Métodos Numéricos para la Informática

Métodos numéricos para la resolución de problemas de contorno (III)

I. Arregui

Noviembre, 2014

Métodos numéricos para la resolución de problemas de contorno

- Métodos de diferencias finitas para problemas bidimensionales elípticos
- Métodos de diferencias finitas para problemas bidimensionales parabólicos

Ecuación de Laplace

Sea un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Buscamos una función u, solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_D & \text{en } \partial_D \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{en } \partial_N \Omega \end{cases}$$

- Este problema modela, por ejemplo:
  - la distribución estacionaria de temperaturas en el dominio Ω
  - el potencial eléctrico de una placa que ocupa el dominio Ω
- La solución analítica se conoce en casos muy concretos: dominios rectangulares o circulares con condiciones Dirichlet, por ejemplo
- En general, es necesario utilizar métodos numéricos

Método de diferencias finitas

Consideremos la ecuación de Laplace, con condiciones Dirichlet, en un dominio rectangular $(0,L_1)\times(0,L_2)$

Dados $N > 0$ y $M > 0$, construimos:

$$\Delta x = \frac{L_1}{N+1}\,, \qquad x_i = i\Delta x\,, \qquad i = 0,1,\ldots,N+1$$
$$\Delta y = \frac{L_2}{M+1}\,, \qquad y_j = j\Delta y\,, \qquad j = 0,1,\ldots,M+1$$

y la malla:

$$\left\{(x_i,y_j)\,/\,i = 0,1,\ldots,N+1,\; j = 0,1,\ldots,M+1\right\}$$

Método de diferencias finitas

Aproximamos las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{(\Delta y)^2}$$

introducimos las aproximaciones $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ y sustituimos en la ecuación:

$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0\,,$$
$$i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, M$$

Sea $\beta = \Delta x / \Delta y$; si multiplicamos la ecuación anterior por $(\Delta x)^2$, obtenemos:

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - \beta^2 u_{i,j-1} - \beta^2 u_{i,j+1} + 2(1+\beta^2) u_{i,j} = 0\,,$$
$$i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, M$$

Se trata de un sistema de $N \times M$ ecuaciones lineales

Método de diferencias finitas

El sistema puede resolverse mediante un método directo, pero un método iterativo puede ser más eficiente.

En el caso particular con $\beta = 1$, cada ecuación es de la forma:

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} = 0$$

Multiplicando por $\omega > 0$, y sumando y restando $4u_{i,j}$, obtenemos:

$$4u_{i,j} = 4u_{i,j} + \omega \left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} \right)$$

lo que nos permite plantear:

Dado $u_{i,j}^0$

Para $m = 1, 2, \ldots$

$$u_{i,j}^m = u_{i,j}^{m-1} + \frac{\omega}{4} \left(u_{i-1,j}^{m-1} + u_{i+1,j}^{m-1} + u_{i,j-1}^{m-1} + u_{i,j+1}^{m-1} - 4u_{i,j}^{m-1} \right)$$

Método de diferencias finitas: ejemplo 1

Consideremos el dominio $\Omega = (0,5)\times(0,10)$, y las condiciones de contorno:

$$u_D = \begin{cases} 100\,, & \text{si } y = 10 \\ 0\,, & \text{si } y < 10 \end{cases}$$

Tomaremos, por ejemplo, $N = 4$ y $M = 7$; entonces,

$$\Delta x = \frac{5}{N+1} = 1 \qquad\qquad \Delta y = \frac{10}{M+1} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

de donde $\beta = \Delta x/\Delta y = 4/5 = 0{,}8$.

Método de diferencias finitas: ejemplo 1

El sistema de ecuaciones lineales que obtenemos es:

$$
\begin{array}{ll}
i=1,\ j=1, & -u_{0,1}-u_{2,1}-\beta^2 u_{1,0}-\beta^2 u_{1,2}+2(1+\beta^2)u_{1,1}=0 \\
i=2,\ j=1, & -u_{1,1}-u_{3,1}-\beta^2 u_{2,0}-\beta^2 u_{2,2}+2(1+\beta^2)u_{2,1}=0 \\
i=3,\ j=1, & -u_{2,1}-u_{4,1}-\beta^2 u_{3,0}-\beta^2 u_{3,2}+2(1+\beta^2)u_{3,1}=0 \\
i=4,\ j=1, & -u_{3,1}-u_{5,1}-\beta^2 u_{4,0}-\beta^2 u_{4,2}+2(1+\beta^2)u_{4,1}=0 \\
i=1,\ j=2, & -u_{0,2}-u_{2,2}-\beta^2 u_{1,1}-\beta^2 u_{1,3}+2(1+\beta^2)u_{1,2}=0 \\
i=2,\ j=2, & -u_{1,2}-u_{3,2}-\beta^2 u_{2,1}-\beta^2 u_{2,3}+2(1+\beta^2)u_{2,2}=0 \\
i=3,\ j=2, & -u_{2,2}-u_{4,2}-\beta^2 u_{3,1}-\beta^2 u_{3,3}+2(1+\beta^2)u_{3,2}=0 \\
i=4,\ j=2, & -u_{3,2}-u_{5,2}-\beta^2 u_{4,1}-\beta^2 u_{4,3}+2(1+\beta^2)u_{4,2}=0 \\
i=1,\ j=3, & -u_{0,3}-u_{2,3}-\beta^2 u_{1,2}-\beta^2 u_{1,4}+2(1+\beta^2)u_{1,3}=0 \\
i=2,\ j=3, & -u_{1,3}-u_{3,3}-\beta^2 u_{2,2}-\beta^2 u_{2,4}+2(1+\beta^2)u_{2,3}=0 \\
\ldots\ \ldots & \ldots \\
i=4,\ j=7, & -u_{3,7}-u_{5,7}-\beta^2 u_{4,6}-\beta^2 u_{4,8}+2(1+\beta^2)u_{4,7}=0
\end{array}
$$

Método de diferencias finitas: ejemplo 1

y, teniendo en cuenta las condiciones de contorno,

$$
\begin{array}{ll}
i=1,\ j=1, & -0-u_{2,1}-\beta^2 0-\beta^2 u_{1,2}+2(1+\beta^2)u_{1,1}=0 \\
i=2,\ j=1, & -u_{1,1}-u_{3,1}-\beta^2 0-\beta^2 u_{2,2}+2(1+\beta^2)u_{2,1}=0 \\
i=3,\ j=1, & -u_{2,1}-u_{4,1}-\beta^2 0-\beta^2 u_{3,2}+2(1+\beta^2)u_{3,1}=0 \\
i=4,\ j=1, & -u_{3,1}-u_{5,1}-\beta^2 0-\beta^2 u_{4,2}+2(1+\beta^2)u_{4,1}=0 \\
i=1,\ j=2, & -0-u_{2,2}-\beta^2 u_{1,1}-\beta^2 u_{1,3}+2(1+\beta^2)u_{1,2}=0 \\
i=2,\ j=2, & -u_{1,2}-u_{3,2}-\beta^2 u_{2,1}-\beta^2 u_{2,3}+2(1+\beta^2)u_{2,2}=0 \\
i=3,\ j=2, & -u_{2,2}-u_{4,2}-\beta^2 u_{3,1}-\beta^2 u_{3,3}+2(1+\beta^2)u_{3,2}=0 \\
i=4,\ j=2, & -u_{3,2}-u_{5,2}-\beta^2 u_{4,1}-\beta^2 u_{4,3}+2(1+\beta^2)u_{4,2}=0 \\
i=1,\ j=3, & -0-u_{2,3}-\beta^2 u_{1,2}-\beta^2 u_{1,4}+2(1+\beta^2)u_{1,3}=0 \\
i=2,\ j=3, & -u_{1,3}-u_{3,3}-\beta^2 u_{2,2}-\beta^2 u_{2,4}+2(1+\beta^2)u_{2,3}=0 \\
\dots\ \dots & \dots \\
i=4,\ j=7, & -u_{3,7}-u_{5,7}-\beta^2 u_{4,6}-\beta^2 100+2(1+\beta^2)u_{4,7}=0
\end{array}
$$

Método de diferencias finitas: ejemplo 1

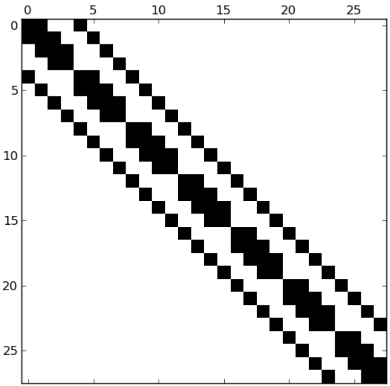
Si pasamos al segundo miembro los términos que no hacen intervenir a ninguna incógnita, tenemos un sistema de la forma:

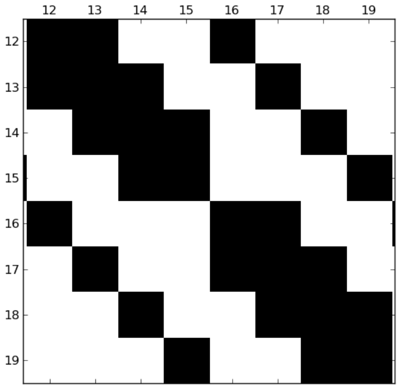
$$Au = b$$

donde la matriz del sistema toma la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
B_{4\times4} & -I_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} \\ \hline
-I_{4\times4} & B_{4\times4} & -I_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} \\ \hline
O_{4\times4} & -I_{4\times4} & B_{4\times4} & -I_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} \\ \hline
O_{4\times4} & O_{4\times4} & -I_{4\times4} & B_{4\times4} & -I_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} \\ \hline
O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & -I_{4\times4} & B_{4\times4} & -I_{4\times4} & O_{4\times4} \\ \hline
O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & -I_{4\times4} & B_{4\times4} & -I_{4\times4} \\ \hline
O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & O_{4\times4} & -I_{4\times4} & B_{4\times4}
\end{array}\right]$$

Método de diferencias finitas: ejemplo 1



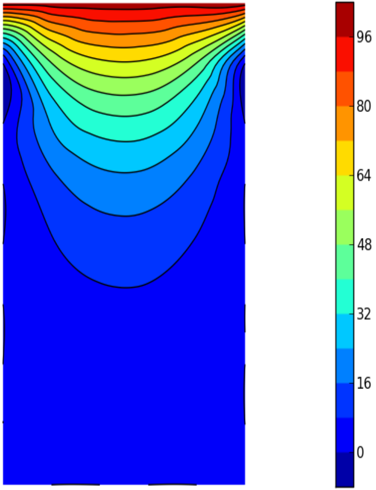


Método de diferencias finitas: ejemplo 1

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } (0,10)\times(0,15)$$

$$u = \begin{cases} 100, & \text{si } y = 15 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Malla 4×7

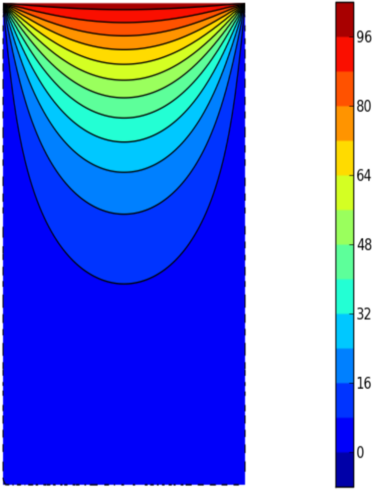


Método de diferencias finitas: ejemplo 1

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } (0,10)\times(0,15)$$

$$u = \begin{cases} 100, & \text{si } y = 15 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Malla 40×70

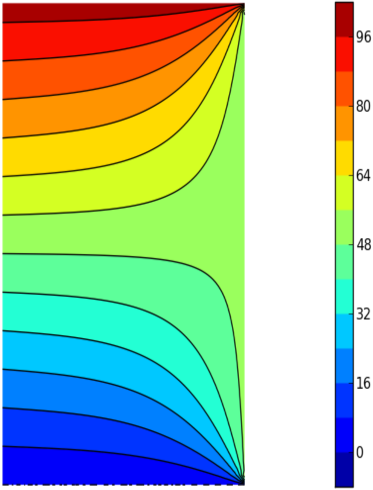


Método de diferencias finitas: ejemplo 2

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } (0,10)\times(0,15)$$

$$u = \begin{cases} 100\,, & \text{si } y = 15 \\ 0\,, & \text{si } y = 0 \\ 100x/15\,, & \text{si } x = 0 \\ 50\,, & \text{si } x = 10 \end{cases}$$

Malla 40×70



Ecuación del calor, difusión anisótropa

Dada una función matricial

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{A}: & \Omega\times[0,T] & \longrightarrow & \mathscr{M}_2 \\ & (x,y,t) & \longrightarrow & \mathbf{A}(x,y,t) \end{array}$$

buscamos una función $u = u(x,y,t)$ solución de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\mathbf{A}(x,y,t)\,\nabla u\right) = 0 & \text{en } \Omega\times[0,T] \\ u(x,y,t) = u_D(x,y,t) & \text{en } \partial\Omega\times[0,T] \\ u(x,y,0) = u^0(x,y) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

De esta forma, la solución u se difunde más, a lo largo del tiempo, en los puntos donde el coeficiente de difusión es más grande

Ecuación del calor

Podemos reescribir la ecuación en derivadas parciales como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left[\begin{array}{c} a_{11}(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ a_{21}(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22}(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array}\right] = 0$$

es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x}(x,y,t) + \frac{\partial a_{21}}{\partial y}(x,y,t)\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x}(x,y,t) + \frac{\partial a_{22}}{\partial y}(x,y,t)\right)\frac{\partial u}{\partial y} -$$

$$- a_{11}(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(a_{12}(x,y,t) + a_{21}(x,y,t)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a_{22}(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ecuación del calor: discretización

Y podemos discretizarla de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x}(x_i,y_j,t^{n+1})+\frac{\partial a_{21}}{\partial y}(x_i,y_j,t^{n+1})\right)\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}-\\
&-\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x}(x_i,y_j,t^{n+1})+\frac{\partial a_{22}}{\partial y}(x_i,y_j,t^{n+1})\right)\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}-\\
&-a_{11}(x_i,y_j,t^{n+1})\frac{u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}-\\
&-\left(a_{12}(x_i,y_j,t^{n+1})+a_{21}(x_i,y_j,t^{n+1})\right)\frac{u_{i+1,j+1}^{n+1}-u_{i-1,j+1}^{n+1}-u_{i+1,j-1}^{n+1}+u_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta x\Delta y}-\\
&-a_{22}(x_i,y_j,t^{n+1})\frac{u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}=0
\end{aligned}
$$

para $i=1,2,\ldots,N, \quad j=1,2,\ldots,M$

Ecuación del calor: casos particulares

- $\mathbf{A}(x,y,t) = a(x,y,t)\mathbf{I}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right) - a(x,y,t)\,\Delta u = 0$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x_i, y_j, t^{n+1}) \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\partial a}{\partial y}(x_i, y_j, t^{n+1}) \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right] -$$

$$-a(x_i, y_j, t^{n+1}) \left[\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] = 0$$

- $\mathbf{A}(x,y,t) = a\mathbf{I}$, con a constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - a \left[\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] = 0$$