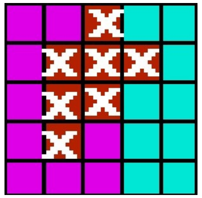
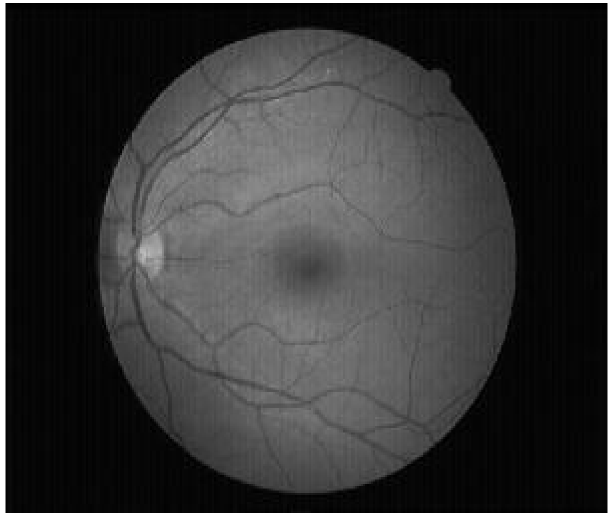
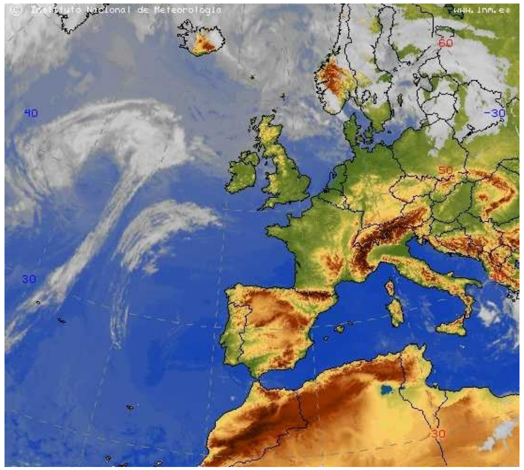
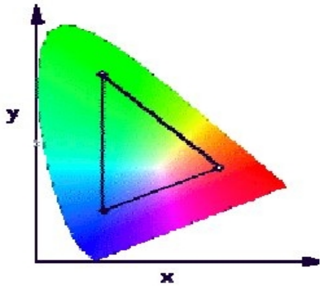
LA IMAGEN DIGITAL Y SUS PROPIEDADES

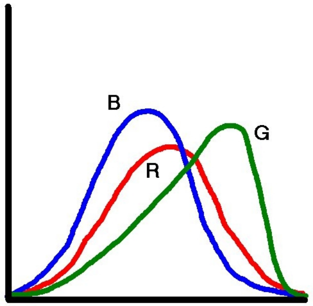
M. G. Penedo

Índice

- Conceptos Básicos
- Función Imagen
- Digitalización de Imágenes
- Imagen Color
- Propiedades, Métricas y Topologías
- Histogramas
- Percepción de la Imagen

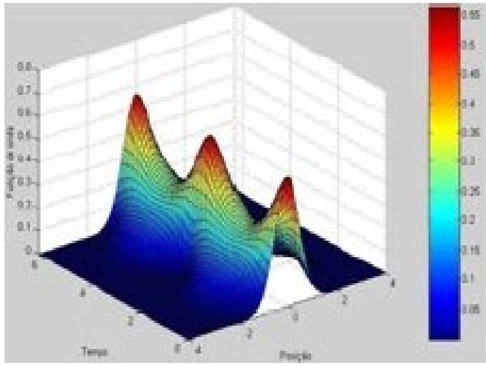


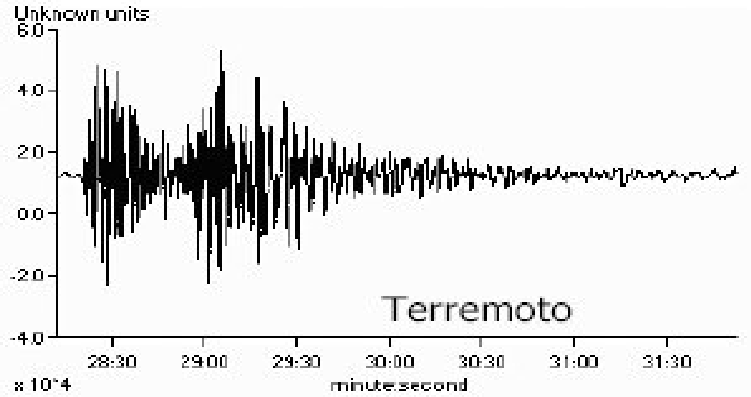






Conceptos Básicos

Una imagen
es una señal





Los modelos matemáticos se emplean para describir señales

Una señal es una ***función dependiente*** de alguna variable con significado físico

F: A $\longrightarrow$ B   b = f(a)

Tipos de Funciones

Unidimensional (p.e. Tiempo)

Bidimensional (p.e. Coordenadas en el plano)

Tridimensional (p.e. Coordenadas en el espacio)

Multidimensional

	$F : A \to B$	**Rango**	
		Continuo	Discreto
Dominio	Continuo	**Continua**	
	Discreto	**Discreta**	**Digital**

Función Imagen

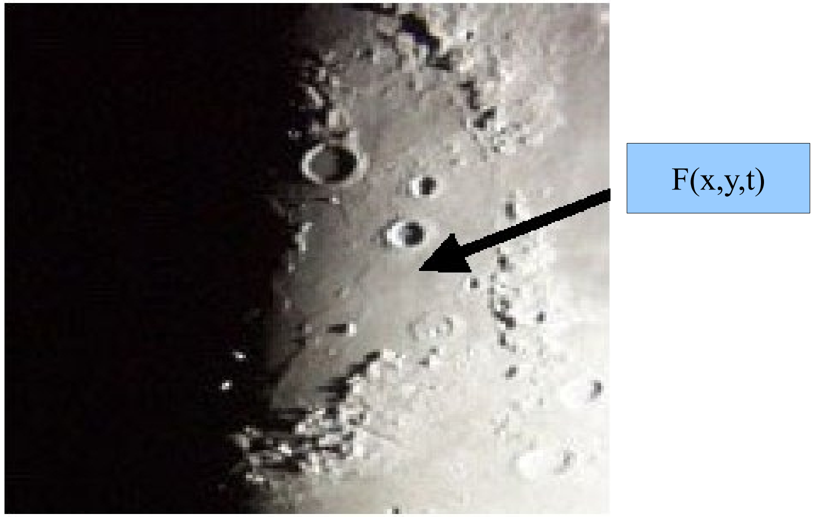
Una ***Función Imagen*** (señal) puede ser modelada por una función continua de 2 o 3 variables.

Los argumentos son las ***coordenadas (x,y)*** en el plano;
si la imagen varía en el tiempo se le añade un tercer argumento, t.

Los **valores** de la función imagen (expresan cantidades físicas, como presión, temperatura, etc) se corresponden con el **brillo** de los puntos de la imagen.

Brillo

El **brillo** de una función imagen integra varias cantidades ópticas



Usar el brillo como una cantidad básica permite evitar tener que realizar una descripción exhaustiva de los complicados procesos de formación de la imagen (reflectancia de superficies, focos de iluminación, orientación de la superficie, etc.

Se llama ***Intensidad de la Imagen*** (Imagen), a una función imagen bidimensional en un instante t que contiene información acerca del brillo de los puntos.

Proyección

El mundo real es tridimensional

Las imágenes de intensidad bidimensionales, son el resultado de una ***proyección*** en perspectiva de escenas tridimensionales

Cuando se obtiene una imagen bidimensional del mundo tridimensional desaparece una gran cantidad de información

Tratamiento Computacional

Las imágenes son estáticas. El tiempo es constante.

Las **imágenes** se representan por funciones imágenes **bidimensionales** f(x,y), en las cuales los argumentos con las coordenadas en el plano.

Las imágenes son **funciones imagen digitales** con dominio (pixeles), usualmente representadas por matrices cuyas coordenadas son números enteros

Las imágenes tienen valores limitados en su rango (***niveles de gris***)
el menor valor se corresponde con el negro y el mayor con el blanco.

Calidad de la Imagen

Resolución espacial: Proximidad de las muestras en el plano imagen

Resolución Espectral: Ancho de banda de las frecuencias de luz capturadas por el sensor.

Resolución Radiométrica: Número de niveles de gris distinguibles.

Resolución Temporal: Intervalo de tiempo que pasa entre las imágenes capturadas.

Digitalización de la Imagen

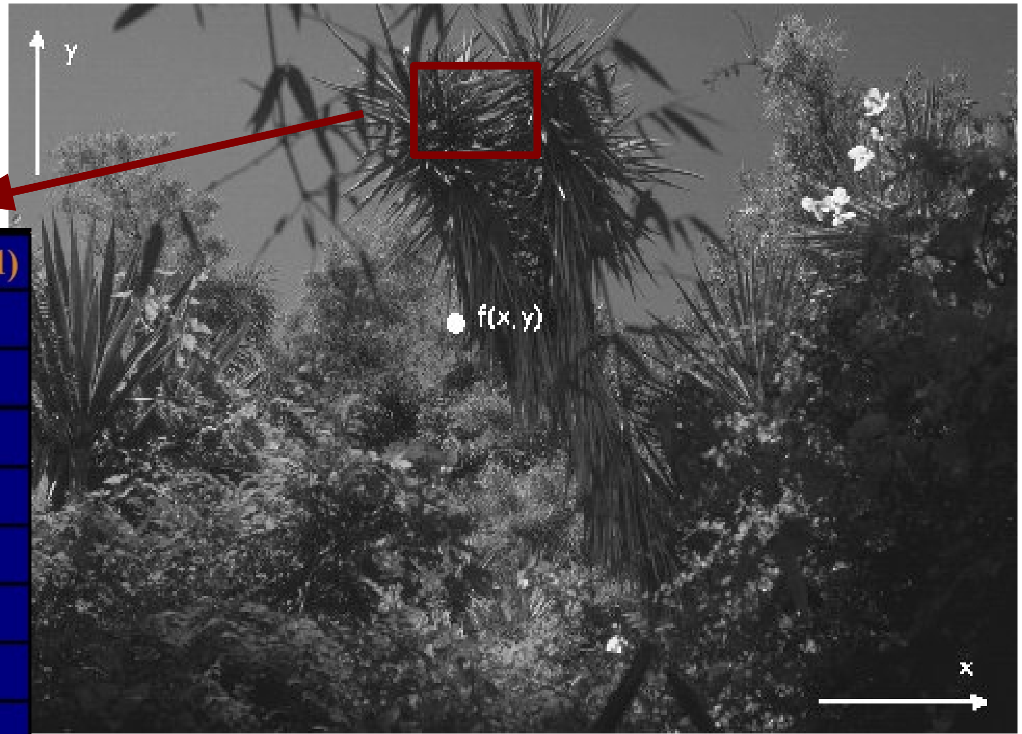
Captura de Imágenes

Una imagen capturada por un sensor se expresa como una función imagen continua de dos coordenadas en el plano.

f(x,y)

Muestreo

El ***proceso de digitalización*** que permite manejar una imagen en un ordenador implica que la función imagen f(x,y) se **muestrea** en una matriz con M filas y N columnas.



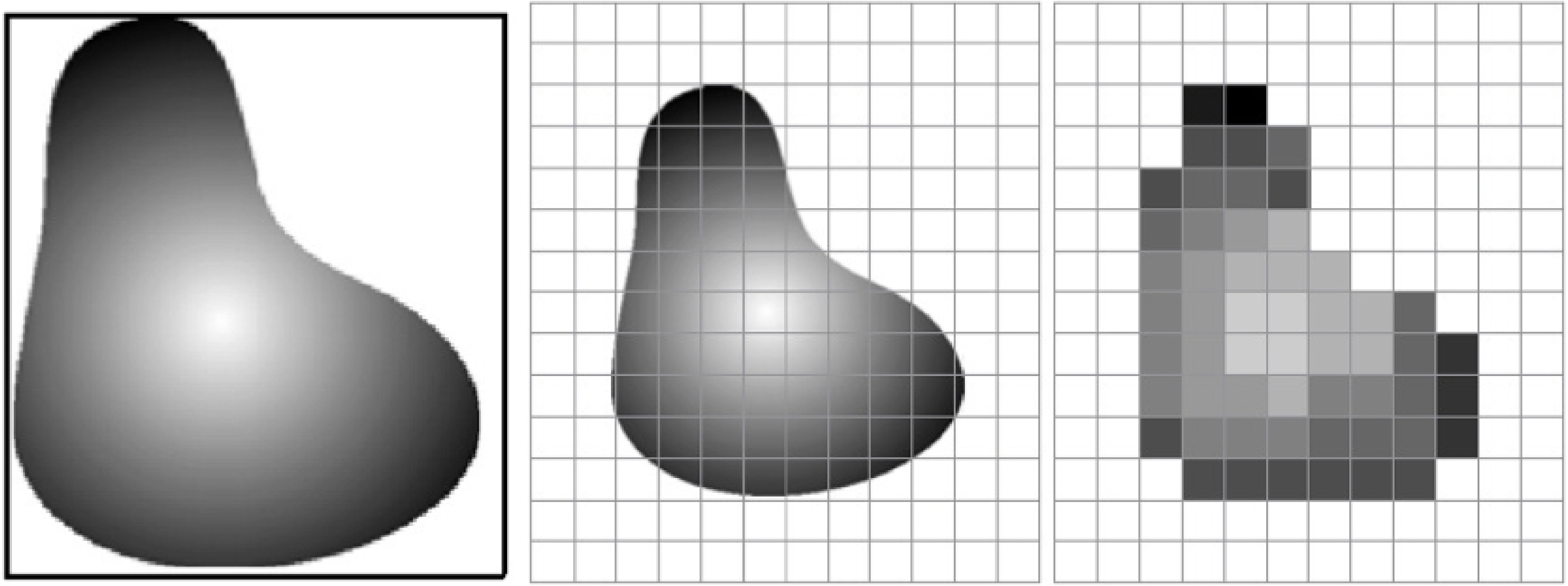
(0,M-1)	...	...	...	...	...	...	...	...	(N-1,M-1)
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
(0,0)	...	...	...	...	...	...	...	...	(N-1,0)

Cuantización

El proceso de cuantización **asigna a cada muestra de la matriz un valor entero**

(0,M-1)	...	...	...	...	...	...	...	...	(N-1,M-1)
...	32	33	34	43	50	52	56	65	...
...	34	35	37	39	45	47	55	61	...
...	31	34	36	40	42	46	55	57	...
...	28	32	35	45	46	47	52	53	...
...	27	27	35	46	47	48	50	51	...
...	23	31	36	44	46	47	50	61	...
...	14	30	46	57	48	56	84	73	...
...	12	32	50	55	57	76	96	85	...
(0,0)	...	...	...	...	...	...	...	...	(N-1,0)

El rango continuo de la función imagen f(x,y) se ***discretiza en K intervalos***



Grado de aproximación

La fineza del muestreo (valor de M y N) y el grado de cuantización (valor de K) determinan el grado de aproximación de la imagen digital a la función imagen continua f(x,y).

¿Qué Muestreo y Cuantización son necesarios para una buena aproximación?
¿Cuál debe de ser la distribución de las muestras para una buena aproximación?

Una función imagen continua f(x,y) puede muestrearse usando una **rejilla discreta** de muestras en el plano

La imagen se muestrea en los puntos

$$x = jDx \qquad j = 1,\dots\dots\dots,M$$

$$y = kDy \qquad k = 1,\dots\dots\dots\dots,N$$

Dos muestras vecinas están separadas por Dx en el eje x y Dy en el eje y.

Dx y Dy se denominan intervalo de muestreo. **La matriz de muestras f(jDx,kDy) constituye la imagen discreta.**

Muestreo Ideal

El muestreo ideal s(x,y) es una ***rejilla regular*** se puede representar mediante una ***colección de distribuciones Deltas de Dirac***.

$$s(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y)$$

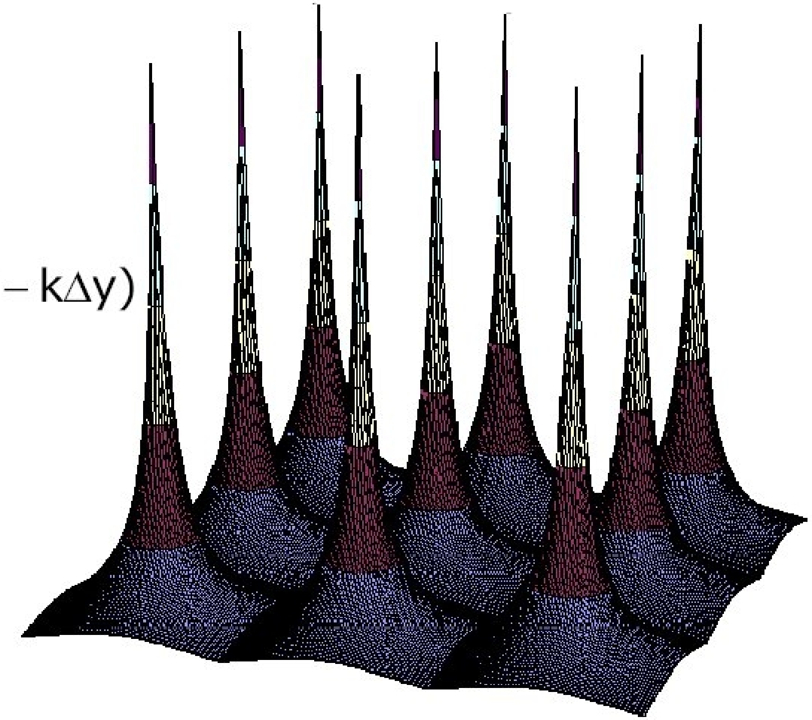
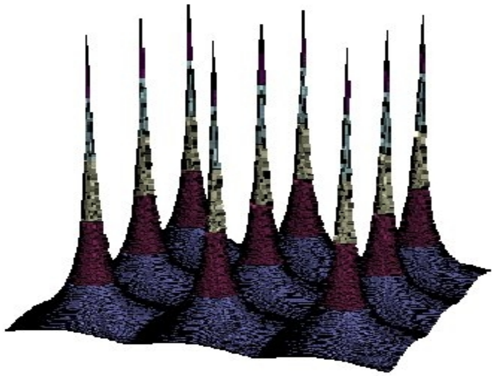
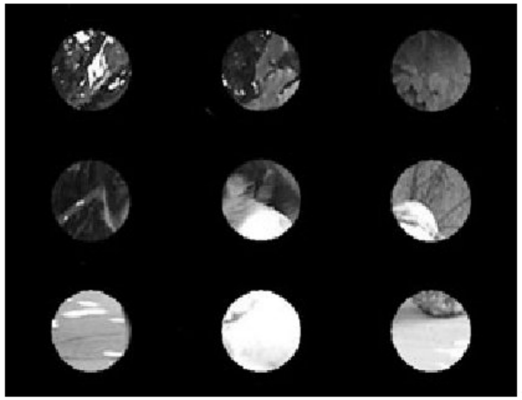


Imagen Muestreada

La imagen muestreada $f_s(x,y)$ es el producto de la **imagen continua f(x,y)** por la **función de muestro s(x,y)**

$$
\begin{aligned}
f_s(x,y) &= f(x,y)\,s(x,y) \\
&= f(x,y)\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\delta(x-j\Delta x, y-k\Delta y)
\end{aligned}
$$





Ejemplo de Muestreo

M=N=512

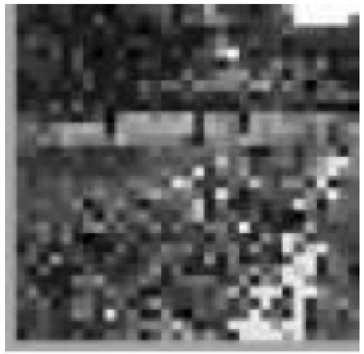
256

128

64

32

16



Resolución

Resolución:

- Es la cantidad de píxeles que definen la imagen.

Ejemplos:

640x480, 800x600, 1024x768, etc.

Cuantización

El valor de la función imagen se expresa, en procesado de imagen, mediante valores digitales.

La transición entre los valores continuos de la función imagen (niveles de brillo) y sus equivalentes digitales se denomina ***proceso de cuantización***

El *número de niveles de cuantización* es fundamental para la percepción humana de los detalles finos de la escena

La mayor parte de los dispositivos de digitalización usan *k intervalos iguales* (normalmente $K=2^b$)

Ejemplo de Cuantización

K= 256

K= 16

K= 2

Propiedades Métricas y Topológicas

Una Imagen Digital tiene algunas propiedades que no tienen una analogía directa en las Funciones Continuas Bidimensionales

Una Imagen Digital consiste en **píxeles de un tamaño finito**, usualmente **distribuidos sobre una rejilla rectangular**

Una Imagen Digital se puede **representar como una matriz bidimensional** cuyos elementos son enteros que corresponden a los niveles cuantizados de la escala de brillo

Vecinos de un pixel

Un píxel (x,y) tiene **4 vecinos horizontales y verticales** cuyas coordenadas son:

$$(x+1,y) \quad (x-1,y) \quad (x,y+1) \quad (x,y-1) \longrightarrow N_{hv}(x,y)$$

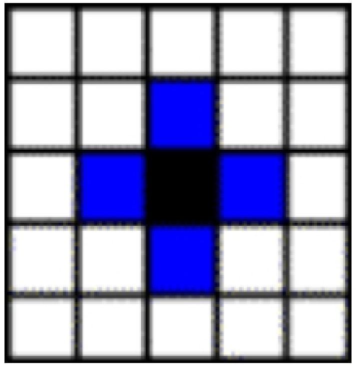
Un píxel (x,y) tiene **4 vecinos diagonales** cuyas coordenadas son:

$$(x+1,y+1)\ (x+1,y-1)\ (x-1,y+1)\ (x-1,y-1) \longrightarrow N_d(x,y)$$

Vecindad o Adyacencia

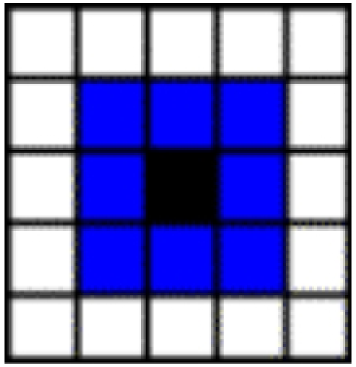
4-vecinos del píxel (x,y):

$$N_4(x,y) = N_{hv}(x,y)$$



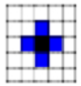
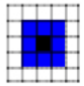
8-vecinos del píxel (x,y):

$$N_8(x,y) = N_{hv}(x,y) \bigcup N_d(x,y)$$



Conectividad

La **Conectividad** se emplea para **establecer los límites de los objetos** presentes en la Imagen

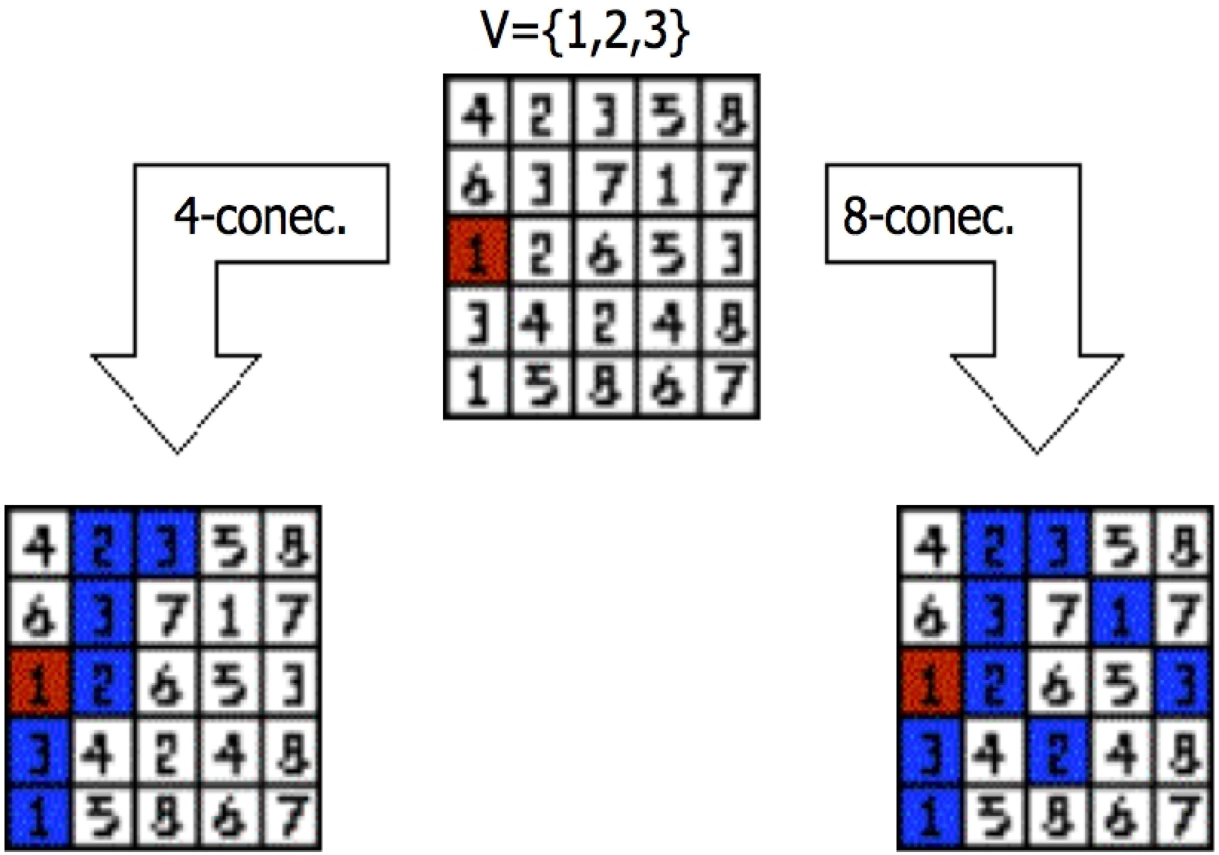
Conectividad
- **Vecindad**  
- **Criterio de Niveles de Gris**

Sea V el conjunto de valores de nivel de gris que definen el criterio de conectividad

Dos píxeles (x_1, y_1) (x_2, y_2) **con valores en V**

están **4-conectados** si	están **8-conectados** si
$(x_2, y_2) \in N_4(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2) \in N_8(x_1, y_1)$

Ejemplo Conectividad

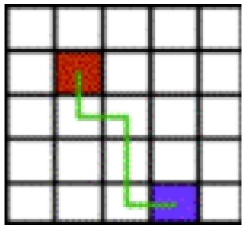


Camino Digital

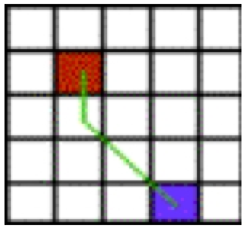
Dada una imagen digital binaria con una relación de vecindad definida (t-adyacencia), un camino digital (ó t-camino) de un píxel p a otro píxel q se define como una sucesión de píxeles Ppq={pi ; i=0,...,n} (del mismo color, todos distintos), tal que:

$p_0=p$, $p_n=q$
Para todo i=1,...,n-1, pi tiene exactamente dos vecinos en P_{pq} que son p_i-1 y p_{i+1}
p_0 y p_n tienen exactamente un vecino que son p_1 y p_{n-1}, respectivamente.

La longitud de un camino digital con n+1 píxeles es n.



L = 6



L = 4

Curva Digital

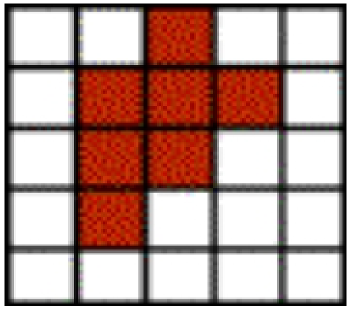
Definimos ***curva digital*** como un conjunto de píxeles tal que al eliminar cualquiera de ellos, se convierte en un camino digital.

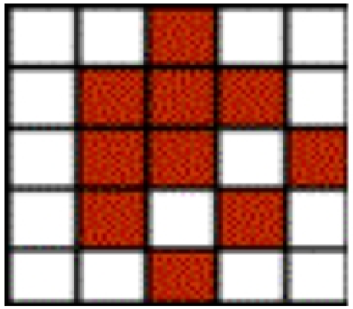
Ejemplo:

Curva digital con la 4-adyacencia y la 8 adyacencia, respectivamente.

Pixels Conectados

Dos píxels de un subconjunto S están ***conectados*** si existe un camino formado exclusivamente por píxels de S





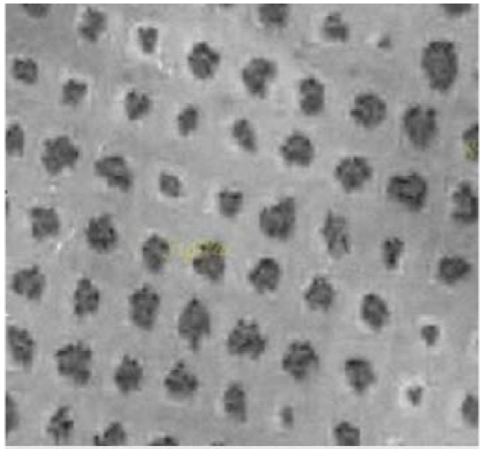
Propiedades Topológicas

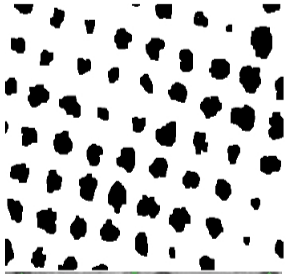
Componente Conexa

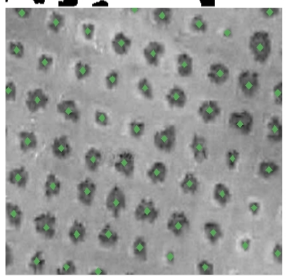
Una componente conexa digital es un conjunto de píxeles tal que para cualquier par de píxeles del conjunto, existe un camino digital que los une.

Se dice que una componente conexa está acotada si no posee ningún píxel del borde del mallado.

Por ejemplo, a partir de una fotografía aérea de campos de olivos se quiere contar el número de olivos que aparecen en la imagen.
La solución puede consistir en realizar una binarización apropiada de la imagen y, tras eliminar el ruido existente, contar el número de componentes conexas.







Algoritmos para el cálculo de componentes conexas

Recorremos la imagen binaria de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

*Usando la **4-adyacencia** en negro:*

Paso 1. *Para cada pixel* $P(x,y)$ *que sea negro, examinamos a los vecinos superiores* $(x,y-1)$ *y* $(x-1,y)$.

- *Si son blancos, damos a* P *una nueva etiqueta;*
- *Si tan sólo uno es negro, le damos a* P *su etiqueta;*
- *Si ambos son negros, le damos a* P *la etiqueta de uno de ellos, y si sus etiquetas son diferentes, registramos el hecho de que son equivalentes.*

Paso 2. *Ordenamos las parejas equivalentes en clases de equivalencia, y escogemos una etiqueta para representar cada clase.*

Paso 3. *Realizamos un segundo rastreo de la imagen y sustituimos cada etiqueta por el representante de cada clase; cada componente ha sido ahora etiquetada de forma única.*

Algoritmos para el cálculo de componentes conexas

Usando la **8-adyacencia** en negro.

1. Durante el primer rastreo, para cada punto **P(x,y)** que tenga valor 1, examinamos a los vecinos superiores A(x-1,y-1), B(x-1,y), C(x-1,y+1) y D(x,y-1),
   - Si todos son 0's, damos a *P* una nueva etiqueta;
   - si tan sólo uno es 1, le damos a *P* la etiqueta del otro;
   - Y si hay más de uno que es 1, le damos a *P* la etiqueta de uno de ellos, y si sus etiquetas son diferentes, registramos el hecho de que son equivalentes, i.e., pertenecen a la misma componente.

2. Ordenamos las parejas equivalentes en clases de equivalencia, y escogemos una etiqueta para representar cada clase.

3. Realizamos un segundo rastreo de la imagen y sustituimos cada etiqueta por el representante de cada clase; cada componente ha sido ahora etiquetada de forma única.

Usando 4-adyacencia en negro

Consideremos la siguiente imagen:

				1	1	1			1	1		1	1
		1	1	1		1	1	1	1				1
1	1			1	1	1		1	1	1	1	1	

El resultado del primer rastreo, usando 4-adyacencia es :

				a	a	a			b	b		c	c	
		d	d	d		a	a	a	a				c	d = a, b = a
e	e			d	d	d		a	a	a	a	a		d = a

Resultado del segundo rastreo, reemplazando todas las etiquetas equivalentes por una representativa:

				a	a	a			a	a		c	c
		a	a	a		a	a	a	a				c
e	e			a	a	a		a	a	a	a	a	

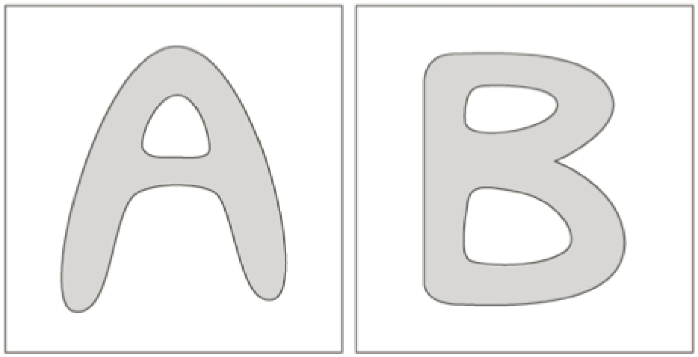
Agujeros

El número de agujeros de una imagen 2D coincide con el número de componentes conexas del fondo de la imagen menos uno. Suponemos que nuestra imagen está enmarcada por un cuadrado de píxeles blancos (fondo).

Número de Euler

El número de Euler de una imagen binaria 2D se define como el número de componentes conexas (negras) menos el número de agujeros.

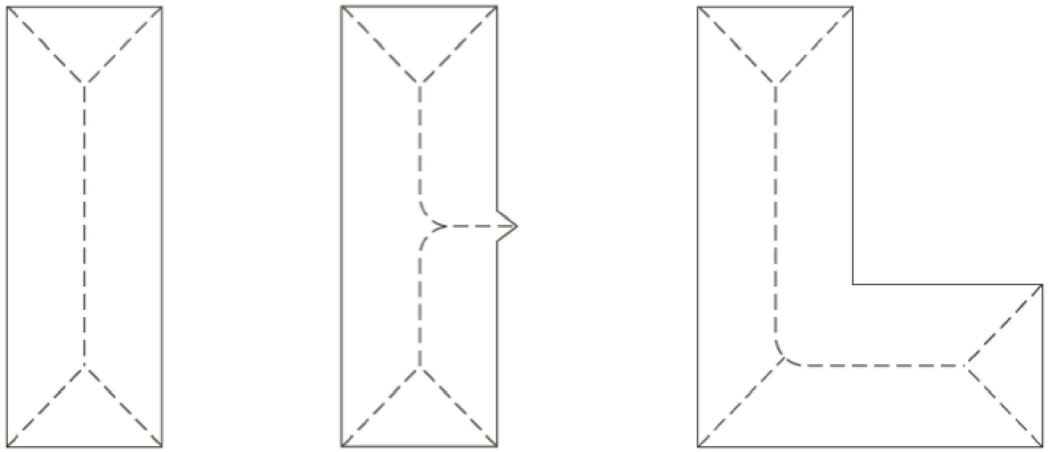
E=C-A



0 -1

Esqueleto

- ¿Qué es un *esqueleto*?
  Representa la estructura de un objeto (conservando la conectividad, los agujeros y, en cierto modo, la extensión del mismo) con un número pequeño de píxeles.

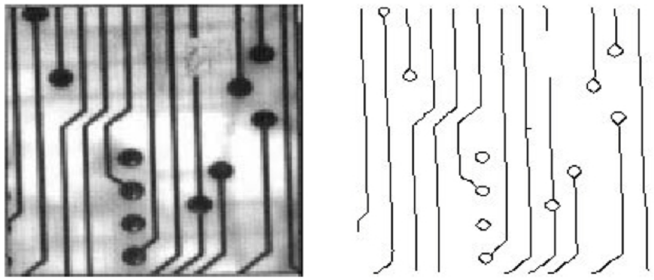


- Idea intuitiva: supongamos que el objeto en cuestión está hecho de un material imflamable y se prende fuego simultáneamente a lo largo de todo el borde. El esqueleto viene determinado por los puntos en los que se encuentran distintos frentes del fuego.

Decimos que *S* es el <u>esqueleto</u> de un objeto *F* (conjunto de píxeles negros) si:

- ☐ *S* está en posición central en *F*. En particular, S está totalmente contenido en *F*.
- ☐ *S* es de un píxel de ancho.
- ☐ *S* "conserva" la extensión geométrica de *F*.
- ☐ *S* tiene el mismo número de componentes conexas que *F*.
- ☐ *S* tiene el mismo número de agujeros que *F*.
- ☐ A partir de *S* podemos reconstruir *F*.

Las tres últimas condiciones son equivalentes a decir que S y F son homotópicos. Es decir, existe una deformación "continua" de F a S.



Definición de punto simple

Un píxel negro P del borde de la imagen se considera simple si al reemplazar P por un píxel blanco, no varían ni el número de componentes conexas de los vecinos en negro (y blanco) de P, ni el número de agujeros.

Por otro lado, un punto es final si tiene exactamente un vecino negro; un punto final no es más que un punto extremo de la imagen.

0	1	1	
0	P	0	P es simple para la 4-adyacencia en negro, pero no para la 8
1	0	0	

0	1	0	
0	P	1	P es simple para la 8-adyacencia en negro pero no para la 4.
0	0	0	

Algoritmo de adelgazamiento: Punto simple

Básicamente, el procedimiento de adelgazamiento consiste en ir borrando sucesivamente los puntos del borde de la imagen, de forma que se preserve la topología de la figura.

Un punto del borde de la imagen se puede eliminar si es simple y no es final.

El borrado de puntos debe seguir un esquema de barridos sucesivos en las direcciones de los 4 puntos cardinales para que la imagen siga teniendo las mismas proporciones que la original y conseguir así que no quede deformada.

El borrado en cada rastreo (punto cardinal) debe hacerse en paralelo, es decir, señalar todos los píxeles "borrables" para eliminarlos todos a la vez.

Repetir hasta que no se produzcan cambios.

Transformada de la distancia:

Definición:

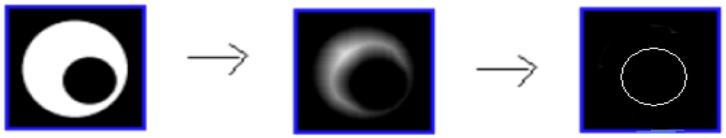
Dado un conjunto *I*, un subconjunto *G* y una función de distancia *d(,),* la transformada de la distancia *DT( )* de *I* respecto a G, asocia a cada punto *p* de *I* el valor:

$$DT(p) = mínimo \{d(p,q), para cada q de G\}$$

Si el conjunto *I* es una imagen binaria y el subconjunto G es el conjunto de píxeles blancos de *I,* la transformada de la distancia de *I* asocia, a cada píxel *p* de la imagen, la mínima distancia entre *p* y cualquier píxel blanco.

La transformada de la distancia depende enteramente de la distancia usada para calcularla.

Segundo algoritmo: mediante la *Transformada de la distancia:*



Transformada de la distancia:

La transformada de la distancia de una imagen *I* es una matriz del mismo tamaño que la imagen original, que almacena los valores de la transformada de la distancia de cada punto *p* en *I*.

Ejemplo de transformada de la distancia al fondo de la imagen usando la distancia dada por la 8-adyacencia:

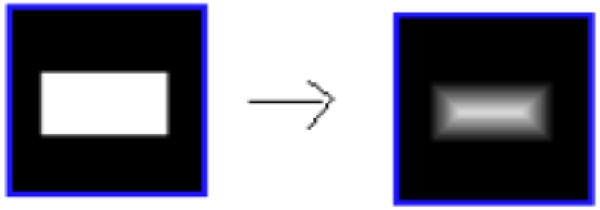
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

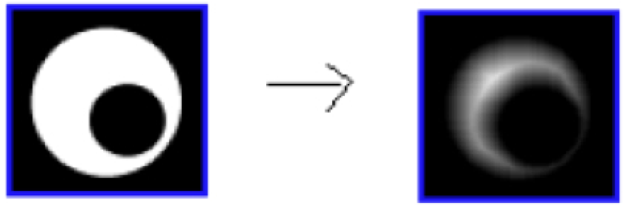
$\Longrightarrow$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

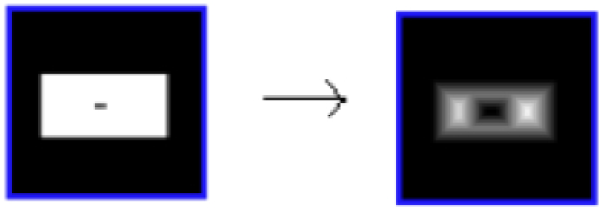
Transformada de la distancia:

Ejemplos:

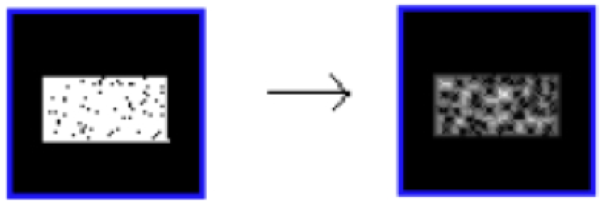




La transformada de la distancia es muy sensible a pequeños cambios en el objeto:

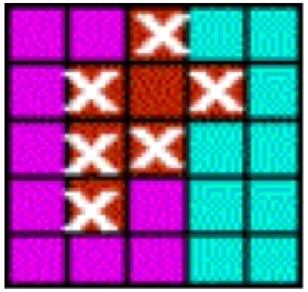


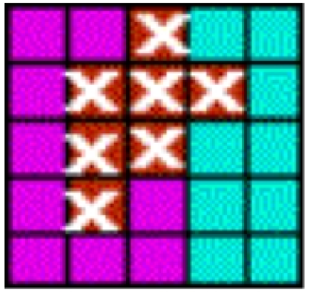
También es muy sensible al ruido:



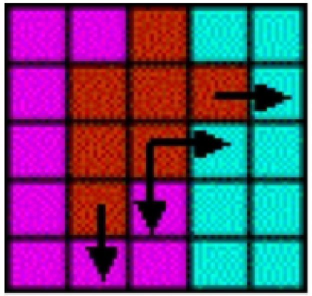
Bordes y Ejes

El **borde de una región** es el conjunto de píxeles de la región que tienen uno o más vecinos fuera de la región





Un **eje** es una propiedad (magnitud y dirección) de un píxel de una región y su vecino de fuera de la región



Distancia

La **distancia** es el ejemplo más significativo de propiedad con un comportamiento algo especial

Dados tres píxeles (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

D es una función distancia o métrica si:

$$D[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \geq 0 \qquad D = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

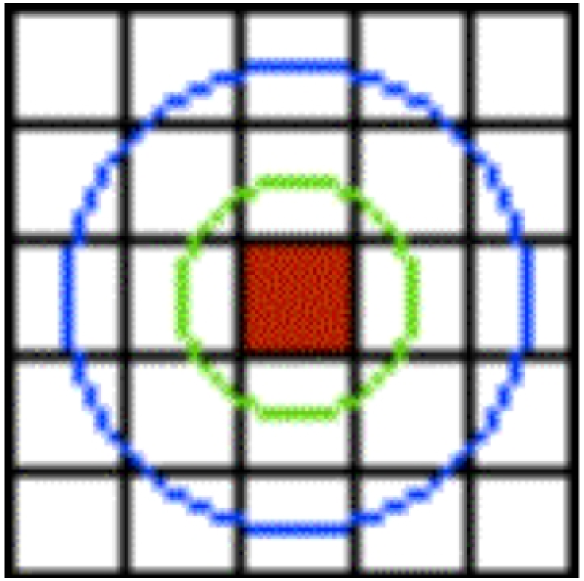
$$D[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = D[(x_2, y_2), (x_1, y_1)]$$

$$D[(x_1, y_1), (x_3, y_3)] \leq D[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] + D[(x_2, y_2), (x_3, y_3)]$$

Distancia Euclídea

$$D_e[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Isosuperficies:

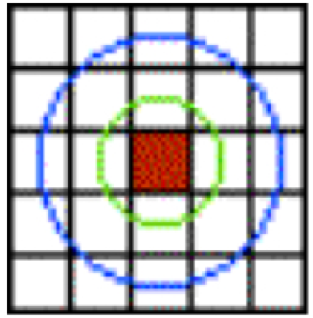


Ventajas:

Conocida en la experiencia diaria

Proviene de la Geometría Clásica

Es intuitiva



Problema:

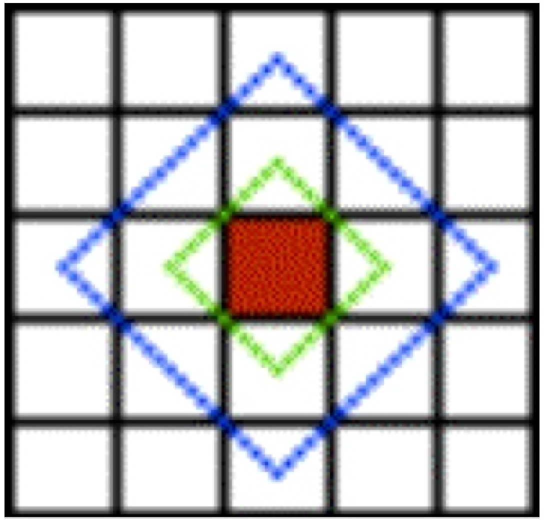
Alto coste computacional

(usa raíz cuadrada y valores no enteros)

Distancia City Block

$$D_4[(x_1, y_1),(x_2, y_2)] = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Isosuperficies:



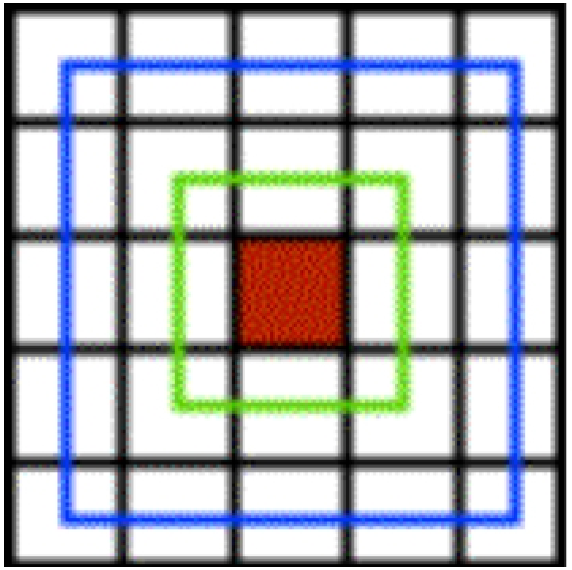
Se calcula como el número mínimo de pasos 4-conectados

Longitud del 4-camino más corto

Distancia Tablero de Ajedrez

$$D_8[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \text{máx}\left(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\right)$$

Isosuperficies:



Se calcula como el número mínimo de pasos 8-conectados

Longitud del 8-camino más corto

Propiedades Estadísticas: Histogramas

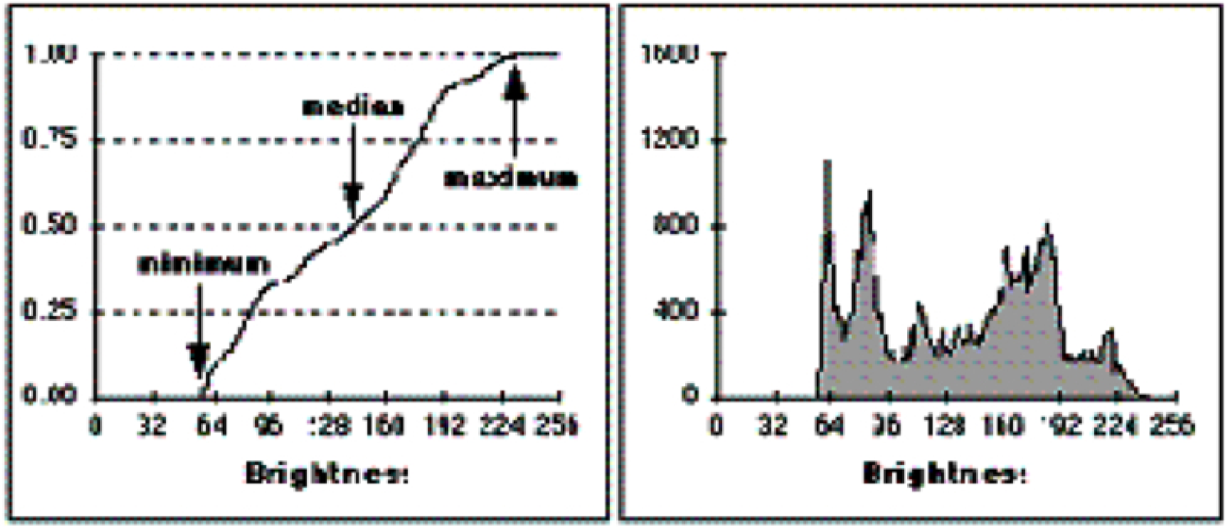
Es una **estimación de la distribución de probabilidad** conjunta de la imagen asumiendo independencia estadística entre los píxeles

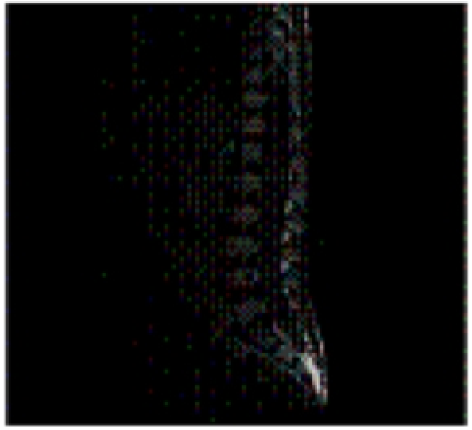
El **Histograma** de una Imagen Digital es una función discreta definida sobre el rango de valores de gris mediante:

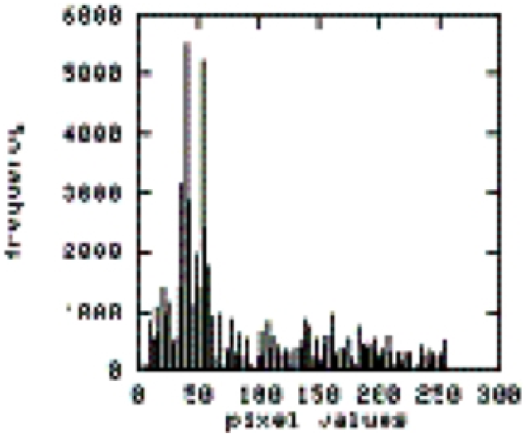
$$H(i) = \frac{\# f(x,y) = i}{\#(x,y)}$$

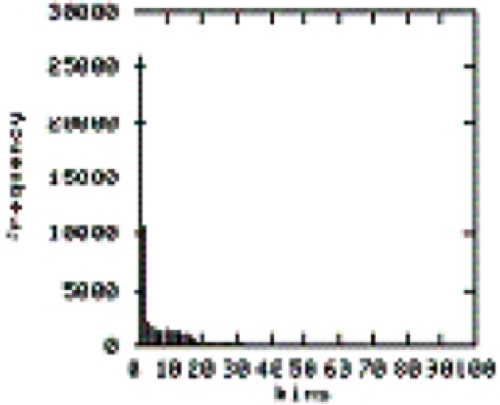
$$H(i, j, \Delta x, \Delta y) = \frac{\# \left[\begin{array}{c|c} f(x_1, y_1) = i & x_2 = x_1 + \Delta x \\ f(x_2, y_2) = j & y_2 = y_1 + \Delta y \end{array} \right]}{\#(x,y)}$$

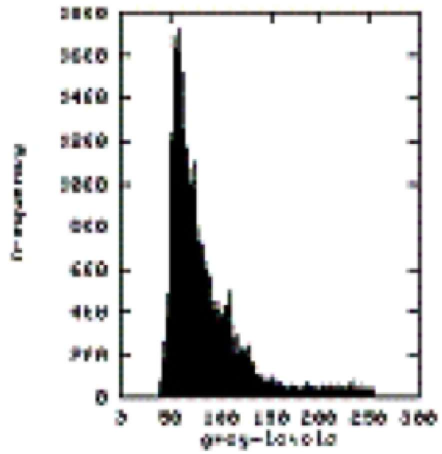
De forma general se puede decir que $H(r_k)$ da una idea del valor de la probabilidad de que aparezca el nivel de gris r_k. La representación de esta función para todos os valores de k, proporciona una descripción global de a apariencia de una imagen.






pixel values
frequency


frequency
bins


frequency
grey-levels