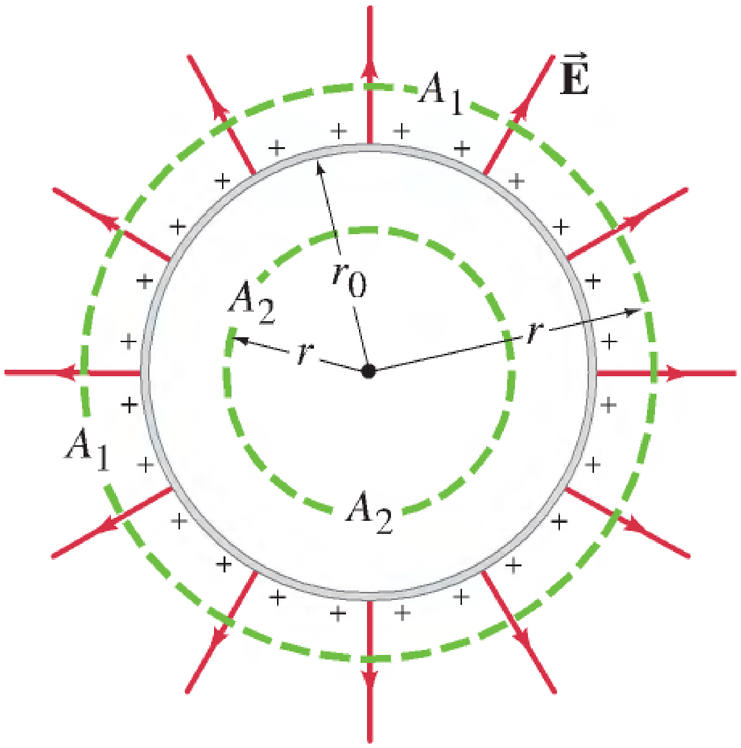
Μέρος Γ: Νόμος του Gauss

- Άσκηση I: Σφαιρικός αγωγός
- Άσκηση II: Φορτίο σε συμπαγή σφαίρα
- Άσκηση III: Μη ομοιόμορφα φορτισμένη συμπαγής σφαίρα
- Άσκηση IV: Ομοιόμορφα φορτισμένη γραμμή φορτίου μεγάλου μήκους
- Άσκηση V: Σφαιρική επιφάνεια
- Άσκηση VI_{α}: Ομοιόμορφα φορτισμένος κύλινδρος
- Άσκηση VI_{β}: Γραμμική κατανομή σε κύλινδρο
- Άσκηση VII: Άπειρο φορτισμένο επίπεδο

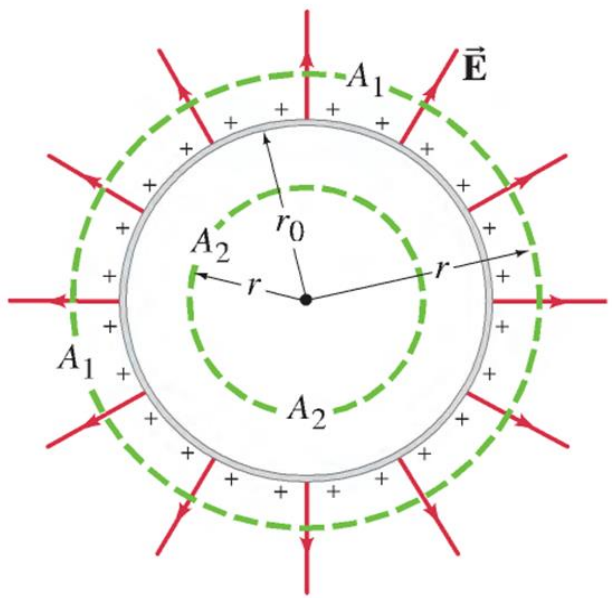
Άσκηση Ι: Σφαιρικός αγωγός

- Ένα λεπτό, σφαιρικό κέλυφος ακτίνας r_0 περικλείει ένα συνολικό φορτίο Q, το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε αυτό. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία α) εξωτερικά του κελύφους, β) εντός του κελύφους. γ) Τι θα άλλαζε στο πρόβλημα εάν ο αγωγός ήταν συμπαγής σφαίρα;



ʻΑσκηση Ι: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** α) Το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία της υποθετικής γκαουσσιανής επιφάνειας, εάν επιλέξουμε την επιφάνεια αυτή ως μια σφαίρα ακτίνας r ($r > r_0$) ομόκεντρη με το κέλυφος, όπως απεικονίζεται στο σχήμα με το διακεκομένο κύκλο A_1.



‘Ασκηση I: Απάντηση

Επειδή το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι κάθετο σε αυτήν την επιφάνεια, το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στα $\vec{\mathbf{E}}$ και $d\vec{\mathbf{A}}$ θα είναι πάντοτε ίσο με τη μονάδα. Ο νόμος του Gauss δίνει για αυτήν την περίπτωση

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου $4\pi r^2$ είναι το εμβαδό της επιφάνειας της εν λόγω σφαίρας (γκαουσσιανή επιφάνεια) ακτίνας r. Έτσι,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \left[r > r_0\right]$$

Ασκηση Ι: Απάντηση

- β) εσωτερικά του κελύφους, το E θα πρέπει να είναι συμμετρικό. Άρα, το E = ίδια τιμή σε όλα τα σημεία μιας γκαουσσιανής επιφάνειας (A_2 στο σχήμα) ομόκεντρης με το κέλυφος.

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = 0$$

Συνεπώς,

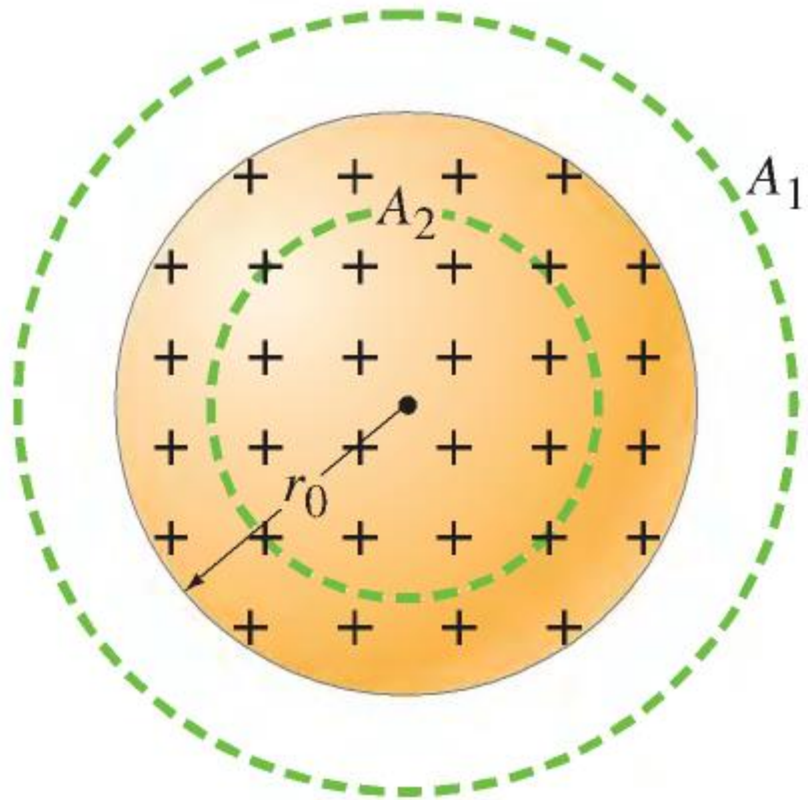
στο εσωτερικό ενός σφαιρικού κελύφους με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου.

$$E = 0 \qquad \left[r < r_0\right]$$

- γ) Συμπαγής σφαιρικός αγωγός…

Άσκηση ΙΙ: Φορτίο σε συμπαγή σφαίρα

❖ Ένα ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο μιας μη αγώγιμης σφαίρας ακτίνας r_0 Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο α) εξωτερικά της σφαίρας ($r > r_0$) και β) εσωτερικά της σφαίρας ($r < r_0$)

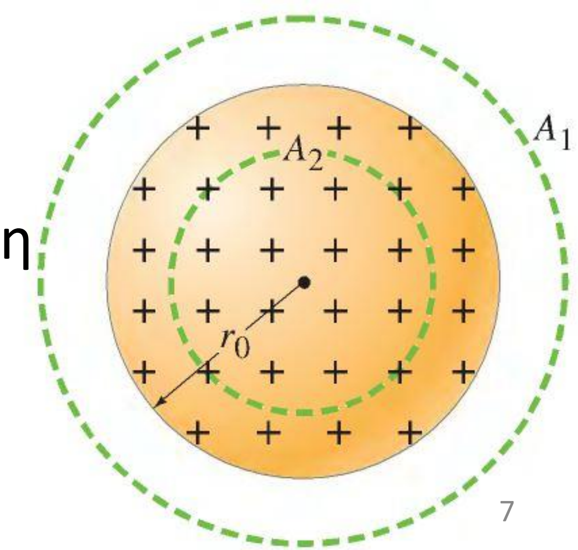


Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** α) Ως γκαουσσιανή επιφάνεια επιλέγουμε μια σφαίρα ακτίνας $(r > r_0)$, που σημειώνεται με A_1 στο σχήμα. Επειδή το E εξαρτάται μόνο από το r, ο νόμος του Gauss δίνει, με $Q_{encl} = Q$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

το πεδίο εξωτερικά της σφαιρικά συμμετρικής κατανομής φορτίου είναι το ίδιο με αυτό ενός σημειακού φορτίου ίσου κατά απόλυτη τιμή εντοπισμένου στο κέντρο της σφαίρας



Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

β) Εσωτερικά της σφαίρας (γκαουσσιανή επιφάνεια A_2: ομόκεντρη σφαίρα, ακτίνας r, $(r < r_0)$

Λόγω συμμετρίας, το μέτρο του $\vec{\mathbf{E}}$ είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία της A_2 και κάθετο στην επιφάνεια, οπότε

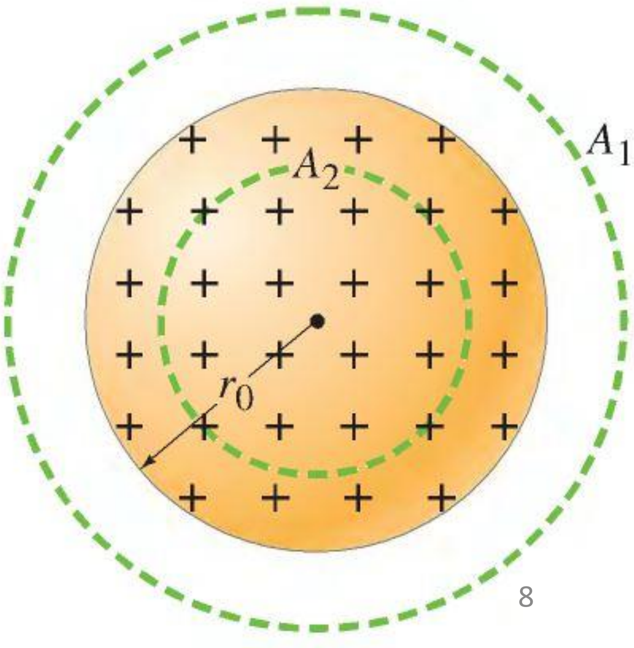
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(4\pi r^2\right)$$

Ισο με Q_{encl}/ε_0, όπου Q_{encl} το φορτίο (κλάσμα του συνολικού Q που περικλείεται από την A_2

πυκνότητα φορτίου ρ_E

φορτίο ανά μονάδα όγκου $\left(\rho_E = dQ/dV\right)$

και ρ_E = σταθερό



Το φορτίο που περικλείεται από τη A_2, μιας σφαίρας ακτίνας r, είναι

$$Q_{encl} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E}{\frac{4}{3}\pi {r_0}^3 \rho_E}\right) Q = \frac{r^3}{{r_0}^3} Q$$

Άσκηση ΙΙ: Απάντηση

Οπότε από το νόμο του Gauss έχουμε

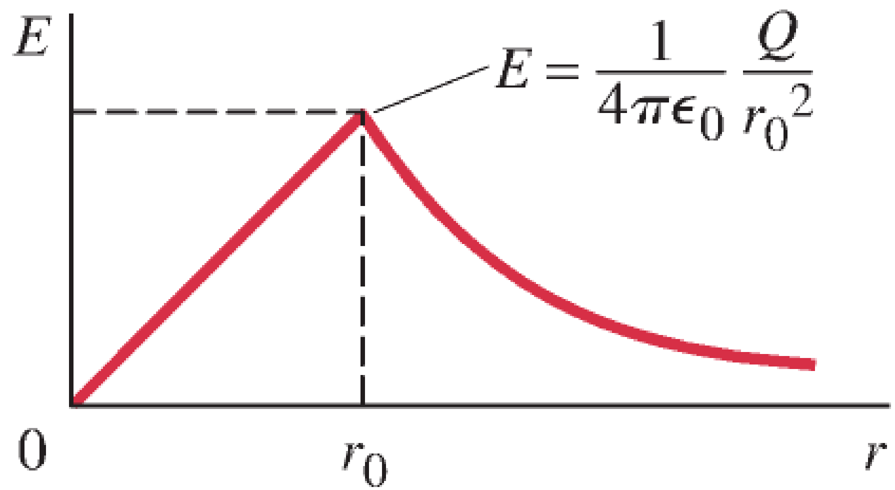
$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{r^3}{r_0^{\ 3}}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^{\ 3}}r \qquad \left[r < r_0\right]$$

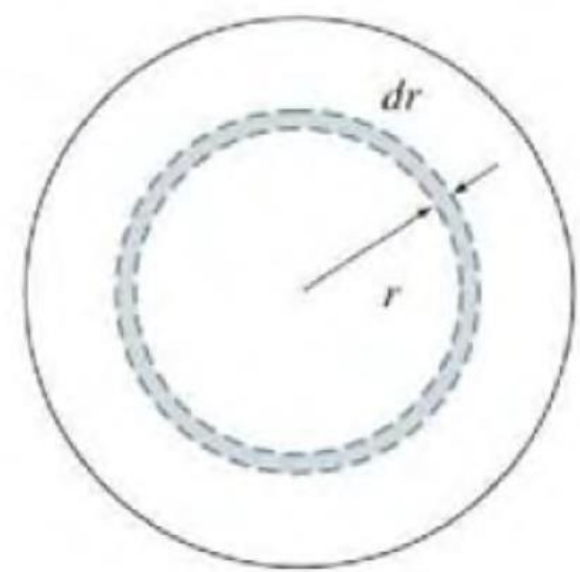
Το πεδίο αυξάνεται γραμμικά με το r, μέχρι την απόσταση $r = r_0$.

Από το r_0 ελαττώνεται με ρυθμό $1/r^2$



Άσκηση III: Μη ομοιόμορφα φορτισμένη συμπαγής σφαίρα

- Υποθέστε ότι η πυκνότητα φορτίου της στερεάς σφαίρας στο σχήμα, δίνεται από τη σχέση $\rho_E = \mathrm{a}r^2$ σταθερά. α) Βρείτε το a σε σχέση με το συνολικό φορτίο Q της σφαίρας και της ακτίνας της r_0 .
β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο ως συνάρτηση του r στο εσωτερικό της σφαίρας.



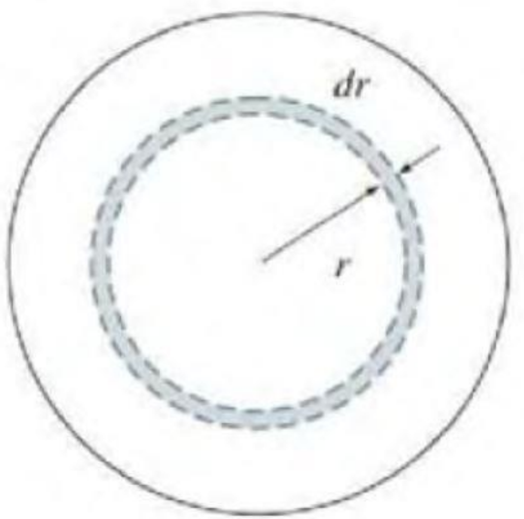
Άσκηση ΙΙΙ: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** α) Ένα λεπτό κέλυφος ακτίνας r και πάχους dr έχει όγκο $dV = 4\pi r^2 dr$. Το συνολικό του φορτίο δίνεται

$$Q = \int \rho_E dV = \int_0^{r_0} \left(\text{a} r^2\right)\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi \text{a} \int_0^{r_0} r^4 dr = \frac{4\pi \text{a}}{5} r_0^{\,5}$$

Έτσι

$$\text{a} = 5Q/\pi r_0^{\,5}$$



Άσκηση III: Απάντηση

- β) E εντός της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο της,
- νόμος του Gauss σε υποθετική σφαίρα ακτίνας r,

$$Q_{encl} = \int_0^r \rho_E dV = \int_0^r \left(\mathrm{a}r^2\right)\left(4\pi r^2 dr\right) = \int_0^r \left(\frac{5Q}{4\pi r_0^5} r^2\right) 4\pi r^2 dr = Q\frac{r^5}{r_0^5}$$

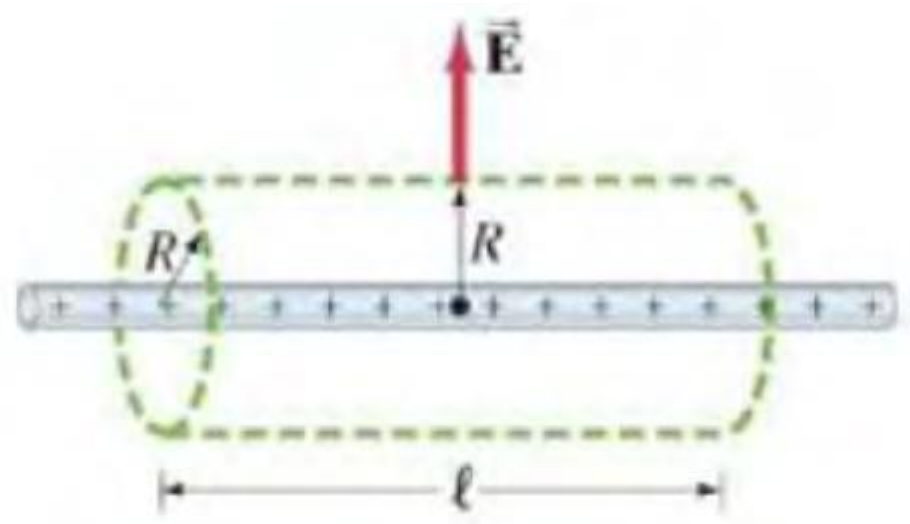
Λόγω *συμμετρίας*, το E = ίδιο σε όλα τα σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας r, οπότε

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad (E)\left(4\pi r^2\right) = Q\frac{r^5}{\varepsilon_0 r_0^5}$$

$$\boxed{E = \frac{Qr^3}{4\pi\varepsilon_0 r_0^5}}$$

Άσκηση IV: Ομοιόμορφα φορτισμένη γραμμή φορτίου μεγάλου μήκους

❖ Ένα ευθύγραμμο καλώδιο πολύ μεγάλου μήκους φέρει μια ομοιόμορφη κατανομή ανά μονάδα μήκους θετικού φορτίου, λ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημεία κοντά (αλλά εξωτερικά) στο καλώδιο, μακριά από τα άκρα του.



Άσκηση IV: Απάντηση

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:** Λόγω της υφιστάμενης *συμμετρίας*, αναμένουμε το πεδίο να κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω και να εξαρτάται μόνο από την κάθετη απόσταση R από το καλώδιο. Εξαιτίας της κυλινδρικής συμμετρίας, το πεδίο θα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία μιας κυλινδρικής γκαουσσιανής επιφάνειας με τον άξονά της να συμπίπτει με το καλώδιο. Το $\vec{\mathbf{E}}$ θα είναι κάθετο σε αυτήν την επιφάνεια σε όλα τα σημεία της. Για να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss, χρειαζόμαστε μια κλειστή επιφάνεια, οπότε θα συμπεριλάβουμε και τις επίπεδες βάσεις του κυλίνδρου. Αφού το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλο στις βάσεις του, δεν θα διέρχεται ροή από αυτές (το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στα $\vec{\mathbf{E}}$ και $d\vec{\mathbf{A}}$ στις βάσεις του θα είναι $\cos 90^\circ = 0$)

Άσκηση IV: Απάντηση

- **ΛΥΣΗ:** Για την επιλεγμένη γκαουσσιανή επιφάνεια ο νόμος του Gauss δίνει

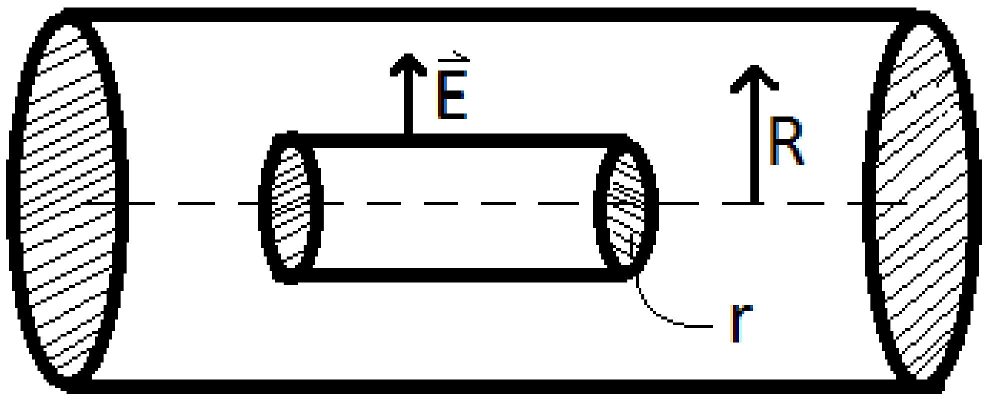
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\left(2\pi R\ell\right) = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}$$

όπου ℓ είναι το μήκος της γκαουσσιανής επιφάνειας που επιλέξαμε (ℓ << από το μήκος του καλωδίου) και $2\pi R$ η περίμετρος της βάσης της. Συνεπώς,

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

Άσκηση V_{α}: Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου κυλίνδρου

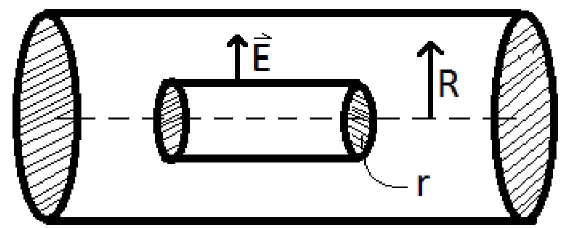
- Να βρεθεί το Ηλεκτρικό Πεδίο στο εσωτερικό και στο εξωτερικό κυλίνδρου ακτίνας R που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου είναι k.



Άσκηση V_α: Απάντηση

- α) Στο εσωτερικό $r < R$

$$\int_{S(V)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = 2\pi r \ell E$$ (1),



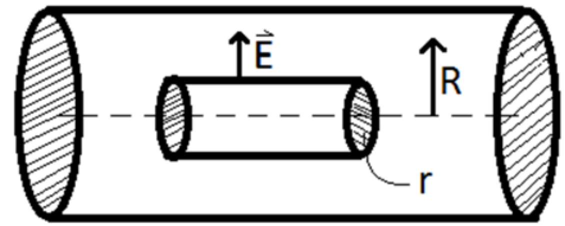
$$\int_{S(V)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0}$$ (2),

$$Q_{o\lambda} = k\ell$$ (3) διότι $k = \frac{dq}{d\ell} = \sigma\tau\alpha\theta.$

$$\frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{Q_{o\lambda}} = \frac{V_{\varepsilon\gamma\kappa}}{V_{o\lambda}} \Rightarrow \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{k\ell} = \frac{\pi r^2 \ell}{\pi R^2 \ell} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = k\ell \frac{r^2}{R^2}$$

Από (1),(2),(3) $2\pi \cancel{r} \cancel{\ell} E = \frac{1}{\varepsilon_0} k \cancel{\ell} \frac{r^{\cancel{2}}}{R^2} \Rightarrow$ $\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{k}{R^2} \cdot r}$

Άσκηση V_α: Απάντηση



- β) Στο εξωτερικό $r > R$

$$\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = 2\pi r \ell E$$ (4) όπως και πριν

$$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = Q_{o\lambda} = k\ell$$ (5)

Από τις (1),(4),(5) έχουμε $2\pi r \cancel{\ell} E = \frac{1}{\varepsilon_0} k \cancel{\ell} \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{k}{r}}$$

Άσκηση V_β:Γραμμική κατανομή σε κύλινδρο

- Να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα (Άσκηση Vi_α) αλλά με κατανομή που αυξάνει από τον άξονα του κυλίνδρου γραμμικά με την απόσταση, δηλαδή $\rho = kr$, $k = \sigma\tau\alpha\theta.$

- **ΛΥΣΗ:** α) Στο εσωτερικό, $r < R$

Η εξίσωση $\int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0}$ (1) συνεπάγεται

- Το πρώτο μέλος είναι $\int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\alpha} = 2\pi r\ell E$
- Ενώ το έγκλειστο φορτίο $Q_{\varepsilon\gamma\kappa}$ είναι

$$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \int \rho d\tau = \int (kr') \cdot \overbrace{r'dr'd\varphi dz}^{d\tau(\sigma\varepsilon\_\kappa\upsilon\lambda.\sigma\upsilon\nu\tau)} = 2\pi k\ell \cdot \int_0^r r'^2 dr' = 2\pi k\ell \frac{r^3}{3}$$

$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \frac{2}{3}\pi k\ell r^3$ (3) . Από τις (1),(2),(3) $2\pi r\ell E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{2}{3}\pi k\ell r^3 \Rightarrow$ $\boxed{E = \frac{1}{3\varepsilon_0} kr^2}$

Άσκηση V_β:Απάντηση

- β) Στο εξωτερικό, $r > R$

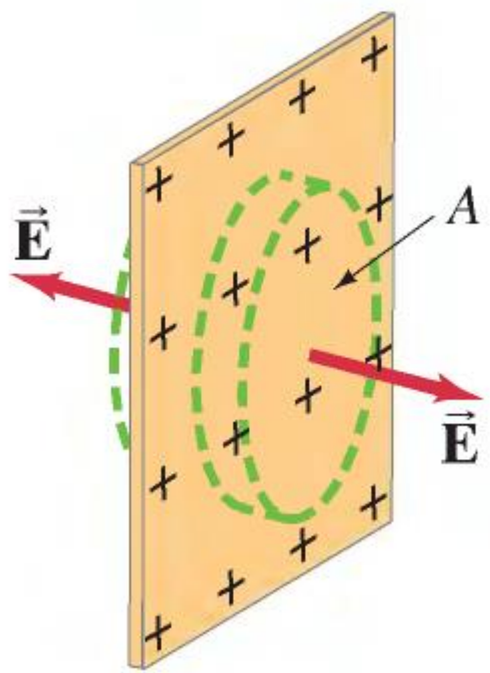
$Q_{o\lambda} = \frac{2}{3}\pi k \ell R^3$ (4).

Από τις (1),(2),(4) προκύπτει $2\pi r \ell E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{2}{3}\pi k \ell R^3 \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{kR^3}{r}}$$

Άσκηση VI: Άπειρο φορτισμένο επίπεδο

- Φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα με επιφανειακή πυκνότητα σ (σ είναι το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας dQ/dA), σε ένα πολύ λεπτό μη αγώγιμο επίπεδο πολύ μεγάλου εμβαδού. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία κοντά στο επίπεδο.



Απάντηση VI: Απάντηση

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:** Για την γκαουσσιανή επιφάνεια επιλέγουμε ένα μικρό κλειστό κύλινδρο, ο άξονας του οποίου είναι κάθετος στο επίπεδο και εκτείνεται και από τις δύο πλευρές του επιπέδου, σύμφωνα και με το σχήμα. Λόγω της συμμετρίας, αναμένουμε το $\vec{\mathbf{E}}$ να είναι κάθετο στο επίπεδο και από τις δύο πλευρές του και να είναι ομοιόμορφο στις δύο βάσεις του κυλίνδρου, το εμβαδό των οποίων είναι A
- **ΛΥΣΗ:** Αφού από την παράπλευρη επιφάνεια του επιλεγμένου κυλίνδρου δεν διέρχεται καθόλου ροή, όλη η ροή θα διέρχεται από τις δύο βάσεις του. Οπότε, σύμφωνα με το νόμο του Gauss, θα έχουμε

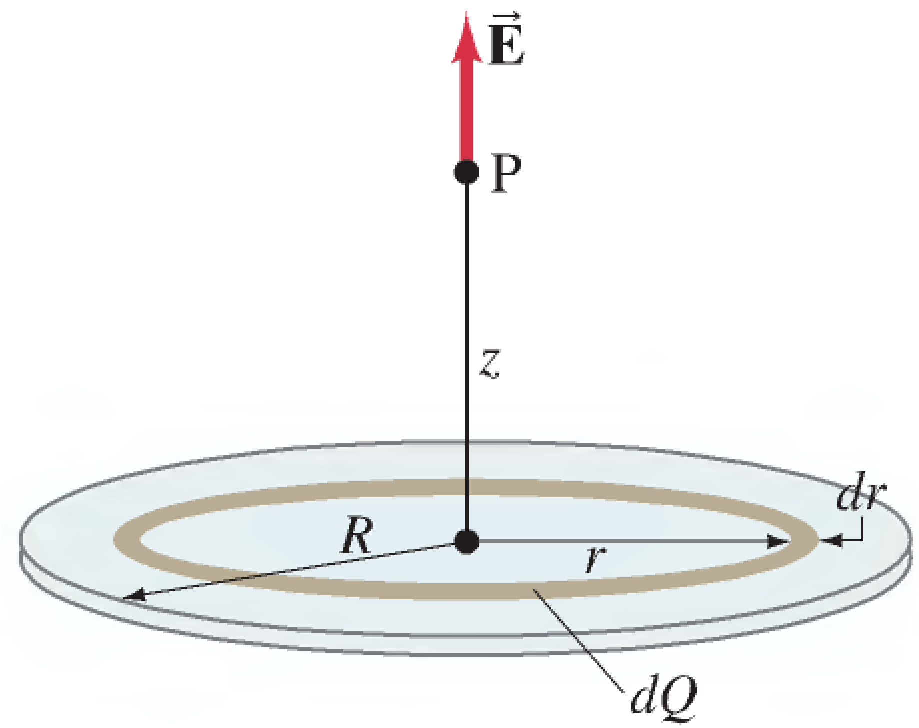
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 2EA = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

όπου $Q_{encl} = \sigma A$ είναι το φορτίο που περικλείεται από το γκαουσσιανό κύλινδρο. Έτσι, το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

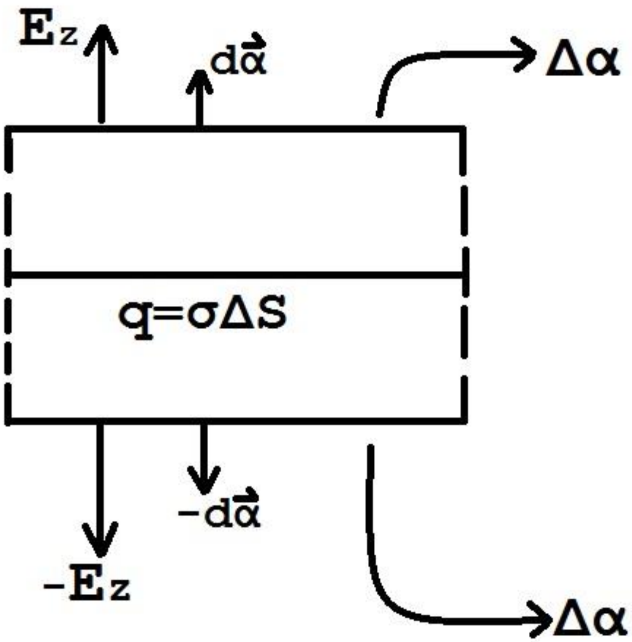
Άσκηση V_{α} : Κυκλικός δίσκος ομοιόμορφης κατανομής

❖ Ένα φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ενός λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας R . Το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας $\left(C/m^2\right)$ είναι σ. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε τυχαίο σημείο P πάνω στον άξονα του δίσκου σε απόσταση z από το κέντρο του όταν είναι σταθερά φορτισμένο όλο το επίπεδο, με τον νόμο του Gauss.



Άσκηση V_β: Απάντηση

- Όταν είναι σταθερά φορτισμένο όλο το επίπεδο, με τον νόμο του Gauss:



$$\oint_s E_z d\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_z \Delta\alpha + \left(-E_z\right)\left(-\Delta\alpha\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

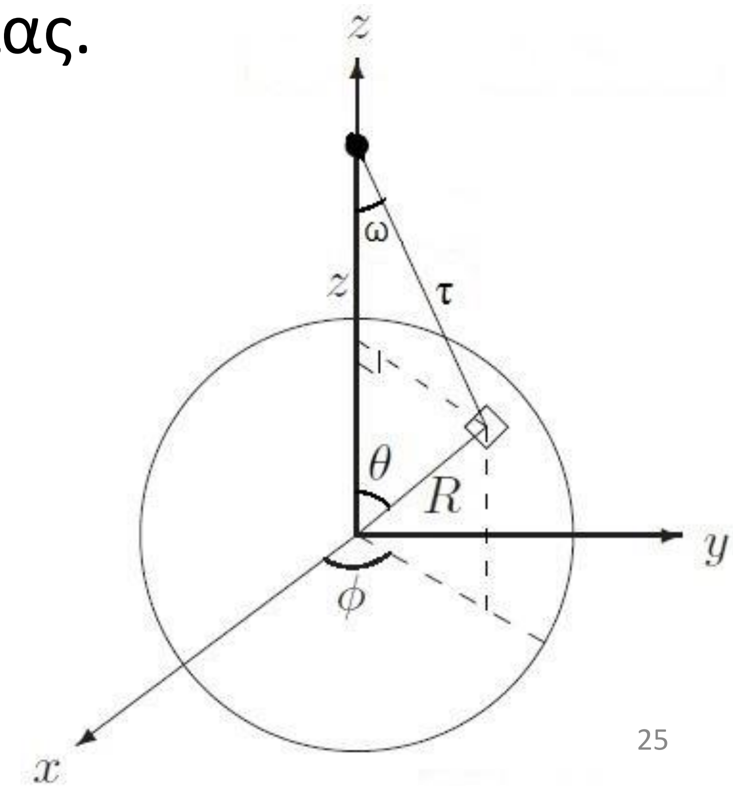
$$2E_z \Delta\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{q}{2\Delta\alpha\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

- Η σταθερότητα του E_z οφείλεται στο ότι δεν υπάρχει παράπλευρη ροή, λόγω του απείρου επιπέδου.

Άσκηση V_β : Σφαιρική επιφάνεια

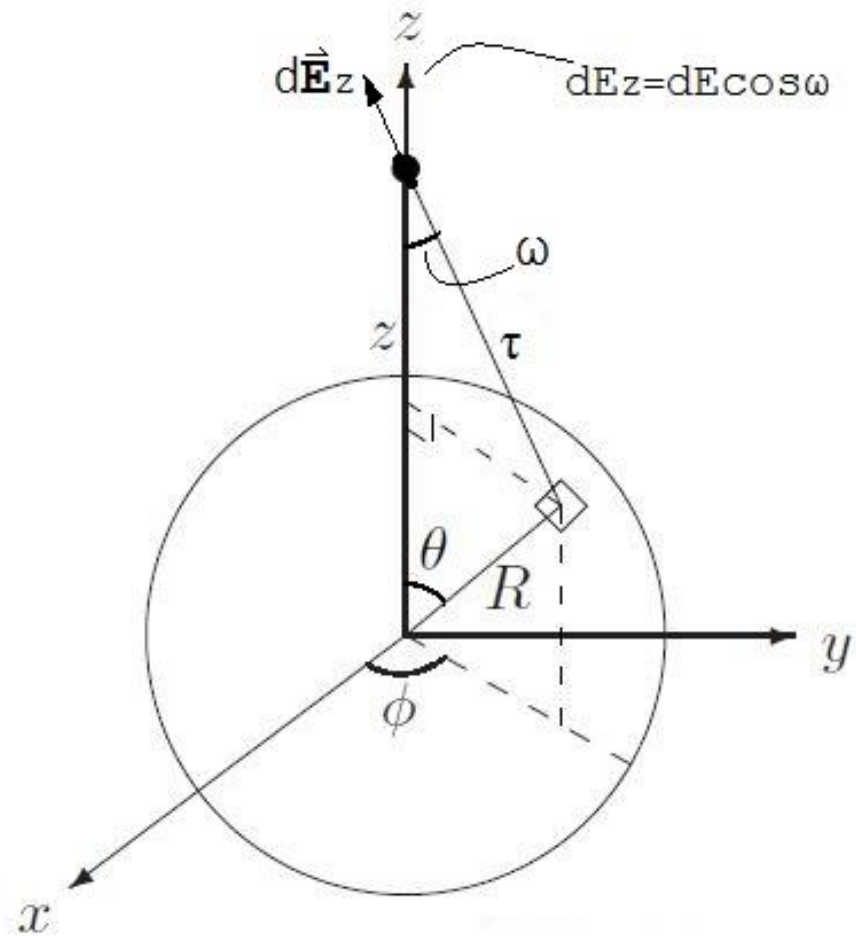
- Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από το κέντρο σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R , που φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ . Να διακρίνεται περιπτώσεις i) $z<R$ (εσωτερικό), ii) $z>R$ (εξωτερικό). Εκφράστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει του ολικού φορτίου q της σφαιρικής επιφάνειας.



Άσκηση V$_\beta$: Απάντηση

- i) Για $z > R$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\tau^2}\cdot\cos\omega$$



όπου $\tau^2 = z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta$

ολοκληρώνοντας ως προς τη γωνία φ

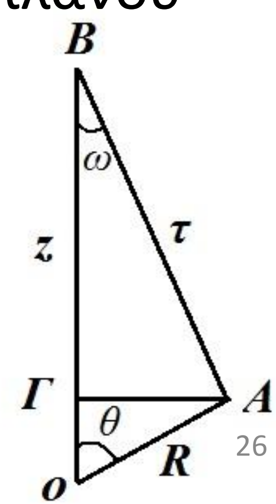
$$dE_z = \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\sigma R^2 \frac{-d\cos\theta\cdot\cos\omega}{z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta}$$

θέτουμε $y = \cos\theta$, τότε με

$\theta \in [0,\pi] \to y \in [1,-1]$

Από τη γεωμετρία του διπλανού σχήματος φαίνεται ότι :

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{z - R\cos\theta}{\tau}$$



Άσκηση V_β : Απάντηση

Τότε $$dE_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\cdot(-1)\cdot\frac{d\cos\theta\cdot(z-R\cos\theta)}{\left(z^2+R^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$ και

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{dy(z-Ry)}{(A-By)^{3/2}} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{dy(z-Ry)}{(A-By)^{3/2}}$$ όπου $$A = R^2+z^2 \qquad B = 2Rz$$

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $$\int_{-1}^{+1}\frac{dy(z-Ry)}{(A-By)^{3/2}} = \ldots = \frac{2}{z^2} \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}}$$

Όπου το q είναι το «έγκλειστο φορτίο» σε σφαίρα ακτίνας $z > R$

<u>*Με το Θεώρημα του Gauss:*</u> $$\oiint_{S(z)}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{a}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \qquad E_z\cdot 4\pi z^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

Δηλαδή, η ένταση είναι σαν να έχουμε το φορτίο q στο κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας.

$$\boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}}$$

Άσκηση V_β : Απάντηση

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{+1} \frac{(z - Ry)}{(A - By)^{3/2}} dy = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{\sqrt{(R+z)^2}} + \frac{z-R}{\sqrt{(R-z)^2}}\right]$$

Για $z > R$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{R+z} + \frac{z-R}{z-R}\right] = \frac{2}{z^2}$$

Για $z < R$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{R+z}{R+z} + \frac{z-R}{R-z}\right] = \frac{1}{z^2}(1-1) = 0$$

Άσκηση V_β : Απάντηση

ii) Για $z<R$ καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα της ίδιας μορφής,δηλαδή :

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{dy\left(z-Ry\right)}{\left(A-By\right)^{3/2}} \qquad \text{με} \qquad \begin{aligned} A &= R^2+z^2 \\ B &= 2Rz \end{aligned}$$

Αλλά για $z<R$ το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν.

Οπότε $E_z = 0$

Με το θεώρημα του Gauss: $\oiint_{S(z)}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{a}} = \frac{q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0} = 0$

Διότι για $z<R$ το $q_{\varepsilon\gamma\kappa} = 0$

Άσκηση VII: Ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας

- Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}} = kr^3\hat{r}, \quad k = \sigma\tau\alpha\theta.$

α) Να βρεθεί η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$

Δίδεται ο νόμος του Gauss σε διαφορική μορφή: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial\left(\sin\theta E_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial \mathrm{E}_\varphi}{\partial\varphi} \right] \Rightarrow$$

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[kr^5\right] = \frac{5\varepsilon_0 k r^4}{r^2} \Rightarrow$$

$$\rho = 5\varepsilon_0 k r^2$$

β) Να βρεθεί το ολικό φορτίο q που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας R

$$q = \int_0^R \rho d\tau = 5\varepsilon_0 k \int_0^R r^2 d\tau = 5\varepsilon_0 k \int_0^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$q = 5\varepsilon_0 k \cdot 2\pi \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cdot \int_0^R r^4 dr = 5\varepsilon_0 k \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\pi + \cos 0\right) \cdot \frac{R^5}{5} \Rightarrow$$

$$q = 4\pi k \varepsilon_0 R^5$$