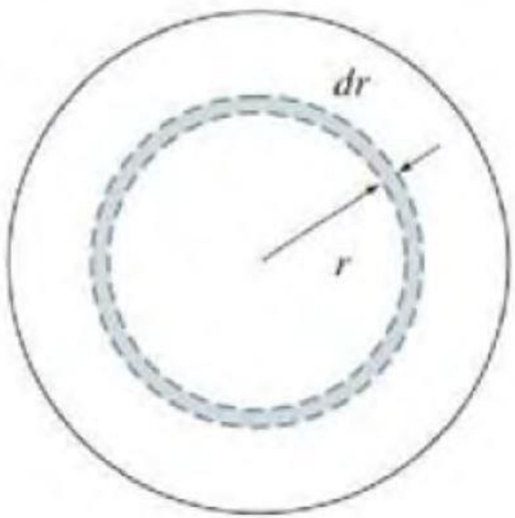


Άσκηση IV: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** α) Ένα λεπτό κέλυφος ακτίνας r και πάχους dr έχει όγκο $dV = 4\pi r^2 dr$. Το συνολικό του φορτίο δίνεται από την

$$Q = \int \rho_E dV = \int_0^{r_0} \left(\mathrm{a} r^2\right)\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi \mathrm{a} \int_0^{r_0} r^4 dr = \frac{4\pi \mathrm{a}}{5} r_0^{\,5}$$

Έτσι, $\mathrm{a} = 5Q/\pi r_0^{\,5}$



Άσκηση IV: Απάντηση

- β) E εντός της σφαίρας

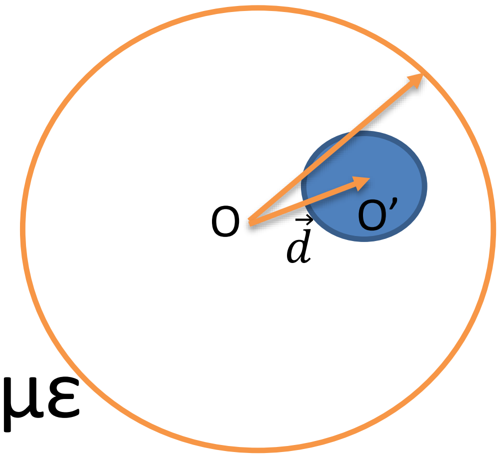
$$Q_{encl} = \int_0^r \rho_E dV = \int_0^r \left(\mathrm{a}r^2\right)\left(4\pi r^2 dr\right) = \int_0^r \left(r \frac{5Q}{4\pi r_0^5} r^2 \right) 4\pi r^2 dr = Q\frac{r^5}{r_0^5}$$

Λόγω *συμμετρίας*, το E θα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας r

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad (E)\left(4\pi r^2\right) = Q\frac{r^5}{\varepsilon_0 r_0^5}$$

$$\boxed{E = \frac{Qr^3}{4\pi\varepsilon_0 r_0^5}}$$

Άσκηση V: Σφαίρα με κοιλότητα



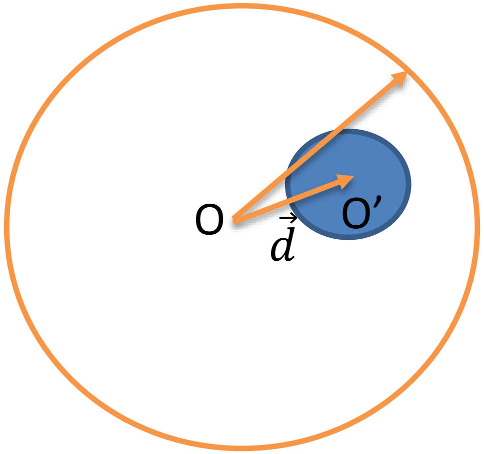
❖ Σφαίρα ακτίνας α είναι φορτισμένη με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου ρ.

A. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο E σε όλο το χώρο.

B. Η σφαίρα είναι φορτισμένη με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου ρ παντού εκτός από μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας b. Να δειχθεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο E στην κοιλότητα είναι ομογενές.

Άσκηση V: Απάντηση

Θεωρούμε τη σφαίρα σαν σύνολο από σφαιρικά κελύφη πάχους dr.



Ο όγκος κάθε κελύφους $dV = 4\pi r^2 dr$

Το φορτίο $dQ = \rho 4\pi r^2 dr$

Έξω από τη σφαίρα

$$Q_{o\lambda} = \rho 4\pi \int_0^R r^2 dr \Rightarrow Q_{o\lambda} = \rho 4\pi \frac{R^3}{3} \Longrightarrow$$

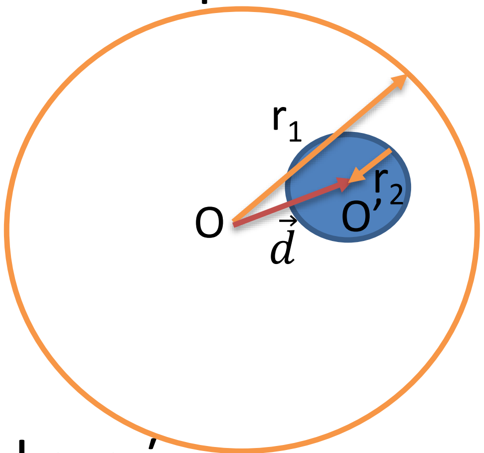
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho 4\pi R^3}{3}\frac{1}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

Μέσα στη σφαίρα

$$Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} Q = \frac{r^3}{R^3} Q \Longrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi r^3}{3}\frac{1}{r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

Άσκηση V: Απάντηση

Λόγω της αρχής της υπέρθεσης, την ύπαρξη της κοιλότητας μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως επαλληλία δύο κατανομών.



ρ σε όλη τη σφαίρα, κέντρου Ο
-ρ στη σφαίρα κέντρου Ο'

$$\rho: \overrightarrow{\mathrm{E}_1} \qquad -\rho: \overrightarrow{\mathrm{E}_2}$$

και

$$\vec{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E}_1} + \overrightarrow{\mathrm{E}_2}$$

Τα σημεία της κοιλότητας είναι εσωτερικά των σφαιρών των δύο προβλημάτων, άρα:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{E}_1} &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{r_1} \\ \overrightarrow{\mathrm{E}_2} &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{r_2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{\mathrm{r}_2}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$