UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RODRIGO DE CASTRO MICHELASSI
NUSP: 13672703

Exercício-Programa 1: Métodos de Convergência

São Paulo

2023

Sumário

1 Introdução

Esse EP tem como objetivo estimular uma parte prática da matéria vista no início do curso, que diz respeito aos métodos de convergências de funções para suas devidas raízes.

Para isso, foram implementados em duas partes, dois métodos diferentes de convergência, sendo o método do ponto fixo e o método de Newton, usados para encontrar raízes reais de uma função e raízes complexas de outra, respectivamente. Além disso, foi gerado imagens a partir do software GNU Plot, que devem demonstrar as bacias de convergência para as funções complexas escolhidas, e destacar a existência de fractais, separados por cores diferentes.

2 Detalhes da Implementação

Antes de partirmos para os resultados obtidos em si, vamos analisar um pouco do processo para compilar o programa, utilizado por aqui.

Para compilarmos a primeira parte, com o método do ponto fixo, utilizamos:

$ gcc -o fixed-point-iteration fixed-point-iteration.c -lm.

Agora, para compilarmos a segunda parte do ep, com o método de Newton, utilizamos:

$ gcc -Wall -pedantic -o newtonMethod newtonMethod.c -lm.

No software GNUPlot, acessado pelo terminal, executamos os seguintes comandos, após utilizarmos o método de Newton, para gerar nossas imagens:

$ gnuplot

$ set terminal png size (1200, 800)

$ set output "imagename.png"

$ plot "output.txt"with image pixel

Com isso em vista, podemos agora executar o programa e gerar as imagens da maneira correta.

3 Parte 1

De início, foi implementado no código o método de ponto fixo para convergir a função:

$$f(x) = \exp(x) - 2x^2.$$

Para entender um pouco sobre essa função, foi utilizado o software Geogebra, com o qual foi possível verificar que essa função possui 3 raízes. Para conseguirmos convergir nosso método do ponto fixo para essas raízes, era necessário encontrar funções g(x) que convergiriam para esses pontos. Fizemos inicialmente:

$$g(x) = \exp(x) - 2x^2 = 0 \Longrightarrow \pm \sqrt{\frac{e^x}{2}}, \text{ e}$$

$$g(x) = \exp(x) - 2x^2 = 0 \Longrightarrow \ln 2x^2.$$

Essas foram as 3 funções g escolhidas. No código, bastou encontrar um intervalo de convergência para elas, e assim poderíamos ter certeza para qual raiz convergiam. Para isso, fizemos $\mod g'(x)$ ¡ 1 e encontramos um intervalo de convergência para cada uma, e, assim, separamos por condicionais, a depender do valor de x0 dado na entrada padrão, qual função g seria chamada para encontrarmos alguma raiz de f.

Vale lembrar que, para calcular os resultados das funções g, usamos a biblioteca matemática de C, chamada math.h, e definimos uma precisão de $9 * 10^{-8}$ casas após a vírgula, apesar de o programa imprimir apenas as 4 primeiras casas após a vírgula das raízes, e o programa parece funcionar corretamente após diversos testes.

4 Parte 2

Para a segunda parte do EP, foi necessário aplicar uma lógica semelhante ao do anterior, para que dessa vez pudéssemos convergir raízes pelo Método de Newton. Os testes iniciais foram feitas com a própria função de exemplo do enunciado:

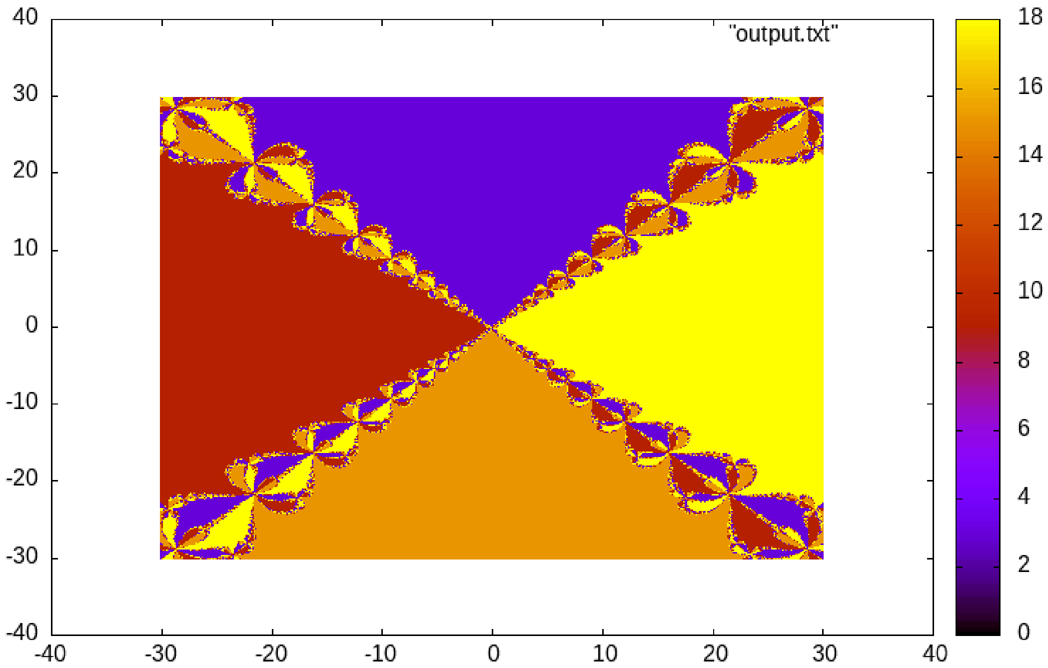
f(x) = $x^4 - 1$, e sua derivada

f'(x) = 4x^3.

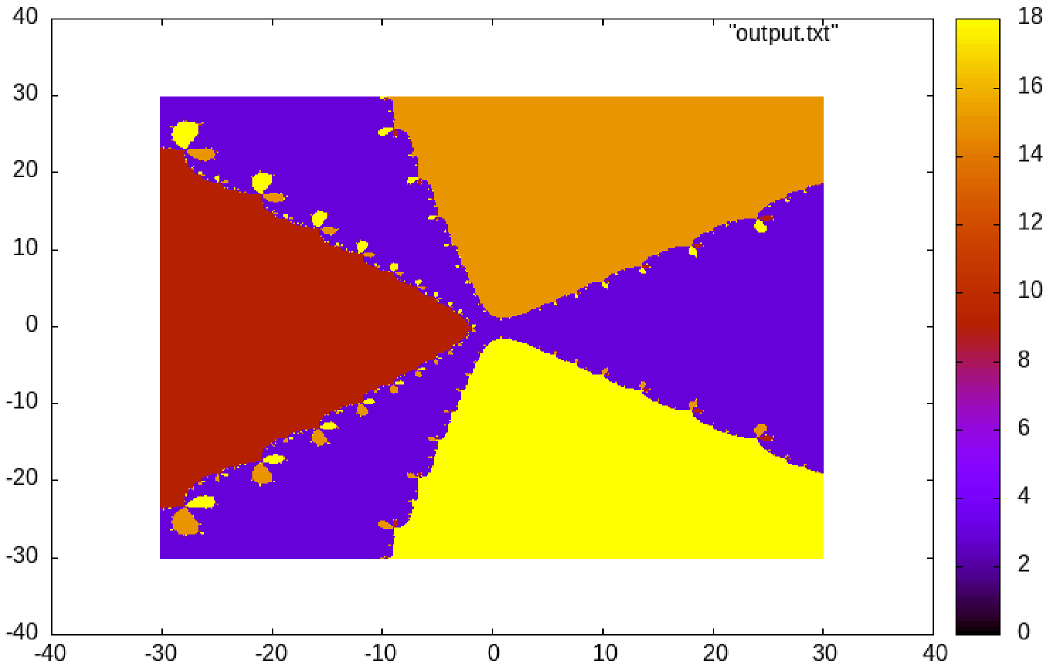
Com isso em vista, podemos aplicar o método de Newton e achar as raízes. Para isso, utilizamos a biblioteca complex.h, de C, na qual existe elementos do tipo Double Complex, que possibilitou o cálculo para números complexos. Tanto a parte real como a parte imaginária desses números é dada pelo usuário pela entrada padrão e, a partir da solução iterativa do método de Newton, obtemos as raízes reais e complexas da função, para x0 iniciais.

Além disso, nessa parte do EP construímos uma função $newton_basins$, que, a partir de 3 parâmetros, consegue encontrar as bacias de convergência da função, isso é, todo o intervalo de convergência dessa função para raízes específicas. Essa função se baseia em uma aplicação do método de Newton para obtermos o intervalo de convergência e os pontos são salvos em uma matriz, que, ao fim, é impressa em um arquivo .txt, para obtermos a imagem final das bacias de convergência e observarmos os fractais utilizando o GNUPlot.

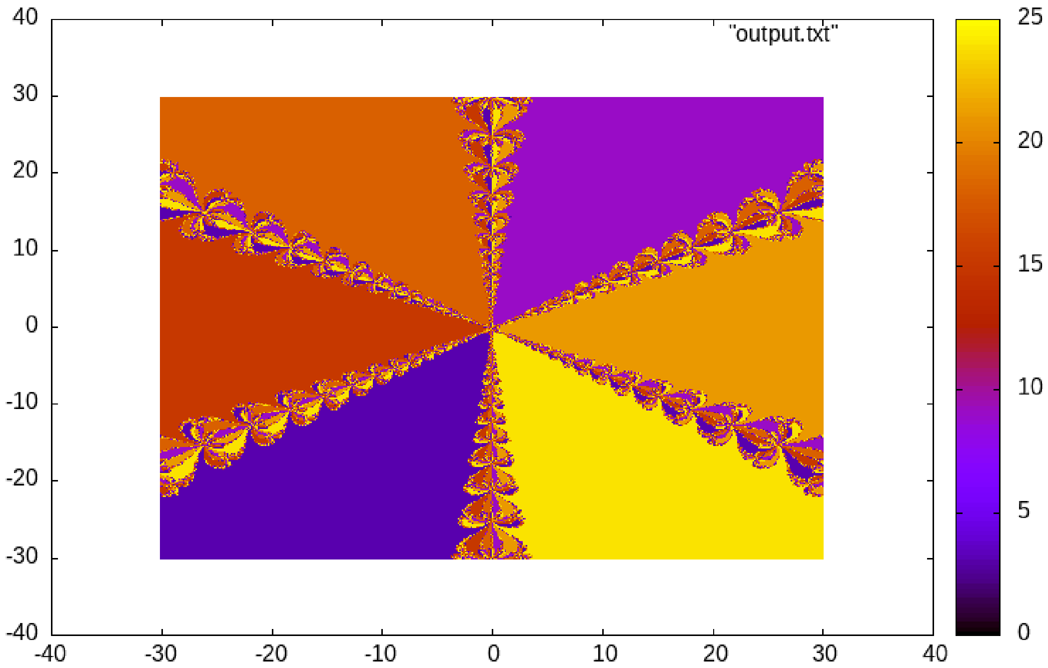
Foram utilizados para teste 5 diferentes polinômios, e os resultados podem ser observados a seguir:



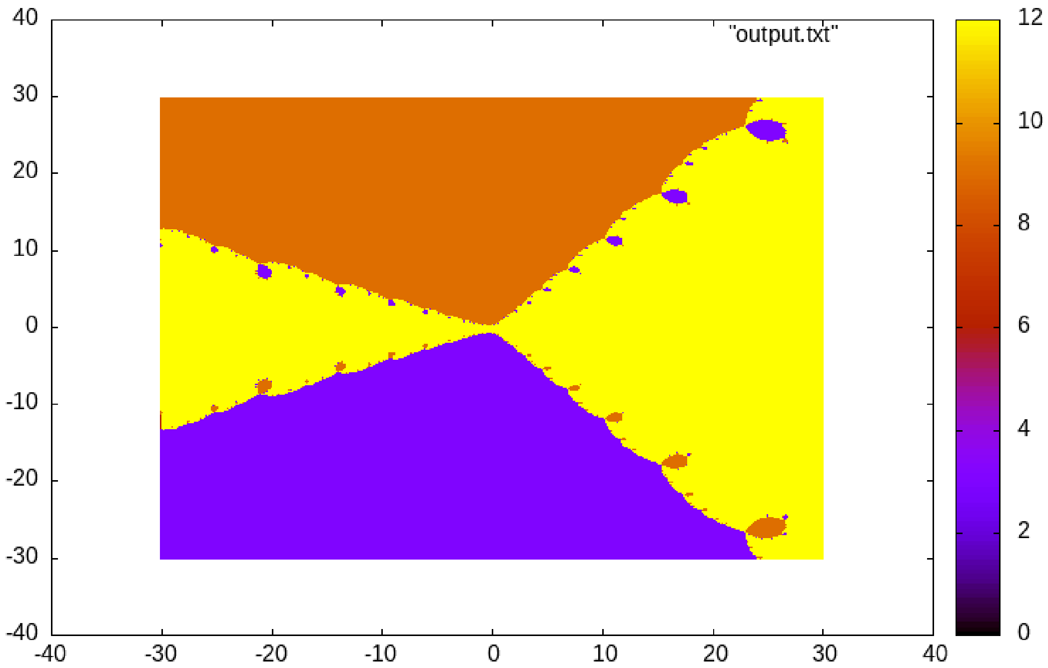
f(x) $= x^4 - 1$



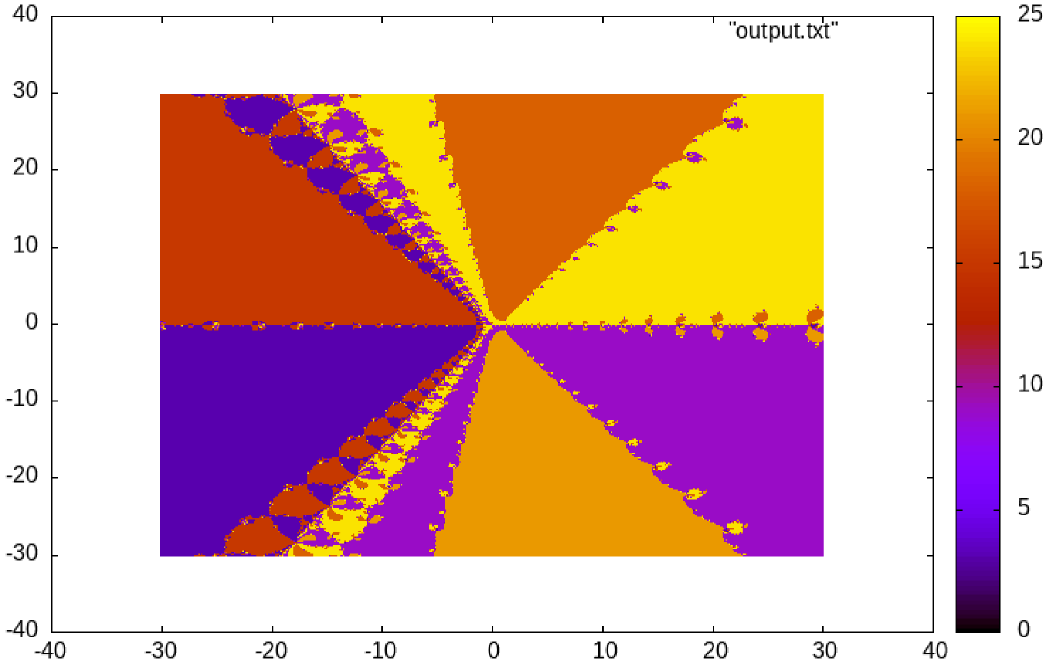
f(x) $= x^4 - 2x^2 + 16x - 15$



f(x) $= x^6 - 1$



f(x) $= 2x^3 + x^2 + 2x - 1$



$$f(x) = 2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39$$

Com isso, é possível ver as bacias de convergência dessas funções com o método de Newton, além de observar alguns traços interessantes que são chamados de Fractais. É interessante perceber em relação aos fractais que são pontos totalmente fora do maior escopo de sua própria cor, mas que representam pontos que, mesmo distantes, também convergem para a mesma raiz, e a quantidade de Fractais tende a aumentar conforme o grau da função base também aumenta.

5 Considerações Finais

Nesse EP tivemos uma oportunidade de colocar em prática e ver como realmente funciona os métodos de convergência de funções que vimos nas aulas, que até então pareciam relativamente abstratos. Além disso, pudemos explorar o software GNUPlot, que é muito interessante caso queiramos obter imagens em um formato .png, como as mostradas no capítulo acima. Todavia o mais interessante foi poder trabalhar e ver as bacias de convergência, um conceito pouco trabalhado anteriormente em sala e que funciona de maneira bastante complexa, todavia gera imagens interessantes e curiosas com a observação clara dos fractais, o que só é possível por conta de softwares e ferramentas computacionais.