

Índice general

1	Análisis de la simulación	2
1.1	Análisis del tiempo de CPU	2
1.1.1	Simulación cuántica	3
1.1.2	Tiempo empleado en M y CC	3
1.1.3	Tiempo total de la simulación	4
1.2	Análisis de espacio	4
1.2.1	Simulación cuántica	4
1.2.2	Medición y computación clásica	8
1.3	Complejidad del circuito cuántico	9

Capítulo 1

Análisis de la simulación

El proceso de la simulación se analiza exhaustivamente para determinar por una parte la *eficiencia* del simulador, midiendo el tiempo empleado y la memoria. Además también se observa el número de ejecuciones del algoritmo cuántico, para calcular su *complejidad*.

1.1 Análisis del tiempo de CPU

“En casi todo cómputo son posibles una gran variedad de configuraciones para la sucesión de un proceso, y varias consideraciones pueden influir en la selección de estas según el propósito de un motor de cálculos. Un objetivo esencial es escoger la configuración que tienda a minimizar el tiempo necesario para completar el cálculo.”—Augusta Ada Lovelace.¹

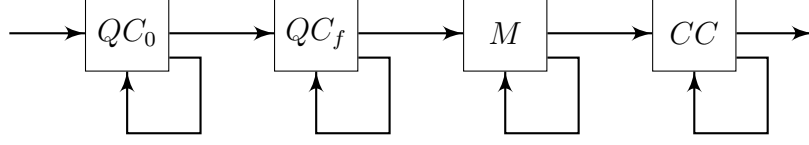
La simulación debe ser realizada teniendo en cuenta el tiempo de procesamiento requerido por la CPU. Es importante investigar como reducirlo para conseguir que la simulación sea eficiente.

Para calcular con precisión los datos medidos sobre cada simulación, se realizan varias ejecuciones, y posteriormente se analiza la media y varianza de las medidas obtenidas. El análisis divide la simulación en cuatro etapas. Las dos primeras, QC_0 y QC_f , realizan la simulación del circuito cuántico. A continuación se analiza el proceso de medición M que provee un nexo entre la parte cuántica y la etapa final de procesamiento clásico CC .

Cada etapa se mide repetidamente y de forma independiente, permitiendo una mayor precisión en la medida de la complejidad. El esquema se muestra

¹Firmó las notas sobre la máquina analítica de Babbage en 1843 como A.A.L. para evitar la censura por ser una mujer. Fue la primera persona de la historia que creó un programa para ser ejecutado en una máquina (pese a que aún no había sido construida).

a continuación.



1.1.1 Simulación cuántica

El análisis de la simulación cuántica, se divide en dos procesos. La parte inicial QC_0 , calcula el estado intermedio $|\psi_1\rangle$ que es independiente de la función f del problema. Permitiendo la reutilización de los cálculos en las etapas posteriores.

La parte final del análisis QC_f , toma el estado $|\psi_1\rangle$ previamente calculado, y continúa la simulación del circuito hasta el estado final $|\psi_3\rangle$. Para medir el tiempo que toma una etapa se denotará como $T_\mu(x)$ el tiempo medio en segundos de r ejecuciones, y $T_{\sigma^2}(x)$ la varianza del proceso x . Por lo general se realizarán $r = 100$ repeticiones, excepto si el proceso se demora demasiado, entonces se reducirán las iteraciones para mantener un tiempo de simulación razonable.

n	N	r	$T_\mu(QC_0)$	$T_{\sigma^2}(QC_0)$	$T_\mu(QC_f)$	$T_{\sigma^2}(QC_f)$
2	4	100	$8,01 \cdot 10^{-3}$	$1,97 \cdot 10^{-8}$	$1,66 \cdot 10^{-2}$	$1,39 \cdot 10^{-8}$
3	6	100	$8,08 \cdot 10^{-3}$	$3,06 \cdot 10^{-8}$	$3,09 \cdot 10^{-2}$	$4,00 \cdot 10^{-8}$
4	8	100	$8,44 \cdot 10^{-3}$	$2,61 \cdot 10^{-8}$	$6,11 \cdot 10^{-2}$	$4,84 \cdot 10^{-6}$
5	10	100	$9,34 \cdot 10^{-3}$	$6,39 \cdot 10^{-9}$	$1,20 \cdot 10^{-1}$	$2,16 \cdot 10^{-6}$
6	12	100	$1,34 \cdot 10^{-2}$	$7,03 \cdot 10^{-7}$	$2,52 \cdot 10^{-1}$	$5,78 \cdot 10^{-5}$
7	14	100	$3,00 \cdot 10^{-2}$	$1,50 \cdot 10^{-5}$	$5,93 \cdot 10^{-1}$	$3,10 \cdot 10^{-4}$
8	16	100	$9,64 \cdot 10^{-2}$	$2,20 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^0$	$8,02 \cdot 10^{-3}$
9	18	33	$3,75 \cdot 10^{-1}$	$1,56 \cdot 10^{-5}$	$8,69 \cdot 10^0$	$4,09 \cdot 10^{-1}$
10	20	6	$1,57 \cdot 10^0$	$3,39 \cdot 10^{-4}$	$5,61 \cdot 10^1$	$2,87 \cdot 10^1$

Tabla 1.1: Tiempo empleado por QC_0 y QC_f en segundos.

Se observa en la tabla 1.1 como se incrementa el tiempo a medida que crece en número de qubits. La parte final QC_f requiere un orden de magnitud superior que QC_0 . Ambas requieren un tiempo superior a $O(2^N)$.

1.1.2 Tiempo empleado en M y CC

Tras calcular el estado final del circuito, se analiza el proceso de medición M . Debe calcularse la distribución de probabilidad que asocia a cada

posible valor tras medir una línea, la probabilidad de que ocurra. Dado que cada línea tiene n qubits, serán necesarias $O(2^n)$ operaciones. El proceso de cálculo clásico, resuelve el sistema de ecuaciones, una vez se han obtenido $n - 1$ vectores. El tiempo obtenido en estas dos últimas etapas, pese a ser exponencial, es mucho menor que en la simulación del circuito cuántico, como se observa en la tabla 1.2.

n	N	r	$T_\mu(M)$	$T_{\sigma^2}(M)$	$T_\mu(CC)$	$T_{\sigma^2}(CC)$
2	4	100	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$8,56 \cdot 10^{-10}$	$1,38 \cdot 10^{-4}$	$8,17 \cdot 10^{-9}$
3	6	100	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$2,03 \cdot 10^{-10}$	$2,37 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-8}$
4	8	100	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-9}$	$3,21 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^{-8}$
5	10	100	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$4,15 \cdot 10^{-10}$	$3,70 \cdot 10^{-4}$	$9,09 \cdot 10^{-9}$
6	12	100	$2,31 \cdot 10^{-3}$	$1,55 \cdot 10^{-9}$	$4,61 \cdot 10^{-4}$	$2,72 \cdot 10^{-8}$
7	14	100	$4,46 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^{-7}$	$5,50 \cdot 10^{-4}$	$1,29 \cdot 10^{-8}$
8	16	100	$1,50 \cdot 10^{-2}$	$2,30 \cdot 10^{-7}$	$6,60 \cdot 10^{-4}$	$8,28 \cdot 10^{-9}$
9	18	33	$7,33 \cdot 10^{-2}$	$1,24 \cdot 10^{-6}$	$7,95 \cdot 10^{-4}$	$8,80 \cdot 10^{-9}$
10	20	6	$5,01 \cdot 10^{-1}$	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$6,94 \cdot 10^{-10}$

Tabla 1.2: Tiempo empleado por M y CC en segundos.

1.1.3 Tiempo total de la simulación

Debido al carácter exponencial que presenta la simulación, es conveniente emplear una representación con escala logarítmica. En la figura 1.1 se observa como crecen los tiempos de ejecución con el número de qubits. Para $N = 20$ es necesario un tiempo de simulación aproximado de un minuto. La simulación, pese a ser extremadamente costosa, se puede esbozar para $N \leq 20$.

1.2 Análisis de espacio

Para observar el comportamiento de un algoritmo es importante tener en cuenta además del tiempo que requiere su ejecución, el espacio que emplea. El simulador será analizado paso a paso mostrando como varía la memoria empleada a medida que crece el número de qubits del circuito.

1.2.1 Simulación cuántica

La simulación del circuito cuántico se divide en dos etapas, la parte inicial, hasta el estado $|\psi_1\rangle$ denominada QC_0 , y la parte final, hasta el estado $|\psi_3\rangle$,

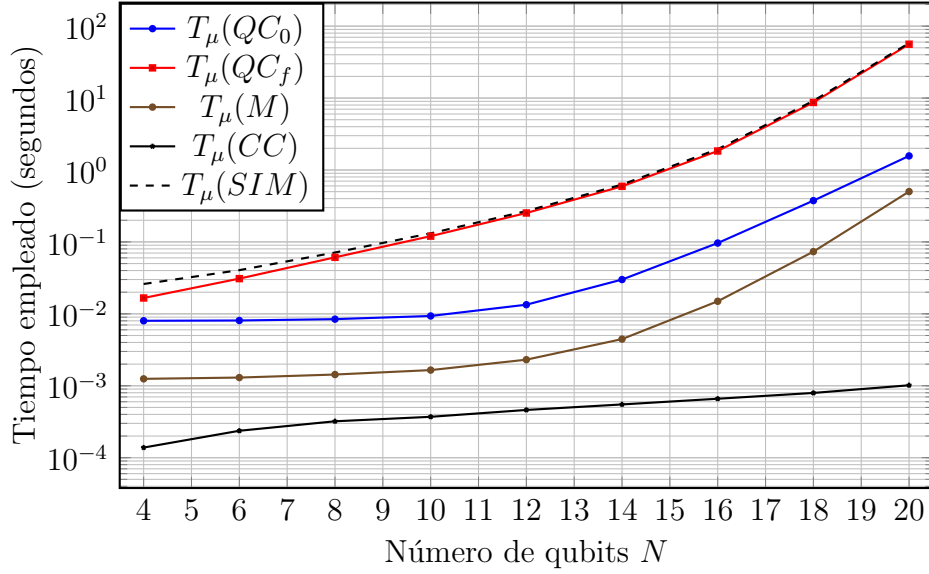
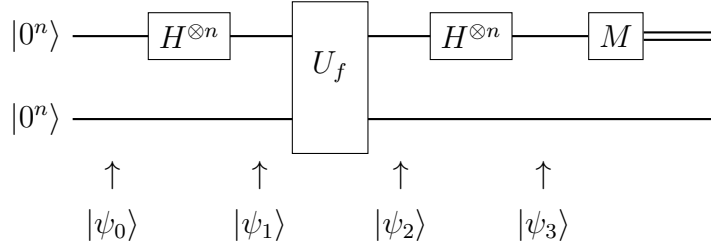
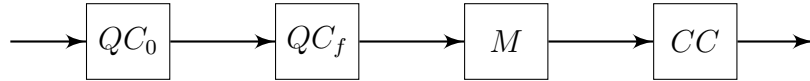


Figura 1.1: Tiempo de simulación en escala logarítmica.

denominada QC_f . El esquema del circuito cuántico muestra el orden de los operadores, y la posición de los estados.



Esquema de análisis de memoria de la simulación completa.



Análisis de la primera parte QC_0

En QC_0 , será necesario almacenar en la memoria el operador de Hadamard $H^{\otimes n}$, además de un estado cuántico $|\psi\rangle$ de $N = 2n$ qubits. Al analizar el comportamiento del circuito, se obtiene la tabla 1.3. Sea $S(x)$ el tamaño del objeto x en bytes, y S_T el tamaño total requerido por la simulación. Entonces el espacio S'_T para QC_0 será una aproximación al espacio real S_T determinado como

$$S_T = S(H) + S(|\psi_1\rangle)$$

n	N	$\log_2 S(H)$	$\log_2 S(\phi_1\rangle)$	$\log_2 S_T$	$\log_2 S'_T$
2	4	7.21	6.64	7.95	7.58
3	6	9.10	8.34	9.77	9.58
4	8	11.05	10.17	11.68	11.58
5	10	13.02	12.09	13.63	13.58
6	12	15.01	14.04	15.61	15.58
7	14	17.01	16.02	17.60	17.58
8	16	19.00	18.01	19.59	19.58
9	18	21.00	20.01	21.59	21.58
10	20	23.00	22.00	23.59	23.58

Tabla 1.3: Espacio empleado por QC_0 en escala logarítmica (bytes).

Y aproximado mediante

$$\log_2 S(H) \approx N + 3$$

$$\log_2 S(|\psi_1\rangle) \approx N + 2$$

$$\log_2 S_T \approx N + \log_2(2^2 + 2^3) = N + 3,58 = \log_2 S'_T$$

$$S'_T = 2^N \log_2 12$$

Se observa como el espacio requerido aumenta de forma exponencial a medida que aumenta el número de qubits del sistema y se encuentra en torno a $O(2^N)$.

Análisis de la parte final QC_f

En la etapa final de la simulación del circuito, se sobrescribe $|\psi_1\rangle$ con el estado final $|\psi_3\rangle$, de modo que sólo será necesario un espacio equivalente al del más grande. Además del estado, se necesita el operador U_f , que se calcula a partir de la función dada f . Los tamaños se muestran en la tabla 1.4.

El tamaño requerido en esta etapa de la simulación será S_T , aproximado a S'_T . Además el operador H se reutiliza de la etapa inicial, de modo que ese espacio debe tenerse en cuenta. El tamaño del estado $|\psi_3\rangle$ es siempre un poco más grande que $|\psi_1\rangle$. Dado que $|\psi_1\rangle$ se reemplazará por $|\psi_3\rangle$, será necesario el tamaño del más grande, siendo este $S(|\psi_3\rangle)$. El tamaño total S_T será

$$S_T = S(H) + S(U) + S(|\psi_3\rangle)$$

n	N	$\log_2 S(H)$	$\log_2 S(U)$	$\log_2 S(\phi_3\rangle)$	$\log_2 S_T$	$\log_2 S'_T$
2	4	7.21	7.61	6.64	8.79	8.70
3	6	9.10	9.59	8.60	10.74	10.70
4	8	11.05	11.59	10.59	12.72	12.70
5	10	13.02	13.59	12.59	14.71	14.70
6	12	15.01	15.59	14.59	16.70	16.70
7	14	17.01	17.58	16.59	18.70	18.70
8	16	19.00	19.58	18.58	20.70	20.70
9	18	21.00	21.58	20.58	22.70	22.70
10	20	23.00	23.58	22.58	24.70	24.70

Tabla 1.4: Espacio empleado por QC_f en escala logarítmica (bytes).

Que de forma aproximada S'_T , se determina como

$$\begin{aligned}
\log_2 S(H) &\approx N + \log_2 8 = N + 3 \\
\log_2 S(U) &\approx N + \log_2 12 \approx N + 3,58 \\
\log_2 S(|\psi_3\rangle) &\approx N + \log_2 6 \approx N + 2,58 \\
\log_2 S_T &\approx \log_2 S'_T = N + \log_2(8 + 12 + 6) \approx N + 4,70 \\
S'_T &= 2^N \log_2 26
\end{aligned}$$

Mostrando de nuevo el carácter exponencial del espacio requerido, en torno a $O(2^N)$. Dado que el espacio empleado para QC_f es superior a QC_0 , se usará $S'_T = 2^N \log_2 26$ como aproximación a la memoria requerida por la simulación de todo el circuito.

Limitaciones de la simulación

El espacio de simulación tiene una memoria finita, fijada en 512MB, un total de 2^{29} bytes. En la figura 1.2 se observa como crece el espacio necesario a medida que aumentan los qubits. Dada la complejidad de carácter exponencial, la cantidad de qubits simulados por el circuito se ve severamente limitada por $S_T \leq 2^{29}$. Que de forma aproximada, se obtiene

$$\begin{aligned}
S'_T &= 2^N \log_2 26 \leq 2^{29} \\
N + \log_2 26 &\leq 29 \\
N &\leq 29 - \log_2 26 \approx 24,30 \\
N &\leq 24
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo es posible simular circuitos de hasta un máximo de 24 qubits, en el entorno de simulación actual. Dado que el problema requiere dos líneas

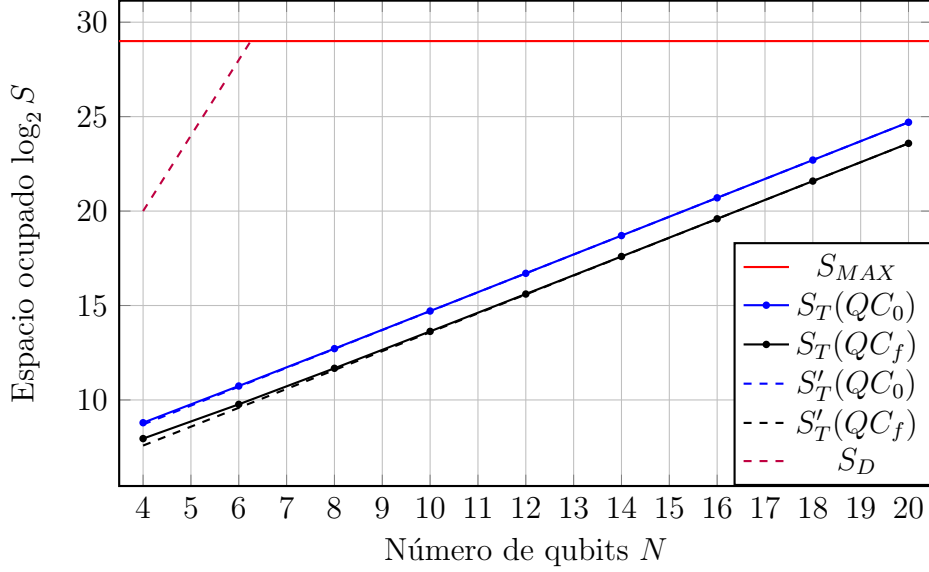


Figura 1.2: Espacio necesario para la simulación. Se muestra en línea continua el espacio real, y en discontinua el aproximado. El espacio requerido sin emplear matrices huecas, usando matrices densas se muestra como S_D . La memoria disponible para la simulación es $S_{MAX} = 2^{29}$.

de n bits, son necesarios $N = 2n$ qubits. Obteniendo la limitación $n \leq 12$.

1.2.2 Medición y computación clásica

Una vez obtenido el estado $|\psi_3\rangle$, tras la costosa simulación, el resto de componentes del simulador apenas requieren memoria. El proceso de medición, denominado M , toma el vector $|\psi_3\rangle$ y calcula la distribución de probabilidad resultante de medir la línea superior. Esta distribución tiene 2^n posibles resultados, que se almacenan en un vector de probabilidades v_p junto con otro vector del resultado correspondiente v_n . Con un tamaño

$$S(v_p) = S(v_n) = 2^n \cdot 4 = 2^{N/2} \cdot 4$$

Obteniéndose un espacio requerido para la medición

$$S_T(M) = S(v_p) + S(v_n) = 2^{N/2} \cdot 8$$

Debido a que tras el proceso de simulación, al finalizar la etapa QC_f , ya no es necesario mantener los operadores U_f y H almacenados, se libera un espacio

$$S(U_f) + S(H) = 2^N \log_2 20 \approx 2^N \cdot 4,32$$

Más que suficiente para los vectores v_p y v_n con $N \geq 2$.

El proceso de cómputo clásico posterior, denotado CC , requiere que M mantenga las distribuciones de probabilidad en memoria. Además, calcula para cada medición, el conjunto de combinaciones lineales de vectores acumulados. Como se requieren $n - 1$ vectores, será necesario un espacio para los vectores acumulados v_a dado por

$$S_T(CC) = S(v_a) = (2^{n-1} - 1) \cdot 4 = 2^{N/2} \cdot 2 - 4$$

Conjuntamente con el requerido por M

$$S_T(M) + S_T(CC) = 2^{N/2} \cdot 10 - 4$$

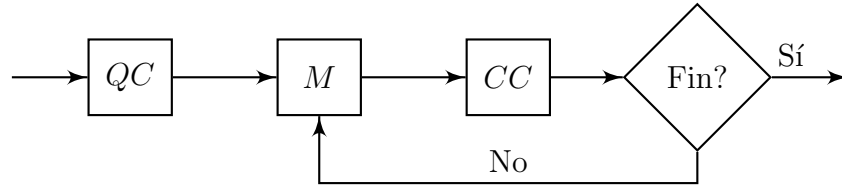
Que continúa siendo inferior al liberado por los operadores tras terminar QC_f para $N \geq 2$. Por tanto, la etapa final de la simulación cuántica QC_f es el cuello de botella que limita el espacio que empleará toda la simulación.

1.3 Complejidad del circuito cuántico

Tras analizar la eficiencia midiendo el tiempo y la memoria de la simulación, el último paso consiste en examinar la complejidad del circuito cuántico. Esta complejidad debe ser la observada en un ordenador cuántico real, y debe coincidir también con los cálculos teóricos.

El escenario de análisis consistirá en una serie de simulaciones completas, observando el número de ejecuciones necesarias del circuito cuántico para completar el problema.

Para evitar la costosa simulación sucesiva de la parte cuántica, se empleará el diseño optimizado que permite reutilizar los cálculos, almacenando el estado final. De esta forma se consigue que la simulación cuántica sólo sea necesaria realizarla una única vez. El esquema de la simulación se presenta a continuación.



Tras repetir la simulación una cantidad $r = 10000$ veces, se analiza la media y varianza, y se comparan con las calculadas previamente de forma teórica. En la tabla 1.5 se puede observar como ambos resultados se acercan mucho. En la figura 1.3 se observa como el crecimiento es lineal, de modo que la complejidad se aproxima a $O(n)$.

n	N	R_μ	R_{σ^2}	R'_μ	R'_{σ^2}
2	4	1,998	1,989	2,000	2,000
3	6	3,354	2,527	3,333	2,444
4	8	4,461	2,471	4,476	2,608
5	10	5,524	2,578	5,543	2,679
6	12	6,559	2,734	6,575	2,712
7	14	7,608	2,774	7,591	2,728
8	16	8,593	2,637	8,599	2,736
9	18	9,585	2,718	9,603	2,740
10	20	10,602	2,725	10,605	2,742

Tabla 1.5: Ejecuciones del algoritmo cuántico R experimentales, R' teóricas.

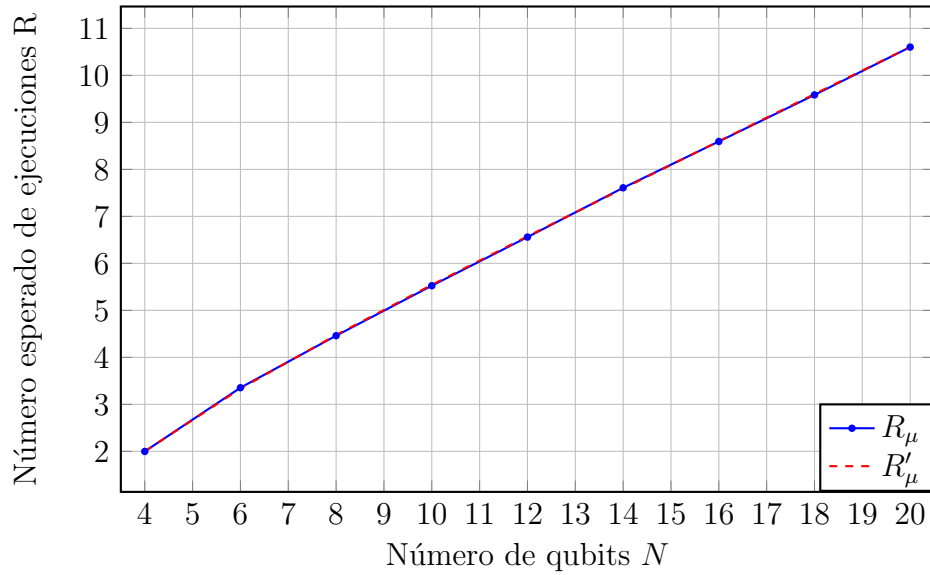


Figura 1.3: Número esperado de iteraciones a medida que aumentan los qubits. Se observa el valor experimental R_μ comparado con el teórico R'_μ .

Bibliografía