Métodos Numéricos para la Informática

Métodos numéricos para la resolución de problemas de contorno (I)

I. Arregui

Noviembre, 2014

Métodos numéricos para la resolución de problemas de contorno

- Introducción
- Teorema de Taylor

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) de segundo orden es una expresión de la forma:

$$g(x,y,y',y'')=0 \tag{1}$$

donde:

- x *es la variable independiente*
- $y:[a,b]\subset I\!R \longrightarrow I\!R$ *es la función incógnita*
- $g:D\subset I\!R^4 \longrightarrow I\!R$ *es una función conocida.*

Definición

Una solución de la e.d.o. (1) es una función y dos veces derivable que verifica (1).

Observación

- *La ecuación (1) es una expresión implícita de la e.d.o. de segundo orden. Si podemos despejar la derivada segunda, tendremos una expresión explícita:*
$$y''=f(x,y,y')$$
- *Si la función* f *(ó* g*) depende linealmente de* y *e* y' *(o de* y, y', y''*), decimos que la e.d.o. de segundo orden es lineal*

Problemas asociados a e.d.o.'s de segundo orden: problemas de valor inicial

Buscamos una función y que verifique:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \\ y'(x_0) = w_0 \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \end{cases}$$

Ejemplo

Si y es la posición de un punto material de masa m sometido a una fuerza f dependiente del tiempo t, buscamos y que verique:

$$\begin{cases} my'' = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \textit{(posición inicial)} \\ y'(t_0) = v_0 \quad \textit{(velocidad inicial)} \end{cases}$$

Observación

En general, no hay fórmulas para obtener la solución exacta. Bajo ciertas condiciones de f, existe solución única del problema pero suele ser necesario utilizar métodos numéricos para aproximar la solución

Problemas asociados a e.d.o.'s de segundo orden: problemas de contorno

Buscamos una función $y : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \quad \forall x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \\ y(b) = \beta \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \end{cases}$$

o bien:

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \quad \forall x \in [a,b] \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \end{cases}$$

En el caso lineal,

$$\begin{cases} y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x) \quad \forall x \in [a,b] \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \in \mathbb{R}, \text{ conocido} \end{cases}$$

Algunos modelos: transmisión de calor

Supongamos una barra (cuerpo sólido cuya longitud es mucho mayor que sus otras dos dimensiones); sea x la abscisa de cada uno de sus puntos. Sean:

- T, la temperatura en cada punto de la barra
- L, la longitud de la barra
- h, una constante, calculada de forma empírica
- p, el perímetro de la sección de la barra
- A, el área de la sección de la barra
- k, la conductividad térmica de la barra
- T_e, la temperatura media exterior de la barra
- T_0, la temperatura en $x = 0$
- T_L, la temperatura en $x = L$

La temperatura en cualquier punto de la barra es solución de:

$$\begin{cases} kT'' + \alpha(x)(T - T_e) = 0 \\ T(0) = T_0 \\ T(L) = T_L \end{cases} \qquad \text{donde } \alpha(x) = \sqrt{\frac{hp}{kA}}$$

Algunos modelos: tracción de una viga

Sea una viga empotrada en ambos extremos. Llamemos:

- p, la fuerza en los extremos de la viga, en la dirección del eje
- g, la fuerza normal a la viga, por unidad de carga
- u, el momento de flexión de la viga
- y, el desplazamiento de cada punto de la viga
- E, el módulo de Young de la viga
- I, el momento de inercia en cada punto de la viga

El momento de flexión es solución del problema:

$$\begin{cases} -u'' + c(x)u = f(x) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{donde } c(x) = \frac{p}{EI(x)}, \quad f(x) = \frac{g(x)}{EI(x)}$$

y el desplazamiento y verifica $u = -y''$ y, por lo tanto,

$$\begin{cases} y^{iv} - c(x)y'' = f(x) \\ y''(0) = 0, \quad y''(1) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Algunos modelos: vibraciones mecánicas

Supongamos un sistema masa–resorte, y sean:

- m, la masa suspendida del resorte
- k, la constante elástica del resorte
- μ, el coeficiente de rozamiento del sistema
- f, la fuerza exterior aplicada sobre la masa
- x_0, la posición inicial
- v_0, la velocidad inicial

La posición x de la masa en cualquier instante t es solución del problema:

$$\begin{cases} mx'' + \mu x' + kx = f(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Si $f(t) = 0$ hablamos de vibraciones libres, y si $f(t) \neq 0$ estamos ante vibraciones forzadas.

Algunos modelos: vibraciones eléctricas

Sea un circuito *RLC*. Sean:

- R, la resistencia
- L, la autoinducción de la bobina
- C, la capacidad del condensador
- E, la fuerza electromotriz
- Q_0, la carga inicial
- I_0, la intensidad inicial

La carga total del circuito es solución del problema:

$$\begin{cases} LQ'' + RQ' + \dfrac{1}{C}Q = E(t) \\ Q(t_0) = Q_0 \\ Q'(t_0) = I_0 \end{cases}$$

Repaso de cálculo diferencial en varias variables

Dada una función $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos (en determinadas condiciones) definir sus derivadas parciales:

- de primer orden: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$
- de segundo orden: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$
- de tercer orden: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_4^2}, \ldots$

Ejemplo

Si $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^6$, *tenemos:*

$$u_{,1}(x_1,x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 3x_1^2 x_2^6$$

$$u_{,2}(x_1,x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 6x_1^3 x_2^5$$

$$u_{,11}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 6x_1 x_2^6$$

$$u_{,12}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = 18x_1^2 x_2^5 = u_{,21}(x_1,x_2)$$

$$u_{,22}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 30x_1^3 x_2^4$$

Operadores diferenciales

Sean $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición

Se denomina **gradiente** *de u en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ al vector:*

$$\nabla u(x_0) = (u_{,1}(x_0), u_{,2}(x_0), \ldots, u_{,n}(x_0))^T$$

Definición

Se denomina **divergencia** *de $\mathbf{F}$ en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ al escalar:*

$$div\, \mathbf{F}(x_0) = F_{1,1}(x_0) + F_{2,2}(x_0) + \ldots + F_{n,n}(x_0)$$

Definición

Se denomina **laplaciano** *de u en un punto x_0 al escalar:*

$$\Delta u(x_0) = div\,(\nabla u)(x_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_0) + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x_0)$$

Operadores diferenciales

Ejemplo

Sean:

$$u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^6$$
$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2,\ \cos(x_1 x_2))^T$$

Entonces,

$$div\,\mathbf{F}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 - x_1 \sin(x_1 x_2) \qquad div\,\mathbf{F}(2,1) = 4 - 2\sin(2)$$
$$\nabla u(x_1, x_2) = (3x_1^2 x_2^6,\ 6x_1^3 x_2^5)^T \qquad \nabla u(2,1) = (12,\ 48)^T$$
$$\Delta u(x_1, x_2) = 6x_1 x_2^6 + 30x_1^3 x_2^4 \qquad \Delta u(2,1) = 252$$

Ecuaciones en derivadas parciales

Definición

Una **ecuación en derivadas parciales (edp)** *es una igualdad que relaciona una función de varias variables con las variables independientes y las derivadas parciales con respecto de las mismas:*

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ldots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},\ldots,\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)=0$$

Por ejemplo,

$$a\frac{\partial u}{\partial x_1}+b\frac{\partial u}{\partial x_2}-e^{x_1x_2}=0 \qquad \text{(orden 1)}$$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+b\frac{\partial u}{\partial x_3}+e^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=e^{x_1x_2x_3} \qquad \text{(orden 2)}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}=e^{x_1x_2}\cos(x_1+x_2) \qquad \text{(orden 4)}$$

Definición

Una **solución** *de la edp es una función* $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$*, suficientemente derivable, que verifica la ecuación*

Modelos clásicos de EDPs: ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f \quad \Longleftrightarrow \quad -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f$$

Esta ecuación aparece en:

- campos gravitatorios: $\operatorname{div} G = \operatorname{div}(-\nabla u) = 4\pi\rho$
  - $f = 0$: en el vacío
  - $f = 4\pi\rho$: entonces, u es el potencial gravitatorio generado por un cuerpo de densidad ρ
- campos electrostáticos:

$$\begin{cases} E = -k\nabla u \\ \operatorname{div} E = 4\pi\rho \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -k\Delta u = 4\pi\rho$$

  - u: potencial eléctrico
  - ρ: densidad de carga eléctrica
  - si el medio tiene distintas conductividades, $E = -k(\mathbf{x})\nabla u$

$$\Longrightarrow \quad -\operatorname{div}(k(\mathbf{x})\nabla u) = 4\pi\rho$$

  - en una dimensión, $u = u(x)$, $x \in [a, b]$

$$-(k(x)u')' = 4\pi\rho\,, \qquad u(a) = \alpha\,, \quad u(b) = \beta$$

Modelos clásicos de EDPs: ecuación del calor

$$\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}_x(k(x,t)\nabla_x u) = F(x,t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- $u = u(\mathbf{x},t) = u(x_1,\ldots,x_n,t)$: temperatura del cuerpo
- $\rho(\mathbf{x})$: densidad del cuerpo
- $c(\mathbf{x})$: capacidad calorífica
- $k(\mathbf{x},t)$: conductividad térmica
- $F(\mathbf{x},t)$: fuente de calor
- $n = 1$, 2 ó 3 en la práctica

Los coeficientes c y ρ pueden depender, también, del tiempo.
Si c, ρ y k son constantes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta_x u = \widehat{F}(\mathbf{x},t)$$

Modelos clásicos de EDPs: ecuación del calor

Problemas asociados a la ecuación del calor:

- Problema de Cauchy: temperatura en un medio infinito

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta_{\mathbf{x}} u = \widehat{F}(x,t) & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in [0,T] \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

- Problema de Cauchy–Dirichlet: temperatura en un medio finito; en la frontera es conocida

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta_{\mathbf{x}} u = \widehat{F}(x,t) & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in [0,T] \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x},t) & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in [0,T] \end{cases}$$

- Problema de Cauchy–Neumann: se conoce el flujo de calor a través de (una parte de) la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta_{\mathbf{x}} u = \widehat{F}(\mathbf{x},t) & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in [0,T] \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \nabla_{\mathbf{x}} u \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x},t) & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in [0,T] \end{cases}$$

Modelos clásicos de EDPs: ecuación de ondas

Cuerda vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \widehat{F}(x,t)\,, & x \in (0,L) \subset \mathrm{I\!R}, t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{(posición inicial)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & \text{(velocidad inicial)} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{(la cuerda está fija en los extremos)} \end{cases}$$

Membrana vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \widehat{F}(x,t)\,, & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathrm{I\!R}^2, t \in [0,T] \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{(posición inicial)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},0) = v_0(x) & \text{(velocidad inicial)} \\ u(\mathbf{x},t) = 0\,, & \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t \in [0,T] \end{cases}$$

Teorema de Taylor

Teorema

Sea $f : I \subset I\!R \longrightarrow I\!R$ una función que admite derivada n–sima. Dado $a \in I$, definimos:

$$P_{n-1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Entonces, $\forall x \in A$, $\exists \xi \in (a,x)$ ó $\xi \in (x,a)$ tal que:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n = P_{n-1}(x) + R_n$$

El término R_n se denomina **término complementario** o resto de Taylor de orden n.

Teorema de Taylor: aproximación de la primera derivada

El teorema de Taylor nos permite aproximar derivadas en el punto a.

Por ejemplo, si $f \in \mathscr{C}^2(I)$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + C_1 h^2$$

de donde:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - C_1 h \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fórmula progresiva de primer orden

Teorema de Taylor: aproximación de la primera derivada

De forma similar, si $f \in \mathscr{C}^2(I)$,

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + C_1 h^2$$

de donde:

$$f'(a) = \frac{f(a)-f(a-h)}{h} + C_1 h \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

Fórmula regresiva de primer orden

Teorema de Taylor: aproximación de la primera derivada

Por otro lado, si $f \in \mathscr{C}^3(I)$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + C_1h^3$$
$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + C_2h^3$$

Restando ambas expresiones,

$$f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a) + (C_1 - C_2)h^3$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + Ch^2 \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Fórmula centrada de segundo orden

Teorema de Taylor: aproximación de la segunda derivada

Sea $f \in \mathscr{C}^4(I)$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + C_1 h^4$$
$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{3!}f'''(a) + C_2 h^4$$

Sumando ambas expresiones,

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + h^2 f''(a) + (C_1 + C_2)h^4$$

$$f''(a) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2} + Ch^2 \approx \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$